

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                         |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <br>Universidad<br><b>Carlos III</b><br>de Madrid                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID</b><br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br><br>Curso 2025-2026<br><b>MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</b> | E |
| <p align="center"><b><u>INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</u></b></p> <p>El examen consta de <b>4 preguntas</b>: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.</p> <p><b>CALIFICACIÓN</b>: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.</p> <p><b>DURACIÓN</b>: 90 minutos.</p> |                                                                                                                                                                                         |   |

**PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.**

Se está realizando un estudio sobre las ventas de mochilas de una marca deportiva en los pequeños establecimientos de una gran ciudad. Esta marca tiene dos tipos de mochilas, unas realizadas con material impermeable, que están indicadas preferentemente para deportes acuáticos, y otras fabricadas en lona no impermeable.

**1.a)** (1,3 puntos) Se supone que el precio de las mochilas sigue una distribución normal con desviación típica de 25 euros. Si se ha seleccionado una muestra de 50 comercios y se ha obtenido que el precio medio de venta de estas mochilas es de 43,55 euros, obtenga un intervalo de confianza al 97, 8% para la media de la distribución.

**1.b)** (1,2 puntos) Si se desea saber cuál es la proporción de clientes que prefieren las mochilas realizadas con material impermeable, ¿cuál es el número de comercios necesario para que dicha proporción tenga un error de muestreo inferior al 5%? Utilice un nivel de confianza del 95%. Considere el caso más conservador en el que  $p = q = 0,5$ .

**PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.**

**2.1** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2.1.a)** (1 punto) Calcule, si existe, la matriz  $D = (AB + I)^{-1}$ , donde  $M^{-1}$  significa la matriz inversa de  $M$  e  $I$  es la matriz identidad.

**2.1.b)** (1,5 puntos) Obtenga, si existe, el valor de  $k$  para que se verifique  $AA^t - kB^tB = C$ , donde  $M^t$  representa la matriz transpuesta de la matriz  $M$ .

**2.2** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ .

$$\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

**2.2.a)** (1,5 puntos) Discuta la solución del sistema para los diferentes valores de  $a$ .

**2.2.b)** (1 punto) Resuelva el sistema para el valor  $a = 3$ .

**PREGUNTA 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 3.1 o bien 3.2.**

**3.1** Se está realizando un estudio sobre la utilización de IA por parte de los estudiantes universitarios en la elaboración de trabajos académicos. En dicho estudio participan un 30% de estudiantes de Humanidades, un 45% de estudiantes de Ciencias y un 25% de estudiantes de Derecho. Además, por estudios anteriores, se estima que, en Humanidades el 15% de los estudiantes utilizan la IA, en Ciencias el 5% y en Derecho el 25%.

**3.1.a)** (0,9 puntos) Obtenga la probabilidad de que, elegido un trabajo al azar, haya sido realizado con la IA.

**3.1.b)** (0,8 puntos) Si se selecciona un trabajo que no ha sido realizado con la IA, obtenga la probabilidad de que pertenezca a un estudiante de Derecho.

**3.1.c)** (0,8 puntos) En la Facultad de Derecho, el detector de IA utilizado para este estudio tiene un 90% de probabilidad de detectar los trabajos que realmente fueron realizados con IA, mientras que en un 8% de las ocasiones clasifica los trabajos como realizados con la IA cuando realmente no se han realizado con dicha herramienta. Si al pasar un trabajo de un estudiante de Derecho por el detector este señala que se ha realizado con la IA, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente se haya realizado con la IA?

**3.2** Se consideran dos sucesos A y B tales que

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \quad P(A/B) = 0,4$$

Resuelva las siguientes preguntas:

**3.2.a)** (0,5 puntos)  $P(B)$

**3.2.b)** (0,5 puntos)  $P(A \cup B)$

**3.2.c)** (0,5 puntos)  $P(A)$

**3.2.d)** (0,5 puntos)  $P(\bar{A}/\bar{B})$

**3.2.e)** (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos A y B? Justifique la respuesta

Nota:  $\bar{S}$  es el suceso complementario del suceso S.

**PREGUNTA 4 (2,5 puntos)** Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 4.1 o bien 4.2.

**4.1** Considere la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x+2} & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 2}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

**4.1.a)** (0,5 puntos) Determine razonadamente el dominio de la función.

**4.1.b)** (1 punto) Estudie la continuidad de la función en  $x = 0$ .

**4.1.c)** (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Existe algún extremo de esta función?

**4.2** Considere la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

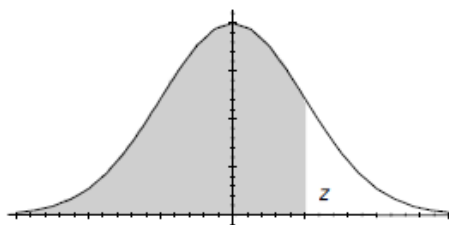
**4.2.a)** (1 punto) Obtenga los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta tangente a la función en el punto  $(1, 2)$  sea horizontal.

**4.2.b)** (1,5 puntos) Si  $a = -10$  y  $b = 0$ , calcule el área delimitada por la función, el eje horizontal y las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$ .

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

### ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de  $z$ .



| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    | ,09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

## SOLUCIONES

### PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

Se está realizando un estudio sobre las ventas de mochilas de una marca deportiva en los pequeños establecimientos de una gran ciudad. Esta marca tiene dos tipos de mochilas, unas realizadas con material impermeable, que están indicadas preferentemente para deportes acuáticos, y otras fabricadas en lona no impermeable.

**1.a)** (1,3 puntos) Se supone que el precio de las mochilas sigue una distribución normal con desviación típica de 25 euros. Si se ha seleccionado una muestra de 50 comercios y se ha obtenido que el precio medio de venta de estas mochilas es de 43,55 euros, obtenga un intervalo de confianza al 97,8% para la media de la distribución.

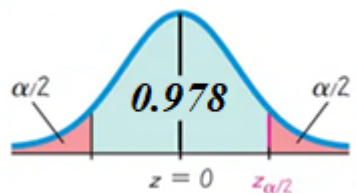
**1.b)** (1,2 puntos) Si se desea saber cuál es la proporción de clientes que prefieren las mochilas realizadas con material impermeable, ¿cuál es el número de comercios necesario para que dicha proporción tenga un error de muestreo inferior al 5%? Utilice un nivel de confianza del 95%. Considere el caso más conservador en el que  $p = q = 0,5$ .

**1.a)**  $X$  = Precio de las mochilas en un pequeño establecimiento de una ciudad.  $X = N(\mu, 25)$ .

El tamaño de la muestra es  $n = 50$ . La media muestral del precio es de  $\bar{x} = 43.55$  euros.

Determinamos el valor de  $z_{\alpha/2}$  para un nivel de confianza del 97.8%.

$$1 - \alpha = 0.978 \Rightarrow \alpha = 0.022 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.011 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.989 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.29$$



| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    | ,09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |

Obtenemos el valor del error.

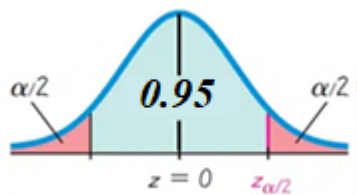
$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.29 \cdot \frac{25}{\sqrt{50}} \approx 8.0964$$

El intervalo de confianza para el precio de las mochilas en los pequeños establecimientos de la ciudad es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (43.55 - 8.0964, 43.55 + 8.0964) = (35.4536, 51.6464)$$

1.b) Determinamos el valor de  $z_{\alpha/2}$  para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 |

El error máximo que se quiere cometer es 0.05. Utilizamos la fórmula del error y despejamos  $n$ .

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow 0.05 = \frac{1.96 \cdot 0.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \cdot 0.05 = 0.98 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.98}{0.05} = 19.6 \Rightarrow \boxed{n = 19.6^2 = 384.16}$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de la muestra necesario es de 385 establecimientos.

**2.1** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2.1.a)** (1 punto) Calcule, si existe, la matriz  $D = (AB + I)^{-1}$ , donde  $M^{-1}$  significa la matriz inversa de  $M$  e  $I$  es la matriz identidad.

**2.1.b)** (1,5 puntos) Obtenga, si existe, el valor de  $k$  para que se verifique  $AA^t - kB^tB = C$ , donde  $M^t$  representa la matriz transpuesta de la matriz  $M$ .

**2.1.a)** Calculamos la expresión de  $AB + I$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 3+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$

$$AB + I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz inversa de  $AB + I$ .

$$|AB + I| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2 \neq 0$$

$$(AB + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(AB + I)^t}{|AB + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

La matriz  $D$  existe y tiene la expresión  $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$ .

**2.1.b)** Resolvemos la igualdad planteada.

$$AA^t - kB^tB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+9+1 & 2+0+1 \\ 2+0+1 & 4+0+1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1+1+0 & 0+1+0 \\ 0+1+0 & 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11-2k & 3-k \\ 3-k & 5-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 - 2k = 5 \\ 3 - k = 0 \\ 5 - 2k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k = -6 \\ 3 = k \\ -2k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

El valor buscado es  $k = 3$ .

**2.2** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ .

$$\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

**2.2.a)** (1,5 puntos) Discuta la solución del sistema para los diferentes valores de  $a$ .

**2.2.b)** (1 punto) Resuelva el sistema para el valor  $a = 3$ .

**2.2.a)** Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + a^2 + 0 - 0 - 4a + 9a = a^2 + 5a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-5+7}{2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-5-7}{2} = \boxed{-6=a} \end{cases}$$

**CASO 1**  $a \neq 1$  y  $a \neq -6$

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.**  $a = 1$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -3 \quad 9 \quad -6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 10 \quad -6 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -2 \quad 6 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -3 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 10 \quad -6 \quad -2 \\ 0 \quad -10 \quad 6 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 5 \quad -3 \quad -1 \\ \underbrace{1 \quad -3 \quad 2 \quad 1}_A \end{pmatrix}$$

La primera fila es toda nula. El rango de A y el de A/B es 2, siendo iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

### CASO 3. $a = -6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 3 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \\ -3 \quad 9 \quad -6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -6 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad -1 \quad -6 \quad 1 \\ -2 \quad 6 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -10 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 15 \quad -30 \quad -10 \\ 0 \quad -15 \quad 30 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} & -7 \\ \hline 0 & 5 & -10 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

**Conclusión:** Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -6$  el sistema es compatible determinado (una única solución), si  $a = 1$  el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si  $a = -6$  el sistema es incompatible (sin solución).

**2.2.b)** Para  $a = 3$  estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema para este valor.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x = 3y - 2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3y - 2z + 1) + 3y = 1 \\ 2(3y - 2z + 1) - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y - 6z + 3 + 3y = 1 \\ 6y - 4z + 2 - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12y - 6z = -2 \\ 5y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y - 3z = -1 \\ 5y + 1 = z \end{cases} \Rightarrow 6y - 3(5y + 1) = -1 \Rightarrow 6y - 15y - 3 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y = 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-2}{9}} \Rightarrow \boxed{z = 1 + 5 \cdot \frac{-2}{9} = \frac{-1}{9}} \Rightarrow \boxed{x = 3 \cdot \frac{-2}{9} - 2 \cdot \frac{-1}{9} + 1 = \frac{5}{9}}$$

Para  $a = 3$  la solución del sistema es  $x = \frac{5}{9}$ ;  $y = \frac{-2}{9}$ ;  $z = \frac{-1}{9}$ .

**3.1** Se está realizando un estudio sobre la utilización de IA por parte de los estudiantes universitarios en la elaboración de trabajos académicos. En dicho estudio participan un 30% de estudiantes de Humanidades, un 45% de estudiantes de Ciencias y un 25% de estudiantes de Derecho. Además, por estudios anteriores, se estima que, en Humanidades el 15% de los estudiantes utilizan la IA, en Ciencias el 5% y en Derecho el 25%.

**3.1.a)** (0,9 puntos) Obtenga la probabilidad de que, elegido un trabajo al azar, haya sido realizado con la IA.

**3.1.b)** (0,8 puntos) Si se selecciona un trabajo que no ha sido realizado con la IA, obtenga la probabilidad de que pertenezca a un estudiante de Derecho.

**3.1.c)** (0,8 puntos) En la Facultad de Derecho, el detector de IA utilizado para este estudio tiene un 90% de probabilidad de detectar los trabajos que realmente fueron realizados con IA, mientras que en un 8% de las ocasiones clasifica los trabajos como realizados con la IA cuando realmente no se han realizado con dicha herramienta. Si al pasar un trabajo de un estudiante de Derecho por el detector este señala que se ha realizado con la IA, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente se haya realizado con la IA?

Llamamos H al suceso “el estudiante es de Humanidades”, C a “el estudiante es de Ciencias”, D a “el estudiante es de derecho” e IA a “el estudiante utiliza la IA para realizar el trabajo”.

Las probabilidades que deducimos de los datos proporcionados en el problema son:

$$P(H) = 0.30; P(C) = 0.45; P(D) = 0.25; P(IA/H) = 0.15; P(IA/C) = 0.05 \text{ y } P(IA/D) = 0.25$$

**3.1.a)** Debemos calcular  $P(IA)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(IA) &= P(IA \cap H) + P(IA \cap C) + P(IA \cap D) = \\ &= P(H)P(IA/H) + P(C)P(IA/C) + P(D)P(IA/D) = \\ &= 0.30 \cdot 0.15 + 0.45 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.25 = \boxed{0.13} \end{aligned}$$

La probabilidad de que, elegido un trabajo al azar, haya sido realizado con la ayuda de la IA es de 0.13.

**3.1.b)** Nos piden calcular  $P(D/\bar{IA})$ . Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(D/\bar{IA}) &= \frac{P(D \cap \bar{IA})}{P(\bar{IA})} = \frac{P(D)P(\bar{IA}/D)}{1 - P(IA)} = \frac{P(D)[1 - P(IA/D)]}{1 - P(IA)} = \\ &= \frac{0.25[1 - 0.25]}{1 - 0.13} = \boxed{\frac{25}{116} \approx 0.2155} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un trabajo elegido al azar que no se ha realizado con la ayuda de la IA pertenezca a un estudiante de Derecho vale  $\frac{25}{116} \approx 0.2155$ .

**3.1.c)** Llamamos T+ a “el detector de IA dice que el trabajo ha sido realizado con la ayuda de la IA” y T- a “el detector de IA dice que el trabajo no ha sido realizado con la ayuda de la IA”. Reducimos la población de estudio solo a los estudiantes de derecho. Llamamos  $IA_D$  al suceso “el trabajo de un estudiante de derecho está realizado con la ayuda de la IA”

Nos dicen que  $P(T+/IA_D) = 0.90$  y  $P(T+/\overline{IA_D}) = 0.08$ .

Nos piden calcular  $P(IA_D / T+)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(IA_D / T+) = \frac{P(IA_D \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(IA_D)P(T+/IA_D)}{P(IA_D)P(T+/IA_D) + P(\overline{IA_D})P(T+/\overline{IA_D})} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 0.9}{0.25 \cdot 0.9 + (1 - 0.25) \cdot 0.08} = \boxed{\frac{15}{19} \approx 0.7895}$$

La probabilidad de que un trabajo de un estudiante de derecho que el detector dice que se ha realizado con la ayuda de la IA efectivamente se haya realizado con la IA vale  $\frac{15}{19} \approx 0.7895$ .

**3.2** Se consideran dos sucesos A y B tales que

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \quad P(A/B) = 0,4$$

Resuelva las siguientes preguntas:

**3.2.a)** (0,5 puntos)  $P(B)$

**3.2.b)** (0,5 puntos)  $P(A \cup B)$

**3.2.c)** (0,5 puntos)  $P(A)$

**3.2.d)** (0,5 puntos)  $P(\bar{A}/\bar{B})$

**3.2.e)** (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos A y B? Justifique la respuesta

Nota:  $\bar{S}$  es el suceso complementario del suceso S.

**3.2.a)** Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/B) = 0,4 \\ P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array} \right\} \Rightarrow 0,4 = \frac{0,1}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25}$$

**3.2.b)** Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,7 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0,3}$$

**3.2.c)** Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0,3 \\ P(B) = 0,25 \\ P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0,3 = P(A) + 0,25 - 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3 - 0,25 + 0,1 = P(A) \Rightarrow \boxed{P(A) = 0,15}$$

**3.2.d)** Calculamos la probabilidad pedida usando el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0,7}{1 - 0,25} = \boxed{\frac{14}{15} \approx 0,9333}$$

**3.2.e)** Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A)P(B) = 0,15 \cdot 0,25 = 0,0375 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,1 \neq 0,0375 = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

**4.1** Considere la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x+2} & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$$

**4.1.a)** (0,5 puntos) Determine razonadamente el dominio de la función.

**4.1.b)** (1 punto) Estudie la continuidad de la función en  $x = 0$ .

**4.1.c)** (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Existe algún extremo de esta función?

**4.1.a)** La función en el intervalo  $(-\infty, 0)$  tiene la expresión  $f(x) = e^{-3x+2}$  que es una función exponencial y que no plantea ningún problema de definición.

La función en el intervalo  $[0, +\infty)$  tiene la expresión  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1}$  que es una función racional cuyo denominador se anula para  $x = -1$  que no pertenece al intervalo  $[0, +\infty)$ .

El dominio de la función son todos los números reales.

**4.1.b)** Estudiamos la continuidad de la función en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 2}{0 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-3x+2} = e^{-3 \cdot 0 + 2} = e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq e^2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

La función no es continua en  $x = 0$ .

**4.1.c)** Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

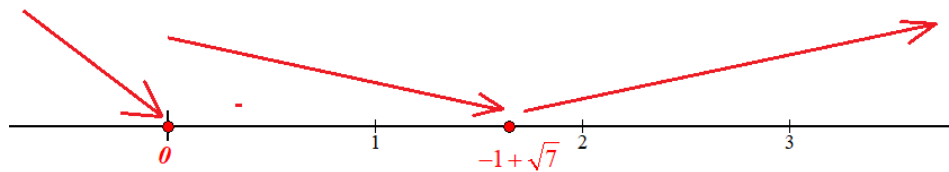
$$f'(x) = \begin{cases} -3e^{-3x+2} & x < 0 \\ \frac{(2x-4)(x+1) - 1 \cdot (x^2 - 4x + 2)}{(x+1)^2} = \\ = \frac{2x^2 + 2x - 4 - x^2 + 4x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 6}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3e^{-3x+2} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{x^2 + 2x - 6}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = \begin{cases} \frac{-2 - \sqrt{28}}{2} \notin (0, +\infty) \\ \frac{-2 + \sqrt{28}}{2} = \boxed{-1 + \sqrt{7} = x} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de  $x = 0$  y  $x = -1 + \sqrt{7} \approx 1.64$ .

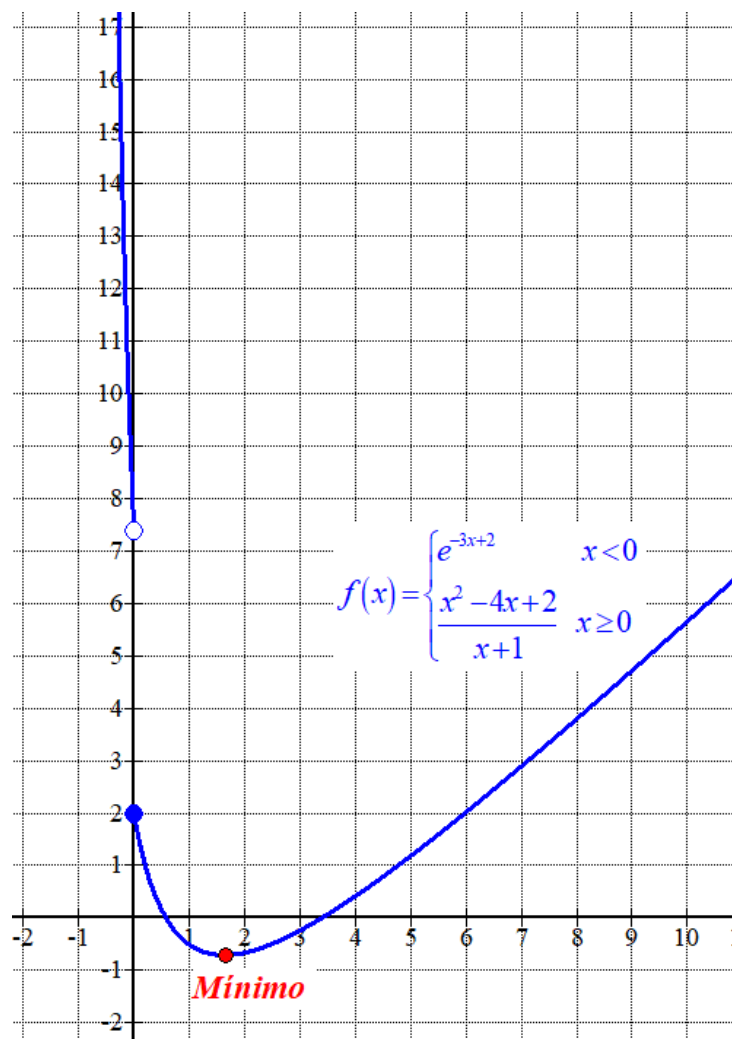
- La derivada de la función en el intervalo  $(-\infty, 0)$  es  $f'(x) = -3e^{-3x+2}$  que es siempre negativa. La función decrece en el intervalo  $(-\infty, 0)$ .
- En el intervalo  $(0, -1 + \sqrt{7})$  tomamos  $x = 1$  y la derivada vale  $f'(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 6}{(1+1)^2} = \frac{-3}{4} < 0$ .  
La función decrece en el intervalo  $(0, -1 + \sqrt{7})$ .
- En el intervalo  $(-1 + \sqrt{7}, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale  $f'(2) = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 6}{(2+1)^2} = \frac{2}{9} > 0$ . La función crece en el intervalo  $(-1 + \sqrt{7}, +\infty)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en  $(-\infty, 0) \cup (0, -1 + \sqrt{7})$  y crece en  $(-1 + \sqrt{7}, +\infty)$ .

La función presenta un mínimo relativo en  $x = -1 + \sqrt{7}$ .



**4.2** Considere la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

**4.2.a)** (1 punto) Obtenga los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta tangente a la función en el punto  $(1, 2)$  sea horizontal.

**4.2.b)** (1,5 puntos) Si  $a = -10$  y  $b = 0$ , calcule el área delimitada por la función, el eje horizontal y las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$ .

**4.2.a)** Para que la recta tangente en  $x = 1$  sea horizontal su pendiente debe ser  $0 \rightarrow f'(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 6x + a \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow 3 + 6 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -9}$$

Para  $a = -9$  la función queda  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + b$ . La función pasa por el punto  $(1, 2)$  por lo que debe cumplirse que  $f(1) = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + b \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + b \Rightarrow 2 = 1 + 3 - 9 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 1 - 3 + 9 = b \Rightarrow \boxed{b = 7}$$

Los valores buscados son  $a = -9$  y  $b = 7$ .

**4.2.b)** Si  $a = -10$  y  $b = 0$  la función queda  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ .

Obtenemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje horizontal.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x - 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3+7}{2} = \boxed{2 = x} \\ \frac{-3-7}{2} = \boxed{-5 = x} \end{cases} \end{array} \right.$$

La gráfica de la función corta el eje horizontal en  $x = 2$  que pertenece al intervalo  $(1, 3)$ .

El área delimitada por la función, el eje horizontal y las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$  la calculamos como la suma del valor absoluto de la integral definida de 1 a 2 de la función y el valor absoluto de la integral definida de 2 a 3 de la función.

Calculamos las dos integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 + 3x^2 - 10x dx &= \left[ \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2 \right]_1^2 = \left[ \frac{2^4}{4} + 2^3 - 5 \cdot 2^2 \right] - \left[ \frac{1^4}{4} + 1^3 - 5 \cdot 1^2 \right] = \\ &= 4 + 8 - 20 - \frac{1}{4} - 1 + 5 = -4.25 \end{aligned}$$

$$\int_2^3 x^3 + 3x^2 - 10x dx = \left[ \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2 \right]_2^3 = \left[ \frac{3^4}{4} + 3^3 - 5 \cdot 3^2 \right] - \left[ \frac{2^4}{4} + 2^3 - 5 \cdot 2^2 \right] =$$

$$= \frac{81}{4} + 27 - 45 - 4 - 8 + 20 = 10.25$$

El área es la suma del valor absoluto de los dos valores obtenidos:  $|-4.25| + |10.25| = 14.5$  unidades cuadradas.

