

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 preguntas**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.

CALIFICACIÓN: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

Una empresa textil fabrica dos tipos de pantalones: premium y básicos. La dirección necesita optimizar la producción para maximizar los beneficios del próximo mes. Cada pantalón premium requiere 1, 5 kg de algodón y 40 minutos de mano de obra, generando un beneficio de 25 euros. Cada pantalón básico requiere 1 kg de algodón y 10 minutos de mano de obra para generar un beneficio de 10 euros. La producción debe someterse a las siguientes restricciones:

- Disponibilidad de algodón: 600 kg.
- Tiempo de trabajo disponible: 12000 minutos.
- Por contrato con un cliente mayorista, deben producir al menos 100 pantalones premium.
- La demanda de pantalones básicos es limitada: no más de 360 unidades.

1.a) (1,2 puntos) Defina las variables de decisión y plantee la función objetivo que representa el beneficio total. Plantee también todas las restricciones del problema. Represente gráficamente la región factible.

1.b) (1,3 puntos) Determine cuántos pantalones de cada tipo debe producir la empresa para maximizar el beneficio. ¿Cuál es el beneficio máximo?

PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.

2.1 Tenemos una baraja de dorso azul que contiene 60 cartas de diamantes y 40 cartas de tréboles y otra baraja de dorso verde que contiene 30 cartas de diamantes y 70 cartas de tréboles. Además, tenemos una bolsa con 2 bolas azules y 4 bolas verdes.

Se saca una bola de la bolsa. Si la bola es azul, se saca una carta al azar de la baraja azul. Si la bola es verde, se saca una carta al azar de la baraja de dorso verde.

2.1.a) (1,5 puntos) Calcule la probabilidad de que se saque una carta de diamantes.

2.1.b) (1 punto) Si la carta extraída es de tréboles, ¿cuál es la probabilidad de que su dorso sea verde?

2.2 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, siendo $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}.$$

Calcule, razonadamente e indicando qué resultados matemáticos se usan, las probabilidades pedidas a continuación:

2.2.a) (0,5 puntos) $P(A \cup B)$

2.2.b) (0,5 puntos) $P(A \cap B)$

2.2.c) (0,5 puntos) $P(\bar{B} / A)$

2.2.d) (0,5 puntos) $P(\bar{A} / A \cap B)$

2.2.e) (0,5 puntos) $P(\bar{A} / \bar{B})$

Nota: $\bar{A}$ denota al suceso contrario (o complementario) del suceso A.

PREGUNTA 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 3.1 o bien 3.2.

3.1 Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.1.a) (1 punto) Calcule el área limitada por la función dada y el eje de abscisas en el intervalo $[-1, 1]$.

3.1.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función.

3.1.c) (1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(1, \infty)$.

3.2 Dada la función $g(x) = x^3 + bx^2 - 9x + d$ (b y d son números reales).

3.2.a) (1 punto) Calcule qué valores deben tomar b y d para que $g(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 3$ y la gráfica de $g(x)$ pase por el punto $(2, 10)$.

3.2.b) (1,5 puntos) Para $b = 3$ y $d = 0$, calcule los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de la función en el intervalo cerrado $[-4, 2]$.

PREGUNTA 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 4.1 o bien 4.2.

4.1 Una cadena de gimnasios quiere estudiar el perfil de sus clientes. Se asume que la edad de sus clientes sigue una distribución normal con media $\mu = 35$ años y desviación típica $\sigma = 12$ años.

4.1.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar tenga entre 30 y 45 años, ambos inclusive.

4.1.b) (1,5 puntos) Se ha tomado una muestra aleatoria de 150 clientes y se ha observado que, para dicha muestra, la edad media es de 36,5 años. Calcule el intervalo de confianza al 92% para la edad media de los clientes del gimnasio. Si el nivel de confianza para la edad media de los clientes del gimnasio fuera del 98% justifique si la amplitud del intervalo sería mayor o menor.

4.2 El peso de los paquetes de pipas de girasol que produce una determinada empresa sigue una distribución normal con media $\mu = 250$ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

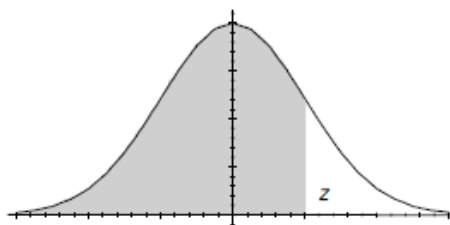
4.2.a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de paquetes tienen un peso comprendido entre 240 y 255 gramos?

4.2.b) (1,5 puntos) La empresa quiere establecer un control de calidad rechazando aquellos paquetes cuyo peso se desvíe excesivamente del peso medio. Si decide rechazar el 5% de los paquetes (el 2, 5% de los más ligeros y el 2, 5% de los más pesados), ¿entre qué valores debe estar el peso de un paquete para ser aceptado?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

Una empresa textil fabrica dos tipos de pantalones: premium y básicos. La dirección necesita optimizar la producción para maximizar los beneficios del próximo mes. Cada pantalón premium requiere 1,5 kg de algodón y 40 minutos de mano de obra, generando un beneficio de 25 euros. Cada pantalón básico requiere 1 kg de algodón y 10 minutos de mano de obra para generar un beneficio de 10 euros. La producción debe someterse a las siguientes restricciones:

- Disponibilidad de algodón: 600 kg.
- Tiempo de trabajo disponible: 12000 minutos.
- Por contrato con un cliente mayorista, deben producir al menos 100 pantalones premium.
- La demanda de pantalones básicos es limitada: no más de 360 unidades.

1.a) (1,2 puntos) Defina las variables de decisión y plantee la función objetivo que representa el beneficio total. Plantee también todas las restricciones del problema. Represente gráficamente la región factible.

1.b) (1,3 puntos) Determine cuántos pantalones de cada tipo debe producir la empresa para maximizar el beneficio. ¿Cuál es el beneficio máximo?

1.a) Llamamos x = número de pantalones premium que se fabrican e y = número de pantalones básicos que se fabrican.

Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Kgs de algodón	Horas de mano de obra	Beneficio
Nº pantalones premium (x)	$1.5x$	$\frac{2}{3}x$	$25x$
Nº pantalones básicos (y)	y	$\frac{1}{6}y$	$10y$
TOTALES	$1.5x + y$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y$	$25x + 10y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 25x + 10y$ sometidos a las restricciones siguientes:

Disponibilidad de algodón: 600 kg $\rightarrow 1.5x + y \leq 600$

Tiempo de trabajo disponible: 12000 minutos, que son 200 horas $\rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \leq 200$

Por contrato con un cliente mayorista, deben producir al menos 100 pantalones premium $\rightarrow x \geq 100$.

La demanda de pantalones básicos es limitada: no más de 360 unidades $\rightarrow y \leq 360$

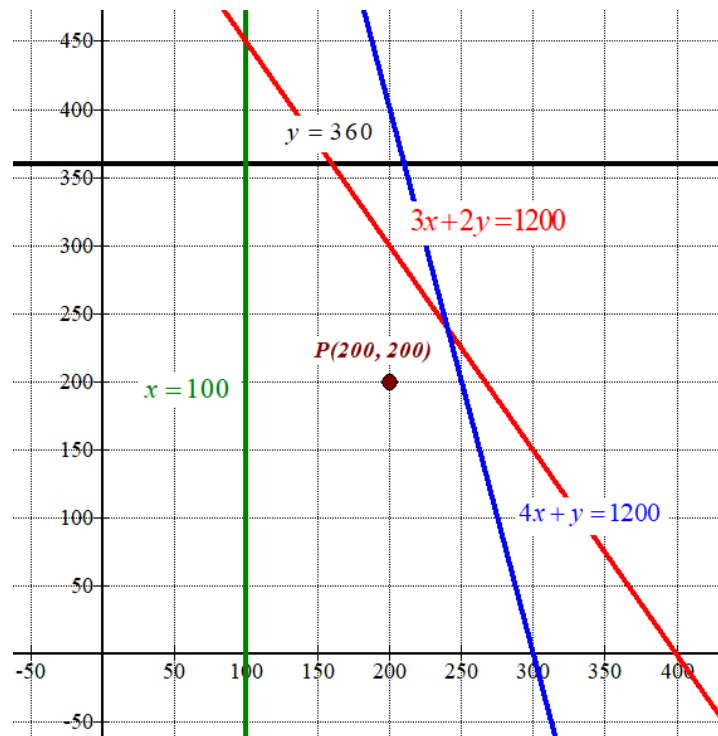
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 1.5x + y \leq 600 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \leq 200 \\ x \geq 100 \\ y \leq 360 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 1200 \\ 4x + y \leq 1200 \\ x \geq 100 \\ y \leq 360 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x + 2y = 1200$		$4x + y = 1200$		$x = 100$		$y = 360$		$x \geq 0; y \geq 0$	
x	$y = \frac{1200 - 3x}{2}$	x	$y = 1200 - 4x$	$x = 100$	y	x	$y = 360$	Primer cuadrante	
0	600	0	1200	100	0	8	360		
100	450	100	800	100	360	32	360		
200	300	210	360	100	450	100	360		
400	0	300	0	100	800				



Como las restricciones son

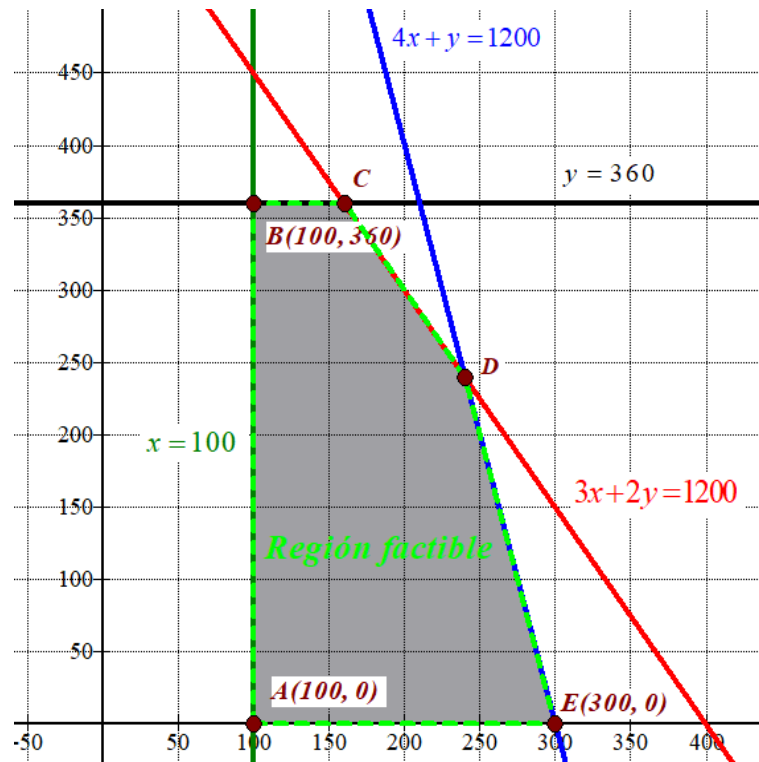
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 1200 \\ 4x + y \leq 1200 \\ x \geq 100 \\ y \leq 360 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul, roja y negra, y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(200, 200)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 200 + 2 \cdot 200 \leq 1200 \\ 4 \cdot 200 + 200 \leq 1200 \\ 200 \geq 100 \\ 200 \leq 360 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 600 + 400 \leq 1200 \\ 800 + 200 \leq 1200 \\ 200 \geq 100 \\ 200 \leq 360 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas de los puntos C y D.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1200 \\ y = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 720 = 1200 \Rightarrow 3x = 480 \Rightarrow x = 160 \Rightarrow \boxed{C(160, 360)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1200 \\ 4x + y = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1200 \\ y = 1200 - 4x \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 2400 - 8x = 1200 \Rightarrow -5x = -1200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1200}{5} = 240 \Rightarrow y = 1200 - 4 \cdot 240 = 240 \Rightarrow \boxed{D(240, 240)}$$

1.b) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 25x + 10y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(100, 0) \rightarrow B(100, 0) = 25 \cdot 100 + 10 \cdot 0 = 2500$$

$$B(100, 360) \rightarrow B(100, 360) = 25 \cdot 100 + 10 \cdot 360 = 6100$$

$$C(160, 360) \rightarrow B(160, 360) = 25 \cdot 160 + 10 \cdot 360 = 7600$$

$$D(240, 240) \rightarrow B(240, 240) = 25 \cdot 240 + 10 \cdot 240 = \mathbf{8400 \text{ Máximo}}$$

$$E(300, 0) \rightarrow B(300, 0) = 25 \cdot 300 + 10 \cdot 0 = 7500$$

El beneficio máximo es de 8 400 € y se consigue en el vértice $D(240, 240)$, que significa que deben fabricarse 240 pantalones premium y otros 240 de los básicos para conseguir un beneficio máximo de 8400 euros.

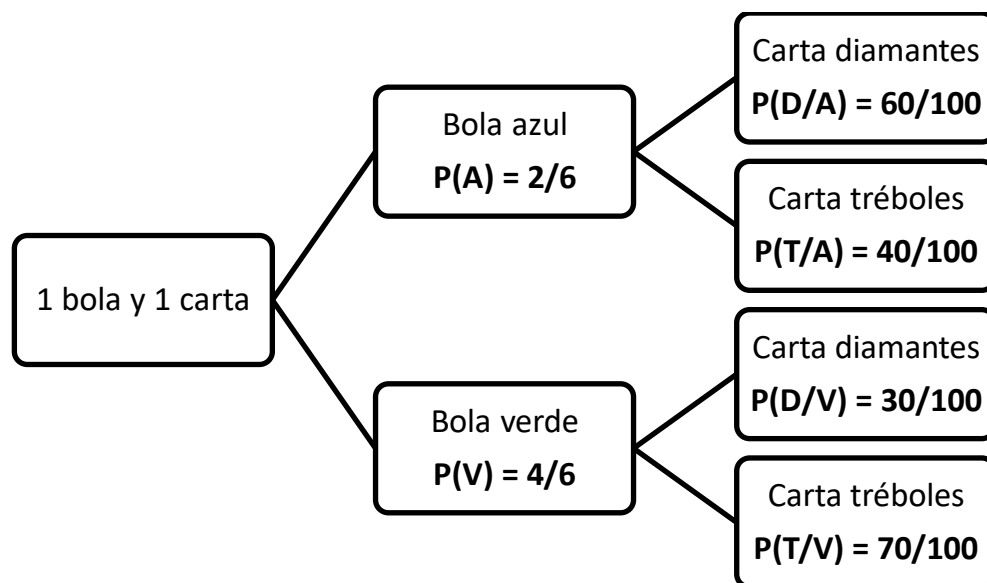
2.1 Tenemos una baraja de dorso azul que contiene 60 cartas de diamantes y 40 cartas de tréboles y otra baraja de dorso verde que contiene 30 cartas de diamantes y 70 cartas de tréboles. Además, tenemos una bolsa con 2 bolas azules y 4 bolas verdes.

Se saca una bola de la bolsa. Si la bola es azul, se saca una carta al azar de la baraja azul. Si la bola es verde, se saca una carta al azar de la baraja de dorso verde.

2.1.a) (1,5 puntos) Calcule la probabilidad de que se saque una carta de diamantes.

2.1.b) (1 punto) Si la carta extraída es de tréboles, ¿cuál es la probabilidad de que su dorso sea verde?

2.1.a) Llamamos A a sacar una bola azul de la bolsa y V a sacar bola verde de la bolsa. También llamamos D al suceso “sacar carta de diamantes” y T a “sacar carta de tréboles”. Construimos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(V)P(D/V) = \frac{2}{6} \cdot \frac{60}{100} + \frac{4}{6} \cdot \frac{30}{100} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

2.1.b) Nos piden calcular $P(V/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/T) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{P(V)P(T/V)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{70}{100}}{1 - 0.4} = \boxed{\frac{7}{9} \approx 0.7778}$$

2.2 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, siendo $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}.$$

Calcule, razonadamente e indicando qué resultados matemáticos se usan, las probabilidades pedidas a continuación:

2.2.a) (0,5 puntos) $P(A \cup B)$

2.2.b) (0,5 puntos) $P(A \cap B)$

2.2.c) (0,5 puntos) $P(\bar{B} / A)$

2.2.d) (0,5 puntos) $P(\bar{A} / A \cap B)$

2.2.e) (0,5 puntos) $P(\bar{A} / \bar{B})$

Nota: $\bar{A}$ denota al suceso contrario (o complementario) del suceso A.

2.2.a) Utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{6} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

2.2.b) Utilizamos la fórmula de la unión de dos sucesos A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

2.2.c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{B} / A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

2.2.d) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A} / A \cap B) = \frac{P(\bar{A} \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(\emptyset)}{\frac{1}{6}} = 0$$

Aquí hemos utilizado que los sucesos $\bar{A}$ y $A \cap B$ no tienen nada en común y su intersección es el conjunto vacío, cuya probabilidad es 0.

2.2.e) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

3.1 Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

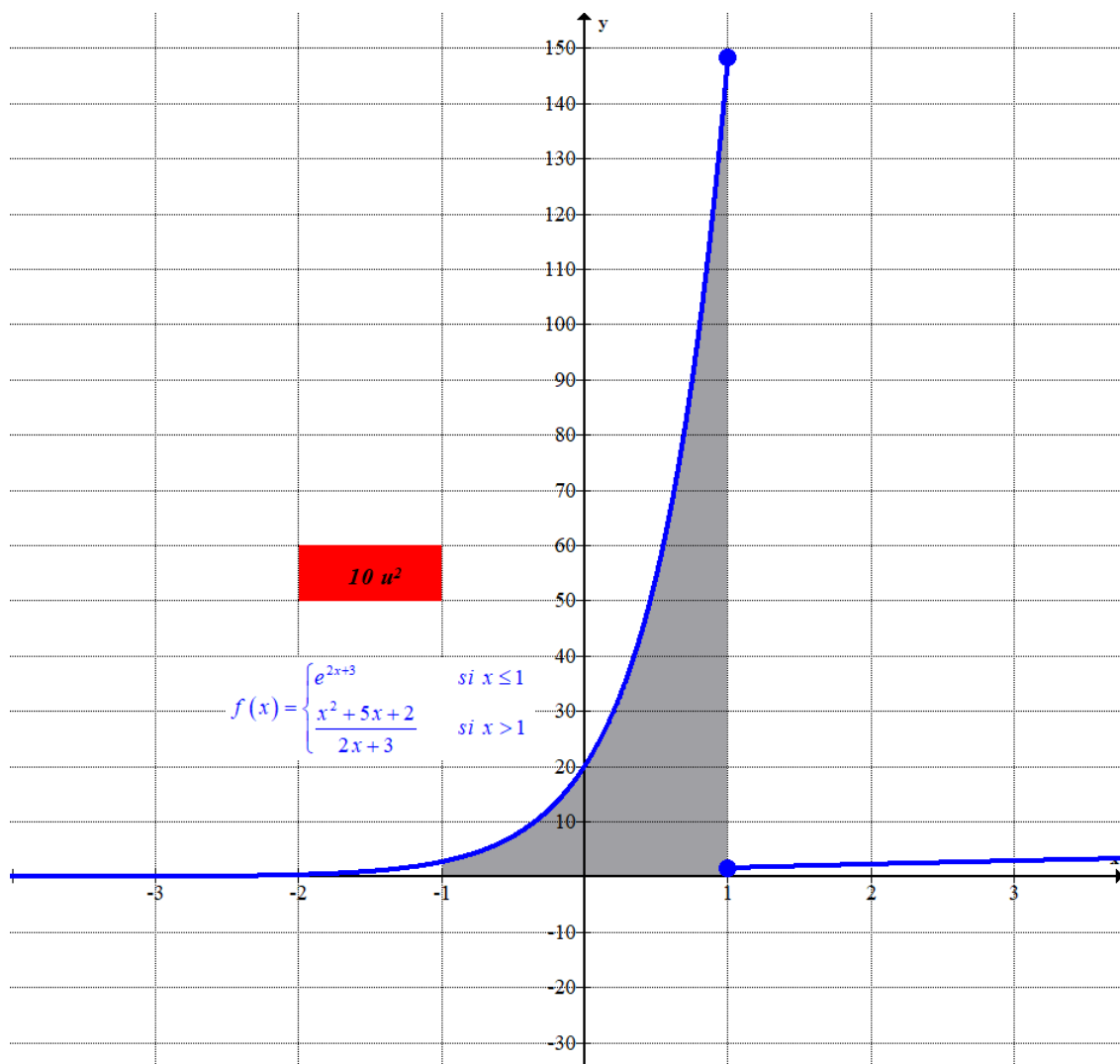
3.1.a) (1 punto) Calcule el área limitada por la función dada y el eje de abscisas en el intervalo $[-1, 1]$.

3.1.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función.

3.1.c) (1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(1, \infty)$.

3.1.a) En el intervalo $[-1, 1]$ la función tiene la expresión $f(x) = e^{2x+3}$. Esta función es una exponencial que siempre es positiva. El área limitada por la función dada y el eje de abscisas en el intervalo $[-1, 1]$ es el valor de la integral definida de -1 a 1 de la función.

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 e^{2x+3} dx = \left[\frac{e^{2x+3}}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{2 \cdot 1 + 3}}{2} - \frac{e^{2(-1) + 3}}{2} = \frac{e^5}{2} - \frac{e}{2} = \frac{e^5 - e}{2} \approx 72.85 \text{ u}^2$$



3.1.b) La función en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = e^{2x+3}$. Esta expresión es continua.

La función en el intervalo $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3}$. Esta expresión es continua, pues el denominador se anula para $x = -\frac{3}{2}$ que no pertenece al intervalo $(1, +\infty)$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^{2 \cdot 1 + 3} = e^5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{2x+3} = e^5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3} = \frac{1^2 + 5 \cdot 1 + 2}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{8}{5} = 1.6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^5 \neq 1.6 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Como los límites laterales no coinciden la función no es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

3.1.c) La función en el intervalo $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3}$. Hallamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 5)(2x + 3) - (x^2 + 5x + 2) \cdot 2}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 6x + 10x + 15 - 2x^2 - 10x - 4}{(2x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 11}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 6x + 11}{(2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-52}}{2 \cdot 2} = \text{No existe}$$

La función no presenta puntos críticos por lo que siempre crece o siempre decrece. Tomamos

$$x = 2 \text{ y vemos el signo de la derivada: } f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 11}{(2 \cdot 2 + 3)^2} = \frac{31}{7} > 0.$$

La función es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

3.2 Dada la función $g(x) = x^3 + bx^2 - 9x + d$ (b y d son números reales).

3.2.a) (1 punto) Calcule qué valores deben tomar b y d para que $g(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 3$ y la gráfica de $g(x)$ pase por el punto $(2, 10)$.

3.2.b) (1,5 puntos) Para $b = 3$ y $d = 0$, calcule los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de la función en el intervalo cerrado $[-4, 2]$.

3.2.a) Si la función $g(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 3$ entonces la derivada se anula para este valor $\Rightarrow g'(3) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 3x^2 + 2bx - 9 \\ g'(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 - 9 \Rightarrow 27 + 6b - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6b + 18 = 0 \Rightarrow 6b = -18 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

La función queda $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + d$. Si la gráfica de $g(x)$ pasa por el punto $(2, 10)$ esto significa que $g(2) = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + d \\ g(2) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + d \Rightarrow 10 = 8 - 12 - 18 + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = -22 + d \Rightarrow \boxed{d = 10 + 22 = 32}$$

Los valores buscados son $b = -3$ y $d = 32$.

3.2.b) Para $b = 3$ y $d = 0$ la función queda $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Hallamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \in [-4, 2] \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \in [-4, 2] \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = -3$ y $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores en el intervalo $[-4, 2]$.

- En el intervalo $[-4, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

$$g'(-4) = 3(-4)^2 + 6(-4) - 9 = 15 > 0. \text{ La función crece en } [-4, -3).$$

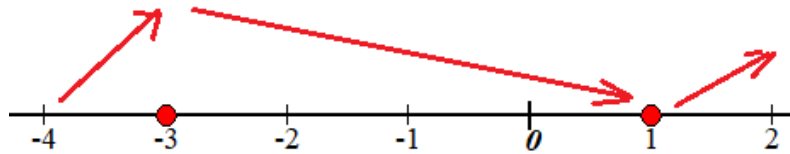
- En el intervalo $(-3, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$.

La función decrece en $(-3, 1)$.

- En el intervalo $(1, 2]$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $g'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 15 > 0$.

La función crece en $(1, 2]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $[-4, -3) \cup (1, 2]$ y decrece en $(-3, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -3$. Como $g(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) = 27$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-3, 27)$.

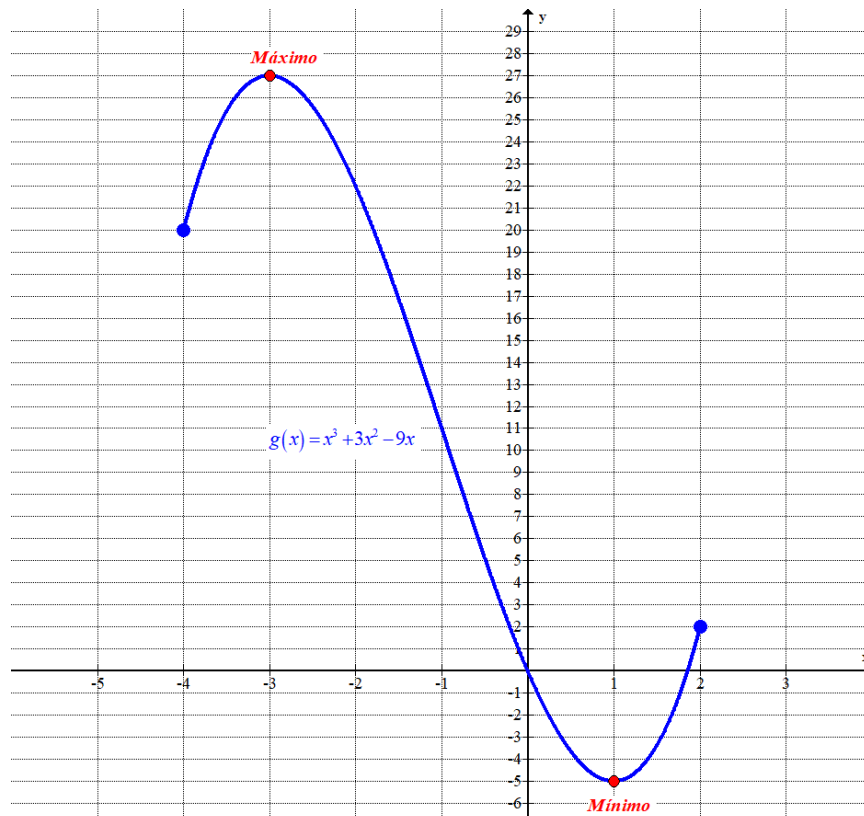
La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $g(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 = -5$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -5)$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[-4, 2]$ para decidir donde se alcanza el valor máximo y el valor mínimo absoluto.

$$\left. \begin{aligned} g(-4) &= (-4)^3 + 3(-4)^2 - 9(-4) = 20 \\ g(-3) &= 27 \text{ Máximo} \\ g(1) &= -5 \text{ Mínimo} \\ g(2) &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 = 2 \end{aligned} \right\}$$

El máximo absoluto de la función en el intervalo $[-4, 2]$ tiene coordenadas $(-3, 27)$.

El mínimo absoluto de la función en el intervalo $[-4, 2]$ tiene coordenadas $(1, -5)$.



4.1 Una cadena de gimnasios quiere estudiar el perfil de sus clientes. Se asume que la edad de sus clientes sigue una distribución normal con media $\mu = 35$ años y desviación típica $\sigma = 12$ años.

4.1.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar tenga entre 30 y 45 años, ambos inclusive.

4.1.b) (1,5 puntos) Se ha tomado una muestra aleatoria de 150 clientes y se ha observado que, para dicha muestra, la edad media es de 36,5 años. Calcule el intervalo de confianza al 92% para la edad media de los clientes del gimnasio. Si el nivel de confianza para la edad media de los clientes del gimnasio fuera del 98% justifique si la amplitud del intervalo sería mayor o menor.

4.1.a) Si consideramos la variable aleatoria $X = \text{Edad de los clientes de un gimnasio}$. $X = N(35, 12)$

Debemos calcular $P(30 \leq X \leq 45)$.

$$P(30 \leq X \leq 45) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 35}{12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{30 - 35}{12} \leq Z \leq \frac{45 - 35}{12}\right) = P(-0.42 \leq Z \leq 0.83) =$$

$$= P(Z \leq 0.83) - P(Z \leq -0.42) = P(Z \leq 0.83) - P(Z \geq 0.42) =$$

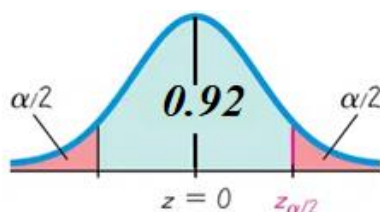
$$= P(Z \leq 0.83) - [1 - P(Z \leq 0.42)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7967 - 1 + 0.6628 = \boxed{0.4595}$$

z	,00	,01	,02	,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967

4.1.b) El tamaño de la muestra es $n = 150$ clientes y la media muestral es $\bar{x} = 36.5$ años.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 92%.

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{12}{\sqrt{150}} \approx 1.71$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (36.5 - 1.71, 36.5 + 1.71) = (34.79, 38.21)$$

Si el nivel de confianza para la edad media de los clientes del gimnasio fuera del 98% justifique si la amplitud del intervalo sería mayor o menor.

La amplitud del intervalo de confianza la obtenemos a partir del error que viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si aumentamos el nivel de confianza al 98 % entonces $1 - \alpha = 0.98$.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Aumentando el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ ($2.33 > 1.75$) y como consecuencia aumenta el valor del error, lo que implica un aumento de la amplitud del intervalo de confianza.

Resumiendo: Si aumentamos el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo de confianza.

4.2 El peso de los paquetes de pipas de girasol que produce una determinada empresa sigue una distribución normal con media $\mu = 250$ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

4.2.a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de paquetes tienen un peso comprendido entre 240 y 255 gramos?

4.2.b) (1,5 puntos) La empresa quiere establecer un control de calidad rechazando aquellos paquetes cuyo peso se desvíe excesivamente del peso medio. Si decide rechazar el 5% de los paquetes (el 2, 5% de los más ligeros y el 2, 5% de los más pesados), ¿entre qué valores debe estar el peso de un paquete para ser aceptado?

4.2.a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da el peso en gramos de los paquetes de pipas de girasol. $X = N(250, 8)$. Hallamos la probabilidad de que un paquete de pipas tenga un peso comprendido entre 240 y 255 gramos: $P(240 \leq X \leq 255)$.

$$P(240 \leq X \leq 255) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 250}{8} \end{array} \right\} = P\left(\frac{240 - 250}{8} \leq Z \leq \frac{255 - 250}{8}\right) =$$

$$= P(-1.25 \leq Z \leq 0.625) = P(Z \leq 0.625) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \leq 0.625) - P(Z \geq 1.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.625) - [1 - P(Z \leq 1.25)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{0.7324 + 0.7357}{2} - 1 + 0.8944 = 0.62845$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7237	0,7271	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944

El porcentaje de paquetes que tienen un peso comprendido entre 240 y 255 gramos es del 62.845 %.

4.2.b) Si rechazan el 2.5% de los paquetes más pesados y el 2.5% de los más ligeros nos debemos quedar con el 95% de los paquetes más cercanos al peso medio de 250 gramos. Debemos hallar el valor de "p" tal que $P(250 - p \leq X \leq 250 + p) = 0.95$.

$$P(250 - p \leq X \leq 250 + p) = 0.95 \Rightarrow P(X \leq 250 + p) - P(X \leq 250 - p) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 250}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{250 + p - 250}{8}\right) - P\left(Z \leq \frac{250 - p - 250}{8}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{p}{8}\right) - P\left(X \leq \frac{-p}{8}\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{p}{8}\right) - P\left(X \geq \frac{p}{8}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{p}{8}\right) - \left[1 - P\left(X \leq \frac{p}{8}\right)\right] = 0.95 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{p}{8}\right) = 1.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{p}{8}\right) = \frac{1.95}{2} = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{8} = 1.96 \Rightarrow \boxed{p = 15.68}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Se deben rechazar los paquetes de pipas que pesen por debajo de $250 - 15.68 = 234.32$ gramos y los que pesen por encima de $250 + 15.68 = 265.68$ gramos.