



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 - MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS

PAU2026 - JULIO

NOTA IMPORTANTE: Las dos primeras preguntas son obligatorias. En las preguntas tres y cuatro, debe seleccionar una opción (A o B) y contestar a todos los apartados. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Se permite una calculadora no gráfica ni programable.

PREGUNTA 1: (3 puntos)

De los 200 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto de Molina de Segura, 75 practican taekwondo, 100 hapkido y 50 ambas artes marciales coreanas. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

- a) Practique al menos algún arte marcial coreano. [0,25 puntos]
- b) Practique únicamente hapkido. [0,5 puntos]
- c) No practique ningún arte marcial coreano. [0,5 puntos]
- d) Practique solo una de las dos artes marciales coreanas. [0,5 puntos]
- e) Si el estudiante seleccionado no practica hapkido, calcule la probabilidad de que practique taekwondo. [0,25 puntos]

El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales se distribuye según una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 450 euros. Se preguntó a 81 profesores de artes marciales elegidos al azar y se estableció que el salario medio oscila entre 1383,5 euros y 1616,5 euros.

- f) ¿Cuál ha sido el salario medio de los profesores de la muestra si el nivel de confianza que se ha utilizado en el intervalo anterior es del 98%? [0,5 puntos]
- g) Si se quiere estimar el salario medio poblacional, con un error máximo de 74,5 euros y con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarlo? [0,5 puntos]

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Dada la función:

$$f(x) = x^3 \cdot (x-5)^2$$

Se pide:

- a) Determinar el dominio de $f(x)$. [0,25 puntos]
- b) Calcule la función derivada $f'(x)$ y determine los puntos críticos. [0,75 puntos]
- c) Estudie la monotonía de $f(x)$, indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1 p]
- d) Determine el valor o valores de x donde la función tiene un extremo relativo. Calcule el valor de la función en dichos puntos. [0,5 puntos]
- e) Calcule $\int f(x) dx$. [0,5 puntos]

PREGUNTA 3: (2 puntos)

OPCIÓN A

Un fabricante importante de patinetes eléctricos en España produce dos modelos: el SmartGyro Rockway EVO y el SmartGyro Speedway. El fabricante obtiene 150 euros de beneficio por cada

Rockway EVO y 120 euros por cada Speedway. El modelo Rockway EVO requiere 3 horas de ensamblaje y media hora de pintura, mientras que el modelo Speedway necesita 2 horas de ensamblaje y una hora de pintura. El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8. Además, deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día. Se pide:

- Si el fabricante quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,75 puntos]**
- Represente la región factible. **[0,5 puntos]**
- Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
- ¿Cuántos patinetes de cada modelo debe producir el fabricante para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario posible. **[0,5 puntos]**

OPCIÓN B

Considere la función objetivo $f(x, y) = 3x - 2y$ y la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} y \leq 7 \\ 3x - y \leq 3 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
- Encuentre los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
- Obtenga los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores. **[0,75 puntos]**

PREGUNTA 4: (2 puntos)

OPCIÓN A

Para celebrar el cumpleaños de Bruno, Carmen quiere invitar a merendar a sus amigos en la Pizzería La Romana. Esta pizzería ofrece tres tipos de pizzas: de base fina, de base gruesa y de base rellena de queso. El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas. Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso. Y si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros.

- Plantee el sistema de ecuaciones que le permita averiguar a Carmen cuánto cuesta cada tipo de pizza. **[1 punto]**
- Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

OPCIÓN B

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- Estudie el rango de A dependiendo del valor de m . **[1 punto]**
- Para $m = -1$, resuelva $AX = B^t$. **[1 punto]**

SOLUCIONES**PREGUNTA 1: (3 puntos)**

De los 200 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto de Molina de Segura, 75 practican taekwondo, 100 hapkido y 50 ambas artes marciales coreanas. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

- a) Practique al menos algún arte marcial coreano. **[0,25 puntos]**
- b) Practique únicamente hapkido. **[0,5 puntos]**
- c) No practique ningún arte marcial coreano. **[0,5 puntos]**
- d) Practique solo una de las dos artes marciales coreanas. **[0,5 puntos]**
- e) Si el estudiante seleccionado no practica hapkido, calcule la probabilidad de que practique taekwondo. **[0,25 puntos]**

El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales se distribuye según una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 450 euros. Se preguntó a 81 profesores de artes marciales elegidos al azar y se estableció que el salario medio oscila entre 1383,5 euros y 1616,5 euros.

- f) ¿Cuál ha sido el salario medio de los profesores de la muestra si el nivel de confianza que se ha utilizado en el intervalo anterior es del 98%? **[0,5 puntos]**
- g) Si se quiere estimar el salario medio poblacional, con un error máximo de 74,5 euros y con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarlo? **[0,5 puntos]**

- a) Llamamos T al suceso “el estudiante practica taekwondo” y H a “el estudiante practica hapkido”. Por la información proporcionada sabemos que:

$$P(T) = \frac{75}{200} = 0.375, P(H) = \frac{100}{200} = 0.5, P(T \cap H) = \frac{50}{200} = 0.25.$$

Nos piden calcular $P(T \cup H)$.

$$P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0.375 + 0.5 - 0.25 = \boxed{0.625}$$

- b) Debemos calcular $P(\bar{T} \cap H)$.

$$P(\bar{T} \cap H) = P(H) - P(T \cap H) = 0.5 - 0.25 = \boxed{0.25}$$

- c) Debemos calcular $P(\bar{T} \cap \bar{H})$.

$$P(\bar{T} \cap \bar{H}) = P(\overline{T \cup H}) = 1 - P(T \cup H) = 1 - 0.625 = \boxed{0.375}$$

- d) Debemos calcular $P((\bar{T} \cap H) \cup (T \cap \bar{H}))$.

$$\begin{aligned} P((\bar{T} \cap H) \cup (T \cap \bar{H})) &= P(\bar{T} \cap H) + P(T \cap \bar{H}) = 0.25 + P(T) - P(T \cap H) = \\ &= 0.25 + 0.375 - 0.25 = \boxed{0.375} \end{aligned}$$

- e) Debemos calcular $P(T / \bar{H})$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(T / \bar{H}) = \frac{P(T \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(T) - P(T \cap H)}{1 - P(H)} = \frac{0.375 - 0.25}{1 - 0.5} = \boxed{0.25}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realizamos una tabla de contingencia.

	Taekwondo	No taekwondo	
Hapkido	50		100
No hapkido			
	75		200

Completamos la tabla.

	Taekwondo	No taekwondo	
Hapkido	50	50	100
No hapkido	25	75	100
	75	125	200

Aplicamos la regla de Laplace para obtener las probabilidades pedidas.

- a) De los 200 estudiantes hay 75 que no practican ninguna de las artes marciales, por lo que son $200 - 75 = 125$ los que practican alguna de estas artes. La probabilidad de que el joven seleccionado practique alguna de las artes marciales vale $\frac{125}{200} = 0.625$.
- b) De los 200 jóvenes hay 50 que practican hapkido y no taekwondo. La probabilidad de que el joven seleccionado solo practique hapkido vale $\frac{50}{200} = 0.25$.
- c) De los 200 jóvenes hay 75 que no practican ninguna de las artes marciales. La probabilidad de que el joven seleccionado no practique ningún arte marcial vale $\frac{75}{200} = 0.375$.
- d) De los 200 estudiantes hay 25 que practican taekwondo y no hapkido y 50 que practican hapkido y no taekwondo. La probabilidad de que el estudiante elegido solo practique una de las artes marciales vale $\frac{25+75}{200} = 0.375$.
- e) De los 100 jóvenes que no practican hapkido hay 25 que practican taekwondo. La probabilidad de que el joven seleccionado que no practica hapkido practique taekwondo vale $\frac{25}{100} = 0.25$.

Seguimos con el resto del ejercicio.

- f) Consideramos $X =$ “El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales”.
 $X = N(\mu, 450)$.

El intervalo de confianza es (1383.5, 1616.5) y la media muestral es el valor central del intervalo.

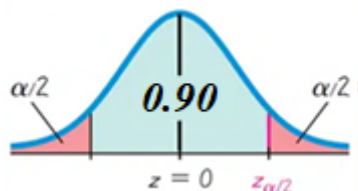
$$\bar{x} = \frac{1383.5 + 1616.5}{2} = 1500 \text{ euros}$$

El salario medio de los profesores de la muestra es de 1500 euros.

- g) Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Utilizamos la fórmula del error.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Error} = 74.5 \\ \sigma = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow 74.5 = 1.645 \cdot \frac{450}{\sqrt{n}} \Rightarrow 74.5\sqrt{n} = 740.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{740.25}{74.5} \Rightarrow n = \left(\frac{740.25}{74.5} \right)^2 \approx 98.73$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 99 profesores.

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Dada la función:

$$f(x) = x^3 \cdot (x-5)^2$$

Se pide:

- a) Determinar el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
 b) Calcule la función derivada $f'(x)$ y determine los puntos críticos. **[0,75 puntos]**
 c) Estudie la monotonía de $f(x)$, indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 p]**
 d) Determine el valor o valores de x donde la función tiene un extremo relativo. Calcule el valor de la función en dichos puntos. **[0,5 puntos]**
 e) Calcule $\int f(x) dx$. **[0,5 puntos]**

a) La función es polinómica y su dominio son todos los números reales. El dominio es $\mathbb{R}$.

b) Obtenemos la expresión polinómica de la función y luego derivamos.

$$f(x) = x^3 \cdot (x-5)^2 = x^3(x^2 + 25 - 10x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 75x^2 = 5x^2(x^2 - 8x + 15)$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 8x + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \\ = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = 5 = x \\ \frac{8-2}{2} = 3 = x \end{cases} \end{cases}$$

Los tres puntos críticos son: $x = 0$, $x = 3$ y $x = 5$.

Como $f(0) = 0^3 \cdot (0-5)^2 = 0$, $f(3) = 3^3 \cdot (3-5)^2 = 108$ y $f(5) = 5^3 \cdot (5-5)^2 = 0$ los puntos críticos tienen coordenadas $(0, 0)$, $(3, 108)$ y $(5, 0)$.

c) Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 5(-1)^4 - 40(-1)^3 + 75(-1)^2 = 5 + 40 + 75 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 5 \cdot 1^4 - 40 \cdot 1^3 + 75 \cdot 1^2 = 5 - 40 + 75 = 40 > 0. \text{ La función crece en } (0, 3).$$

- En el intervalo $(3, 5)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

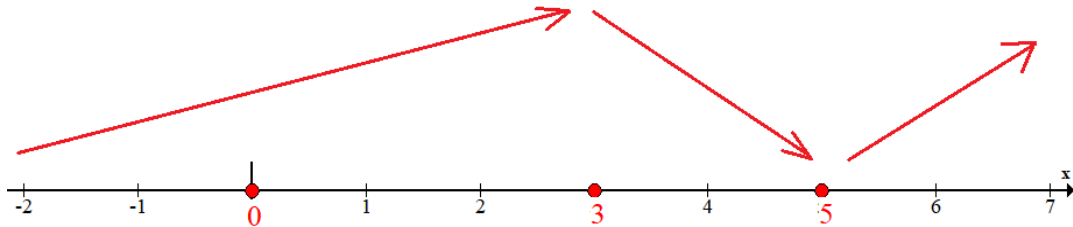
$$f'(4) = 5 \cdot 4^4 - 40 \cdot 4^3 + 75 \cdot 4^2 = -80 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 5).$$

- En el intervalo $(5, +\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 5 \cdot 10^4 - 40 \cdot 10^3 + 75 \cdot 10^2 = 17500 > 0. \text{ La función crece en } (5, +\infty).$$

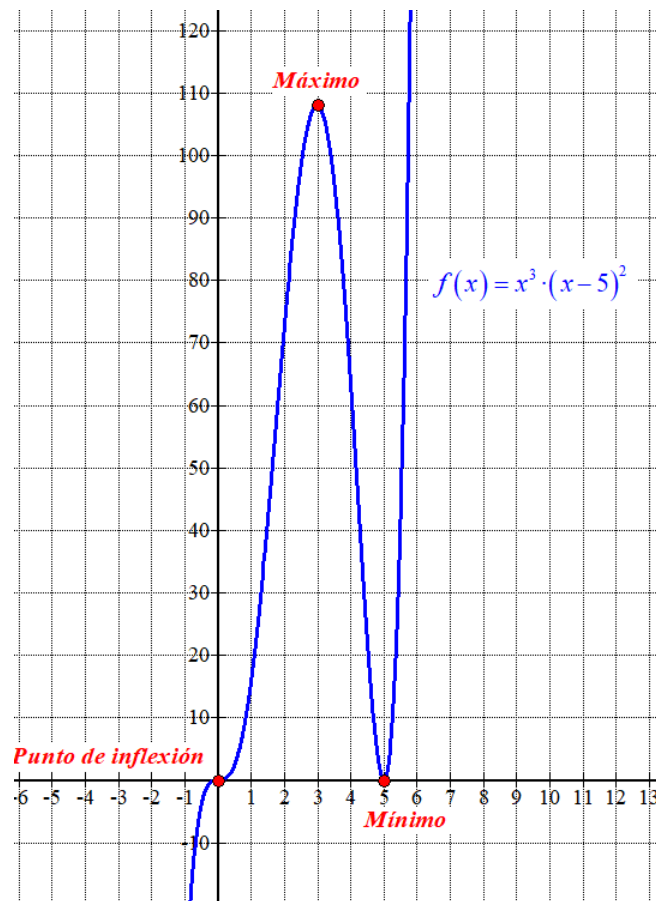
La función crece en $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(3, 5)$.

La función sigue el esquema siguiente.



- d) Observando la evolución de la función podemos decir que tiene un máximo relativo en $x=3$ y un mínimo relativo en $x=5$.

El máximo relativo de la función es $f(3)=108$ y el mínimo relativo es $f(5)=0$.



- e) Calculamos la integral.

$$\int f(x) dx = \int x^5 - 10x^4 + 25x^3 dx = \frac{x^6}{6} - \frac{10x^5}{5} + \frac{25x^4}{4} = \boxed{\frac{x^6}{6} - 2x^5 + \frac{25x^4}{4} + C}$$

PREGUNTA 3: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Un fabricante importante de patinetes eléctricos en España produce dos modelos: el SmartGyro Rockway EVO y el SmartGyro Speedway. El fabricante obtiene 150 euros de beneficio por cada Rockway EVO y 120 euros por cada Speedway. El modelo Rockway EVO requiere 3 horas de ensamblaje y media hora de pintura, mientras que el modelo Speedway necesita 2 horas de ensamblaje y una hora de pintura. El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8. Además, deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día. Se pide:

- a) Si el fabricante quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,75 puntos]**
 b) Represente la región factible. **[0,5 puntos]**
 c) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
 d) ¿Cuántos patinetes de cada modelo debe producir el fabricante para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario posible. **[0,5 puntos]**

- a) Llamamos “x” al número de patinetes SmartGyro Rockway EVO e “y” al número de patinetes SmartGyro Speedway que se fabrican al día. Realizamos una tabla con los datos del problema

	Horas de ensamblaje	Horas de pintura	Beneficio
Nº patinetes Rockway (x)	3x	0.5x	150x
Nº patinetes Speedway (y)	2y	y	120y
TOTALES	3x + 2y	0.5x + y	150x + 120y

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 150x + 120y$.

Las restricciones son las siguientes.

El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8 → $3x + 2y \leq 24$; $0.5x + y \leq 8$

Deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día → $y \geq 3$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 24 \\ 0.5x + y \leq 8 \\ y \geq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 16 \\ y \geq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 2y = 24$$

x	y = $\frac{24-3x}{2}$
0	12
4	6
6	3
8	0

$$x + 2y = 16$$

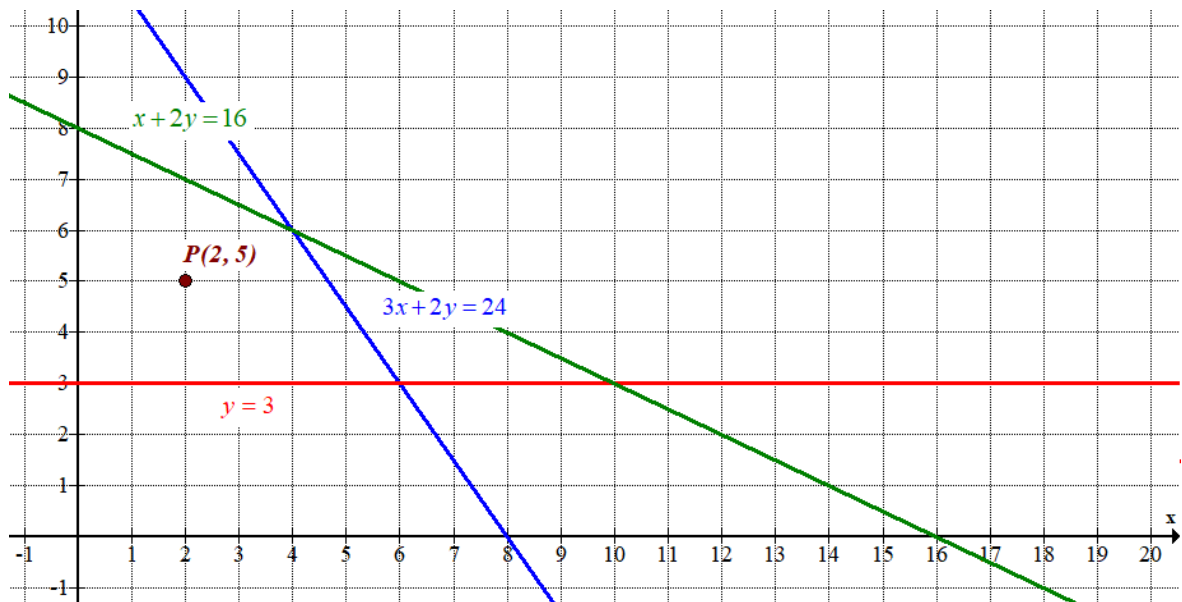
x	y = $\frac{16-x}{2}$
0	8
4	6
10	3
16	0

$$y = 3$$

x	y = 3
0	3
6	3
10	3

$$x \geq 0; y \geq 0$$

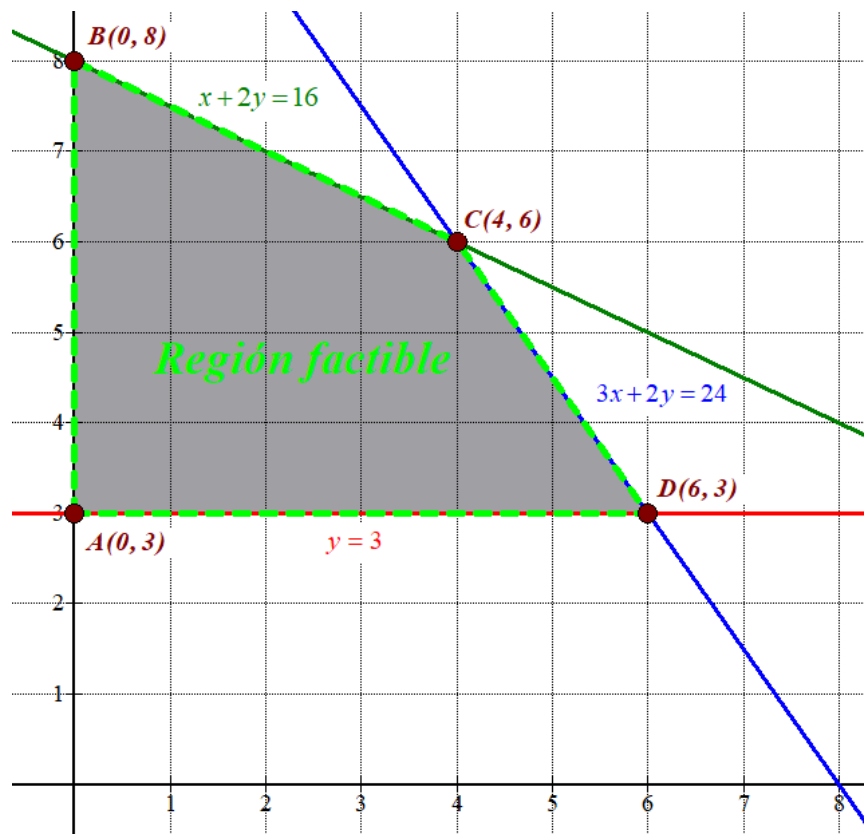
Primer
cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas oblicuas azul y verde, y por encima de la recta horizontal roja. Comprobamos que el punto $P(2, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \leq 24 \\ 2 + 2 \cdot 5 \leq 16 \\ 5 \geq 3 \\ 2 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



- c) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de las tablas de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son $A(0, 3)$, $B(0, 8)$, $C(4, 6)$ y $D(6, 3)$.
- d) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 150x + 120y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 3) \rightarrow B(0, 3) = 150 \cdot 0 + 120 \cdot 3 = 360$$

$$B(0, 8) \rightarrow B(0, 8) = 150 \cdot 0 + 120 \cdot 8 = 960$$

$$C(4, 6) \rightarrow B(4, 6) = 150 \cdot 4 + 120 \cdot 6 = 1320 \text{ Máximo}$$

$$D(6, 3) \rightarrow B(6, 3) = 150 \cdot 6 + 120 \cdot 3 = 1260$$

El valor máximo es 1320 y se alcanza en el vértice $C(4, 6)$.

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1320 euros fabricando 4 patinetes SmartGyro Rockway EVO y 6 patinetes SmartGyro Speedway.

.

PREGUNTA 3: (2 puntos)**OPCIÓN B**

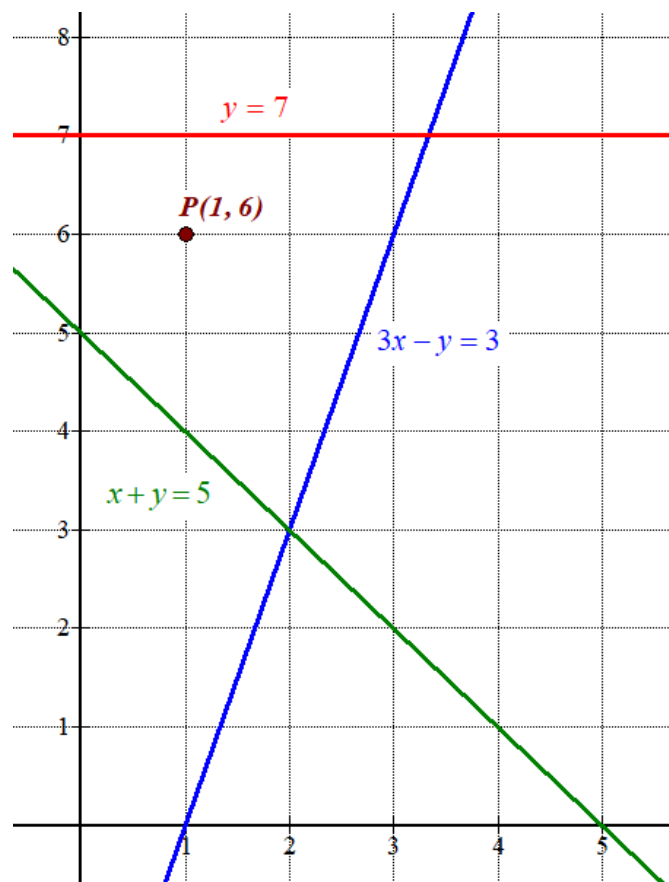
Considere la función objetivo $f(x, y) = 3x - 2y$ y la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} y \leq 7 \\ 3x - y \leq 3 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
 b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
 c) Obtenga los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores. **[0,75 puntos]**

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = 7$	$3x - y = 3$	$x + y = 5$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 7$	$x \mid y = 3x - 3$	$x \mid y = 5 - x$	
0 $\mid$ 7	0 $\mid$ -3	0 $\mid$ 5	Primer
1 $\mid$ 7	1 $\mid$ 0	2 $\mid$ 3	cuadrante
2 $\mid$ 7	2 $\mid$ 3	5 $\mid$ 0	

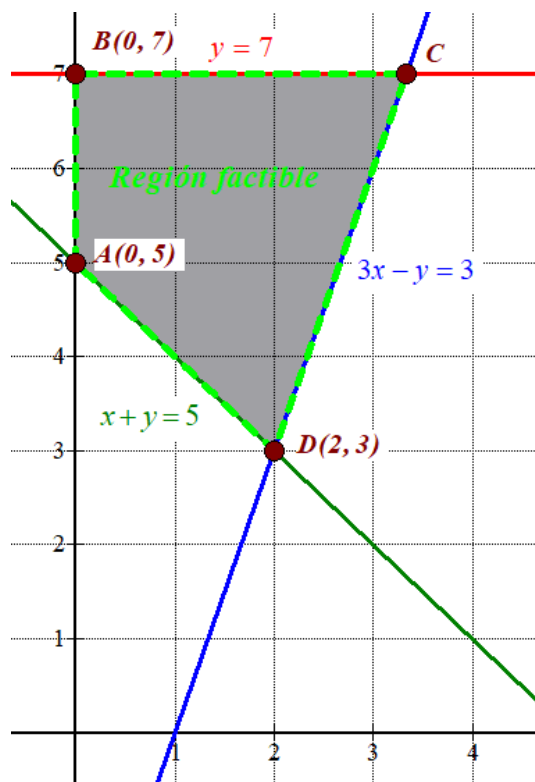


Las restricciones son
$$\begin{cases} y \leq 7 \\ 3x - y \leq 3 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 7 \\ 3x - 3 \leq y \\ y \geq 5 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}.$$

La región factible está situada en el primer cuadrante por encima de las rectas oblicuas azul y verde, y por debajo de la recta horizontal roja. Comprobamos que el punto P(1,6) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\begin{cases} 6 \leq 7 \\ 3 \cdot 1 - 3 \leq 6 \\ 1 + 6 \geq 5 \\ 1 \geq 0; 6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



- b) Las coordenadas de tres de los vértices se pueden obtener del dibujo y de la tabla de valores que hemos elaborado. Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$\begin{cases} y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x - 7 = 3 \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \Rightarrow C\left(\frac{10}{3}, 7\right)$$

Los vértices de la región factible son A(0, 5), B(0, 7), $C\left(\frac{10}{3}, 7\right)$ y D(2, 3).

- c) Valoramos la función $f(x, y) = 3x - 2y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 5) \rightarrow f(0, 5) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 5 = -10$$

$$B(0, 7) \rightarrow f(0, 7) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 7 = -14 \text{ Mínimo}$$

$$C\left(\frac{10}{3}, 7\right) \rightarrow f\left(\frac{10}{3}, 7\right) = 3 \cdot \frac{10}{3} - 2 \cdot 7 = -4$$

$$D(2, 3) \rightarrow f(2, 3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0 \text{ Máximo}$$

El valor mínimo es -14 y se alcanza en $B(0, 7)$. El valor máximo es 0 y se alcanza en el vértice $D(2, 3)$.

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Para celebrar el cumpleaños de Bruno, Carmen quiere invitar a merendar a sus amigos en la Pizzería La Romana. Esta pizzería ofrece tres tipos de pizzas: de base fina, de base gruesa y de base rellena de queso. El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas. Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso. Y si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros.

- a) Plantee el sistema de ecuaciones que le permita averiguar a Carmen cuánto cuesta cada tipo de pizza. **[1 punto]**
 b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

- a) Llamamos “x” al precio de una pizza de base fina, “y” al precio de una pizza de base gruesa y “z” al precio de una de base rellena de queso.

El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas $\rightarrow$
 $z = x + y + 2$.

Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso $\rightarrow 6y = 4z$.

Si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros $\rightarrow 3x + 3y + 7z = 204$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 7z = 204 \\ z = x + y + 2 \\ 6y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 7z = 204 \\ z = x + y + 2 \\ 3y = 2z \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 7z = 204 \\ z = x + y + 2 \\ 3y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 7(x + y + 2) = 204 \\ 3y = 2(x + y + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 7x + 7y + 14 = 204 \\ 3y = 2x + 2y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 10y = 190 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 19 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x + 4 = 19 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow \boxed{x = 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 5 + 4 = 14} \Rightarrow \boxed{z = 5 + 14 + 2 = 21}$$

Una pizza de base fina cuesta 5 euros, una de base gruesa cuesta 14 euros y una de base rellena de queso cuesta 21 euros.

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN B**

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a) Estudie el rango de A dependiendo del valor de m . [1 punto]b) Para $m = -1$, resuelva $AX = B^t$. [1 punto]

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = m(2-m) + 3 + 2 - 2m - (2-m) - 3 =$$

$$= \cancel{2m} - m^2 + 5 - \cancel{2m} - 2 + m - 3 = -m^2 + m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + m = 0 \Rightarrow m(-m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -m+1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes que se nos plantean.

Situación 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante es distinto de cero y el rango de A es 3.

Situación 2. $m = 0$

En este caso el determinante vale cero y el rango de A es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Observamos que las filas primera y tercera son iguales. Si

consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

El rango de A es 2.

Situación 3. $m = 1$

En este caso el determinante de A vale cero y el rango de A es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y segunda son

iguales. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 1ª su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el rango de A es 3 y si $m = 0$ o $m = 1$ el rango de A es 2.

b) Para $m = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, su determinante es distinto de cero y tiene matriz inversa. La calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 2 + 2 - 3 - 3 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial: $AX = B^t \Rightarrow X = A^{-1}B^t$.
Terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}B^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1-5 \\ 1+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $m = -1$ la matriz X solución de la ecuación $AX = B^t$ es $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.