

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

Este examen consta de CUATRO problemas.

En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.

Se podrán usar calculadoras que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes, derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

En el cuaderno de examen deberán figurar todas las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Un pastelero está experimentando con las recetas de dos tipos de dulces que quiere comercializar. Todavía no tiene pensado el nombre, así que de momento les llama dulce tipo A y dulce tipo B. Para la receta del dulce tipo A, además de otros ingredientes, sabe seguro que va a necesitar 70 g de harina y 20 g de azúcar, mientras que para la del tipo B usará 60 g de harina y 10 g de azúcar. Ahora mismo dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar, cantidades con las que quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B. El precio que espera poner a cada dulce de tipo A es 5 euros, y 4 euros a cada dulce de tipo B. Con todo esto quiere saber cuántos dulces de cada tipo tiene que hacer para obtener un ingreso máximo.

- (a) (0,75 puntos) Define las variables del problema y formula la función objetivo y las restricciones que permiten modelar la situación descrita como un problema de programación lineal.
- (b) (0,75 puntos) Representa la región de soluciones factibles.
- (c) (0,5 puntos) Determina el número de dulces de tipo A y de tipo B que debe hacer para maximizar el ingreso e indica el valor de dicho ingreso máximo.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

En una universidad el alumnado puede cursar una asignatura optativa o bien en modalidad presencial o bien en modalidad virtual. Se sabe que:

- El 60 % del alumnado elige la modalidad presencial.
- Entre quienes eligen modalidad virtual, el 20 % aprueba la asignatura.
- Entre quienes eligen modalidad presencial, el 35 % aprueba la asignatura.

Se elige al azar un estudiante de la asignatura.

- (a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura.
- (b) (1 punto) Sabiendo que el estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial.
- (c) (1 punto) ¿Es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial o virtual? Justifica la respuesta.

PROBLEMA 3. (3 puntos) Responde **solo a una** de las opciones.

(OPCIÓN 3A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- (a) (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos, si existen.
- (b) (1 punto) Estudia la concavidad de la función y determina si tiene puntos de inflexión.
- (c) (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

(OPCIÓN 3B)

Una empresa produce un bien cuyo coste total, en miles de euros, viene dado por la función

$$C(x) = x^2 + 10x + 600$$

donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta por unidad depende de la cantidad producida y viene dado por

$$p(x) = 100 - 2x.$$

- (a) (0,5 puntos) Expresa la función de ingresos en función de x .
- (b) (0,5 puntos) Expresa la función de beneficios en función de x .
- (c) (0,5 puntos) Halla los valores de x para los que el beneficio es positivo.
- (d) (0,5 puntos) Determina el número de unidades que debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

(e) (1 punto) Calcula $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx$.

PROBLEMA 4. (2 puntos) Responde **solo a una** de las opciones.

(OPCIÓN 4A)

Se considera la matriz dependiente del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a .
- (b) (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.
- (c) (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

- (d) (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^tA$, donde B^t denota la traspuesta de B .

(OPCIÓN 4B)

Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3 \\ x + y + bz = 4 \end{cases}.$$

- (a) (0,5 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b .
- (b) (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.
- (c) (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b , indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
- (d) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.