

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

- Este examen consta de CUATRO problemas. En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.
- Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.
- El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
- Cuando un problema consta de varios apartados, la puntuación correspondiente a cada uno de ellos aparece reflejada en el enunciado del examen.
- En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En el cuaderno de examen deberán figurar todas las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.
- Se penalizará con 0,5 puntos la falta de homogeneidad en el uso de las unidades de medida a lo largo de la resolución de un problema.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

PROBLEMA 1. (2 puntos)

(a) **0,75 puntos.**

- Definir las variables: **0,25 puntos.**
- Formular la función objetivo: **0,25 puntos.**
- Determinar las restricciones: **0,25 puntos.**

(b) Dibujar la región de las soluciones factibles: **0,75 puntos.**

(c) **0,5 puntos.**

- Valorar la función en los vértices: **0,25 puntos.**
- Determinar el máximo: **0,25 puntos.**

PROBLEMA 2. (3 puntos)

(a) **1 punto.**

- Expresar matemáticamente los datos del problema: **0,25 puntos.**
- Plantear dicha probabilidad mediante el teorema de la probabilidad total, diagrama de árbol, tabla de contingencia (o cualquier método válido equivalente): **0,25 puntos.**
- Calcular la probabilidad solicitada: **0,5 puntos.**

(b) **1 punto.**

- Identificar la probabilidad condicionada solicitada: **0,25 puntos.**
- Plantear dicha probabilidad mediante el teorema de Bayes, diagrama de árbol, tabla de contingencia (o cualquier método válido equivalente): **0,25 puntos.**
- Calcular la probabilidad pedida: **0,5 puntos.**

(c) **1 punto.**

- Calcular la probabilidad condicionada necesaria para la comparación: **0,5 puntos.**
- Responder a la pregunta justificadamente: **0,5 puntos.**

PROBLEMA 3. (3 puntos)

OPCIÓN 3A

- (a) **1 punto.**
 - Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento: **0,5 puntos.**
 - Determinar los extremos relativos: **0,5 puntos.**
- (b) **1 punto.**
 - Estudiar la concavidad: **0,5 puntos.**
 - Calcular el punto de inflexión: **0,5 puntos.**
- (c) **1 punto.**
 - Calcular el punto de tangencia: **0,5 puntos.**
 - Determinar la recta tangente: **0,5 puntos.**

OPCIÓN 3B

- (a) Expresar la función de ingresos: **0,5 puntos.**
- (b) Expresar la función de beneficios: **0,5 puntos.**
- (c) Hallar los valores de x pedidos: **0,5 puntos.**
- (d) **0,5 puntos.**
 - Determinar el número de unidades: **0,25 puntos.**
 - Calcular el beneficio: **0,25 puntos.**
- (e) Calcular la integral: **1 punto.**

PROBLEMA 4. (2 puntos)

OPCIÓN 4A

- (a) **0,5 puntos.**
- Calcular A^t : **0,25 puntos.**
 - Calcular $\det A$: **0,25 puntos.**
- (b) **0,5 puntos.**
- Determinar los valores de a para los que existe A^{-1} : **0,25 puntos.**
 - Calcular A^{-1} para $a \neq 2$: **0,25 puntos.**
- (c) **0,5 puntos.**
- Resolver la ecuación para $a \neq 2$: **0,25 puntos.**
 - Demostrar que para $a = 2$ no existe solución: **0,25 puntos.**
- (d) Calcular C : **0,5 puntos.**

OPCIÓN 4B

- (a) **0,5 puntos.**
- Escribir el sistema en forma matricial: **0,25 puntos.**
 - Calcular el determinante solicitado: **0,25 puntos.**
- (b) Calcular los valores de b solicitados: **0,25 puntos.**
- (c) **0,75 puntos.**
- Discutir los casos $b \neq 1$ y $b \neq 2$: **0,25 puntos.**
 - Discutir el caso $b = 1$: **0,25 puntos.**
 - Discutir el caso $b = 2$: **0,25 puntos.**
- (d) Resolver el sistema solicitado: **0,5 puntos.**

SOLUCIONES

PROBLEMA 1.

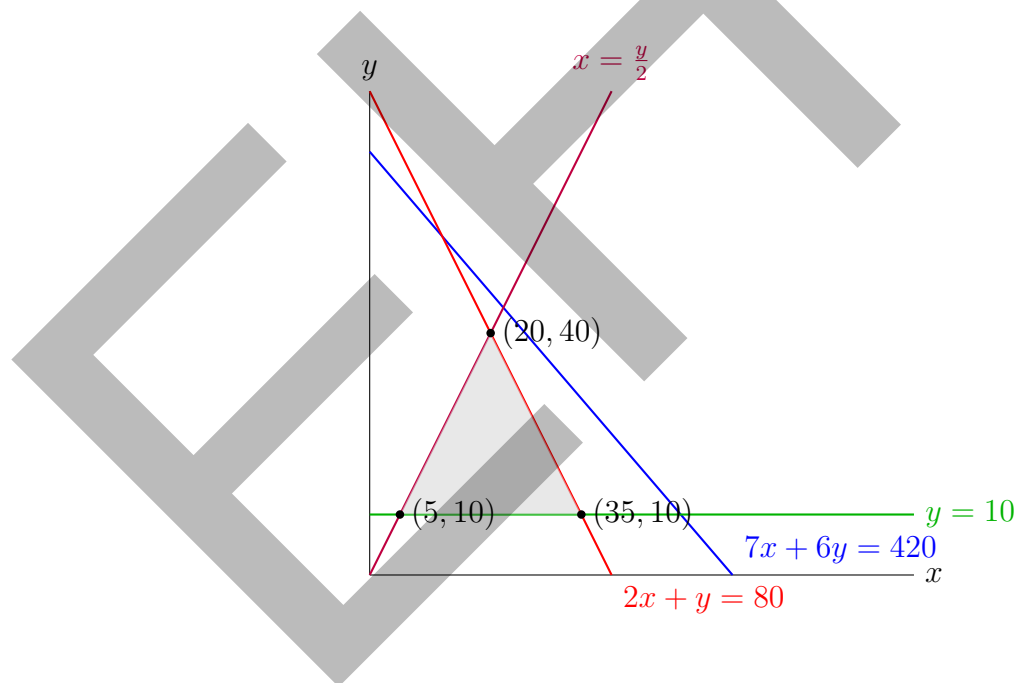
- (a) Se define x como el número de dulces de tipo A e y como el número de dulces de tipo B.

La función objetivo es: $f(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \Leftrightarrow 7x + 6y \leq 420 \\ 20x + 10y \leq 800 \Leftrightarrow 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq \frac{y}{2} \end{cases}.$$

- (b) La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $(5, 10)$, $(35, 10)$ y $(20, 40)$.

- (c) La función objetivo evaluada en cada vértice es: $f(5, 10) = 65$, $f(35, 10) = 215$ y $f(20, 40) = 260$.

Así, debe hacer 20 dulces de tipo A y 40 dulces de tipo B para maximizar el ingreso, que será de 260 euros.

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

PROBLEMA 2. Definimos los sucesos R = “cursar en modalidad presencial”, V = “cursar en modalidad virtual” y A = “aprobar la asignatura”.

(a) Los datos del problema son: $P(R) = 0,6$, $P(A|V) = 0,2$ y $P(A|R) = 0,35$.

$$P(A) = P(A|R)P(R) + P(A|V)P(V) = 0,35 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot (1 - 0,6) = 0,29.$$

(b) $P(R|A) = \frac{P(A|R)P(R)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,6}{0,29} = \frac{21}{29} = 0,7241$.

(c) $P(V|A) = \frac{P(A|V)P(V)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,29} = \frac{8}{29} = 0,2759$. Otra forma: $P(V|A) = 1 - P(R|A) = 0,2759$.

Como $P(R|A) > P(V|A)$, es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial.

PROBLEMA 3.**(OPCIÓN 3A)**

(a) La primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Por lo tanto, $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ o $x > 1$. Así, $f(x)$ crece para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Así, $f(x)$ decrece para $x \in (-1, 1)$.

La segunda derivada es $f''(x) = 6x$.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1, 3)$ es un máximo relativo.

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow (1, -1)$ es un mínimo relativo.

(b) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Así, $f(x)$ es cóncava para $x \in (0, \infty)$.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Así, $f(x)$ es convexa para $x \in (-\infty, 0)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Además, $f'''(x) = 6 \neq 0$. Luego, $(0, 1)$ es el único punto de inflexión.

(c) $f(1) = -1$ y $f'(1) = 0$. Por lo tanto, la recta tangente es $y - (-1) = 0(x - 1)$, es decir, $y = -1$.

(OPCIÓN 3B)

(a) $I(x) = p(x)x = 100x - 2x^2$.

(b) $B(x) = I(x) - C(x) = -3x^2 + 90x - 600$.

(c) $B(x) = -3x^2 + 90x - 600 = -3(x - 10)(x - 20)$. $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (10, 20)$.

(d) $B'(x) = -6x + 90$. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$. $B''(x) = -6 < 0$, con lo que debe producir 15 unidades. Además, $B(15) = 75$ luego el beneficio máximo es 75000 euros.

(e) $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 600x - \frac{1}{2} \ln(100 - 2x) \right) \Big|_{10}^{20} = \frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right)$.

PROBLEMA 4.
(OPCIÓN 4A)

(a) $A^t = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = a - 2$.

(b) La matriz inversa de A existe si y sólo si $\det A \neq 0$, es decir, si y solo si $a \neq 2$.

Si $a \neq 2$, $A^{-1} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$.

(c) Si $a \neq 2$, $X = A^{-1}(I - B) = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$.

Si $a = 2$, $AX = I - B$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pongamos $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Entonces, $2x_{11} + x_{21} = 0$ y $2x_{11} + x_{21} = -1$ lo que es imposible. Por lo tanto, para $a = 2$ no existe solución.

(d) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(OPCIÓN 4B)

(a) El sistema en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ b+3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Llamamos a la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Su determinante es $\det A = b^2 - 3b + 2$.

(b) A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$, es decir, si y solo si $b \neq 1$ y $b \neq 2$.

(c) Si $b \neq 1$ y $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única.

Si $b = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\text{ran}(A) = 2$. La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\text{ran}(A') = 3$. Por lo tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\text{ran}(A) = 2$. La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\text{ran}(A') = 3$. Por lo tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución.

(d) Para $b = 0$ el sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

La solución es: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$ y $z = 2$.