



UNIBERSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIKOA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

El examen consta de CUATRO problemas:

En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.

Se podrán usar calculadoras que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes, derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

En el cuaderno del examen deberán figurar las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro. La empresa prepara dos tipos de cestas, A y B. Las cestas del tipo A contienen 2 tabletas de turrón del blando y 1 tableta de turrón del duro. Con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 20 euros. Las cestas del tipo B contienen 2 tabletas de turrón del blando y 3 tabletas de turrón del duro, y con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 30 euros. Se quiere conocer cuántas cestas de cada tipo hay que preparar y vender para que el beneficio sea máximo.

- (a) (0,75 puntos) Di cuál es la función objetivo y cuáles son las restricciones.
- (b) (0,75 puntos) Dibuja la región factible.
- (c) (0,5 puntos) ¿Cuántas cestas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el mayor beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio?

PROBLEMA 2. (3 puntos)

El 70% de los jóvenes de un país lee novelas, el 40% lee comics y el 20% no lee ni novelas ni cómics. Se elige al azar a una persona joven de este país.

- (a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que lea novelas o cómics.
- (b) (0.75 puntos) Sabiendo que lee novelas, calcula la probabilidad de que lea cómics.
- (c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea novelas y no cómics?
- (d) (1 punto) Se eligen ahora a 600 jóvenes de este país. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 228 y menos de 270 lean cómics?

PROBLEMA 3. (3 puntos) Responde solo a una de las opciones.**(OPCIÓN 3A)**

- (a) (1.5 puntos) Dibuja el recinto acotado delimitado por las funciones $y = x - 1$, $y = 2x - 2$, $y = x^2 - 2x + 1$.
- (b) (1.5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

(OPCIÓN 3B)

La cantidad de agua que consume una máquina para funcionar depende del tiempo y viene dada por

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad t > 0$$

donde t es el tiempo medido en horas.

- (a) (1 punto) ¿A qué hora consume la máquina la menor cantidad de agua? ¿Cuál es esa cantidad mínima?
- (b) (0,5 puntos) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de agua.
- (c) (0,5 puntos) ¿Tiene la función $f(t)$ algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcula el punto o los puntos.
- (d) (1 punto) Halla la recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$.

PROBLEMA 4. (2 puntos) Responde solo a una de las opciones.

(OPCIÓN 4A)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (0.5 puntos) ¿Es la matriz B invertible?

(b) (1.5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $BX - A = A^2$

(OPCIÓN 4B)

Se considera el siguiente sistema lineal dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}$$

(a) (1 punto) Discute el sistema para los distintos valores de k .

(b) (1 punto) Resuelve el sistema en los casos que sea posible.

Soluciones

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro. La empresa prepara dos tipos de cestas, A y B. Las cestas del tipo A contienen 2 tabletas de turrón del blando y 1 tableta de turrón del duro. Con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 20 euros. Las cestas del tipo B contienen 2 tabletas de turrón del blando y 3 tabletas de turrón del duro, y con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 30 euros. Se quiere conocer cuántas cestas de cada tipo hay que preparar y vender para que el beneficio sea máximo.

(a) (0,75 puntos) Di cuál es la función objetivo y cuáles son las restricciones.

(b) (0,75 puntos) Dibuja la región factible.

(c) (0,5 puntos) ¿Cuántas cestas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el mayor beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio?

(a) Llamamos “x” al número de cestas tipo A e “y” al número de cestas tipo B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Tabletas de turrón blando	Tabletas de turrón duro	Beneficio
Nº cestas tipo A (x)	2x	x	20x
Nº cestas tipo B (y)	2y	3y	30y
TOTALES	2x + 2y	x + 3y	20x + 30y

La función a maximizar son los beneficios $B(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro” $\rightarrow 2x + 2y \leq 2400, x + 3y \leq 1500$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y \leq 2400 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

(b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 1200$$

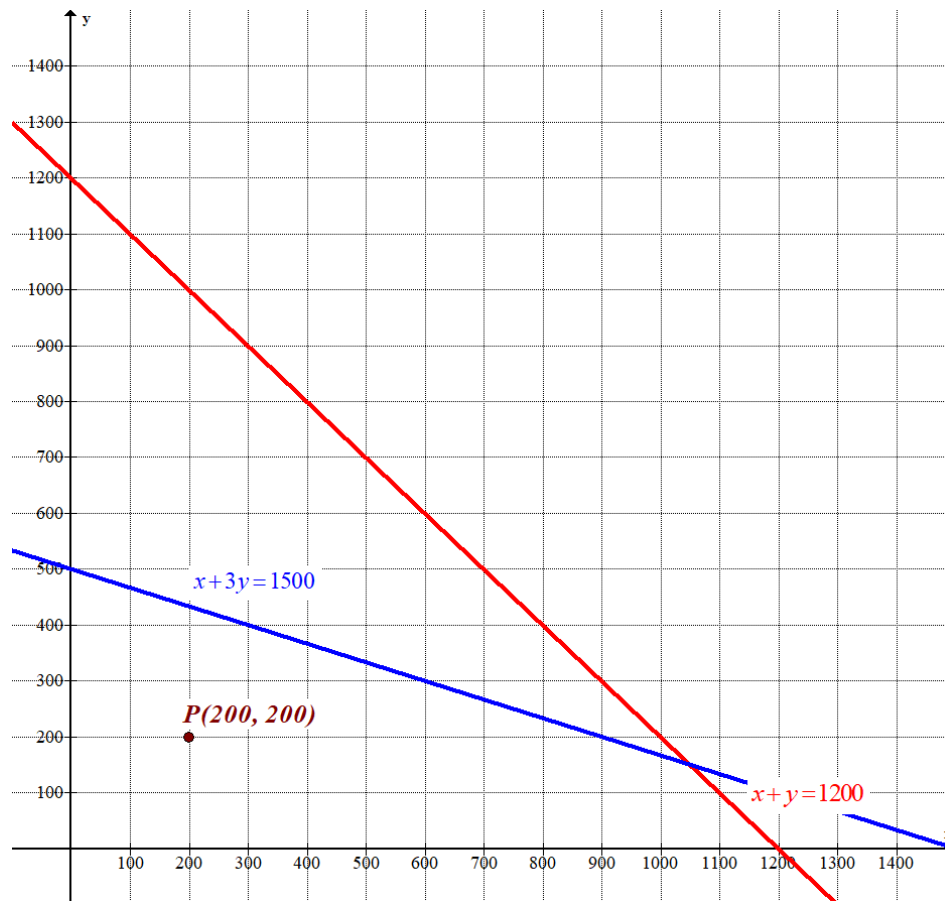
$$x + 3y = 1500$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 1200 - x
0	1200
500	700
1050	150
1200	0

x	y = $\frac{1500 - x}{3}$
0	500
600	300
1050	150
1500	0

Primer
cuadrante



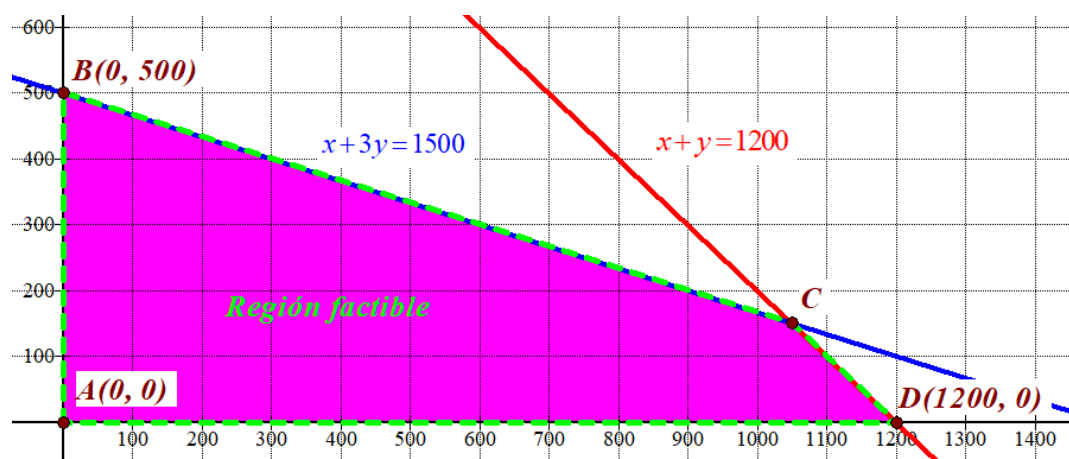
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer

cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(200, 200)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 200 \leq 1200 \\ 200 + 3 \cdot 200 \leq 1500 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



(c) Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 1500 \\ x + y = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 1500 \\ x = 1200 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 1200 - y + 3y = 1500 \Rightarrow 2y = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{300}{2} = 150 \Rightarrow x = 1200 - 150 = 1050 \Rightarrow \boxed{C(1050, 150)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 500) \rightarrow B(0, 500) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 500 = 15000$$

$$C(1050, 150) \rightarrow B(1050, 150) = 20 \cdot 1050 + 30 \cdot 150 = 25500 \text{ Máximo}$$

$$D(1200, 0) \rightarrow B(1200, 0) = 20 \cdot 1200 + 30 \cdot 0 = 24000$$

Los máximos beneficios que se puede obtener en la región factible son de 25 500 € y se obtienen en el punto C(1050, 150).

El beneficio máximo se obtiene con la preparación y venta de 1050 cestas del tipo A y 150 del tipo B. Siendo estos beneficios máximos de un importe de 25500 euros.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

El 70% de los jóvenes de un país lee novelas, el 40% lee comics y el 20% no lee ni novelas ni cómics. Se elige al azar a una persona joven de este país.

- (a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que lea novelas o cómics.
 (b) (0.75 puntos) Sabiendo que lee novelas, calcula la probabilidad de que lea cómics.
 (c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea novelas y no cómics?
 (d) (1 punto) Se eligen ahora a 600 jóvenes de este país. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 228 y menos de 270 lean cómics?

Llamamos N al suceso “el joven elegido lee novelas” y C a “el joven elegido lee cómics”. Los datos proporcionados en términos de probabilidad son:

$$P(N) = 0.7; P(C) = 0.4 \text{ y } P(\overline{N} \cap \overline{C}) = 0.2$$

- (a) Debemos calcular $P(N \cup C)$. Para obtener su valor utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{N} \cap \overline{C}) = 0.2 \Rightarrow P(\overline{N \cup C}) = 0.2 \Rightarrow 1 - P(N \cup C) = 0.2 \Rightarrow \boxed{P(N \cup C) = 1 - 0.2 = 0.8}$$

La probabilidad de que el joven elegido al azar lea novelas o cómics vale 0.8.

- (b) Debemos calcular $P(C / N)$. Hallamos primero $P(N \cap C)$ utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(N \cup C) = P(C) + P(N) - P(N \cap C) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + 0.7 - P(N \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap C) = 0.4 + 0.7 - 0.8 = 0.3$$

Utilizamos el teorema de Bayes para calcular el valor de $P(C / N)$.

$$P(C / N) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{0.3}{0.7} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

Sabiendo que el joven elegido lee novelas, la probabilidad de que lea cómics vale

$$\frac{3}{7} \approx 0.4286.$$

- (c) Debemos calcular $P(N \cap \overline{C})$.

$$P(N) = P(N \cap \overline{C}) + P(N \cap C) \Rightarrow 0.7 = P(N \cap \overline{C}) + 0.3 \Rightarrow \boxed{P(N \cap \overline{C}) = 0.7 - 0.3 = 0.4}$$

La probabilidad de que el joven elegido al azar lea novelas y no cómics vale 0.4.

- (d) Consideramos la variable aleatoria X = Número de jóvenes de un grupo de 600 que lee cómics. Esta variable es una binomial, siendo n = número de repeticiones = 600 y p = Probabilidad de que un joven lea cómics = 0.4. $X = B(600, 0.4)$.

Debemos calcular $P(228 < X < 270)$. Para el cálculo de esta probabilidad aproximamos la variable binomial X a una normal Y de media $\mu = np = 600 \cdot 0.4 = 240$ y desviación

típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 12$. $Y = N(240, 12)$

Esta aproximación es buena pues $np = 240 > 5$ y $nq = 600 \cdot 0.6 = 360 > 5$.

$$P(228 < X < 270) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(228.5 \leq Y \leq 269.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 240}{12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{228.5 - 240}{12} \leq Z \leq \frac{269.5 - 240}{12}\right) = P(-0.96 \leq Z \leq 2.46) =$$

$$= P(Z \leq 2.46) - P(Z \leq -0.96) = P(Z \leq 2.46) - P(Z \geq 0.96) =$$

$$= P(Z \leq 2.46) - [1 - P(Z \leq 0.96)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9931 - 1 + 0.8315 = \boxed{0.8246}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931

La probabilidad de que en un grupo de 600 jóvenes elegidos al azar más de 228 y menos de 270 lean cómics vale 0.8246.

PROBLEMA 3. (3 puntos) (OPCIÓN 3A)

- (a) (1.5 puntos) Dibuja el recinto acotado delimitado por las funciones $y = x - 1$, $y = 2x - 2$, $y = x^2 - 2x + 1$.
- (b) (1.5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

(a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 2x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

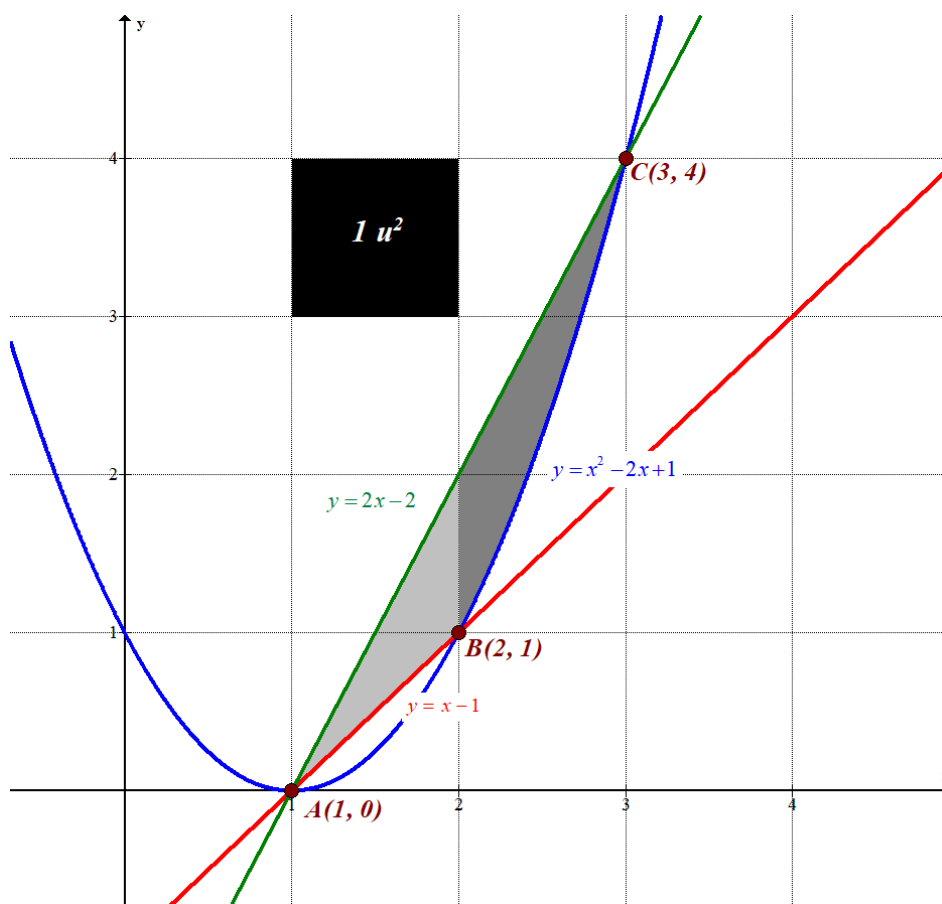
$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = x \rightarrow y = 2 - 1 = 1 \rightarrow B(2, 1) \\ \frac{3-1}{2} = 1 = x \rightarrow y = 1 - 1 = 0 \rightarrow A(1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \rightarrow y = 6 - 2 = 4 \rightarrow C(3, 4) \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \rightarrow y = 2 - 2 = 0 \rightarrow A(1, 0) \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos rectas y la parábola.

$y = x - 1$	$y = 2x - 2$	$y = x^2 - 2x + 1$
$x \mid y = x - 1$	$x \mid y = 2x - 2$	$x \mid y = x^2 - 2x + 1$
0 $\mid$ -1	0 $\mid$ -2	0 $\mid$ 1
1 $\mid$ 0	1 $\mid$ 0	1 $\mid$ 0
2 $\mid$ 1	2 $\mid$ 2	2 $\mid$ 1



(b) El área de la región del plano limitada por las tres gráficas la hallamos como la suma de dos integrales definidas.

$$\text{Área gris claro} = \int_1^2 2x - 2 - (x - 1) dx = \int_1^2 x - 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - 2 \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2} u^2}$$

$$\text{Área gris oscuro} = \int_2^3 2x - 2 - (x^2 - 2x + 1) dx = \int_2^3 -x^2 + 4x - 3 dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_2^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \right] =$$

$$= \cancel{-9 + 18 - 9} + \frac{8}{3} - 8 + 6 = \boxed{\frac{2}{3} u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \approx 1.1667$ unidades cuadradas.

PROBLEMA 3. (3 puntos) (OPCIÓN 3B)

La cantidad de agua que consume una máquina para funcionar depende del tiempo y viene dada por

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad t > 0$$

donde t es el tiempo medido en horas.

- (a) (1 punto) ¿A qué hora consume la máquina la menor cantidad de agua? ¿Cuál es esa cantidad mínima?
- (b) (0,5 puntos) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de agua.
- (c) (0,5 puntos) ¿Tiene la función $f(t)$ algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcula el punto o los puntos.
- (d) (1 punto) Halla la recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$.

(a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \boxed{1=t} \\ \frac{4-2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}=t} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

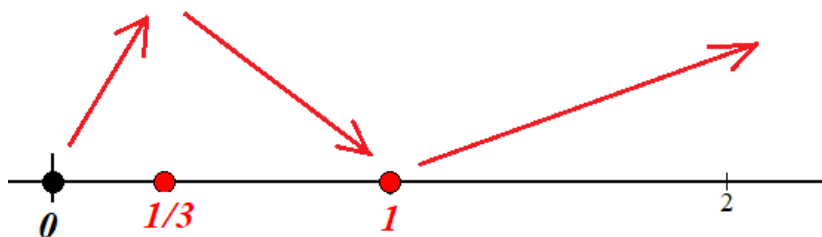
$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \Rightarrow f''(t) = 6t - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \end{cases}$$

La segunda derivada es negativa para $t = \frac{1}{3}$. La función presenta un máximo relativo en $t = \frac{1}{3}$.

La segunda derivada es positiva para $t = 1$. La función presenta un mínimo relativo en $t = 1$.

La máquina consume la menor cantidad de agua para $t = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$, el menor consumo de agua es 0.

- (b) La función tiene una expresión polinómica, por lo que es una función continua. Presenta un máximo relativo en $t = \frac{1}{3}$, por lo que crece en el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Tiene un mínimo relativo en $t = 1$, por lo que decrece en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y crece en $(1, +\infty)$.
- La función sigue el esquema siguiente.



(c) Comprobamos si la segunda derivada se anula para algún valor de t .

$$\left. \begin{array}{l} f''(t) = 6t - 4 \\ f''(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6t - 4 = 0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$$

La segunda derivada se anula para $t = \frac{2}{3}$. Para este valor la función presenta un punto de inflexión pues $f'''(t) = 6$ y sustituyendo tenemos $f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$.

Como $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(\frac{2}{3}, \frac{2}{27})$.

(d) La recta $y - \frac{7}{4}t = 5$ tiene pendiente $m = \frac{7}{4}$. Si la recta tangente en $t = a$ es paralela a esta recta debe tener su misma pendiente y debe cumplirse que $f'(a) = \frac{7}{4}$.

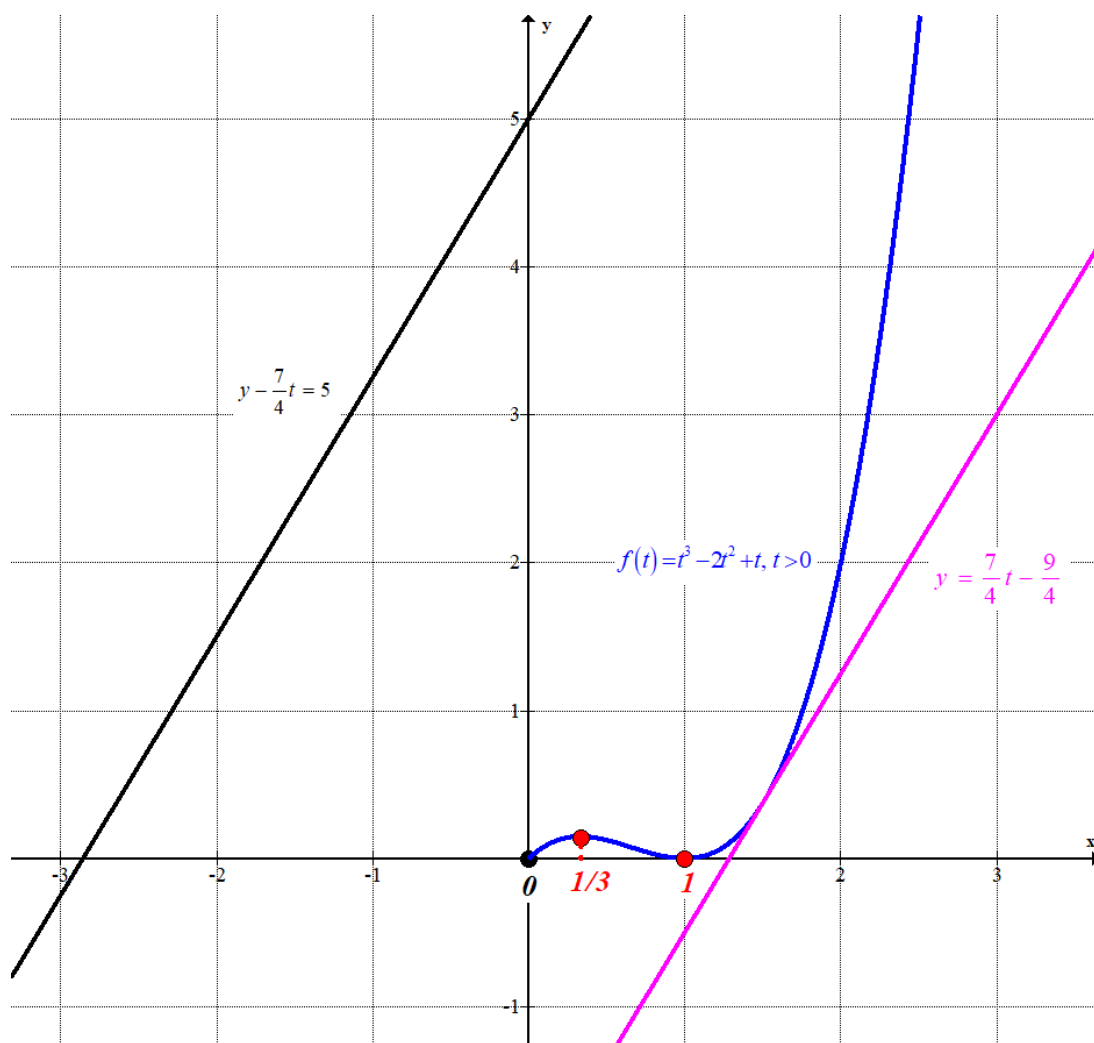
$$\left. \begin{array}{l} f'(a) = \frac{7}{4} \\ f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{4} = 3a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 7 = 12a^2 - 16a + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a^2 - 16a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-3)}}{2 \cdot 12} = \frac{16 \pm 20}{24} = \begin{cases} \frac{16+20}{24} = \frac{3}{2} = a \\ \frac{16-20}{24} = \frac{-1}{6} < 0 \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la función en $x = \frac{3}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 - 2(\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \\ y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(t - \frac{3}{2}) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}(t - \frac{3}{2}) \Rightarrow y - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}t - \frac{21}{8} \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{4}t - \frac{9}{4}}$$

La recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$ tiene ecuación $y = \frac{7}{4}t - \frac{9}{4}$.



PROBLEMA 4. (2 puntos) (OPCIÓN 4A)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (0.5 puntos) ¿Es la matriz B invertible?

(b) (1.5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $BX - A = A^2$

(a) Para que la matriz B sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 4 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

Es determinante de B es distinto de cero y la matriz B es invertible.

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$BX - A = A^2 \Rightarrow BX = A + A^2 \Rightarrow X = B^{-1}(A + A^2)$$

Determinamos la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A + A^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1+1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4B)

Se considera el siguiente sistema lineal dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}$$

(a) (1 punto) Discute el sistema para los distintos valores de k .

(b) (1 punto) Resuelve el sistema en los casos que sea posible.

(a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\text{ampliada } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = k + 45 + 0 + 5k - 3 - 0 = 6k + 42$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6k + 42 = 0 \Rightarrow 6k = -42 \Rightarrow \boxed{k = -7}$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1 $k \neq -7$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = -7$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 7 \quad -3 \quad 0 \\ -1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 10 \quad -4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ -5 \quad 15 \quad -5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 15 \quad -6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 15 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 30 \quad -12 \quad 0 \\ 0 \quad -30 \quad 12 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -3 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 10 \quad -4 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2, siendo iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $k \neq -7$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $k = -7$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

(b) Para $k \neq -7$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Como es un sistema homogéneo y tiene una única solución esta debe ser $x = y = z = 0$.

Resolvemos el sistema para $k = -7$, partiendo del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -3 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 10 \quad -4 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ 10y - 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ 10y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ y = \frac{4z}{10} = \frac{2z}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 \frac{2z}{5} + z = 0 \Rightarrow x = \frac{6z}{5} - z = \frac{z}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{5} \\ y = \frac{2\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \{\lambda = 5\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

Para $k = -7$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5\alpha \end{cases}$.