

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. (2 puntos) Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2, 3, 120)$, $B(20, 42, 120)$, $C(-1, 4, 165)$ y $D(20, 43, 165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = \sin(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) (1,2 puntos) Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3}.$$

3. Sean A , M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) (1 punto) Justifica que A es regular.

b) (1 punto) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1} .

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$:

a) (0,8 puntos) Calcula sus asíntotas.

b) (1,2 puntos) Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3, 5]$.

4.2 (2 puntos) Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 Tenemos dos urnas, A y B , con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) (1 punto) Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) (1 punto) Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B , ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

5.2 (2 puntos) El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$.
- Dado un triángulo ABC , su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A , B , C y D puede ser obtenido por la expresión

$$\text{Volumen} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}.$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

El diseño de esta prueba no solo se centra en evaluar la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también en valorar **la integración de los saberes y las competencias específicas**. Entre ellas, destaca la capacidad de **modelización y resolución de problemas**, y su aplicación para abordar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito científico. **Los estudiantes deberán justificar sus procedimientos y cómo llegaron a sus conclusiones, explicando por qué estas son válidas dentro del contexto del problema.** Aquí se valorará especialmente que los estudiantes puedan explicar procedimientos de forma comprensible.

En conjunto, la evaluación no solo tomará en cuenta la corrección de los procedimientos utilizados, sino también la capacidad de los estudiantes para conectar ideas matemáticas y aplicar los saberes adquiridos a contextos reales, alineando su aprendizaje con los criterios de evaluación establecidos en el currículo.

Criterios adicionales:

- **Deducciones por corrección lingüística:** Los vocales correctores marcarán los errores en el ejercicio y especificarán claramente la deducción efectuada en la nota global en relación con:

1. La corrección ortográfica (grafías y tildes).
2. La coherencia, la cohesión, la corrección gramatical, la corrección léxica y la presentación.

La máxima deducción global en el ejercicio será de 1 punto, conforme a los siguientes criterios:

- Cuando se repita la misma incorrección ortográfica (ya sea grafía o tilde) ésta computará como una sola.
 - Las dos primeras incorrecciones ortográficas no se penalizarán.
 - A partir de la tercera, por cada incorrección ortográfica, ya sea grafía o tilde, se deducirá 0,1 puntos.
 - Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de 0,5 puntos.
 - En aquellos casos en los que la suma de las deducciones anteriores sea superior a un punto, la máxima deducción a aplicar será de 1 punto.
- **Planteamiento y explicaciones:** En las respuestas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas. En ningún caso se otorgará la calificación máxima cuando únicamente se dé el resultado sin aportar ningún cálculo ni explicación. **En cada una de las cinco preguntas, podrán descontarse hasta 0,2 puntos por falta de rigor matemático en la respuesta. Estas penalizaciones, junto con las correspondientes por corrección lingüística, no podrán superar en ningún caso 1 punto en total.**

Algunos ejemplos de situaciones que se considerarán falta de rigor matemático en la respuesta:

- Usar símbolos (como el $=$) de forma inadecuada.
- Si los intervalos no son abiertos (o cerrados) según las condiciones especificadas o se salen del dominio definido en el problema.
- No poner lím cuando es un límite o el valor en el cual se está calculando el límite.
- Notación inadecuada de la integral o no poner la constante de integración.
- No poner dónde se mueve una variable libre o un parámetro.
- La falta de unidades cuando corresponda o que no sean las apropiadas.
- Dividir por una expresión que puede ser nula (o no justificar que no lo es).
- No justificar que una matriz es regular para usar su inversa.
- Dar una probabilidad como porcentaje, o un porcentaje como probabilidad.

La existencia de uno de estos errores en un ejercicio no implicará necesariamente la penalización máxima de 0,2 puntos. Deberá valorarse dentro del contexto del ejercicio y de las explicaciones y justificaciones proporcionadas.

- **Errores y coherencia:** Si se comete un error en una parte de la pregunta que afecta a los resultados posteriores, se valorará si hay coherencia con el resultado erróneo. En tal caso, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. **Resultados absurdos**, como 3,5 personas, áreas negativas o probabilidades mayores que uno o negativas, serán penalizados. Sin embargo, si los estudiantes reconocen y justifican que estos resultados no son posibles y pueden deberse a errores en cálculos anteriores, la penalización será menor.

1. (2 puntos)

- Calcular el plano que pasa por tres de los cuatro puntos: **1,5 puntos**.
- Comprobar si el cuarto punto está o no en el plano: **0,5 puntos**.
Razonamientos válidos como, por ejemplo, que los vectores AB, AC y AD son linealmente independientes o que la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por C y D se cruzan, obtendrán también la puntuación máxima.

2. (2 puntos)

- a. (0,8 puntos) Basta con decir que la derivada de $F(x)$ es $\sin(x^2)$ para obtener la puntuación máxima.
- b. (1,2 puntos)
 - Aplicar bien la regla de L'Hôpital una vez: **0,7 puntos**.
 - Aplicar bien esa regla una segunda vez o utilizar la equivalencia de la función seno para obtener el límite: **0,5 puntos**.

3. (2 puntos)

- a. (1 punto) Se puede obtener la puntuación máxima probando que el determinante de A es no nulo, o bien, viendo que A tiene inversa a izquierda.
- b. (1 punto) Será correcto si dan el valor numérico de la inversa.
Si dicen que la inversa es M-N y no dan el valor numérico: 0,8 puntos.

4.1. (2 puntos)

- a. (0,8 puntos)
 - Cálculo correcto de la asíntota vertical: **0,4 puntos**.
 - Cálculo correcto de la asíntota oblicua: **0,4 puntos**.
Si sólo calculan la pendiente: 0,2 puntos.
- b. (1,2 puntos)
 - Cálculo de f' : **0,3 puntos**.
 - Estudio del signo de f' : **0,3 puntos**.
 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento: **0,2 puntos**.
 - Justificación de la cota inferior por un método correcto: **0,4 puntos**.

4.2. (2 puntos)

- Cálculo de la recta tangente: **0,6 puntos**.
- Cálculo de los puntos de corte: **0,3 puntos**.
- Plantear el cálculo del área como la integral correspondiente: **0,1 puntos**.
- Cálculo de una primitiva: **0,6 puntos**.
- Aplicar la regla de Barrow y concluir el valor del área: **0,4 puntos**.

5.1. (2 puntos)

- a. (1 punto)
 - Calcular la probabilidad de los dos sucesos de uno de estos dos bloques: **0,4 puntos**.
 - Bloque 1:
 - Sacar dos bolas rojas.
 - Sacar dos bolas azules.
 - Bloque 2:
 - Sacar bola roja de A y bola azul de B.
 - Sacar bola azul de A y bola roja de B.
 - Calcular la probabilidad de uno de los siguientes sucesos: **0,4 puntos**.
 - Sacar dos bolas del mismo color.
 - Sacar dos bolas de distinto color.
 - Concluir el resultado: **0,2 puntos**.
- b. (1 punto)
 - Expresar correctamente la fórmula de la probabilidad total: **0,4 puntos**.
 - Calcular la probabilidad utilizando esa fórmula: **0,6 puntos**.

5.2. (2 puntos) Se puede obtener la puntuación máxima utilizando la simetría respecto de la media.

Si se calcula la desviación típica y el punto a tal que $P(X < a) = 0,2$, entonces:

- Extraer del enunciado que $P(X > 148,44) = 0,2$: **0,2 puntos**.
- Relacionar la probabilidad anterior con la de la distribución normal estándar: **0,4 puntos**.
- Obtener el valor de la desviación típica: **0,4 puntos**.
- Plantear que debe calcularse a para $P(X < a) = 0,2$: **0,1 puntos**.
- Relacionar la probabilidad anterior con la de la distribución normal estándar: **0,2 puntos**.
- Relacionar la probabilidad anterior con valores positivos: **0,2 puntos**.
- Relacionar la probabilidad anterior con la del suceso contrario: **0,2 puntos**.
- Responder a la pregunta: **0,3 puntos**.