



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. (2 puntos) Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2, 3, 120)$, $B(20, 42, 120)$, $C(-1, 4, 165)$ y $D(20, 43, 165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = \sin(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) (1,2 puntos) Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3}$$

3. Sean A , M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) (1 punto) Justifica que A es regular.

b) (1 punto) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1} .

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

a) (0,8 puntos) Calcula sus asíntotas.

b) (1,2 puntos) Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3, 5]$

4.2 (2 puntos) Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 Tenemos dos urnas, A y B, con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) (1 punto) Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) (1 punto) Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

5.2 (2 puntos) El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

▪ En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$.

▪ Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

▪ Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$.

▪ El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D puede ser obtenido por la expresión

$$\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}.$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2, 3, 120)$, $B(20, 42, 120)$, $C(-1, 4, 165)$ y $D(20, 43, 165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

Para que la silla no cojee al bajarla de la mesa los cuatro puntos A, B, C y D deben ser coplanarios cuando están sobre la mesa.

Hallamos el plano π que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(-2, 3, 120) \in \pi \\ B(20, 42, 120) \in \pi \\ C(-1, 4, 165) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (20, 42, 120) - (-2, 3, 120) = (22, 39, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 4, 165) - (-2, 3, 120) = (1, 1, 45) \\ C(-1, 4, 165) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-165 \\ 22 & 39 & 0 \\ 1 & 1 & 45 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39 \cdot 45(x+1) + 0 + 22(z-165) - 39(z-165) - 22 \cdot 45(y-4) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1755x + 1755 + 22z - 3630 - 39z + 6435 - 990y + 3960 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 1755x - 990y - 17z + 8520 = 0}$$

Comprobamos si los cuatro puntos son coplanarios viendo si el punto D pertenece al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 1755x - 990y - 17z + 8520 = 0 \\ \text{¿} D(20, 43, 165) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1755 \cdot 20 - 990 \cdot 43 - 17 \cdot 165 + 8520 = 0? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} 35100 - 42570 - 2805 + 8520 = 0? \Rightarrow \text{¿} 43620 - 45375 = 0? \Rightarrow \text{¡¡¡ NO!!!}$$

Los cuatro puntos no son coplanarios y la silla cojeará al ponerla en el suelo.

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = \sin(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) (1,2 puntos) Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3}$$

a) La derivada de $F(x)$ es la función $f(x) = \sin(x^2)$.

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{F(0)}{0^3} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{\sin(0^2)}{3 \cdot 0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos(x^2)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{3} = \frac{\cos(0^2)}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3. Sean A , M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) (1 punto) Justifica que A es regular.

b) (1 punto) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1} .

a) Despejamos I de la igualdad $M \cdot A = I + N \cdot A$.

$$M \cdot A - N \cdot A = I \Rightarrow (M - N)A = I \Rightarrow \boxed{M - N = A^{-1}}$$

La matriz A es regular o invertible y su inversa es $A^{-1} = M - N$.

b) En el apartado anterior hemos obtenido que $A^{-1} = M - N$. Determinamos la inversa de A usando esta igualdad.

$$A^{-1} = M - N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hemos obtenido que } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

a) (0,8 puntos) Calcula sus asíntotas.

b) (1,2 puntos) Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3, 5]$

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \frac{2^2}{2-2} = \frac{4}{0} = \infty$$

La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{2}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{1} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos $x = 0$, $x = 4$ y el punto excluido del dominio $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 4(-1)}{(-1-2)^2} = \frac{5}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 4 \cdot 1}{(1-2)^2} = -3 < 0$.

La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 4 \cdot 3}{(3-2)^2} = -3 < 0$.

La función decrece en $(2, 4)$.

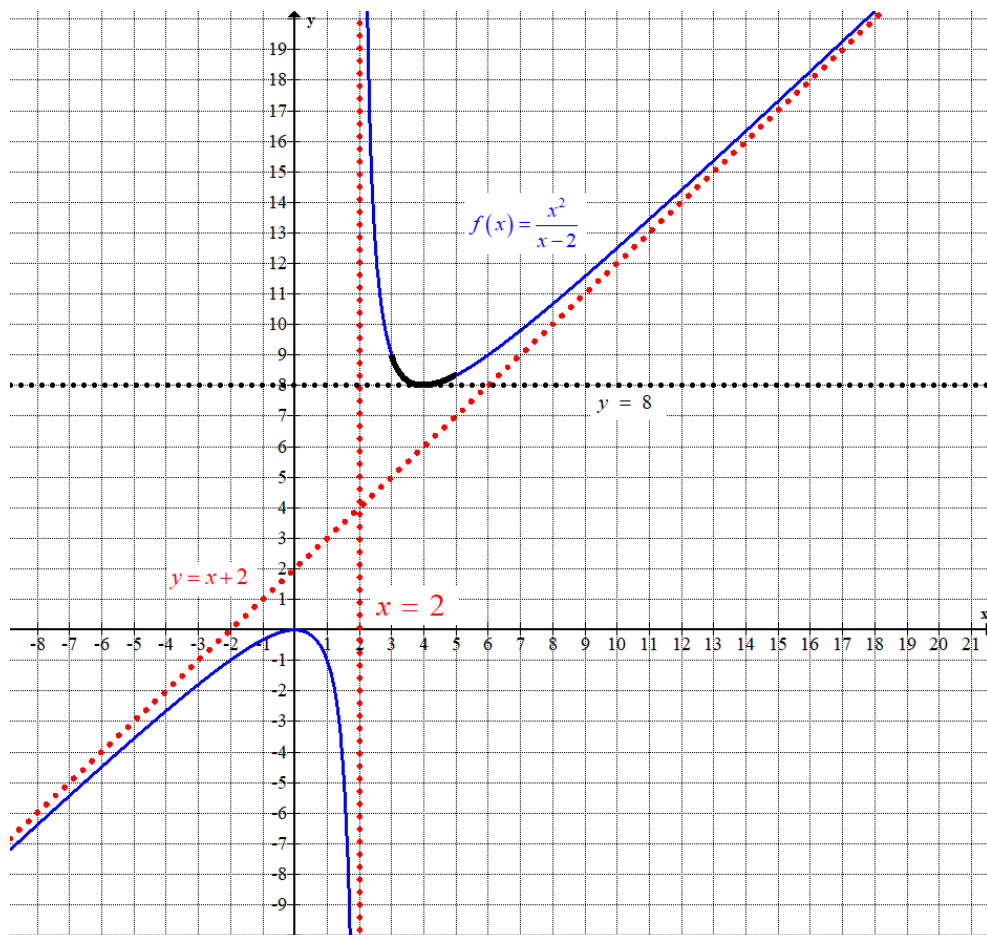
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5^2 - 4 \cdot 5}{(5-2)^2} = \frac{5}{9} > 0$.

La función crece en $(4, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

La función es continua en el intervalo $[3, 5]$. Hemos visto que en el intervalo $[3, 4)$ la función decrece y en el intervalo $(4, 5]$ la función crece. Por ello la función tiene un mínimo relativo en $x = 4$ que es mínimo absoluto en el intervalo $[3, 5]$. En este intervalo todos los valores

de la función serán mayores o iguales que $f(4) = \frac{4^2}{4-2} = \frac{16}{2} = 8$.



4.2 (2 puntos) Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= -2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 - 4 = 6 \\ f'(x) &= -3x^2 + 8x + 1 \rightarrow f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 = 5 \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 6 = 5(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 6 = 5x - 10 \Rightarrow \boxed{y = 5x - 4}$$

Hallamos los puntos de corte entre la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente $y = 5x - 4$. Sabemos que uno de ellos es $x = 2$.

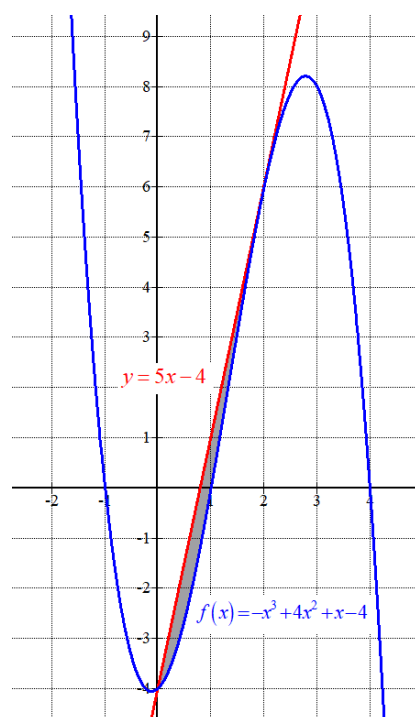
$$\left. \begin{aligned} y &= 5x - 4 \\ f(x) &= -x^3 + 4x^2 + x - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5x - 4 = -x^3 + 4x^2 + x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 + 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2 \end{cases}$$

El área de la región del plano encerrada entre la gráfica de la función y la tangente a la función en $x = 2$ se obtiene como el valor absoluto de la integral definida de 0 a 2 de la diferencia de las dos funciones. Si tomamos un valor $x = 1 \in (0, 2)$ tenemos que el valor de la función es $f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 4 = 0$ y el valor de la tangente es $y = 5 \cdot 1 - 4 = 1$. La función está situada por debajo de la tangente. Para calcular la integral tomamos la diferencia $(5x - 4) - (-x^3 + 4x^2 + x - 4) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 x^3 - 4x^2 + 4x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{4 \cdot 0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] = \\ &= 4 - \frac{32}{3} + 8 = \boxed{\frac{4}{3} \approx 1.3333 u^2} \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ tiene un valor de $\frac{4}{3} \approx 1.3333$ unidades cuadradas.



5.1 Tenemos dos urnas, A y B, con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) (1 punto) Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) (1 punto) Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

a) Llamamos R_a a “sacar bola roja de la urna A”, R_b a “sacar bola roja de urna B”, A_a a “sacar bola azul de la urna A” y A_b a “sacar bola azul de la urna B”.

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(R_a) = \frac{2}{5} = 0.4; P(R_b) = \frac{3}{5} = 0.6; P(A_a) = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ y } P(A_b) = \frac{2}{5} = 0.4$$

Calculamos la probabilidad de sacar dos bolas azules y de sacar dos bolas rojas

$$P(\text{Dos bolas azules}) = P(A_a \cap A_b) = P(A_a) \cdot P(A_b) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$$

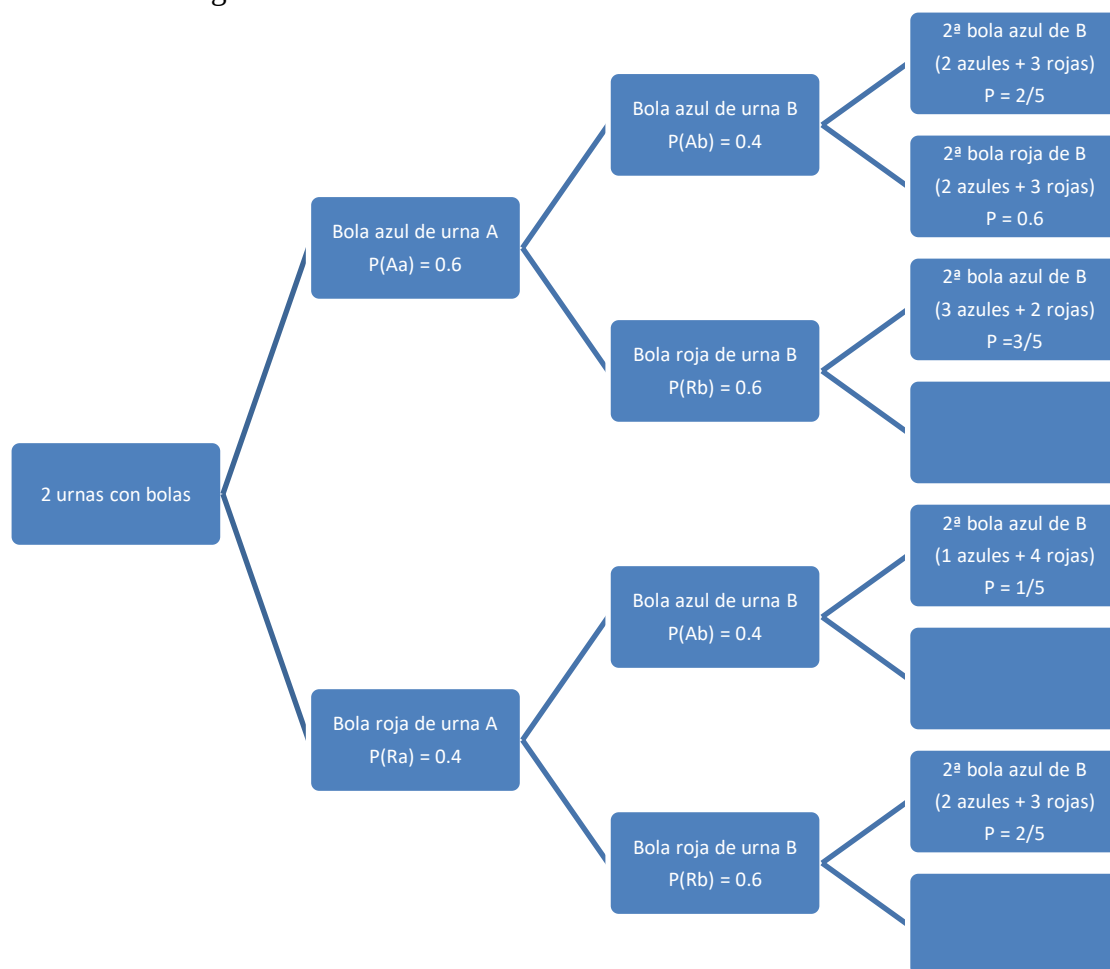
$$P(\text{Dos bolas rojas}) = P(R_a \cap R_b) = P(R_a) \cdot P(R_b) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$$

La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color es la suma de las probabilidades obtenidas previamente: $0.24 + 0.24 = 0.48$.

Como sacar dos bolas de distinto color es el suceso contrario su probabilidad es $1 - 0.48 = 0.52$.

Como $0.52 > 0.48$ podemos concluir que es más probable sacar dos bolas de distinto color.

b) Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de sacar una bola azul de la urna B tras el intercambio de bolas es la suma de cada una de las probabilidades que aparecen favorables a este suceso en el diagrama de árbol.

$$P(2^{\text{a}} \text{ bola azul}) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot \frac{2}{5} + 0.6 \cdot 0.6 \cdot \frac{3}{5} + 0.4 \cdot 0.4 \cdot \frac{1}{5} + 0.4 \cdot 0.6 \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{11}{25} = 0.44}$$

5.2 (2 puntos) El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día. ¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Consideramos X = “el consumo diario de agua (en litros) por persona en los hogares de la comunidad” $X = N(135, \sigma)$.

Los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día $\rightarrow P(X > 148.44) = 0.20$.

Hallamos el valor de la desviación típica.

$$P(X > 148.44) = 0.20 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 135}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{148.44 - 135}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{13.44}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{13.44}{\sigma}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.84 = \frac{13.44}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{13.44}{0.84} = 16$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995

La distribución normal del consumo diario de agua por día y persona tiene desviación típica $\sigma = 16$ litros. $X = N(135, 16)$.

Determinamos la cantidad de agua c que consumen el 20% de los hogares que consumen menos.

$$P(X < c) = 0.2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 135}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{c - 135}{16}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > -\frac{c - 135}{16}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{135 - c}{16}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{135 - c}{16}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

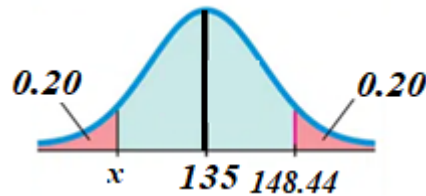
$$\Rightarrow \frac{135 - c}{16} = 0.84 \Rightarrow 135 - c = 13.44 \Rightarrow 135 - 13.44 = c \Rightarrow \boxed{c = 121.56}$$

El 20 % de los hogares con menor consumo tienen un consumo por persona y día inferior a 121,56 litros.

OTRA FORMA DE RAZONARLO

La media de la distribución normal es de 135 litros. El 20% de los hogares de mayor consumo tienen un consumo superior a 148,44 litros. Este consumo supera en $148.44 - 135 = 13.44$ litros la media de consumo.

Por la simetría de la distribución el 20% de los hogares con menor consumo estarán 13.44 litros por debajo de la media, es decir, por debajo de $135 - 13.44 = 121.56$ litros por persona y día.



Los hogares a los que le bajarán las tasas tienen un consumo diario por persona inferior a 121.56 litros.