



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Model 1

La prueba consta de cinco preguntas: las tres primeras obligatorias, y en la cuarta y quinta se puede elegir entre dos opciones. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Véase la puntuación en cada ejercicio.

Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte

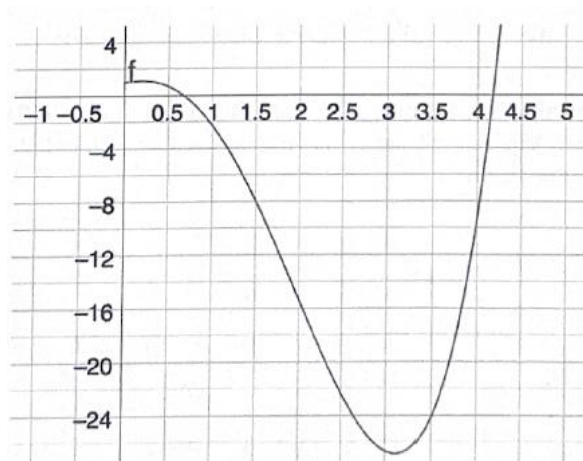
Problema 1.– En un estudio de astronomía, se modeliza una constelación artificial formada por satélites que orbitan alrededor de la Tierra. Considerando nuestro sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra (donde las unidades representan decenas de miles de kilómetros), se sitúan 5 satélites, A, B, C, D y E, con coordenadas

$$A(1, 2, 3), B(3, 2, 1), C(5, 4, 3), D(2, 1, 1), E(4, 3, 1)$$

Se dice que distintos satélites forman un plano orbital si estos, junto con el centro de la Tierra, son coplanarios.

- (a) [1 punto] Determine si los satélites A, B y C forman un plano orbital.
 (b) [1 punto] Proporciona un punto F (distinto del origen) donde se podría colocar un sexto satélite para asegurar que los satélites D, E y F forman otro plano orbital.

Problema 2.– Dada la función $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que tiene la siguiente representación gráfica:



- (a) [1 punto] Calcula los límites de la función en los extremos de su dominio.
 (b) [1 punto] Calcula el área comprendida entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ y $x = 4$,

Problema 3.– En un instituto de 60 alumnos se ha realizado un estudio sobre la práctica del baloncesto entre el alumnado. Los datos recogidos indican que el 60% de ellos juega al baloncesto, el 35% forma parte de un equipo federado y el 25% juega al baloncesto y está federado.

- (a) **[1 punto]** ¿Hay algún alumno que esté federado, pero no juegue al baloncesto? En caso afirmativo, ¿Cuántos?
- (b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno forme parte de un equipo federado sabiendo que juega al baloncesto?

Parte B. preguntas 4 y 5

Problema 4.– Contestad sólo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Dada la función $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 2}$,

- (a) **[1.25 puntos]** Demuestra que $f(x)$ tiene al menos un punto crítico en cada uno de los siguientes intervalos: $(-3, -2.5)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$
- (b) **[0.75 puntos]** Sabiendo que $f(x)$ tiene exactamente 3 puntos críticos, uno en cada intervalo del apartado anterior, indica si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

P4.2 Un equipo de investigadores estudia la distancia recorrida por un delfín desde el punto en el que ha sido liberado dentro de una reserva marina. La distancia recorrida al cabo de t segundos viene dada por la función

$$d(t) = 140(1 - e^{-0.05t})$$

donde $t > 0$ y $d(t)$ es la distancia en metros. Sea $d'(t)$ la velocidad, en m/s, en el instante t .

- (a) **[0.5 puntos]** Calcula a qué valor tiende la distancia recorrida por el delfín a lo largo del tiempo.
- (b) **[1.5 puntos]** Estudia el comportamiento de la velocidad del delfín, indicando en qué momentos aumenta o disminuye, así como cuáles son las velocidades mínima y la máxima observadas en este estudio.

Problema 5.– Contestad sólo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1 [2 puntos] Sean A , B , C y D cuatro matrices de dimensiones 2×3 , 1×3 , 2×3 y 2×3 , respectivamente. Indica, justificadamente, si se pueden realizar las siguientes operaciones:

- (i) AC ,
- (ii) $D^{-1}A$,
- (iii) $B(A+C)^T$,

donde el superíndice T indica la matriz transpuesta y el superíndice $^{-1}$ indica la matriz inversa. En caso afirmativo, indica la dimensión de la matriz resultado.

P5.2 [2 puntos] Queremos determinar el coste por hora de tres servicios que ofrece una empresa de alquiler de material audiovisual. Estos servicios son: iluminación profesional, con un coste de x €/hora; equipo de sonido, con un coste de y €/hora; cámaras de grabación, con un coste de z €/hora. Se han registrado los gastos totales asociados a tres eventos diferentes:

$$\text{Evento 1: } 2x + y + z = 6500$$

$$\text{Evento 2: } 4x + 5y + 7z = 22500$$

$$\text{Evento 3: } x + 2y + 3z = 8000$$

Justifica si, con la información proporcionada, se pueden determinar de manera única los costes de los tres servicios.

SOLUCIONES

Problema 1.– En un estudio de astronomía, se modeliza una constelación artificial formada por satélites que orbitan alrededor de la Tierra. Considerando nuestro sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra (donde las unidades representan decenas de miles de kilómetros), se sitúan 5 satélites, A, B, C, D y E, con coordenadas

$$A(1, 2, 3), B(3, 2, 1), C(5, 4, 3), D(2, 1, 1), E(4, 3, 1)$$

Se dice que distintos satélites forman un plano orbital si estos, junto con el centro de la Tierra, son coplanarios.

- (a) **[1 punto]** Determine si los satélites A, B y C forman un plano orbital.
 (b) **[1 punto]** Proporciona un punto F (distinto del origen) donde se podría colocar un sexto satélite para asegurar que los satélites D, E y F forman otro plano orbital.

- a) Hallamos el plano π determinado por los puntos $O(0,0,0)$, A y B. Luego comprobamos si el punto C pertenece a este plano.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ A(1,2,3) \in \pi \\ B(3,2,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1,2,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (3,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 9y + 2z - 6z - y - 6x = 0 \Rightarrow \pi: -4x + 8y - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 2y + z = 0}$$

Comprobamos que el punto C pertenece a este plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - 2y + z = 0 \\ C(5,4,3) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 5 - 2 \cdot 4 + 3 = 0? \\ \end{array} \Rightarrow 5 - 8 + 3 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Los puntos A, B y C forman un plano orbital.

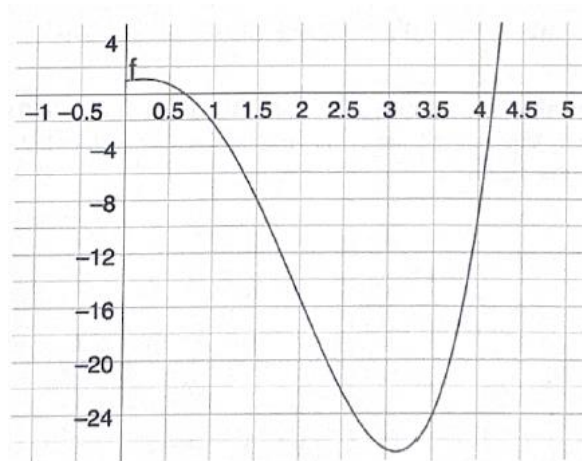
- b) Hallamos el plano π' determinado por los puntos $O(0,0,0)$, D y E.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ D(2,1,1) \in \pi' \\ E(4,3,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{OD} = (2,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OE} = (4,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 4y + 6z - 4z - 2y - 3x = 0 \Rightarrow -2x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - z = 0}$$

El satélite F puede colocarse en cualquier punto del plano π' . Por ejemplo, tomamos $x = y = 1$, por lo que debe ser $z = 0$. El punto elegido es el punto $F(1,1,0)$ que pertenece al plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos D y E.

Problema 2.– Dada la función $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que tiene la siguiente representación gráfica:



(a) [1 punto] Calcula los límites de la función en los extremos de su dominio.

(b) [1 punto] Calcula el área comprendida entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ y $x = 4$,

(a) Para que exista la raíz cuadrada y no se anule el denominador debe ser $x > 0$. El dominio de la función son todos los números reales positivos $(0, +\infty)$.

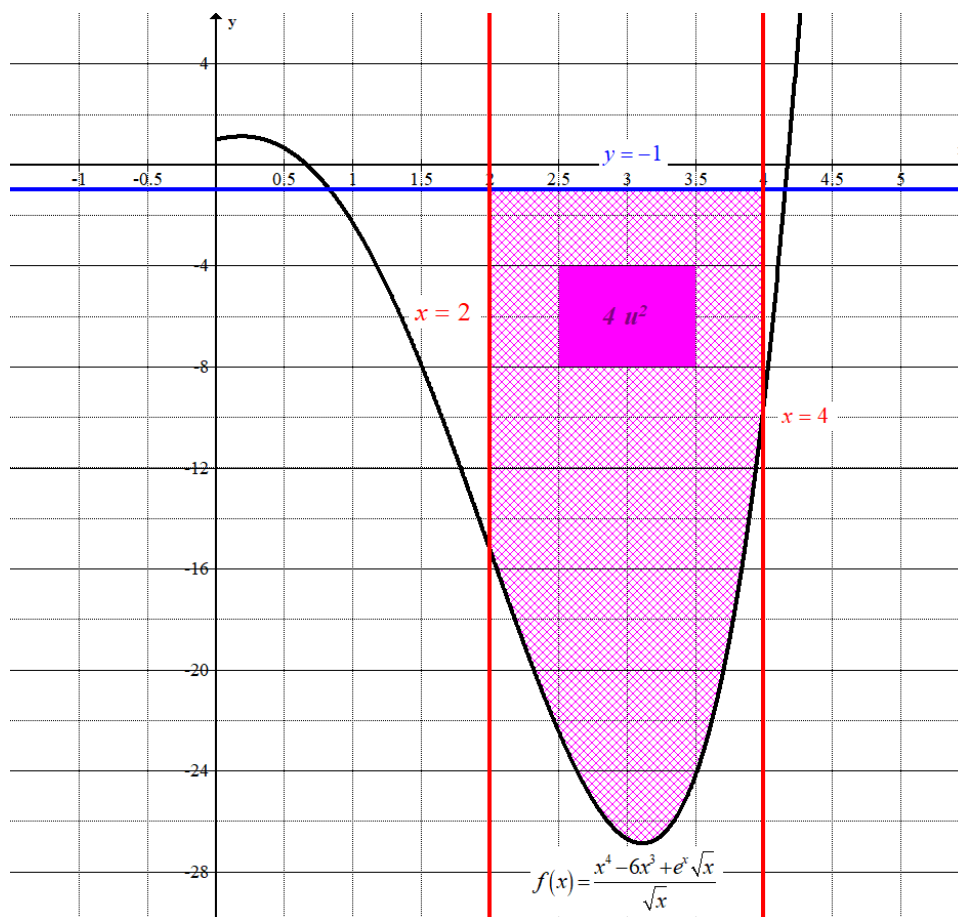
Hallamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la derecha.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{\sqrt{x}} - \frac{6x^3}{\sqrt{x}} + \frac{e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x = 0^{7/2} - 6 \cdot 0^{5/2} + e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Hallamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x}} - \frac{6x^3}{\sqrt{x}} + \frac{e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{7/2} - 6x^{5/2}) + e^x = +\infty + e^{+\infty} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

(b) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.



El área de la región coloreada es el valor de la integral definida de 2 a 4 de la diferencia de las funciones $y = -1$ y $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_2^4 -1 - \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 -1 - (x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x) dx = \\
 &= \int_2^4 -1 - x^{7/2} + 6x^{5/2} - e^x dx = \left[-x - \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + \frac{6x^{5/2+1}}{5/2+1} - e^x \right]_2^4 = \left[-x - \frac{2x^{9/2}}{9} + \frac{12x^{7/2}}{7} - e^x \right]_2^4 = \\
 &= \left[-4 - \frac{2 \cdot 4^{9/2}}{9} + \frac{12 \cdot 4^{7/2}}{7} - e^4 \right] - \left[-2 - \frac{2 \cdot 2^{9/2}}{9} + \frac{12 \cdot 2^{7/2}}{7} - e^2 \right] = \\
 &= -4 - \frac{1024}{9} + \frac{1536}{7} - e^4 + 2 + \frac{32\sqrt{2}}{9} - \frac{96\sqrt{2}}{7} + e^2 = \\
 &= \boxed{-2 + \frac{32\sqrt{2} - 1024}{9} + \frac{1536 - 96\sqrt{2}}{7} - e^4 + e^2 \simeq 42.08 u^2}
 \end{aligned}$$

Problema 3.– En un instituto de 60 alumnos se ha realizado un estudio sobre la práctica del baloncesto entre el alumnado. Los datos recogidos indican que el 60% de ellos juega al baloncesto, el 35% forma parte de un equipo federado y el 25% juega al baloncesto y está federado.

- (a) **[1 punto]** ¿Hay algún alumno que esté federado, pero no juegue al baloncesto? En caso afirmativo, ¿Cuántos?
- (b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno forme parte de un equipo federado sabiendo que juega al baloncesto?

- (a) Hay $0.6 \cdot 60 = 36$ alumnos que juegan al baloncesto. Hay $0.35 \cdot 60 = 21$ alumnos que están federados. Hay $0.25 \cdot 60 = 15$ alumnos que juegan al baloncesto y están federados. Hay $21 - 15 = 6$ alumnos que están federados y no juegan al baloncesto. Quizás se vea más claro poniendo los datos en una tabla de contingencia.

	Federado	No federado	
Baloncesto	15		36
No baloncesto			
	21		60

Completamos la tabla.

	Federado	No federado	
Baloncesto	15		36
No baloncesto	6		
	21		60

Hay 6 alumnos que no juegan al baloncesto y están federados.

- (b) Llamamos B al suceso “el alumno juega al baloncesto” y F a “el alumno forma parte de un equipo federado”. Con la información que nos dan tenemos las probabilidades siguientes:

$$P(B) = 0.6; P(F) = 0.35; P(B \cap F) = 0.25$$

Debemos calcular $P(F/B)$. Si utilizamos los datos de la tabla elaborada en el apartado anterior sabemos que hay 36 jugadores de baloncesto y 15 de ellos están federados.

Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(F/B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$.

OTRA FORMA

Utilizando el teorema de Bayes.

$$P(F/B) = \frac{P(B \cap F)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.6} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$$

P4.1 Dada la función $f(x) = \frac{x^3+1}{x+2}$,

- (a) **[1.25 puntos]** Demuestra que $f(x)$ tiene al menos un punto crítico en cada uno de los siguientes intervalos: $(-3, -2.5)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$
 (b) **[0.75 puntos]** Sabiendo que $f(x)$ tiene exactamente 3 puntos críticos, uno en cada intervalo del apartado anterior, indica si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

(a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Hallamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - 1 \cdot (x^3+1)}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3 - 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{(x+2)^2}$$

La derivada de la función es una función continua en $[-3, -2.5]$, pues $x = -2$ no pertenece a este intervalo. La función derivada toma valores de distinto signo en el intervalo $(-3, -2.5)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-3) &= \frac{2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 1}{(-3+2)^2} = -1 < 0 \\ f'(-2.5) &= \frac{2 \cdot (-2.5)^3 + 6 \cdot (-2.5)^2 - 1}{(-2.5+2)^2} = 21 > 0 \end{aligned} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos decir que existe $b \in (-3, -2.5)$ tal que $f'(b) = 0$. La función tiene un punto crítico en $b \in (-3, -2.5)$.

La derivada de la función es continua en $[-1, 0]$, pues $x = -2$ no pertenece a este intervalo. La función derivada toma valores de distinto signo en el intervalo $(-1, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= \frac{2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 1}{(-1+2)^2} = 3 > 0 \\ f'(0) &= \frac{2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1}{(0+2)^2} = -0.25 < 0 \end{aligned} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos decir que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f'(c) = 0$. La función tiene un punto crítico en $c \in (-1, 0)$.

La derivada de la función es continua en $[0, 1]$, pues $x = -2$ no pertenece a este intervalo. La función derivada toma valores de distinto signo en el intervalo $(0, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= \frac{2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 1}{(1+2)^2} = \frac{7}{9} > 0 \\ f'(0) &= \frac{2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1}{(0+2)^2} = -0.25 < 0 \end{aligned} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos decir que existe $d \in (0, 1)$ tal que $f'(d) = 0$. La función tiene un punto crítico en $d \in (0, 1)$.

(b) Si esos tres puntos críticos son los únicos de la función basta determinar si la función crece o decrece al comienzo y al final del intervalo para saber que tipo de punto crítico es.

En el intervalo $(-3, -2.5)$:

$$\left. \begin{aligned} f'(-3) &= \frac{2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 1}{(-3+2)^2} = -1 < 0 \\ f'(-2.5) &= \frac{2 \cdot (-2.5)^3 + 6 \cdot (-2.5)^2 - 1}{(-2.5+2)^2} = 21 > 0 \end{aligned} \right\}$$

La función decrece antes del punto crítico $b \in (-3, -2.5)$ y luego crece. La función tiene un mínimo relativo en el punto crítico $b \in (-3, -2.5)$.

En el intervalo $(-1, 0)$

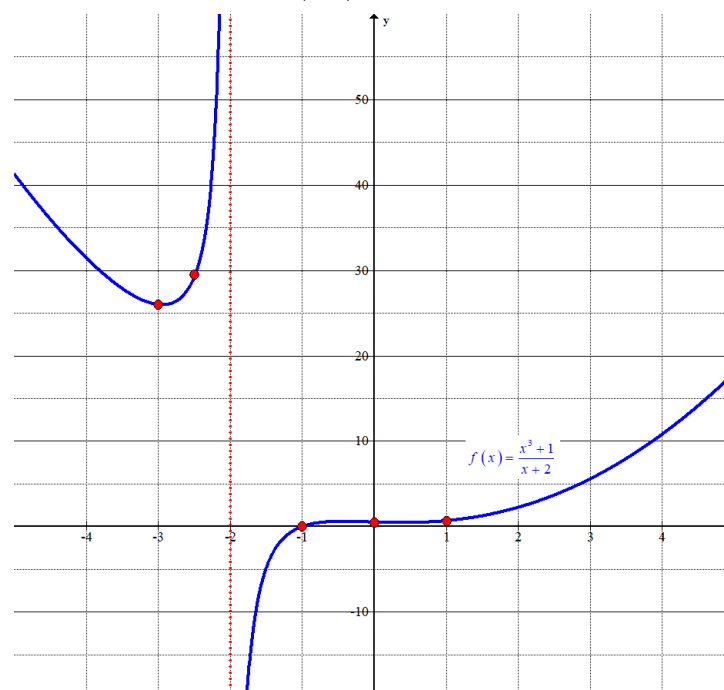
$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= \frac{2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 1}{(-1+2)^2} = 3 > 0 \\ f'(0) &= \frac{2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1}{(0+2)^2} = -0.25 < 0 \end{aligned} \right\}$$

La función crece antes del punto crítico $c \in (-1, 0)$ y luego decrece. La función tiene un máximo relativo en el punto crítico $c \in (-1, 0)$.

En el intervalo $(0, 1)$

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= \frac{2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1}{(0+2)^2} = -0.25 < 0 \\ f'(1) &= \frac{2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 1}{(1+2)^2} = \frac{7}{9} > 0 \end{aligned} \right\}$$

La función decrece antes del punto crítico $d \in (0, 1)$ y luego crece. La función tiene un mínimo relativo en el punto crítico $d \in (0, 1)$.



P4.2 Un equipo de investigadores estudia la distancia recorrida por un delfín desde el punto en el que ha sido liberado dentro de una reserva marina. La distancia recorrida al cabo de t segundos viene dada por la función

$$d(t) = 140(1 - e^{-0.05t})$$

donde $t > 0$ y $d(t)$ es la distancia en metros. Sea $d'(t)$ la velocidad, en m/s, en el instante t .

- (a) **[0.5 puntos]** Calcula a qué valor tiende la distancia recorrida por el delfín a lo largo del tiempo.
- (b) **[1.5 puntos]** Estudia el comportamiento de la velocidad del delfín, indicando en qué momentos aumenta o disminuye, así como cuáles son las velocidades mínima y la máxima observadas en este estudio.

(a) Hallamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 140(1 - e^{-0.05t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 140 \left(1 - \frac{1}{e^{0.05t}} \right) = 140 \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) = 140(1 - 0) = 140$$

El delfín tiende a estar a 140 metros de la reserva marina.

(b) Hallamos la derivada de $d'(t)$ y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$d(t) = 140(1 - e^{-0.05t}) \Rightarrow d'(t) = 140 \cdot (-(-0.05e^{-0.05t})) = 7e^{-0.05t}$$

$$d''(t) = -0.05 \cdot 7e^{-0.05t} = -0.35e^{-0.05t} = \frac{-0.35}{e^{0.05t}}$$

Esta expresión de la derivada de la función velocidad siempre es negativa, por lo que la velocidad siempre va disminuyendo.

La velocidad máxima es la del momento inicial $t = 0$: $d'(0) = 7e^{-0.05 \cdot 0} = 7$ m/s.

La velocidad mínima no se alcanza en ningún momento concreto, aunque podemos decir que la velocidad tiende a ser 0 m/s.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 7e^{-0.05t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{7}{e^{0.05t}} = \frac{7}{+\infty} = 0$$

P5.1 [2 puntos] Sean A, B, C y D cuatro matrices de dimensiones $2 \times 3, 1 \times 3, 2 \times 3$ y 2×3 , respectivamente. Indica, justificadamente, si se pueden realizar las siguientes operaciones:

(i) AC ,

(ii) $D^{-1}A$,

(iii) $B(A+C)^T$,

donde el superíndice T indica la matriz transpuesta y el superíndice $^{-1}$ indica la matriz inversa. En caso afirmativo, indica la dimensión de la matriz resultado.

(i) Comprobamos si es posible el producto AC .

$$\begin{array}{c} A \cdot C \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 2} \times 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

Las matrices A y C tienen dimensión 2×3 . No es posible el producto pues A tiene 3 columnas y B tiene 2 filas. No coinciden estos valores y el producto no se puede realizar.

(ii) La matriz D tiene dimensión 2×3 y no es cuadrada, por tanto, no tiene inversa, no se puede calcular D^{-1} . No es posible el cálculo de $D^{-1}A$.

(iii) Las matrices A y C tienen dimensión 2×3 , por lo que se puede calcular $A + C$, siendo esta matriz de dimensión 2×3 . La matriz $(A+C)^T$ es de dimensión 3×2 . La matriz B es de dimensión 1×3 . Si es posible el cálculo de $B(A+C)^T$.

$$\begin{array}{c} B \cdot (A+C)^T \\ 1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 1 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - \end{pmatrix}$$

El resultado del producto es una matriz 1×2 .

P5.2 [2 puntos] Queremos determinar el coste por hora de tres servicios que ofrece una empresa de alquiler de material audiovisual. Estos servicios son: iluminación profesional, con un coste de x €/hora; equipo de sonido, con un coste de y €/hora; cámaras de grabación, con un coste de z €/hora. Se han registrado los gastos totales asociados a tres eventos diferentes:

$$\text{Evento 1: } 2x + y + z = 6500$$

$$\text{Evento 2: } 4x + 5y + 7z = 22500$$

$$\text{Evento 3: } x + 2y + 3z = 8000$$

Justifica si, con la información proporcionada, se pueden determinar de manera única los costes de los tres servicios.

Con las tres ecuaciones formamos el sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 8000 \\ 2x + y + z = 6500 \\ 4x + 5y + 7z = 22500 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8000 \\ 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 4 & 5 & 7 & 22500 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8000 \\ 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 4 & 5 & 7 & 22500 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 6500 \\ -2 \quad -4 \quad -6 \quad -16000 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad -9500 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 5 \quad 7 \quad 22500 \\ -4 \quad -8 \quad -12 \quad -32000 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad -9500 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8000 \\ 0 & -3 & -5 & -9500 \\ 0 & -3 & -5 & -9500 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad -5 \quad -9500 \\ 0 \quad 3 \quad 5 \quad 9500 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 3}^{A/B} & 8000 \\ 0 & -3 & -5 & -9500 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A y el de la matriz A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Con la información proporcionada, no se pueden determinar de manera única los costes de los tres servicios.