

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de redactar expressant de forma raonada el procés seguit en la resolució, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. El grau de compliment es valorarà amb un màxim d'1 punt en tota la prova.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (per exemple, variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tendran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que se'n puguin veure afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent. En el cas de la pregunta competencial-contextualitzada, sí que es penalitzarà si els resultats que es van obtenint no tenen coherència dins el context.
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corriu-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

Part A.

Problema 1. — Solució.

- (a) Sigui π el pla que conté els satèl·lits A , B i C . Notem que els vectors directores del pla són

$$\vec{AB} = (2, 0, -2), \quad \vec{AC} = (4, 2, 0).$$

Aleshores,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ y = 2 + 2\beta, \\ z = 3 - 2\lambda. \end{cases}$$

Per veure que formen un pla orbital, cal veure que el centre de la Terra (origen) pertany a aquest pla. En efecte,

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ 0 = 2 + 2\beta, \\ 0 = 3 - 2\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta \Rightarrow 1 + 2\frac{3}{2} + 4(-1) = 0 \checkmark \\ \beta = -1, \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nota: Si es vol donar l'equació explícita del pla, tenim que el vector normal de π és

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, -8, 4) \equiv (1, -2, 1),$$

Per tant, l'equació explícita del pla és $x - 2y + z + d = 0$ tal que

$$x - 2y + z + d = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 2 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = 0.$$

És a dir, $\pi_1 : x - 2y + z = 0$ on podem observar que, en efecte, el punt $(0, 0, 0)$ hi pertany.

- (b) Hem de proporcionar un punt F de tal manera que D , E i F formin un pla orbital. Així doncs, F ha de ser un punt del pla DEO (sent O l'origen $(0, 0, 0)$).

Calculem el pla DEO . Notem que té vectors directores

$$\vec{DE} = (2, 2, 0) \equiv (1, 1, 0), \quad \vec{DO} = (2, 1, 1).$$

Aleshores,

$$\pi_1 : \begin{cases} x = \lambda + 2\beta, \\ y = \lambda + \beta, \\ z = \beta. \end{cases}$$

Per tant, F és qualsevol punt de la forma

$$(\lambda + 2\beta, \lambda + \beta, \beta); \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

diferents de O , D i E (és a dir, $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1), (2,1), (0,0)\}$). Un possible punt a donar seria $F(6,4,2)$.

Criteris:

- (a) 0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla. 0.5 punts per comprovar que és pla orbital $((0,0,0) \in \pi)$.
- (b) 0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla DEO . 0.5 punts per proporcionar un F vàlid. Es penalitza amb -0.25 si només proporcionen el cas general i no especifiquen un punt concret.

Aquest apartat es podria resoldre de manera diferent de la plantejada. En general, valoram amb 0.5 punts per plantejar correctament el problema i 0.5 punts per executar-lo correctament.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

Problema 2. — *Solució.*

- (a) Notem que el domini de la funció és $D = (0, +\infty)$. Per tant, hem de calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = +\infty,$$

ja que e^x creix més de pressa que $x^{7/2}$.

- (b) Notem que $f(2) = -15.2384 < -1$ i $f(4) = -9.4018$. Aleshores, volem calcular

$$\int_2^4 (-1 - f(x)) \, dx = \int_2^4 \left(-1 - x^{\frac{7}{2}} + 6x^{\frac{5}{2}} - e^x \right) \, dx = \left[-x - \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + 6\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - e^x \right]_2^4$$

$$= 47.0526 - 4.9776 = 42.075 \, u^2.$$

Criteris:

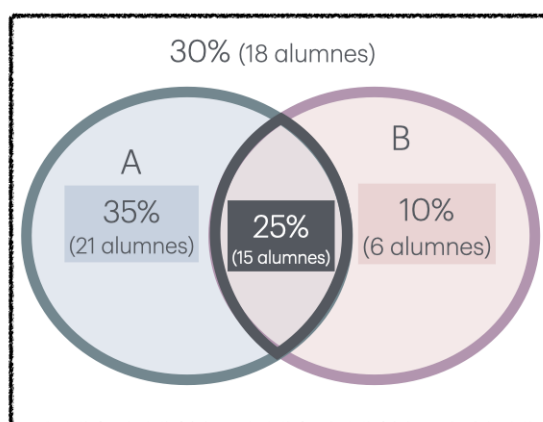
- (a) 0.25 punts per cada límit ben plantejat i 0.25 per cada límit ben calculat.
- (b) 0.5 punts per plantejar correctament la integral, 0.25 punts per calcular bé la integral, 0.25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow. Es penalitza amb -0.25 punts si no indiquen les unitats.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

Problema 3. — *Solució.* Sigui A el succés “Jugar a bàsquet” i B el succés “Estar federat”. Segons les dades de l'enunciat, tenim que

- $P(A) = \frac{60}{100}$, que ens indica que el 60% de 60 = 36 alumnes juguen a bàsquet.
- $P(B) = \frac{35}{100}$, que ens indica que el 35% de 60 = 21 alumnes estan federats.
- $P(A \cap B) = \frac{25}{100}$, que ens indica que el 25% de 60 = 15 alumnes juguen a bàsquet i estan federats.

Tot seguit es pot observar el diagrama de Venn resultant.



- (a) $P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0.1$, per tant, el 10% de 60 = 6 alumnes estan federats, però no juguen.
- (b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.6} = 0.4167$.

Criteris:

- (a) 0.25 punts pel plantejament i notació correctes, 0.25 punts per la resposta correcta de la probabilitat i 0.5 punts per calcular el nombre d'alumnes correctament.
- (b) 0.5 punts pel plantejament i notació correctes, 0.5 punts per la resposta correcta.

Es penalitza amb -0.2 punts si no defineixen els successos correctament.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).

Part B.

Problema 4. — P4.1 Solució.

- (a) Volem veure que la derivada de la funció s'anul·la en cada un dels intervals proporcionats. Per això, calculem primer la derivada i vegem després l'existència d'aquests punts aplicant el teorema de Bolzano en cada un dels intervals.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - (x^3+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{(x+2)^2},$$

la qual és contínua a $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, ja que el denominador s'anul·la a $x = -2$. Ara bé, en cada un dels intervals proporcionats, la funció és contínua. A més,

$$\begin{array}{lll} f'(-3) = -1 < 0, & f'(-2.5) = 21 > 0 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_1 \in (-3, -2.5); f'(c_1) = 0. \\ f'(-1) = 3, & f'(0) = -0.25 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_2 \in (-1, 0); f'(c_2) = 0. \\ f'(0) = -0.25, & f'(1) = 0.7778 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_3 \in (0, 1); f'(c_3) = 0. \end{array}$$

- (b) Pel signe de la derivada en els extrems dels intervals, es conclou que en c_1 hi ha un mínim, en c_2 un màxim i en c_3 un altre mínim.

Criteris:

- (a) 0.25 per calcular la derivada de la funció, 0.5 per justificar bé que la funció és contínua, 0.25 per veure que els extrems dels intervals tenen signe oposat, 0.25 punts per indicar que empren el teorema de Bolzano i conclouen l'existència dels diferents punts crítics.
- (b) 0.25 punts per cada punt crític ben classificat.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

P4.2 Solució.

- (a) Volem veure cap a quina distància del punt inicial es dirigeix el dofí a mesura que passa el temps. Per tant,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 140(1 - e^{-0.05t}) = 140 \text{ m.}$$

- (b) Volem veure el creixement i decreixement de la funció velocitat, la qual és $v(t) = d'(t) = 140 \cdot 0.05e^{-0.05t} = 7e^{-0.05t}$. Calculant la derivada de $v(t)$ tenim que

$$v'(t) = -0.35e^{-0.05t} < 0,$$

per tant, la velocitat sempre decreix, ja que la seva derivada és sempre negativa. Aleshores, la velocitat màxima s'assoleix a $t = 0$, sent aquesta $v(0) = 7 \text{ m/s}$. La velocitat mínima no s'assoleix en un temps finit però sí que tendeix a 0 m/s , ja que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 7e^{-0.05t} = 0 \text{ m/s.}$$

Tendeix a aturar-se.

Criteris:

- (a) Es valora amb 0.25 punts si es planteja correctament el problema i 0.25 punts més si es resol correctament.
- (b) Es valora amb 0.25 punts per calcular correctament la funció velocitat ($d'(t)$), 0.25 punts per calcular correctament $v'(t)$, 0.25 punts si veuen correctament que la velocitat sempre decreix, 0.25 punts per calcular la velocitat màxima i 0.5 punts per calcular-ne la mínima (0.25 al càlcul i 0.25 per concloure que s'atura).

Aquest apartat es pot resoldre, alternativament, indicant que, al ser la velocitat una funció exponencial decreixent positiva, llavors el màxim està en $t = 0$ i el mínim és 0. En tal cas, 0.25 per calcular correctament la funció velocitat ($d'(t)$), 0.5 per indicar que és una funció exponencial decreixent, 0.25 per indicar que, a més, és positiva, 0.25 per calcular la velocitat màxima i 0.25 per dir que tendeix a aturar-se.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

Problema 5. — P5.1 Solució. Vegem primer de tot AC . Notem que tant A com C són de dimensió 2×3 . Per tant, el nombre de columnes de A no coincideix amb el nombre de files de C , per la qual cosa no es poden multiplicar.

Vegem ara $D^{-1}A$. Notem que D no és una matriu quadrada, ja que és 2×3 i, per tant, no és invertible i no es pot realitzar l'operació.

Vegem ara $B(A + C)^T$. Notem que A i C tenen la mateixa dimensió, per tant, es poden sumar, i donen lloc a una matriu 2×3 . En transposar-la obtenim una matriu 3×2 . Com que B és una matriu de dimensió 1×3 , el nombre de columnes de B coincideix amb el nombre de files de $(A + C)^T$ i, per tant, es poden multiplicar, i donen lloc a una matriu 1×2 .

Criteris:

- (i) 0.5 punts per discutir que AC no és calculable;
- (ii) 0.5 punts per veure que D no és invertible;
- (iii) 0.5 punts per discutir que $B(A + C)^T$ és calculable i 0.5 punts per dir-ne correctament la dimensió.

Una resposta sense una justificació vàlida no s'avalua.

P5.2 Solució. Necessitam discutir si es tracta d'un sistema compatible determinat o no.

El sistema en forma matricial s'escriu com a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6500 \\ 22500 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 8 + 7 - 5 - 28 - 12 = 0; \quad \det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 \neq 0.$$

Per tant, el $\text{Rang}(A) = 2$. Notem que amb això ja basta per dir que el sistema no és compatible determinat, ja que $\text{Rang}(A) \neq$ nombre d'incògnites. Consegüentment, no es pot donar una única solució del sistema, la qual cosa implica que no es poden determinar de manera única els costos del servei. Notem que pot passar que el sistema no tengui solució o que en tengui infinites. Si es vol assegurar que en té infinites cal veure que $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2$ (no cal).

Una altra manera d'atacar el problema seria resolent directament el sistema, d'on s'obtendria que hi ha infinites solucions o veure directament que

$$(\text{Esdeveniment } 2) = (\text{Esdeveniment } 1) + 2(\text{Esdeveniment } 3).$$

Totes les estratègies són vàlides.

Criteris: 0.5 punts per plantejar correctament el problema, 1 punt per executar-lo correctament, 0.5 punts per concloure el resultat.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.