

	Pruebas de Acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 3) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Se podrá usar una calculadora científica no programables, que no admita memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas y sin conexión a internet. Durante el desarrollo de la prueba no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global. La máxima deducción global es de un punto.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.
- 6. Respuestas numéricas exactas o con tres dígitos decimales.**

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$. **(0,5 puntos)**

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix}$. **(0,5 puntos)**

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$. **(1 punto)**

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x) = x \ln(x)$ con $x > 0$

a) Calcular la derivada de $f(x)$. **(0,75 puntos)**

b) Calcular una primitiva de $f(x)$. **(0,75 puntos)**

c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. **(1 punto)**

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Dado el plano $\pi \equiv x + y = 0$, el punto $A(1, -1, 0)$ y la recta $s \equiv x = y = z$. Hallar la recta r , en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π , y corta a la recta s . **(2,5 puntos)**

Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**

c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices ABEO, siendo O(0,0,0) el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2.025 (365 días), sigue una distribución normal con media $337,2 \text{ hm}^3$ y desviación típica de $40,5 \text{ hm}^3$.

a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a $299,94 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**

b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**

- c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm³ y 330 hm³ debería estar entre 170 y 180”. **(0,5 puntos)**

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

- a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. **(0,5 puntos)**

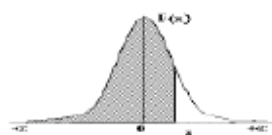
Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

- b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. **(1 punto)**

- c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5190	0,5220	0,5270	0,5310	0,5360
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7089	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9308	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9600	0,9608	0,9618	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9908	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**Problema 1.**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$. (0,5 puntos)

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix}$. (0,5 puntos)

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Rightarrow \frac{1}{4}A^2 - B = AX \Rightarrow X = A^{-1} \left(\frac{1}{4}A^2 - B \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4}A^{-1}AA - A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{4}A - A^{-1}B$$

Determinamos la inversa de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 16 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{4}A - A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}+1 & 2-\frac{1}{2} & -3+1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{11}{4} & -1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & \frac{6}{4}-\frac{2}{4}-\frac{8}{4} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -2 \\ -1 & 1/2 & -1 \\ -5/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha \end{vmatrix} = (2-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 = (2-\alpha)^2(4-\alpha) \\
 |A| = 0 &\Rightarrow (2-\alpha)^2(4-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Distinguiamos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 1^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\alpha = 4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de

A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $\alpha = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $\alpha = 4$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

c) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 1^a + 5 \cdot \text{Columna } 3^a \} = \begin{vmatrix} g & 2d & a \\ 2h & 4e & 2b \\ i & 2f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sacamos factor común 2 en la } 2^a \text{ columna} \} = 2 \begin{vmatrix} g & d & a \\ 2h & 2e & 2b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sacamos factor común 2 en la } 2^a \text{ fila} \} = 4 \begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Trasponemos la matriz y el} \\ \text{determinante no cambia} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) = \boxed{8}$$

Problema 2A. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de $f(x)$.

(1,5 puntos)

b) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

(1 punto)

a) Los denominadores nunca se anulan y el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntotas verticales. $x = a$

No tiene pues el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales. $y = b$

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\left(\frac{x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2} + 1\right)^2} = \frac{4\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)}{\left(\frac{4}{\infty} + 1\right)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{2(1+e^x)\cancel{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+e^x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

$$\dots = 0 + \infty = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

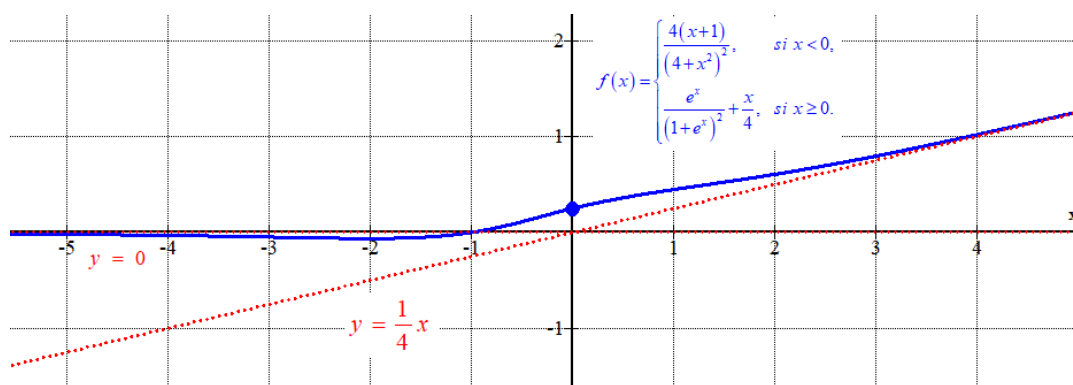
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \dots$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 2x(1+e^x)e^x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 2x(e^x + e^{2x})} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x + 2(e^x + e^{2x}) + 2x(e^x + 2e^{2x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x + 2(1+e^x)e^x + 2x(1+2e^x)e^x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+e^x) + 2(1+e^x) + 2x(1+2e^x)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\dots = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculado} \\ \text{previamente} \end{array} \right\} = 0$$

La recta $y = \frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.



b) En el intervalo $(0, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}$. Calculamos su integral.

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int \frac{x}{4} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+e^x = t \rightarrow e^x = t-1 \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t-1} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2} \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{4} \int x dx = \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} = \int t^{-2} dt + \frac{x^2}{8} = \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{t} = \boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{1}{1+e^x} + K}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{1}{1+e^x} \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{8} - \frac{1}{1+e^1} \right] - \left[\frac{0^2}{8} - \frac{1}{1+e^0} \right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{1+e} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{8} - \frac{1}{1+e}}$$

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x) = x \ln(x)$ con $x > 0$

- a) Calcular la derivada de $f(x)$. (0,75 puntos)
 b) Calcular una primitiva de $f(x)$. (0,75 puntos)
 c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. (1 punto)

a) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

b) Para calcular la integral utilizamos el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

La integral indefinida de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Considerando $C=0$ obtenemos

una primitiva de la función que tiene la expresión $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$.

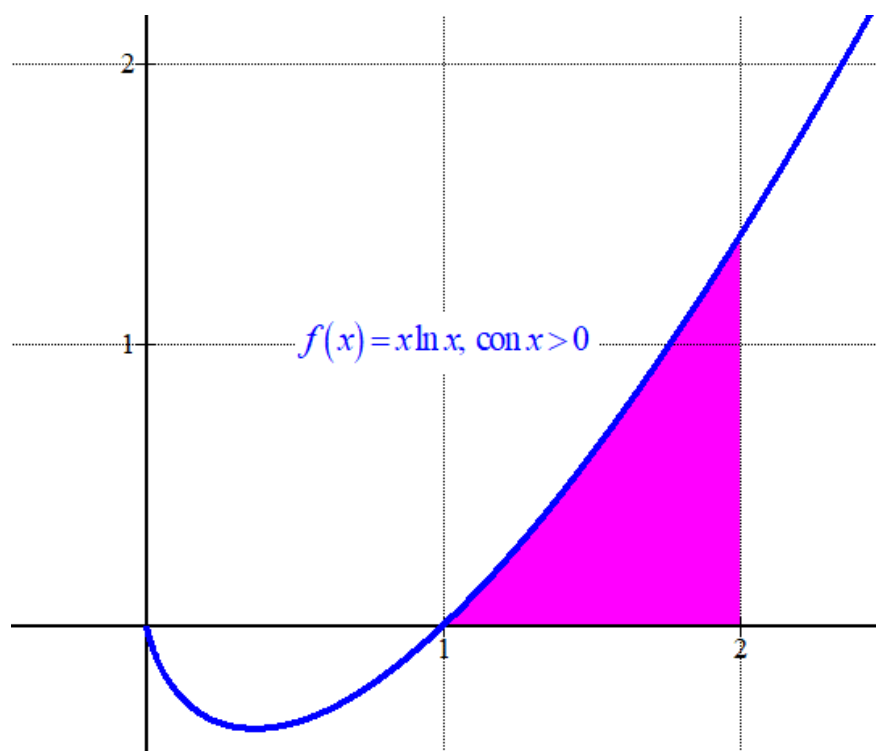
c) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

La función no corta el eje en $(1, 2)$, por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x) = x \ln x > 0$, con $x > 1$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{2^2}{4} \right] - \left[\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right] = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64$ unidades cuadradas.



Problema 3A.

Dado el plano $\pi \equiv x + y = 0$, el punto $A(1, -1, 0)$ y la recta $s \equiv x = y = z$. Hallar la recta r , en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π , y corta a la recta s . **(2,5 puntos)**

El punto A pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -1, 0) \\ \pi \equiv x + y = 0 \\ \text{¿} A \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 1 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!} \Rightarrow A \in \pi$$

La recta s debe cortar al plano. Hallamos el punto P de corte de la recta con el plano.

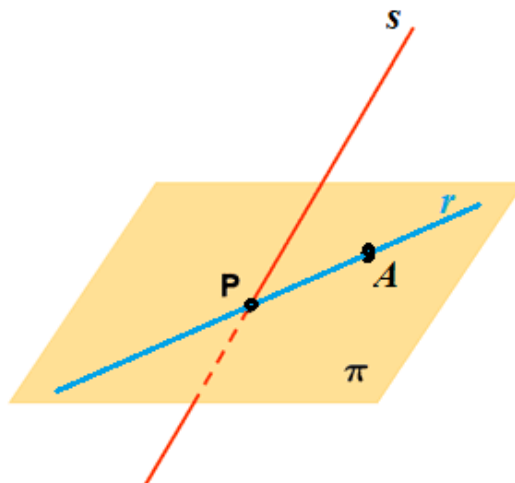
$$s \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(0, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y = 0 \\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0, 0, 0)$$

La recta r debe cortar a la recta s y estar contenida en el plano, por lo que la recta debe pasar por el punto P. Podemos tomar como vector director de la recta r el vector $\overrightarrow{PA}$. Hallamos la recta r como la recta que pasa por A(1,-1,0) con vector director $\overrightarrow{PA}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = \overrightarrow{PA} = (1, -1, 0) - (0, 0, 0) = (1, -1, 0) \\ A(1, -1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$.

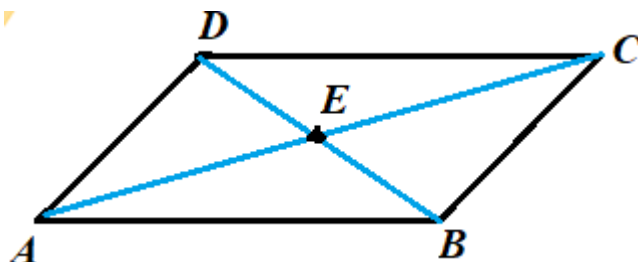


Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

- a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**
 b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**
 c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices $ABEO$, siendo $O(0,0,0)$ el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

a) Dibujamos el paralelogramo $ABCD$.



El vértice C se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AE} = (0,0,1) - (1,1,1) = (-1,-1,0)$$

$$C = E + \overrightarrow{AE} = (0,0,1) + (-1,-1,0) = (-1,-1,1)$$

El vértice C tiene coordenadas $C(-1,-1,1)$.

El vértice D se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BE} = (0,0,1) - (0,2,0) = (0,-2,1)$$

$$D = E + \overrightarrow{BE} = (0,0,1) + (0,-2,1) = (0,-2,2)$$

El vértice D tiene coordenadas $D(0,-2,2)$.

b) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y E.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \in \pi \\ B(0,2,0) \in \pi \\ E(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E(0,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AE} = (-1,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BE} = (0,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 0 + 2(z-1) - 0 + y - 0 = 0 \Rightarrow -x + 2z - 2 + y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 2z + 2 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene el paralelogramo $ABCD$ es $\pi: x - y - 2z + 2 = 0$.

c) El volumen del tetraedro $ABEO$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{BE} = (0, -2, 1) \\ \overrightarrow{OE} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El volumen del tetraedro ABEO es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0.333$ unidades cúbicas.

Problema 4A.

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2025 (365 días), sigue una distribución normal con media $337,2 \text{ hm}^3$ y desviación típica de $40,5 \text{ hm}^3$.

- a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a $299,94 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**
- b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**
- c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180”. **(0,5 puntos)**

- a) Consideramos $X = \text{El agua almacenada en el pantano de Riaño en } \text{hm}^3$. $X = N(337.2, 40.5)$. Nos piden calcular $P(X > 299.94)$.

$$P(X > 299.94) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 337.2}{40.5} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{299.94 - 337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(Z > -0.92) = P(Z < 0.92) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8212}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8188	0,8212

- b) Calculamos $P(299.94 < X < 350.16)$.

$$P(299.94 < X < 350.16) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 337.2}{40.5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{299.94 - 337.2}{40.5} < Z < \frac{350.16 - 337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(-0.92 < Z < 0.32) = P(Z < 0.32) - P(Z < -0.92) =$$

$$= P(Z < 0.32) - P(Z > 0.92) = P(Z < 0.32) - [1 - P(Z \leq 0.92)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6255 - [1 - 0.8212] = \boxed{0.4467}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6654	0,6691	0,6729

La probabilidad de que un día cualquiera el pantano tenga almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$ es de 0.4467. Multiplicamos esta cifra por los 365 días del año y obtenemos que $365 \cdot 0.4467 = 163$ días el pantano tendrá almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$.

- c) Sabemos que “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$ es de 163”.

El intervalo (310, 330) tiene menos amplitud que el intervalo (299.94, 350.16) por lo que “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debe ser menor de 163”.

La afirmación “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180” no es correcta, pues 170 es mayor que 163.

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. **(0,5 puntos)**

Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. **(1 punto)**

c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. **(1 punto)**

a) Llamamos L al suceso “el ejercicio lo ha resuelto Lucía”, G a “el ejercicio lo ha resuelto Gloria”, M a “el ejercicio lo ha resuelto María” y C al suceso “el ejercicio se ha resuelto correctamente”.

Considerando el experimento “la profesora elige un ejercicio al azar” tenemos las siguientes probabilidades: $P(L) = 0.45$, $P(G) = 0.3$, $P(M) = 1 - 0.45 - 0.3 = 0.25$, $P(C/L) = 0.90$, $P(C/G) = 0.95$ y $P(C/M) = 0.80$.

b) Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap L) + P(C \cap G) + P(C \cap M) = \\ &= P(L)P(C/L) + P(G)P(C/G) + P(M)P(C/M) = \\ &= 0.45 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.89} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un ejercicio elegido al azar esté resuelto correctamente vale 0.89.

c) Debemos calcular $P(G/\bar{C})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/\bar{C}) = \frac{P(G \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(G)P(\bar{C}/G)}{1 - P(C)} = \frac{0.3 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.89} = \boxed{\frac{3}{22} \approx 0.1364}$$

La probabilidad de que un ejercicio resuelto de forma incorrecta lo haya resuelto Gloria tiene un valor de $\frac{3}{22} \approx 0.1364$.