



Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2025/2026
Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas de la 1 a la 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadores de tipo 1 y 2**, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

- [1 punto]** La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.
- [1 punto]** La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2 + 4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

- [1 punto]** Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.
- [1 punto]** La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t) dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas

Pregunta 3.

a) **[1.5 puntos]** Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) **[0.5 puntos]** ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Se consideran los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(a, 1, 2)$, con a un número real.

- [0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C .

- b) **[1,25 puntos]** Determina los valores reales del parámetro a , para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

4.2. Sean los puntos del espacio $A(1,2,-1)$, $B(3,6,1)$ y $C(m,m,m-2)$, donde m es un número real.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de m para que los puntos A , B y C estén alineados.
 b) **[1,25 punto]** Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2,0,1)$ a la recta que forman A , B y C .

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- a) **[1 punto]** Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1,4)$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y=2x-1$
 b) **[1 punto]** Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

5.2. Resuelve los siguientes apartados

- a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$.

- b) **[0,75 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

SOLUCIONES

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

- a) **[1 punto]** La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.
 b) **[1 punto]** La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

a) Nos dicen que $X = N(34, 6)$. Debemos calcular $P(28 \leq X \leq 46)$.

$$\begin{aligned}
 P(28 \leq X \leq 46) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 34}{6} \end{array} \right\} = P\left(\frac{28 - 34}{6} \leq Z \leq \frac{46 - 34}{6}\right) = \\
 &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = \\
 &= P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9772 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.8185}
 \end{aligned}$$

	0
0	0,5000 0
0,1	0,5398 0
0,2	0,5793 0
0,3	0,6179 0
0,4	0,6554 0
0,5	0,6915 0
0,6	0,7257 0
0,7	0,7580 0
0,8	0,7881 0
0,9	0,8159 0
1	0,8413 0
1,1	0,8643 0
1,2	0,8849 0
1,3	0,9032 0
1,4	0,9192 0
1,5	0,9332 0
1,6	0,9452 0
1,7	0,9554 0
1,8	0,9641 0
1,9	0,9713 0
2	0,9772 0

b) Debemos hallar K tal que $P(X > K) = 0.1587$.

$$\begin{aligned}
 P(X > K) = 0.1587 &\Rightarrow P(X \leq K) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 34}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{K - 34}{6}\right) &= 0.8413 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{K - 34}{6} = 1 \Rightarrow K - 34 = 6 \Rightarrow \boxed{K = 40}
 \end{aligned}$$

La edad que supera el 15,87% de las personas suscritas es de 40 años.

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2 + 4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

a) **[1 punto]** Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.

b) **[1 punto]** La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t) dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función $C(t) = \frac{12t}{t^2 + 4}$.

$$C(t) = \frac{12t}{t^2 + 4} \Rightarrow C'(t) = \frac{12(t^2 + 4) - 2t \cdot 12t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{12t^2 + 48 - 24t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 48 - 12t^2 = 0 \Rightarrow 4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Solo tiene sentido en el contexto del problema el valor positivo de t . La función tiene un punto crítico en $t = 2$. Analizamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $C'(1) = \frac{48 - 12 \cdot 1^2}{(2^2 + 4)^2} = \frac{36}{64} > 0$.

La función crece en $[0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale

$$C'(3) = \frac{48 - 12 \cdot 3^2}{(3^2 + 4)^2} = \frac{-60}{169} < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

La derivada se anula para $t = 2$ y la función crece antes y decrece después de este valor. La función tiene un máximo relativo en $t = 2$. Para este valor $C(2) = \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 3$.

La concentración en sangre es máxima transcurridas 2 horas. Esta concentración máxima es de 3 mg/l.

b) Hallamos la concentración media entre las 0 y 6 horas.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6-0} \cdot \int_0^6 C(t) dt &= \frac{1}{6} \int_0^6 \frac{12t}{t^2 + 4} dt = \frac{6}{6} \int_0^6 \frac{2t}{t^2 + 4} dt = \left[\ln(t^2 + 4) \right]_0^6 = \\ &= \ln(6^2 + 4) - \ln(0^2 + 4) = \ln 40 - \ln 4 = \ln \frac{40}{4} = \boxed{\ln 10 \simeq 2.3} \end{aligned}$$

La concentración media de dicho medicamento entre las 0 y 6 horas es de 2.3 mg/l.

Pregunta 3.

a) **[1.5 puntos]** Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) **[0.5 puntos]** ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ a & 1 & a-1 \\ -a & -1 & -a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ a & 1 & a \\ -a & -a+1 & -a^2+a \\ 0 & 2-a & -a^2+2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & -a^2+2a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 \cdot (2-a) \cdot (-1) = -a(2-a) \end{aligned}$$

El determinante de A se anula para $a = 0$ y $a = 2$.

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de A es 3.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es cero. El rango de A es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que queda al quitar la

primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es cero. El rango de A es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que las filas primera y segunda son iguales. Si

consideramos el menor de orden 2 que queda de quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo; Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = 0$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

b) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero. Por lo visto en el apartado anterior podemos afirmar que la matriz A tiene inversa para cualquier valor real distinto de 0 y de 2.

4.1. Se consideran los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(a, 1, 2)$, con a un número real.

a) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) **[1,25 puntos]** Determina los valores reales del parámetro a , para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, 0) \in \pi \\ B(2, 0, 1) \in \pi \\ C(0, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1, 1, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) - (1, 1, 0) = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+1-y+1+\cancel{z} - y+1-x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 2 = 0}$$

La ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C es $\pi : x + y - 2 = 0$.

b) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, 0) \\ B(2, 0, 1) \\ C(0, 2, 1) \\ D(a, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) - (1, 1, 0) = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (a, 1, 2) - (1, 1, 0) = (a-1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - a + 1 + 0 - a + 1 - 2 - 0 = -2a + 2$$

El volumen del tetraedro ABCD es $\frac{|2-2a|}{6} = \frac{|1-a|}{3}$.

Averiguamos el valor de a para que este volumen sea de 3 unidades cúbicas.

$$\frac{|1-a|}{3} = 3 \Rightarrow |1-a| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 1-a = 9 \rightarrow \boxed{-8 = a} \\ 1-a = -9 \rightarrow \boxed{10 = a} \end{cases}$$

Se cumple lo pedido para $a = -8$ y para $a = 10$.

4.2. Sean los puntos del espacio $A(1,2,-1)$, $B(3,6,1)$ y $C(m,m,m-2)$, donde m es un número real.

a) [0,75 puntos] Determina el valor de m para que los puntos A , B y C estén alineados.

b) [1,25 punto] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2,0,1)$ a la recta que forman A , B y C .

a) Hallamos la recta r que contiene los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2,-1) \in r \\ B(3,6,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,6,1) - (1,2,-1) = (2,4,2) \\ A(1,2,-1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1,2,1) \\ A(1,2,-1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Para que los puntos A , B y C estén alineados el punto C debe pertenecer a la recta r .

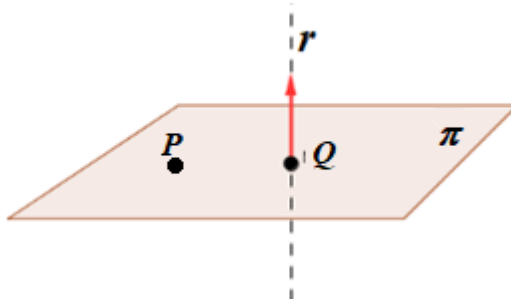
$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \\ C(m,m,m-2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \lambda \\ m = 2 + 2\lambda \\ m - 2 = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \lambda \\ m = 2 + 2\lambda \\ m = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda = 2 + 2\lambda \Rightarrow -1 = \lambda \Rightarrow \boxed{m = 1 - 1 = 0}$$

Para $m = 0$ los puntos A , B y C están alineados.

b) Para $m = 0$ la recta que contiene los puntos A , B y C es $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$.

Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que contiene el punto P . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1,2,1) \\ P(2,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y + z + D = 0 \\ P(2,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2 \cdot 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y + z - 3 = 0}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta r y el plano π .

$$\pi : x + 2y + z - 3 = 0$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ y = 2 - \frac{2}{6} = \frac{10}{6} \\ z = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{7}{6}\right)}$$

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{matrix} Q\left(\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{7}{6}\right) \\ P(2, 0, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{7}{6}\right) - (2, 0, 1) = \left(\frac{-7}{6}, \frac{10}{6}, \frac{-13}{6}\right)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{-7}{6}\right)^2 + \left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(\frac{-13}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{318}}{6} \approx 2.97u$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{318}}{6} \approx 2.97$ unidades de longitud.

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- a) **[1 punto]** Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1,4)$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y=2x-1$
- b) **[1 punto]** Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

- a) La función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1,4)$, lo que implica que $f(1)=4$ y $f'(1)=0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b \Rightarrow 2a + b = -3$$

Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y=2x-1$ entonces las dos rectas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta $y=2x-1$ es $m=2$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ vale $f'(3)$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(3) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b \Rightarrow 6a + b = -25$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ 2a + b = -3 \\ 6a + b = -25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ b = -3 - 2a \\ 6a + b = -25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - 3 - 2a + c = 3 \\ 6a - 3 - 2a = -25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -a + c = 6 \\ 4a = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 6 + a \\ a = \frac{-22}{4} = \frac{-11}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 6 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2} \\ b = -3 - 2 \cdot \frac{-11}{2} = \frac{-6 + 22}{2} = 8 \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $a = \frac{-11}{2}$, $b=8$ y $c = \frac{1}{2}$.

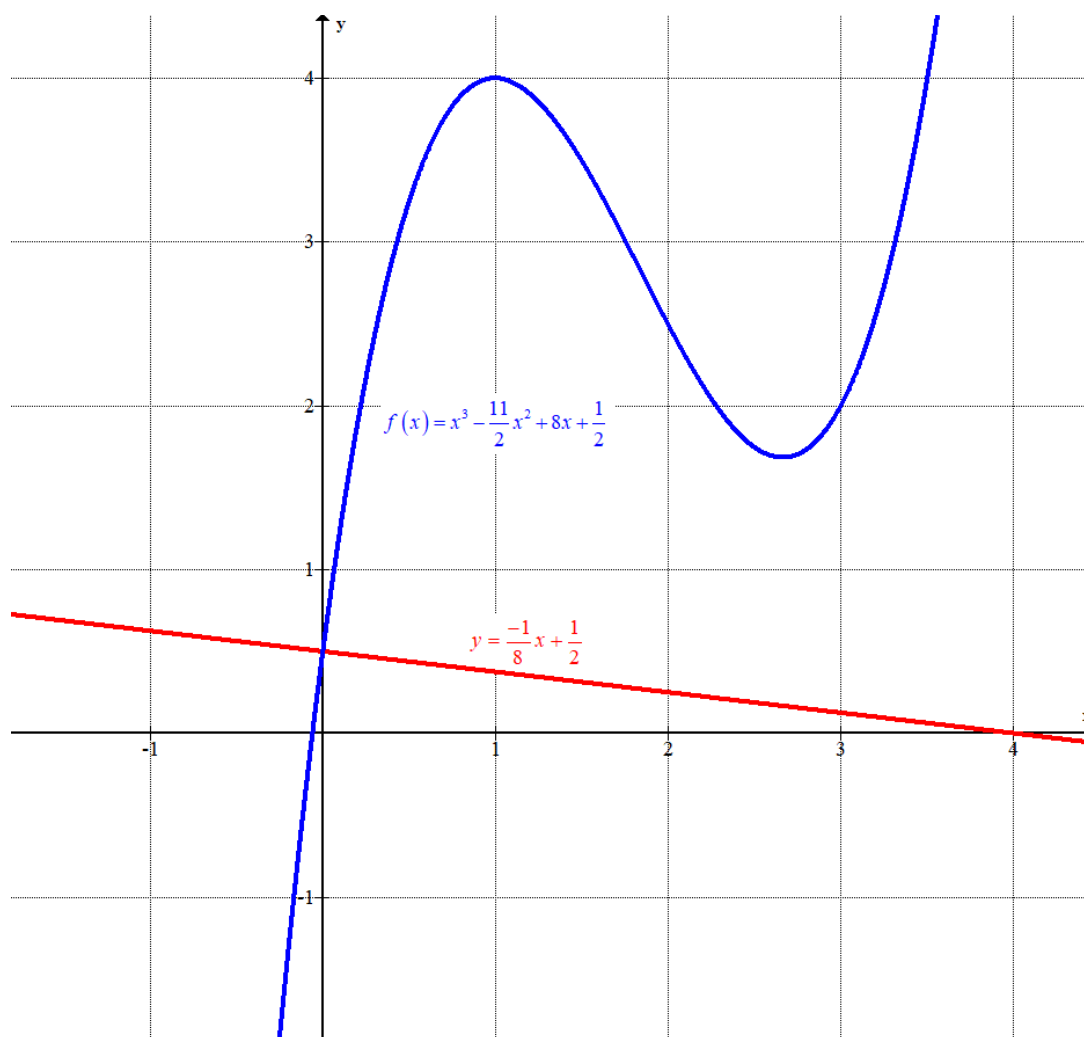
- b) Para $a = \frac{-11}{2}$, $b=8$ y $c = \frac{1}{2}$ la función queda $f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 8x + \frac{1}{2}$. Hallamos la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

$$f(0) = 0^3 - \frac{11}{2} \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 8x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 11x + 8 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 11 \cdot 0 + 8 = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{2} \\ f'(0) = 8 \\ y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{8}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{2}}$$

La recta normal a $f(x)$ en $x = 0$ tiene ecuación $y = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{2}$.



5.2. Resuelve los siguientes apartados

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$.

b) **[0,75 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

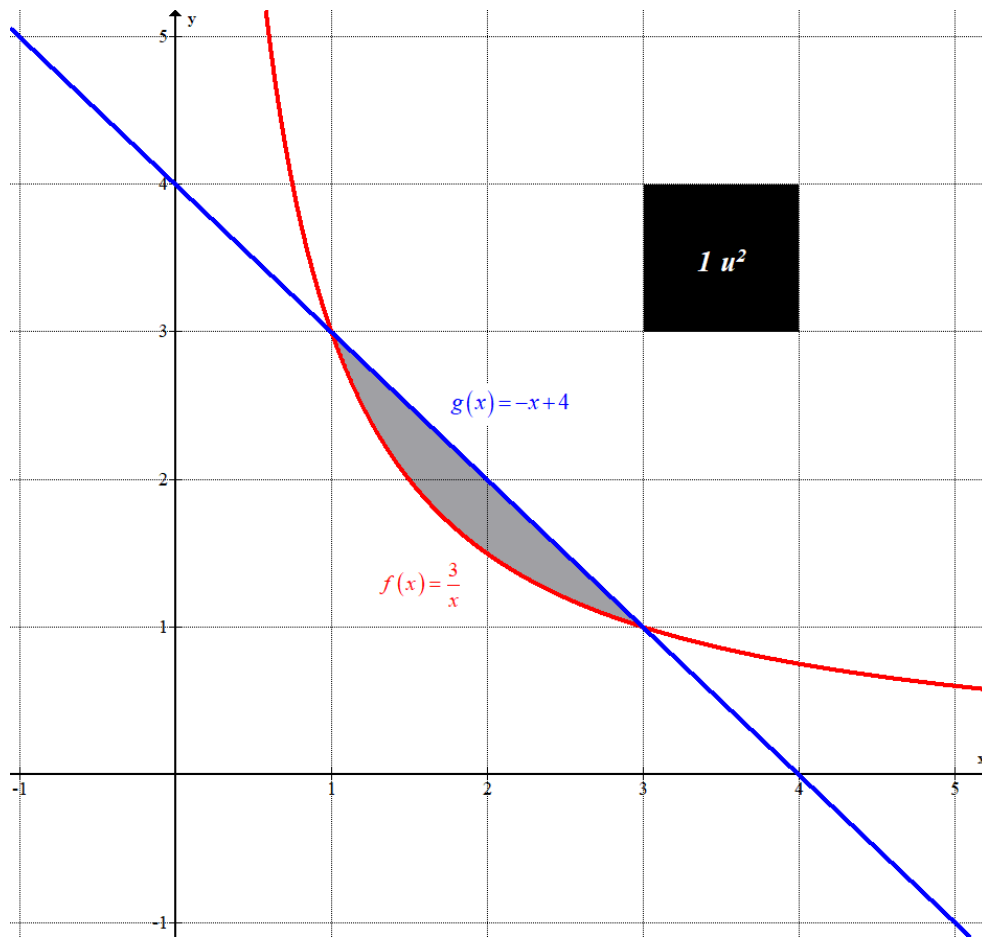
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{3}{x} = -x + 4 \Rightarrow 3 = -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$ es el valor absoluto de la integral definida de 1 a 3 de la diferencia de las dos funciones. Como $f(2) = \frac{3}{2} = 1.5$ y $g(2) = -2 + 4 = 2$ tenemos que $g(x) > f(x)$ en el intervalo (1, 3). Tomaremos la diferencia $g(x) - f(x)$ para que la integral definida tenga valor positivo.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 g(x) - f(x) dx = \int_1^3 -x + 4 - \frac{3}{x} dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 3\ln|x| \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{-3^2}{2} + 4 \cdot 3 - 3\ln|3| \right] - \left[\frac{-1^2}{2} + 4 \cdot 1 - 3\ln|1| \right] = \\ &= \frac{-9}{2} + 12 - 3\ln 3 + \frac{1}{2} - 4 = \boxed{4 - 3\ln 3 \approx 0.7 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$ tiene un valor de $4 - 3\ln 3 \approx 0.7$ unidades cuadradas.



b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - \sin 0 - 1}{0^2} = \frac{1 - 0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{e^0 + \sin 0}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

