

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas de la 1 a la 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadoras de tipo 1 y 2**, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

- a) **[1 punto]** La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.
- b) **[1 punto]** La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Solución:

a)

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar, que es una variable aleatoria $N(\mu = 34, \sigma = 6)$. Se pide:

$$\begin{aligned} P(28 < X < 46) &= P\left(\frac{28 - 34}{6} < \frac{X - 34}{6} < \frac{46 - 34}{6}\right) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) \\ &= P(Z < 2) - P(Z > 1) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1)] = 0,9772 - [1 - 0,8413] = 0,8185 \end{aligned}$$

Criterios de corrección:

Definir la probabilidad correcta en X , 0,25; determinar la expresión correcta con variable tipificada Z , 0,25; determinar los valores correctos de cada probabilidad, 0,25; obtener la solución correcta, 0,25.

- b) Se busca $K \in \mathbb{R}$, de manera que $P(X > K) = 0,1587$.

$$0,1587 = P(X > K) = P\left(\frac{X - 34}{6} > \frac{K - 34}{6}\right) = P\left(Z > \frac{K - 34}{6}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{K - 34}{6}\right)$$

Por tanto, $P\left(Z < \frac{K - 34}{6}\right) = 0,8413$, lo que implica que $\frac{K - 34}{6} = 1$ y $K = 40$ años

Criterios de corrección:

Definir la probabilidad correcta en X 0,25; determinar la expresión correcta con variable tipificada Z , 0,25; igualar el cociente al cuantil correspondiente, 0,25; obtener el valor correcto de K , 0,25.

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

- [1 punto]** Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.
- [1 punto]** La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t)dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

Solución:

a) Se calcula la derivada de la función $C(t)$, $C'(t) = \frac{-12t^2+48}{(t^2+4)^2}$ y se obtienen sus raíces, $t = 2$ y $t = -2$. Como $t > 0$, solo se estudia el caso $t = 2$. Se comprueba que la máxima concentración se alcanza en $t = 2$ horas, mediante comprobación de estudio de monotonía o con la segunda derivada

Criterios de corrección:

Calcular la función derivada, 0,25; encontrar sus raíces o ceros, 0,25; justificar el valor de t en el que la función alcanza su máximo, 0,25; obtener la solución correcta, 0,25

b)

Se resuelve la integral correspondiente:

$$\frac{1}{6-0} \int_0^6 \frac{12t}{t^2+4} dt = \frac{6}{6} [\ln|t^2+4|]_0^6 = \{\ln 40 - \ln 4\} = 2,30 \text{ mg/l}$$

Criterios de corrección:

Definir correctamente la integral; 0,25; resolver razonada y correctamente la integral, 0,5; obtener el resultado correcto, 0,25

Pregunta 3.

- [1,5 puntos]** Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

- [0,5 puntos]** ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

Solución:

- Se calcula el $\det A = a^2 - 2a$, y los valores de a que lo anulan, $a = 0$ y $a = 2$. Se estudian los casos: si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, entonces $\det A \neq 0$ y $\text{rg} A = 3$; si $a=0$, $\text{rg} A < 3$, y como hay un menor de orden 2 distinto de 0, $\text{rg} A = 2$; si $a=2$, $\text{rg} A < 3$, y como hay un menor de orden 2 distinto de 0, $\text{rg} A = 2$.

Criterios de corrección:

Calcular el determinante de A , 0,5; calcular los valores que lo anulan, 0,25; encontrar y justificar el rango en $a=0$, 0,25; encontrar y justificar el rango en $a=2$, 0,25; encontrar y justificar el rango para el resto de valores de a , 0,25.

Materia: Matemáticas II

- b) La matriz A tiene inversa si el $\det A \neq 0$. Como el $\det A = a^2 - 2a$ se anula en $a=0$ y $a=2$, la matriz tiene inversa si $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

Criterios de corrección:

Determinar la condición de existencia de la matriz inversa, 0,25; especificar los valores para los que existe la matriz inversa, 0,25.

Nota: En caso de haber obtenido valores de a erróneos en el apartado anterior, se calificará positivamente este apartado siempre que el procedimiento sea correcto y coherente con los valores obtenidos.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Se consideran los puntos A(1, 1, 0), B(2,0, 1), C(0,2,1) y D(a, 1, 2), con a un número real.

- a) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.
b) **[1,25 puntos]** Determina los valores reales del parámetro a, para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

Solución:

- a) Se determinan los vectores directores del plano, por ejemplo $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$, y se considera el punto A(1, 1, 0) como punto del plano. Se obtiene la ecuación del plano con estos elementos en su forma paramétrica o general, siendo cada una de ellas, respectivamente

$$\text{Paramétrica: } \pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda - \beta \\ y = 1 - \lambda + \beta \\ z = \lambda + \beta \end{cases}; \text{ general: se calcula: } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+y-2=0$$

Criterios de corrección:

Determinar los elementos necesarios para obtener la ecuación del plano 0,5; obtener la ecuación correcta del plano (en cualquiera de sus formas) 0,25.

- b) El volumen del tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{AD}$. Primero se determinan los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (a-1, 0, 2)$ y, a continuación, se calcula el volumen en función de a.

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |-2a + 2|$$

Dado que $V = 3$ u, se resuelve la ecuación $\frac{1}{6} \cdot |-2a + 2| = 3$, obteniendo los valores $a = -8$ y $a = 10$.

Criterios de corrección:

Determinar los vectores correctamente, 0,25; calcular el determinante correctamente, 0,25; plantear correctamente la ecuación con el valor absoluto, 0,25; obtener los dos valores de a, 0,5.

4.2. Sean los puntos del espacio A(1, 2, -1), B(3, 6, 1) y C(m, m, m-2), donde m es un número real.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados.

Materia: Matemáticas II

- b) **[1,25 punto]** Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2,0,1)$ a la recta que forman A, B y C.

Solución:

- a) A, B y C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB} = (2,4,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (m-1, m-2, m-1)$ son linealmente dependientes. Para ello, se determinan qué valores debe tomar m , para que las coordenadas de estos vectores sean proporcionales, es decir, $\frac{2}{m-1} = \frac{4}{m-2} = \frac{2}{m-1}$; resolviéndolo, se obtiene que $m = 0$

Criterios de corrección:

Plantear la condición de linealidad, 0,25; determinar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, 0,25; obtener el valor de m correcto, 0,25.

- b) Para el cálculo de la distancia se utiliza $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$, donde r es la recta que pasa por A, B y C, $\vec{r}$ su vector director y $\overrightarrow{AP} = (1, -2, 2)$. Para $m=0$, se tiene que $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (2,4,2)$;
 $|\vec{r}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$; $\overrightarrow{AP} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$ y $|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}| = \sqrt{212}$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de la distancia se obtiene que $d(P, r) = \frac{\sqrt{318}}{6} = 2,97 u$.

Criterios de corrección:

Determinar el módulo del vector director de la recta r , 0,25; determinar el vector $\overrightarrow{AP}$, 0,25; determinar razonadamente el producto vectorial $\overrightarrow{AP} \times \vec{r}$, 0,25; determinar $|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|$, 0,25; obtener el valor correcto de la distancia, 0,25.

Nota: En caso de haber obtenido un valor de m erróneo en el apartado anterior, se calificará positivamente este apartado siempre que el procedimiento sea correcto y coherente con dicho valor.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- a) **[1 punto]** Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1,4)$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 1$
- b) **[1 punto]** Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

Solución:

- a) Para que se verifiquen las condiciones del enunciado, se debe cumplir:

$$f'(1) = 0; f(1) = 4; f'(3) = 2$$

Se calcula la derivada $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y se resuelve el sistema de ecuaciones formado por

$$\text{las condiciones anteriores } \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 2 \\ 1 + a + b + c = 4 \end{cases}, \text{ obteniendo los valores } a = -\frac{11}{2}, b = 8 \text{ y } c = \frac{1}{2}.$$

Criterios de corrección:

Materia: Matemáticas II

Plantear correctamente las tres ecuaciones, 0,75; obtener la solución correcta, 0,25.

- b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ es de la forma:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0); \quad \text{donde } f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 8x + \frac{1}{2}$$

Sustituyendo los valores $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = 8$, se obtiene que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ es $y - \frac{1}{2} = -\frac{x}{8}$.

Criterios de corrección:

Obtener el valor de la función en $x=0$, 0,25; determinar la derivada de $f(x)$, 0,25; obtener el valor de la derivada en $x=0$, 0,25; determinar la ecuación correcta de la recta normal, 0,25.

Nota: En caso de haber obtenido valores de a y/o b erróneos en el apartado anterior, se calificará positivamente este apartado siempre que el procedimiento sea correcto y coherente con los valores obtenidos.

5.2. Resuelve los siguientes apartados

- a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$.
- b) **[0,75 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

Solución:

- a) Se calculan los puntos en los que las gráficas de ambas funciones se cortan, esto es, los valores de x tal que $f(x) = g(x)$. De esta igualdad se obtiene la ecuación $\frac{3}{x} = -x + 4$; $x^2 - 4x + 3 = 0$, cuyas soluciones son $x=1$ y $x=3$. El área del recinto sería:

$$A = \left| \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Se resuelve la integral $\int_1^3 \left[\frac{3}{x} - (-x + 4) \right] dx = \left[3 \ln|x| + \frac{x^2}{2} - 4x \right]_1^3 = -0,70$. Luego el área pedida es $A = |-0,70| = 0,70u^2$.

Criterios de corrección:

Calcular los puntos de corte entre las dos funciones, 0,25; definir el área como el valor absoluto de la integral definida, 0,25; resolver de forma razonada y correcta la integral, 0,5; dar la solución correcta, 0,25.

- b) El límite se puede resolver aplicando dos veces L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$$

Criterios de corrección:

Resolver de forma razonada y correctamente el límite, 0,5; obtener la solución correcta, 0,25.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952