



Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2025-2026

Materia: MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1, 2 y 3 tienen dos opciones A y B, solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. **El ejercicio 4 es único y obligatorio.**

CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS COMO MÁXIMO. En cada apartado se indica la correspondiente puntuación.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 1 punto c) 0,75 puntos

Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^t B = C$
- Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A \cdot C$ y calcular la inversa de $A \cdot C$ para el caso $k = 0$.
- Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2 = B - I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Dado el sistema
$$\begin{cases} kx + 2y - z = 3k \\ 2x + ky - 2z = 6 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

- Discute dicho sistema según los valores del parámetro k .
- Resuelve el sistema para el valor $k = 3$.

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

- Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Calcula una primitiva de la función $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pase por el punto $P(0,1)$.

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

- a) Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.
- b) Dada la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0,75 puntos

Dados los puntos A(4, 3), B(3, 3, 4), C(1, 0, 4) y D(4,0,1),

- a. Justifica de forma razonada que los puntos A, B, C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.
- b. Calcula el valor de k para que el punto $P(7, k, 2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C.
- c. Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C.

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) a) 0,5 puntos b) 1,5 puntos c) 0,5 puntos

Dados los planos $\pi_1 : x + ky - 3z - 6 = 0$, $\pi_2 : 2x - y - 5 = 0$ y el punto $A(2, 3, -4)$:

- a) Calcula el valor de " k " para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- b) Para $k = 2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1 .
- c) Para $k = 2$, calcula la distancia del punto A al plano

EJERCICIO 4. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,5 puntos c) 1 punto

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?
- b) Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?
- c) ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

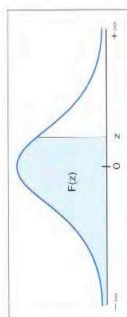


Tabla de distribución
normal $N(0,1)$
 $F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5098	0.5138	0.5178	0.5218	0.5258	0.5298	0.5338	0.5378	0.5418	0.5458
0.2	0.5498	0.5538	0.5578	0.5618	0.5658	0.5698	0.5738	0.5778	0.5818	0.5858
0.3	0.5898	0.5938	0.5978	0.6018	0.6058	0.6098	0.6138	0.6178	0.6218	0.6258
0.4	0.6298	0.6338	0.6378	0.6418	0.6458	0.6498	0.6538	0.6578	0.6618	0.6658
0.5	0.6698	0.6738	0.6778	0.6818	0.6858	0.6898	0.6938	0.6978	0.7018	0.7058
0.6	0.7098	0.7138	0.7178	0.7218	0.7258	0.7298	0.7338	0.7378	0.7418	0.7458
0.7	0.7498	0.7538	0.7578	0.7618	0.7658	0.7698	0.7738	0.7778	0.7818	0.7858
0.8	0.7898	0.7938	0.7978	0.8018	0.8058	0.8098	0.8138	0.8178	0.8218	0.8258
0.9	0.8298	0.8338	0.8378	0.8418	0.8458	0.8498	0.8538	0.8578	0.8618	0.8658
1.0	0.8698	0.8738	0.8778	0.8818	0.8858	0.8898	0.8938	0.8978	0.9018	0.9058
1.1	0.9098	0.9138	0.9178	0.9218	0.9258	0.9298	0.9338	0.9378	0.9418	0.9458
1.2	0.9498	0.9538	0.9578	0.9618	0.9658	0.9698	0.9738	0.9778	0.9818	0.9858
1.3	0.9898	0.9938	0.9978	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES**EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 1 punto c) 0,75 puntos**

Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- a) Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^t B = C$
 b) Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A \cdot C$ y calcular la inversa de $A \cdot C$ para el caso $k = 0$.
 c) Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2 = B - I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$A^t B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k^2 - 1 & k \\ -k & -1 \\ k - k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 1 = 0 \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \sqrt{1} = \pm 1 \\ k = 1 \\ -k = -1 \rightarrow k = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

Para que se cumpla la igualdad debe ser $k = 1$.

b) Hallamos la expresión de la matriz $A \cdot C$.

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & k+1+1 \\ 0+0+0 & 1+0+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa de $A \cdot C$ su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{vmatrix} = k+1 \quad |A \cdot C| = 0 \Rightarrow k+1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

Existe la inversa de $A \cdot C$ para cualquier valor de k distinto de -1 .

Para $k = 0$ la matriz queda $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$|A \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A \cdot C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot C)^T)}{|A \cdot C|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $k = 0$ la matriz inversa de $A \cdot C$ es $(A \cdot C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Averiguamos cuando se cumple la igualdad $B^2 = B - I$.

$$B^2 = B - I \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k^2 - 1 & k \\ -k & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bullet k^2 - 1 = k - 1 \rightarrow k^2 - k = 0 \rightarrow \\ \rightarrow k(k - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 1} \\ \bullet k = 1 \\ \bullet -k = -1 \rightarrow k = 1 \end{cases}$$

La igualdad se cumple para $k = 1$.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Dado el sistema
$$\begin{cases} kx + 2y - z = 3k \\ 2x + ky - 2z = 6 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

a) Discute dicho sistema según los valores del parámetro k .

b) Resuelve el sistema para el valor $k = 3$.

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 3k \\ 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 4 + 2 + k - 4 - 2k = k^2 - k - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = k \\ \frac{1-5}{2} = -2 = k \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq -2$ y $k \neq 3$

En este caso el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = -2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad -2 \quad 6 \\ -2 \quad 2 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad 2 \quad -4 \\ -2 \quad 2 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad -10 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad -30 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -30 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. $k = 3$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad 9 \quad -6 \quad 18 \\ -6 \quad -4 \quad 2 \quad -18 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 3 \quad 9 \\ -3 \quad -2 \quad 1 \quad -9 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -5 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 5 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $k = 3$ (caso 3) el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos sus infinitas soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 5y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 5y = 4z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 \cdot \frac{4}{5}z - z = 9 \Rightarrow 3x + \frac{8-5}{5}z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 9 - \frac{3}{5}z \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{5}z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos)**a) 1,25 puntos****b) 1,25 puntos**

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

a) Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) Calcula una primitiva de la función $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pase por el punto $P(0,1)$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1) - 1 \cdot e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow e^x(x-2) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x=2$ y del valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0-1)^2} = -2 < 0$.

La función decrece en $(-\infty, 1)$.

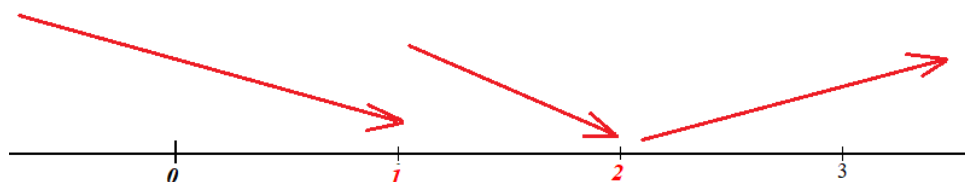
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{e^{1.5}(1.5-2)}{(1.5-1)^2} = \frac{-0.5e^{1.5}}{0.25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{e^3(3-2)}{(3-1)^2} = \frac{e^3}{4} > 0$.

La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(2, e^2)$.

c) Calculamos la integral indefinida de la función $g(x)$.

$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= \int (x^2 - 3x) \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 3x \rightarrow du = 2x - 3 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2 - 3x)e^x - \int (2x - 3)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x - 3 \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2 - 3x)e^x - \left[(2x - 3)e^x - \int 2e^x dx \right] = (x^2 - 3x)e^x - (2x - 3)e^x + 2e^x = \\ &= (x^2 - 3x - 2x + 3 + 2)e^x = \boxed{(x^2 - 5x + 5)e^x + K}\end{aligned}$$

La primitiva de la función $g(x)$ es $G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x + K$. Hallamos el valor de K para que $G(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} G(0) = 1 \\ G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x + K \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = (0^2 - 5 \cdot 0 + 5)e^0 + K \Rightarrow 1 = 5 + K \Rightarrow \boxed{K = -4}$$

La primitiva de $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pasa por el punto $P(0,1)$ tiene la expresión $G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x - 4$.

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos)**a) 1,25 puntos****b) 1,25 puntos**

- a) Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.
- b) Dada la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

- a) Consideramos la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$. Esta función es polinómica y por tanto es continua. Tenemos que $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = -1 < 0$ y $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Para aproximar la solución a las décimas valoramos la función en distintos valores entre 1 y 2.

$$f(1.2) = 1.2^3 - 2 \cdot 1.2^2 + 2 \cdot 1.2 - 2 = -0.752 < 0$$

$$f(1.5) = 1.5^3 - 2 \cdot 1.5^2 + 2 \cdot 1.5 - 2 = -0.125 < 0$$

$$f(1.6) = 1.6^3 - 2 \cdot 1.6^2 + 2 \cdot 1.6 - 2 = 0.176 > 0$$

La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ en el intervalo $(1.5, 1.6)$ es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Aplicando de nuevo el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c \in (1.5, 1.6)$ tal que $f(c) = 0$.

La solución de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene un valor entre 1.5 y 1.6. Comprobamos que esta solución es única.

Si existiese otro valor d tal que $f(d) = 0$ podríamos considerar la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ que es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) , como además $f(c) = f(d)$ aplicando el teorema de Rolle debe existir un $p \in (c, d)$ tal que $f'(p) = 0$.

Comprobamos que esto no es posible.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = ; \text{No existe!}$$

No existe ningún valor que anule la derivada y esa segunda solución de $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ no existe. La solución es única teniendo un valor entre 1.5 y 1.6.

- b) Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 2x + 2 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$$

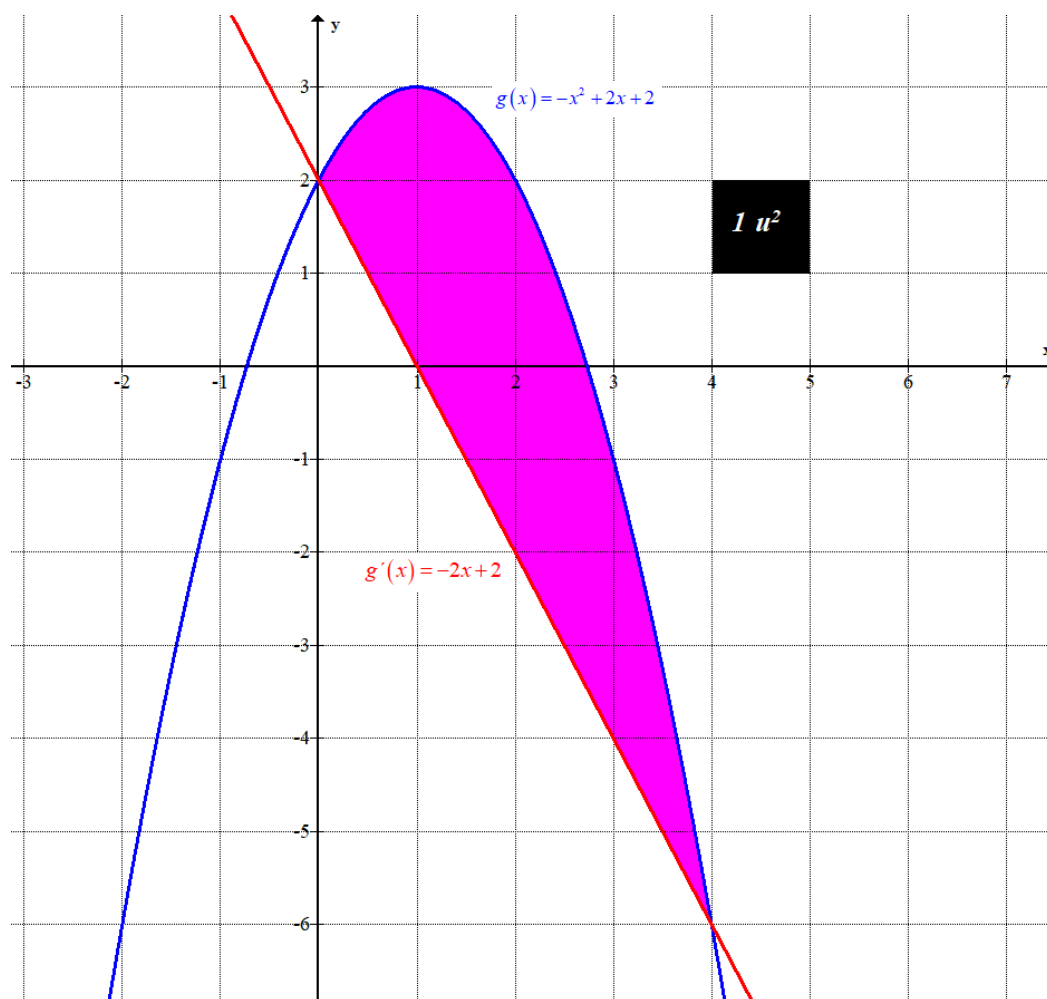
$$\Rightarrow -x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ se obtiene con el valor absoluto de la integral definida de 0 a 4 de la diferencia de las dos funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

$$\int_0^4 g(x) - g'(x) dx = \int_0^4 -x^2 + 2x + 2 - (-2x + 2) dx = \int_0^4 -x^2 + 4x dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = \left[\frac{-4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] = \frac{-64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2$$

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ tiene un valor de $\frac{32}{3} \approx 10.66$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0.75 puntos

Dados los puntos $A(4, 3, 3)$, $B(3, 3, 4)$, $C(1, 0, 4)$ y $D(4, 0, 1)$,

- a. Justifica de forma razonada que los puntos A , B , C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.
 b. Calcula el valor de k para que el punto $P(7, k, 2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C .
 c. Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C .

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 3, 3) \in \pi \\ B(3, 3, 4) \in \pi \\ C(1, 0, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 3, 4) - (4, 3, 3) = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 4) - (4, 3, 3) = (-3, -3, 1) \\ C(1, 0, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y + 3(z-4) + y + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 3z - 12 + y + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 2y + 3z - 15 = 0}$$

Para que los puntos A , B , C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - 2y + 3z - 15 = 0 \\ \text{¿} D(4, 0, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 15 = 0? \Rightarrow \text{¿} 12 + 3 - 15 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Los cuatro puntos pertenecen al plano de ecuación $\pi: 3x - 2y + 3z - 15 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 3, 3) \in r \\ C(1, 0, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1) \\ C(1, 0, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Obtenemos el valor de k para que la recta pase por el punto P .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \\ P(7, k, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 1 - 3\lambda \rightarrow 6 = -3\lambda \rightarrow \lambda = -2 \\ k = -3\lambda \\ 2 = 4 + \lambda \rightarrow \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = -3(-2) = 6}$$

Para $k = 6$ el punto P pertenece a la recta que pasa por los puntos A y C .

- c) Hallamos la distancia pedida hallando primero el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (-3, -3, 1) \\ B(3, 3, 4) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -3x - 3y + z + D = 0 \\ B(3, 3, 4) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 - 9 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 + D = 0 \Rightarrow D = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': -3x - 3y + z + 14 = 0}$$

Hallamos el punto Q de corte del plano hallado con la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -3x - 3y + z + 14 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -3(1 - 3\lambda) - 3(-3\lambda) + 4 + \lambda + 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 9\lambda + 9\lambda + 4 + \lambda + 14 = 0 \Rightarrow 19\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-15}{19} \Rightarrow$$

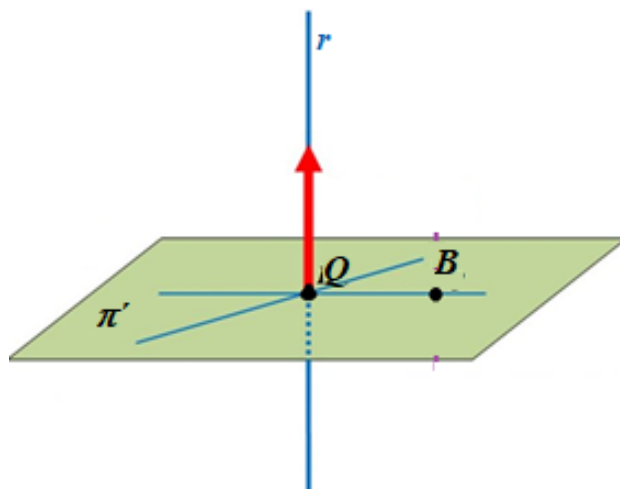
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 \frac{-15}{19} = \frac{64}{19} \\ y = -3 \frac{-15}{19} = \frac{45}{19} \\ z = 4 + \frac{-15}{19} = \frac{61}{19} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right)}$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C es el módulo del vector que une los puntos B y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right) \\ B(3, 3, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right) - (3, 3, 4) = \left(\frac{7}{19}, \frac{-12}{19}, \frac{-15}{19}\right)$$

$$d(B, r) = |\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{\left(\frac{7}{19}\right)^2 + \left(\frac{-12}{19}\right)^2 + \left(\frac{-15}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{418}}{19} \approx 1.08u$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C vale $\frac{\sqrt{418}}{19} \approx 1.08$ unidades.



EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) a) 0,5 puntos b) 1,5 puntos c) 0,5 puntos

Dados los planos $\pi_1 : x + ky - 3z - 6 = 0$, $\pi_2 : 2x - y - 5 = 0$ y el punto $A(2, 3, -4)$:

a) Calcula el valor de “ k ” para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para $k = 2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1 .

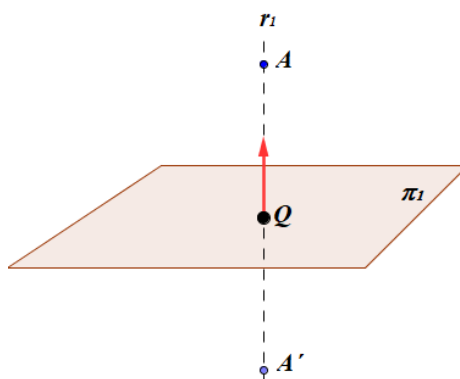
c) Para $k = 2$, calcula la distancia del punto A al plano

a) Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares sus vectores normales deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + ky - 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, k, -3) \\ \pi_2 : 2x - y - 5 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, 0) \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, k, -3)(2, -1, 0) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

Para $k = 2$ los planos son perpendiculares.

b) Para $k = 2$ la ecuación del plano π_1 queda $\pi_1 : x + 2y - 3z - 6 = 0$.



Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene el punto A . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1 : x + 2y - 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 3, -4) \in r_1 \\ \vec{v}_1 = \vec{n}_1 = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 - 3\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta con el plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 - 3\lambda \end{cases} \\ \pi_1 : x + 2y - 3z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 3(-4 - 3\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 12 + 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 14 + 14\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 1, -1)}$$

El punto simétrico A' se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ} = (1, 1, -1) - (2, 3, -4) = (-1, -2, 3)$$

$$A' = A + \overrightarrow{AQ} = (1, 1, -1) + (-1, -2, 3) = (0, -1, 2)$$

El simétrico del punto A respecto del plano π_1 tiene coordenadas $A'(0, -1, 2)$.

c) La distancia del punto A al plano es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$d(A, \pi_1) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

La distancia del punto A al plano π_1 tiene un valor de $\sqrt{14}$ unidades.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,5 puntos c) 1 punto

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?
 b) Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?
 c) ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

- a) Llamamos A a “la canción es de Extremoduro”, B a “la canción es de Robe” y C a “el fan se sabe la letra de la canción”.

Por la información proporcionada y suponiendo que todos los discos tienen el mismo número de canciones sabemos que:

$$P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75; P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25; P(C/A) = 0.70 \text{ y } P(C/B) = 0.80$$

Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = 0.75 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.725}$$

La probabilidad de que el fan conozca la letra de la canción elegida al azar vale 0.725.

- b) Debemos calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot 0.7}{0.725} = \boxed{\frac{21}{29} \approx 0.7241}$$

La probabilidad de que la canción que suena cuya letra sabe el fan sea de Extremoduro vale $\frac{21}{29} \approx 0.7241$.

- c) Nos piden calcular $P(B \cup \bar{C})$.

$$\begin{aligned} P(B \cup \bar{C}) &= P(B) + P(\bar{C}) - P(B \cap \bar{C}) = P(B) + 1 - P(C) - P(B)P(\bar{C}/B) = \\ &= P(B) + 1 - P(C) - P(B)[1 - P(C/B)] = P(B) + 1 - P(C) - P(B) + P(B)P(C/B) = \\ &= 1 - P(C) + P(B)P(C/B) = 1 - 0.725 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.475} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Supongamos que todos los discos tienen el mismo número de canciones y que todos llevan 10 canciones. Serían 120 canciones de Extremoduro y 40 de Robe.

El fan se sabe la letra del 70% de las canciones de Extremoduro, es decir, se sabe la letra de $0.7 \cdot 120 = 84$ canciones de Extremoduro.

El fan se sabe la letra del 80% de las canciones de Robe, es decir, se sabe la letra de $0.8 \cdot 40 = 32$ canciones de Robe.

Hacemos una tabla con los datos proporcionados.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84		120
Canción de Robe	32		40

Completamos la tabla.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84	36	120
Canción de Robe	32	8	40
	116	44	160

- a) De las 160 canciones el fan se sabe la letra de 116. La probabilidad de que al elegir una canción al azar el fan se sepa la letra vale $\frac{116}{160} = 0.725$.
- b) El fan sabe la letra de 116 canciones y de estas 84 son de Extremoduro. La probabilidad de que la canción que suena y de la cual sabe la letra el fan sea de Extremoduro vale $\frac{84}{116} = \frac{21}{29} \approx 0.7241$.
- c) De las 160 canciones hay 40 de su etapa en solitario y 36 de su etapa en Extremoduro cuya letra no se sabe el fan. La probabilidad de que la canción elegida sea de su etapa en solitario o no la sepa el fan vale $\frac{40+36}{160} = 0.475$.