



PAU
Convocatoria ordinaria 2026
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X-I)B=C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x + 5z = 9 \\ (m-1)y + 6z = m+8 \\ (m-4)x + (m-1)y + 7z = m+9 \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).**Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.**

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
- b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos).**Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .

4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

- 1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.
- 1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

- 1.1. Los sucesos considerados son R = “Sufrir retraso significativo” e I = “Sufrir incidencias meteorológicas”.

La variable aleatoria X = “La duración de un viaje expresado en minutos en condiciones operativas habituales” e Y = “La duración del viaje en minutos con incidencias meteorológicas”.

Nos dicen que $X = N(765, 18)$ e $Y = N(810, 40)$.

Calculamos $P(R|\bar{I})$ y $P(R|I)$.

$$P(R|\bar{I}) = P(X > 780) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 765}{18} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{780 - 765}{18}\right) =$$

$$= P(Z > 0.83) = 1 - P(Z \leq 0.83) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.83) = 0.7967 \end{array} \right\} = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

$$P(R|I) = P(Y > 840) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 810}{40} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{840 - 810}{40}\right) =$$

$$= P(Z > 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.75) = 0.7734 \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

Sabemos también que $P(I) = 0.30$. Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(I)P(R/I) + P(\bar{I})P(R/\bar{I}) = 0.3 \cdot 0.2266 + 0.7 \cdot 0.2033 = \boxed{0.21029}$$

1.2. Nos piden calcular $P(Y < 765)$.

$$P(Y < 765) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 810}{40} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{765 - 810}{40}\right) = P(Z < -1.125) =$$

$$= P(Z > 1.125) = 1 - P(Z \leq 1.125) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 1.125) = 0.8697 \end{array} \right\} = 1 - 0.8697 = \boxed{0.1303}$$

- 2.1.** Considérese la igualdad matricial $A(X-I)B=C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.
- 2.1.1.** Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.
- 2.1.2.** ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.1. Para despejar la matriz X multiplicamos por las matrices inversas de A y B .

$$A(X-I)B=C \Rightarrow A^{-1} \cdot A(X-I)B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X-I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} + I}$$

2.1.2. La matriz I es una matriz cuadrada y para que sea posible realizar $X-I$ la matriz X tiene que ser de las mismas dimensiones. La matriz X debe ser una matriz cuadrada $m \times m$. La matriz $X-I$ tendrá dimensiones $m \times m$. La matriz A es una matriz 1×2 y para poder realizar el producto $A(X-I)$ debe ser $m=2$.

$$A \cdot (X-I)$$

$$1 \times \boxed{2 \cdot m} \times m \rightarrow 1 \times m$$

El producto $A(X-I)$ es una matriz de orden 1×2 . Para poder realizar el producto

$A(X-I)B$ la matriz B debe tener 2 filas.

$$A(X-I)B=C$$

$$1 \times \boxed{2 \cdot 2} \times n \rightarrow 1 \times n$$

Como la matriz C es 1×2 entonces debe ser $n=2$. La matriz X debe ser una matriz 2×2 y la matriz B también una matriz 2×2 .

La matriz X es $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Colocamos la información dada en la igualdad matricial y obtenemos la expresión de X .

$$A(X-I)B=C \Rightarrow A(X-I)I=C \Rightarrow A(X-I)=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 \ 1) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \ 1) \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 \ 1) \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-1+b \quad b-a-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1+b=0 \\ b-a-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b-a-1=0 \end{cases} \Rightarrow b-(1-b)-1=0 \Rightarrow 2b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{a=1-1=0}$$

La matriz X tiene la expresión $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x + 5z = 9 \\ (m-1)y + 6z = m+8 \\ (m-4)x + (m-1)y + 7z = m+9 \end{cases}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

La matriz ampliada asociada al sistema es $A/B = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ m-4 \quad m-1 \quad 7 \quad m+9 \\ -m+4 \quad 0 \quad -5 \quad -9 \\ \hline 0 \quad m-1 \quad 2 \quad m \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ 0 & m-1 & 2 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad m-1 \quad 2 \quad m \\ 0 \quad -m+1 \quad -6 \quad -m-8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -4 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{m-4 \quad 0 \quad 5 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad m-1 \quad 6 \quad m+8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -4 \quad -8}_A \end{pmatrix}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=1$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1-4 \quad 0 \quad 5 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad 1-1 \quad 6 \quad 1+8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -4 \quad -8}_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5z = 9 \\ 6z = 9 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5z = 9 \\ z = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ z = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m = 4$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{4-4}^{A/B} & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 4-1 & 6 & 4+8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -4}_{A} & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 5z = 9 \\ 3y + 6z = 12 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{9}{5} \\ y + z = 4 \\ z = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

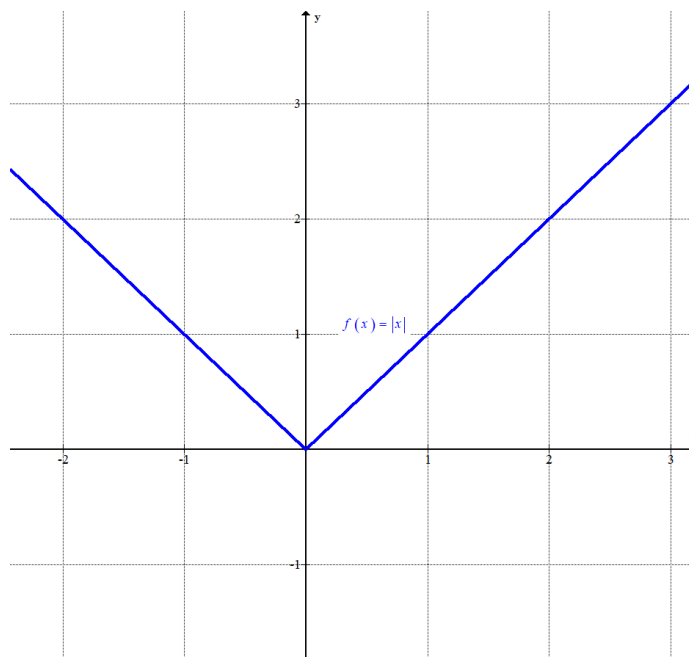
El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 1$ o $m = 4$ el sistema es incompatible.

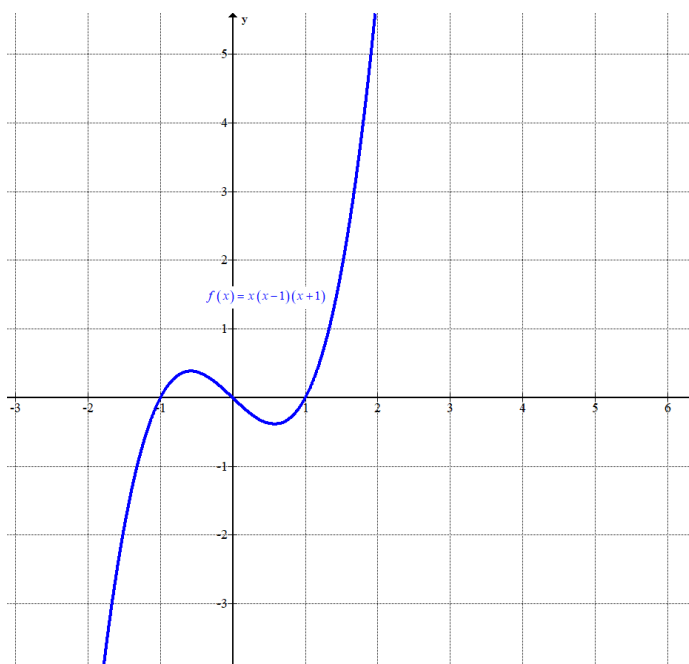
3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- Continua pero no derivable en $x = 0$.
- Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

a) Consideramos la función $f(x) = |x|$.



b) Consideramos $f(x) = x(x-1)(x+1)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo de definición. Corta el eje de abscisas en 3 puntos.

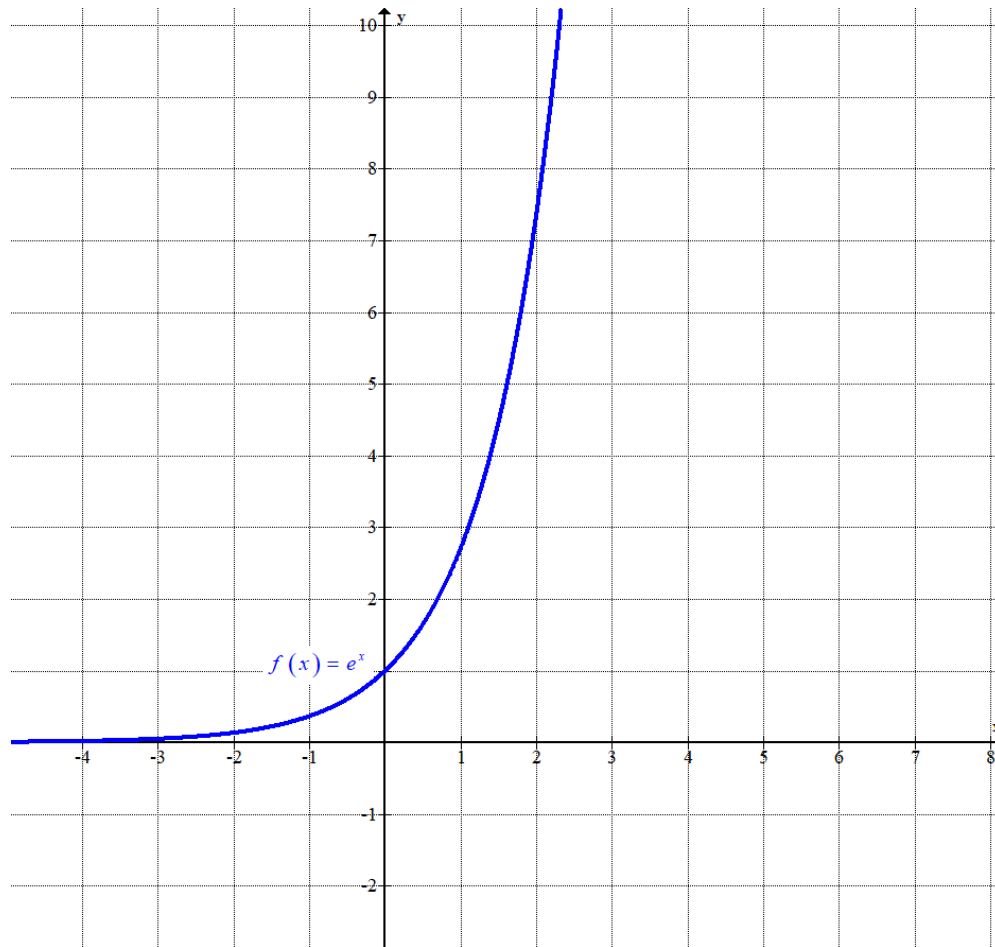


c) Esto no es posible. Si la función es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) , con dos puntos de corte con los ejes según el teorema de Rolle existe un $c \in (a,b)$ donde la derivada se anula. Por tanto, la derivada no puede ser positiva en todo el intervalo. No existe la función pedida.

d) Consideramos $f(x) = e^x$.

Su derivada es $f'(x) = e^x$ que es siempre positiva y por tanto la función es monótona creciente. Su derivada segunda es $f''(x) = e^x$ que es siempre positiva.

La gráfica de la función es monótona creciente y siempre es convexa (U).



3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = \boxed{1}$$

c) Calculamos el valor del tercer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\tan 0}{\sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^3(x)} = \frac{1}{\cos^3(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

d) Calculamos el valor del cuarto límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \sqrt{0} \cdot \ln 0 = 0 \cdot \infty = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln(0^+)}{\frac{1}{\sqrt{0^+}}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2} x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = \frac{-x^{-3/2}}{2} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-x^{-3/2}}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{-x^{-3/2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x^{-3/2+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2\sqrt{x} = -2\sqrt{0} = \boxed{0}$$

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Determinamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 2ax \\ \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ax^2 - 2ax = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Calculamos el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x como el valor absoluto de la integral definida de 0 a 2 de $f(x) = ax^2 - 2ax$.

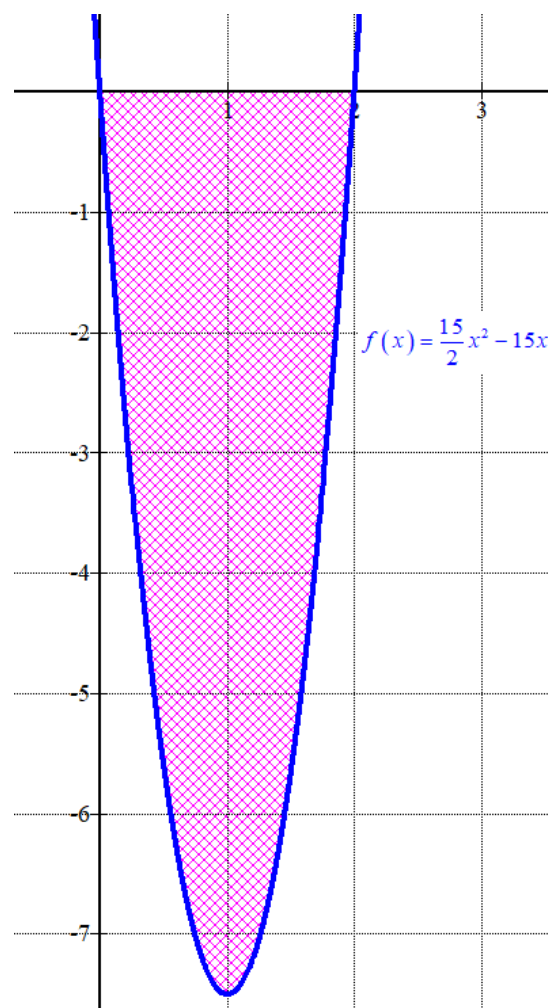
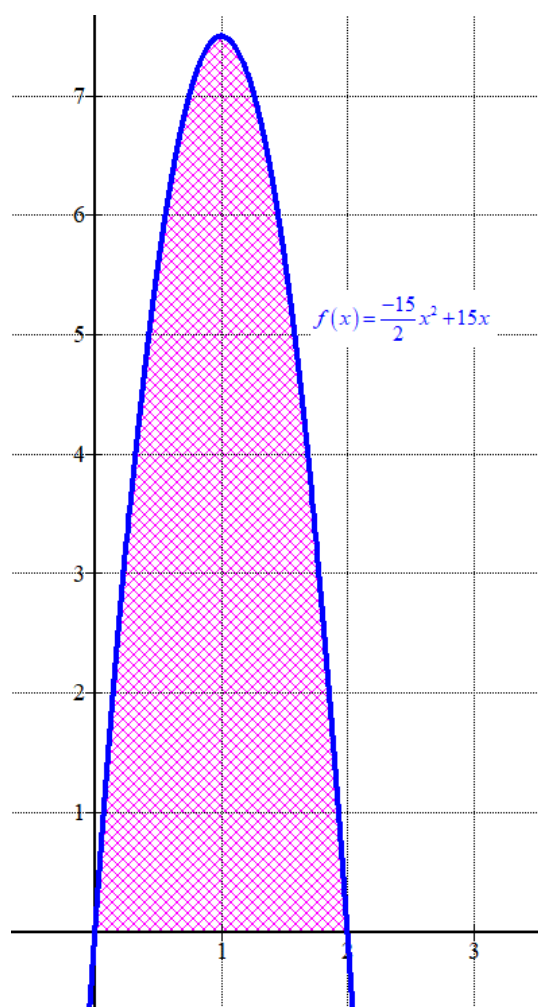
$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 ax^2 - 2ax dx = \left[\frac{ax^3}{3} - ax^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{a \cdot 2^3}{3} - a \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{a \cdot 0^3}{3} - a \cdot 0^2 \right] = \frac{8}{3}a - 4a = \left(\frac{8}{3} - 4 \right) a = \boxed{-\frac{4}{3}a} \end{aligned}$$

Averiguamos para que valor de “a” esta integral vale 10 o -10.

$$\text{Área} = 10 \Rightarrow \left| -\frac{4}{3}a \right| = 10 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}a = 10 \rightarrow -4a = 30 \rightarrow \boxed{a = \frac{30}{-4} = -\frac{15}{2}} \\ 0 \\ -\frac{4}{3}a = -10 \rightarrow 4a = 30 \rightarrow \boxed{a = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}} \end{cases}$$

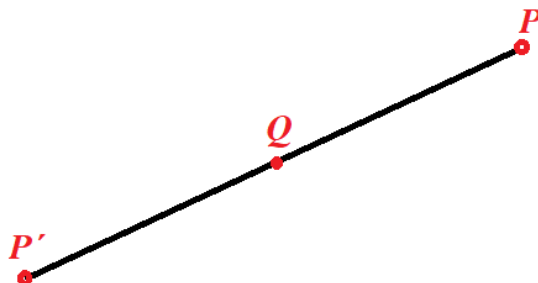
Se cumple lo pedido para $a = -\frac{15}{2}$ y para $a = \frac{15}{2}$.

La función queda $f(x) = -\frac{15}{2}x^2 + 15x$ o $f(x) = \frac{15}{2}x^2 - 15x$. Dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto que debe tener un área de 10 unidades cuadradas.



- 4.1.** Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:
- 4.1.1.** Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .
- 4.1.2.** Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r

4.1.1. El punto P' es tal que Q es el punto medio del segmento PP' . También podemos hallar el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (0,1,0) + (-1,1,-1) = (-1,2,-1)$$

El punto P' tiene coordenadas $P'(-1,2,-1)$.

Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por $O(0,0,0)$ y $P'(-1,2,-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P'(-1,2,-1) \in r \\ O(0,0,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{OP'} = (-1,2,-1) - (0,0,0) = (-1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$$

La recta pedida es $r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$

4.1.2. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (-1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \pi: -x + 2y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 2 \cdot 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x + 2y - z = 0}$$

El plano pedido tiene ecuación implícita $\pi: -x + 2y - z = 0$.

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

4.2.1. Para comprobar que no están alineados basta con ver que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \\ Q(0,1,0) \\ R(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{PR} = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Los puntos P , Q y R no están alineados y definen un único plano que los contiene.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \\ Q(0,1,0) \\ R(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - (z-1) - 0 - 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z = 0}$$

La ecuación implícita del plano que contiene los puntos P , Q y R es $\pi : x - z = 0$.

4.2.2. Determinamos la expresión de la distancia del punto S al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z = 0 \\ S(a,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(S, \pi) = \frac{|a - 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

$$\left. \begin{array}{l} d(S, \pi) = \frac{|a|}{\sqrt{2}} \\ d(S, \pi) = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |a| = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -2} \\ \boxed{a = 2} \end{cases}$$

Se cumple lo pedido para $a = -2$ y $a = 2$.