



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni tñpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

- la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]
- entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

- Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]
- Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)**Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)****4.1** Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]**4.2 a)** Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangenteshorizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**5.1** Contesta justificadamente los siguientes apartados:Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P \equiv (0,1,1)$ a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r . [1 punto]b) Halla la distancia de P a la recta r . [1 punto]**5.2** Contesta justificadamente los siguientes apartados:Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Soluciones

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

a) la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]

b) entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

a) Sea X la variable aleatoria que nos ofrece la medición de cierto índice. $X = N(\mu, \sigma)$.

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 109 \\ Z = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = \frac{109 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 0.6\sigma = 109 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 88 \\ Z = -0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.8 = \frac{88 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -0.8\sigma = 88 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 88 + 0.8\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 109 - 0.6\sigma \\ \mu = 88 + 0.8\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 88 + 0.8\sigma = 109 - 0.6\sigma \Rightarrow 1.4\sigma = 21 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{21}{1.4} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6 \cdot 15 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 15.

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8$.

$$P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 100}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{100 - a - 100}{15} \leq Z \leq \frac{100 + a - 100}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right] = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 1.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = 1.28 \Rightarrow \boxed{a = 1.28 \cdot 15 = 19.2}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El intervalo buscado es $(100 - 19.2, 100 + 19.2) = (80.8, 119.2)$.

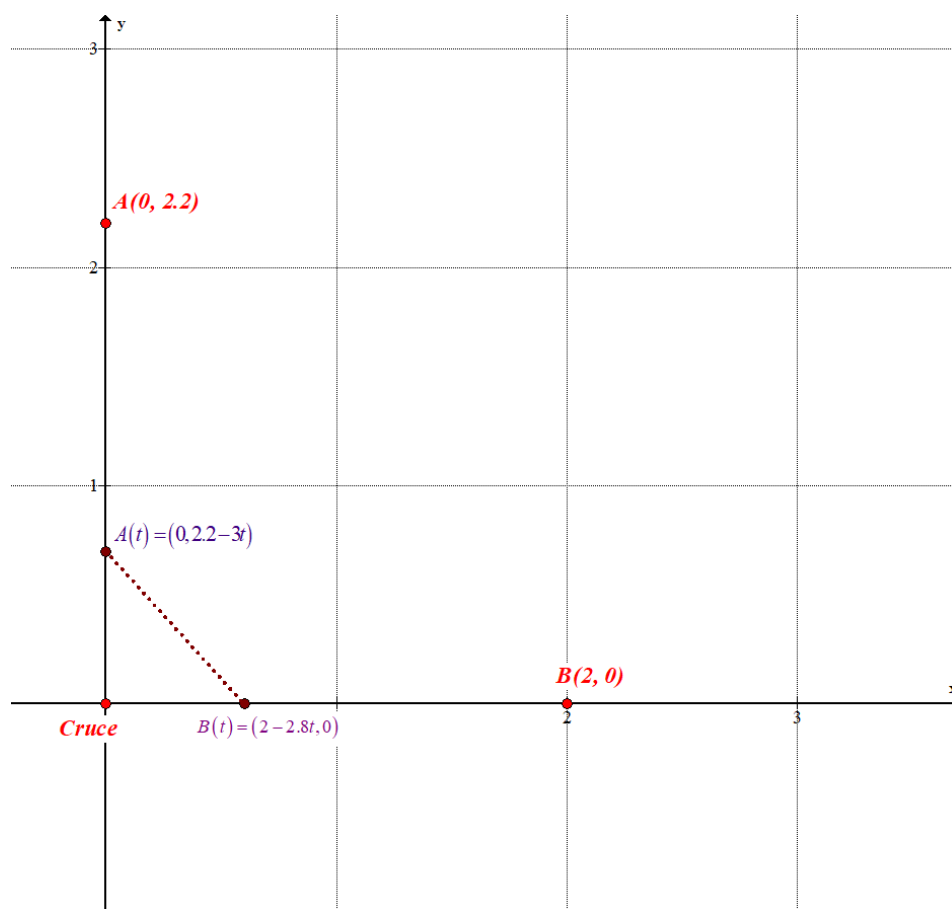
Pregunta 2.**Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

a) Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]

b) Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada situándola en unos ejes de coordenadas donde el cruce de las calles está situado en el origen de coordenadas.



Desde la iglesia A la procesión avanza a razón de 3 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $A(t) = (0, 2.2 - 3t)$.

Desde la iglesia B la procesión avanza a razón de 2.8 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $B(t) = (2 - 2.8t, 0)$.

La distancia entre las dos procesiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos $2.2 - 3t$ y $2 - 2.8t$.

$$d(t) = \sqrt{(2.2 - 3t)^2 + (2 - 2.8t)^2} = \sqrt{4.84 + 9t^2 - 13.2t + 4 + 7.84t^2 - 11.2t}$$

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función distancia.

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84} \Rightarrow d'(t) = \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}}$$

$$d'(t) = 0 \Rightarrow \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}} = 0 \Rightarrow 33.68t - 24.4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33.68t = 24.4 \Rightarrow \boxed{t = \frac{24.4}{33.68} \simeq 0.7245}$$

La función presenta un punto crítico en $t = 0.7245$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $t = 0.7245$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$d'(0.5) = \frac{33.68 \cdot 0.5 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 0.5^2 - 24.4 \cdot 0.5 + 8.84}} = \frac{-7.56}{+} < 0. \text{ La función decrece antes de } t = 0.7245.$$

- Después de $t = 0.7245$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$d'(1) = \frac{33.68 \cdot 1 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 1^2 - 24.4 \cdot 1 + 8.84}} = \frac{9.28}{+} > 0. \text{ La función crece después de } t = 0.7245.$$

La función decrece antes y crece después de $t = 0.7245$. La función tiene un mínimo relativo en dicho valor.

La distancia entre las dos procesiones es mínima al cabo de 0.7245 horas, es decir, al cabo de aproximadamente 43 minutos y 28 segundos.

b) Calculamos el valor de la función distancia para $t = 0.7245 \rightarrow d(0.7245)$.

$$d(0.7245) = \sqrt{16.84 \cdot 0.7245^2 - 24.4 \cdot 0.7245 + 8.84} \simeq 0.039$$

La distancia mínima entre las dos procesiones es de 39 metros.

Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

a) Resolvemos el sistema asociado a la igualdad matricial dada.

$$\left. \begin{array}{l} x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \\ x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \\ p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b \\ p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_a = 2 + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \frac{1}{3}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ p_b = 2 + \frac{1}{2}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \frac{1}{4}\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3p_a = 6 + 3\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ 4p_b = 8 + 2\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 3p_a &= 6 + 51 - 6p_a + 1.5p_b + 20 - 3p_b + 0.5p_a \\ 4p_b &= 8 + 40 - 6p_b + p_a + 17 - 2p_a + 0.5p_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8.5p_a &= 77 - 1.5p_b \\ 9.5p_b &= 65 - p_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 8.5p_a &= 77 - 1.5p_b \\ p_a &= 65 - 9.5p_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8.5(65 - 9.5p_b) = 77 - 1.5p_b \Rightarrow \frac{1105}{2} - \frac{323}{4}p_b = 77 - 1.5p_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2210 - 323p_b = 308 - 6p_b \Rightarrow 1902 = 317p_b \Rightarrow \boxed{p_b = \frac{1902}{317} = 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a = 65 - 9.5 \cdot 6 = 8} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \boxed{x_a = 17 - 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4} \\ \boxed{x_b = 20 - 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

La solución es $x_a = 4$; $x_b = 6$; $p_a = 8$; $p_b = 6$.

b) Obtenemos la expresión de $(X^t X)^{-1}$.

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 & 1+2+1+3 \\ 1+2+1+3 & 1+4+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$|X^t X| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 60 - 49 = 11 \neq 0$$

$$(X^t X)^{-1} = \frac{\text{Adj}((X^t X)^t)}{|X^t X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}}{11} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz A.

$$A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15-7 & -7+4 \\ 15-14 & -7+8 \\ 15-7 & -7+4 \\ 15-21 & -7+12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \\ 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ 1+1 & 1+2 & 1+1 & 1+3 \\ 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ -6+5 & -6+10 & -6+5 & -6+15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz queda $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comprobamos que la matriz A es idempotente: $A^2 = A$.

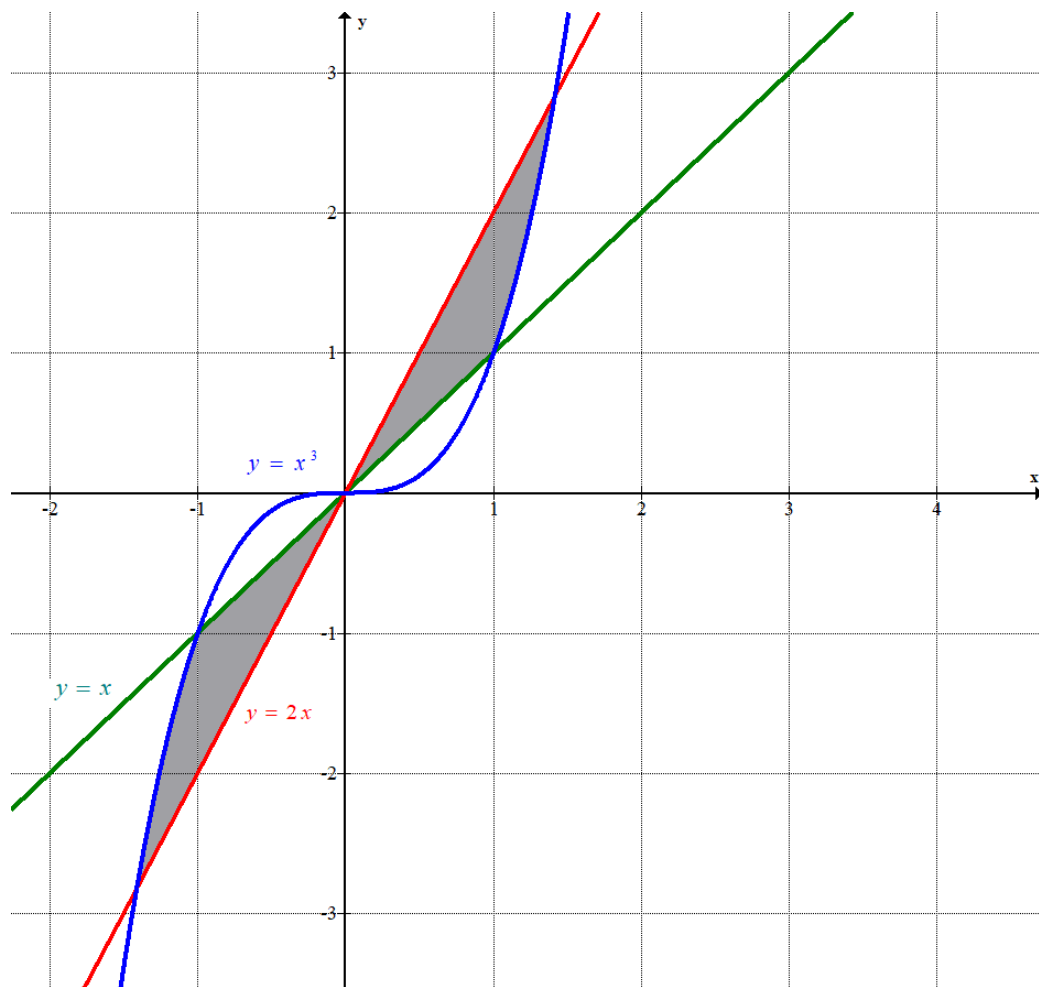
$$A^2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 36+4+25+1 & -12-16+10-4 & -30+4-30+1 & 6+8-5+2 \\ -12-16+10-4 & 4+64+4+16 & 10-16-12-4 & -2-32-2-8 \\ -30+4-30+1 & 10-16-12-4 & 25+4+36+1 & -5+8+6+2 \\ 6+8-5+2 & -2-32-2-8 & -5+8+6+2 & 1+16+1+4 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 66 & -22 & -55 & 11 \\ -22 & 88 & -22 & -44 \\ -55 & -22 & 66 & 11 \\ 11 & -44 & 11 & 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \cdot 11 \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]

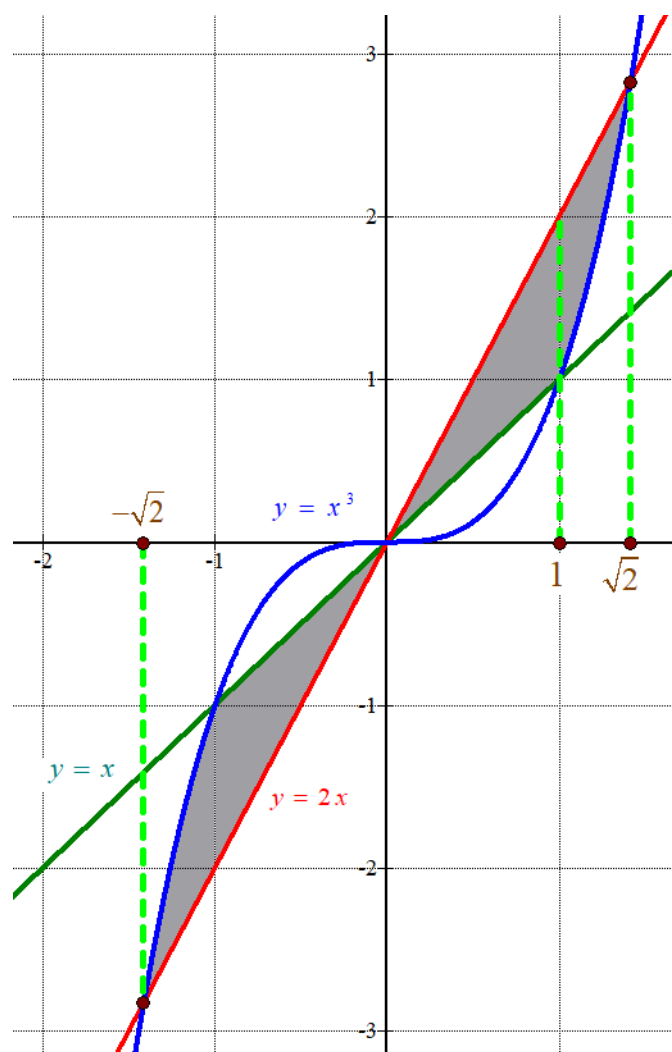
Dibujamos las gráficas de las dos rectas y la curva para establecer la figura de la cual queremos hallar su área.



Hallamos los puntos de corte entre las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



El área de la región delimitada por las tres gráficas es simétrica. Será el doble del área de la región situada en el primer cuadrante. Calculamos esta área como la suma de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la recta $y = 2x$ e $y = x$ y la integral definida entre 1 y $\sqrt{2}$ de la diferencia entre la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^3$.

$$\int_0^1 2x - x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x - x^3 dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = \left[(\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \right] - \left[1^2 - \frac{1^4}{4} \right] = 2 - \frac{4}{4} - 1 + \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} \right]$$

El área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$ vale:

$$\text{Área} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ unidades cuadradas}$$

4.2 a) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Para que una recta tangente a la curva en $x = a$ sea horizontal su pendiente debe ser 0, por lo que debe ser $f'(a) = 0$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

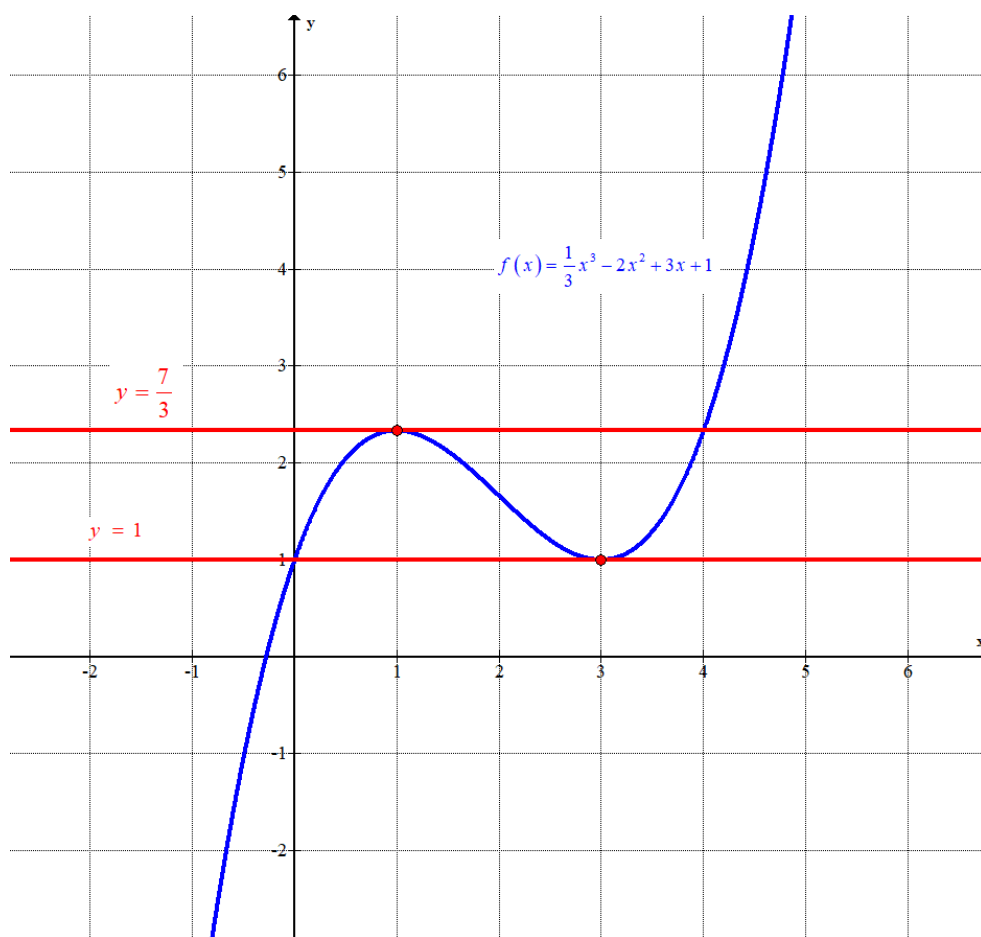
La recta tangente a la curva en $x = 1$ es horizontal.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3} \\ f'(1) &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \\ y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = 0(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x = 3$ es horizontal.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1 \\ f'(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \\ y - f(3) &= f'(3)(x - 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = 0(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Las dos rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f son: $y = \frac{7}{3}$ e $y = 1$.



b) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = e^{ax+b}$, que es una exponencial y por tanto continua.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = e - ax + 1$, que es una función lineal y por tanto continua.

Averiguamos cuando es continua la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{ax+b} = e^{a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e - ax + 1 = e - a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = e^{a+b} = e - a + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = e^{a+b} \rightarrow a+b=1 \\ e - a + 1 = e \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases} \Rightarrow 1+b=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función es continua para $a=1$ y $b=0$.

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P \equiv (0,1,1)$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r . [1 punto]
 b) Halla la distancia de P a la recta r . [1 punto]

a) El plano π perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta.

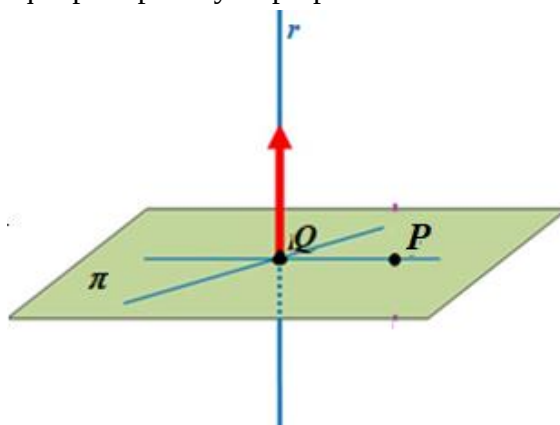
$$r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 + 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + y - z = 0}$$

El plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación $\pi: 3x + y - z = 0$

b) Hemos hallado el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r : $\pi: 3x + y - z = 0$.



Hallamos el punto Q de corte del plano con la recta r .

$$r: \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ A_r(0, 0, 11) \end{array} \right. \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(3\lambda) + \lambda - (11 - \lambda) = 0 \Rightarrow 9\lambda + \lambda - 11 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot 1 = 3 \\ y = 1 \\ z = 11 - 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3, 1, 10)}$$

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector que une los puntos P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q(3,1,10) \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3,1,10) - (0,1,1) = (3,0,9)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{90} = \boxed{3\sqrt{10} \approx 9.49 \text{ u}}$$

La distancia del punto P a la recta r vale $3\sqrt{10} \approx 9.49$ unidades.

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{pmatrix}$ y

como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + (a-1)^2 - 1 + a - 1 - a + 1 = (a-1)^2 - 1 =$$

$$= a^2 - 2a + 1 - 1 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Los rangos de A y A/B son iguales a 2, menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

- a) Para cualquier valor de a distinto de 0 y 2 el sistema planteado tiene una única solución que es el punto de corte de los tres planos.

Determinamos las coordenadas del punto de corte de los tres planos para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+0+a^2-a-0+a-a+1}{a(a-2)} = \frac{a^2-a}{a(a-2)} = \frac{a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-a+1+0-a+a-1+0}{a(a-2)} = \frac{-a}{a(a-2)} = \frac{-1}{a-2} = \frac{1}{2-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0+a+(a-1)^2-1-0-a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a+a^2-2a+1-1-a^2+a}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{0}{a(a-2)} = 0$$

La solución es $x = \frac{a-1}{a-2}$, $y = \frac{1}{2-a}$ y $z = 0$. El punto de corte de los tres planos tiene coordenadas $\left(\frac{a-1}{a-2}, \frac{1}{2-a}, 0\right)$.

b) Los planos se cortan en una recta para $a = 0$. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los planos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 & 0 & 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+2z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=\frac{1}{2}-z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} - z + z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

La recta intersección de los tres planos tiene ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.