

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95 % de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5 % de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilowatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24)$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
- b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilowatios hora (kWh).

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar $(2, 2)$ de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S , AB está en S .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S .
 - b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1 + t, 1 + t), t \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi : x + y + z = 0$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .
- b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t), t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
- b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
- b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 x f(x) dx .$$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.

a) Identificación de datos: 0.3 puntos (0.1 puntos por cada probabilidad correcta). Identificación del suceso: 0.1 puntos. Probabilidad total: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos). Probabilidad condicionada: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).

b) Identificación de la binomial: 0.1 puntos. Parámetros correctos de la binomial: 0.2 puntos. Identificación del suceso: 0.3 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.4 puntos (planteamiento: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.2 puntos). (Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

2.

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos. Tiempo de potencia máxima: 0.5 puntos.

b) Planteamiento de la integral: 0.2 puntos. Primitiva correcta: 0.3 puntos. Regla de Barrow: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

3.

a) Elección de dos matrices generales de S : 0.2 puntos. Multiplicación AB : 0.3 puntos. Probar que AB está en S : 0.5 puntos. Si toman $A = B$ y comprueban correctamente que AB está en S se otorgan como máximo 0.4 puntos.

b1) Determinación de los valores a y b : 0.2 puntos. Cálculo de la inversa: 0.5 puntos. Comprobar que la matriz inversa está en S : 0.3 puntos.

b2) Matriz nula: 0.2 puntos. Matriz identidad: 0.2 puntos. Para las otras dos matrices: 0.3 puntos cada matriz (planteamiento: 0.2 puntos, resolución: 0.1 puntos).

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Utilización de la fórmula de la distancia de un punto al plano: 0.2 puntos. Ecuación con valor absoluto: 0.2 puntos. Obtención de las dos ecuaciones a resolver: 0.2 puntos. Cada valor de t : 0.1 puntos. Cada punto correcto: 0.1 puntos.

4.2.

a) Justificación de que el vector director de la recta r está en ambos planos: 0.2 puntos. Determinación de los otros dos vectores directores para obtener los planos: 0.2 puntos por vector. Ecuación de los planos: 0.2 puntos por plano (planteamiento: 0.1 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).

b) Justificación de que cada recta descrita de los planos es paralela a r : 0.5 puntos. Justificación de paralelismo entre las rectas: 0.5 puntos.

5.1.

a) Planteamiento para la obtención de a : 0.3 puntos. Obtención de a : 0.2 puntos. Justificación de que solo puede haber otra asíntota y esta es oblicua: 0.1 puntos. Obtención de la pendiente de la asíntota oblicua: 0.2 puntos. Obtención de la ordenada del origen: 0.2 puntos.

b) Justificación: 0.4 puntos. Obtención de algún valor de a : 0.4 puntos. Obtención del otro valor de a : 0.2 puntos.

5.2.

Integral a resolver escrita como suma de dos integrales: 0.8 puntos. Primitivas correctas: 0.8 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.