

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	B
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilovatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24)$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3\sin\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

- (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
- (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilovatios hora (kWh).

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar $(2, 2)$ de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S , AB está en S .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S .
 - Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .
- b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
- b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
- b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 xf(x) dx$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

- a) Llamamos V a “la persona está infectada con un virus estomacal” y DF a “la persona presenta diarreas y fiebres”.

Obtenemos las probabilidades asociadas a la información proporcionada.

Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados

$$\rightarrow P(DF / V) = 0.95$$

En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus $\rightarrow P(V) = \frac{40}{1000} = 0.04$;

Un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas $\rightarrow P(DF / \bar{V}) = 0.005$.

Nos piden calcular $P(V / DF)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(V / DF) &= \frac{P(V \cap DF)}{P(DF)} = \frac{P(V)P(DF / V)}{P(V)P(DF / V) + P(\bar{V})P(DF / \bar{V})} = \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.95}{0.04 \cdot 0.95 + 0.96 \cdot 0.005} = \boxed{\frac{95}{107} \approx 0.8879} \end{aligned}$$

- b) Utilizamos el suceso contrario a “al menos una de las dos personas con síntomas tiene el virus” que es “ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus”.

La probabilidad de que ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus es el producto de la probabilidad de que una no lo tenga por la probabilidad de que la otra no lo tenga.

$$P(\text{al menos una de las dos personas con síntomas tiene el virus}) =$$

$$= 1 - P(\text{ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus}) =$$

$$= 1 - P(\bar{V} / DF)P(\bar{V} / DF) = 1 - \left(1 - \frac{95}{107}\right)\left(1 - \frac{95}{107}\right) = \boxed{0.9874}$$

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilovatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24)$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
 b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilovatios hora (kWh).

a) Hallamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{-3\pi}{2} \rightarrow t-12 = -12 \rightarrow t = 0 \notin [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{-\pi}{2} \rightarrow t-12 = -4 \rightarrow t = 8 \in [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{\pi}{2} \rightarrow t-12 = 4 \rightarrow t = 16 \in [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t-12 = 12 \rightarrow t = 24 \notin [8, 20] \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $t = 8$ y $t = 16$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(8, 16)$ tomamos $t = 12$ y la derivada vale

$$P'(12) = 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(12-12)\right) = \frac{3\pi}{8} > 0. \text{ La función crece en } (8, 16).$$

- En el intervalo $(16, 20]$ tomamos $t = 18$ y la derivada vale

$$P'(18) = 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(18-12)\right) = \frac{3\pi}{8} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0. \text{ La función decrece en } (16, 20].$$

La potencia aumenta en el intervalo $[8, 16)$ y disminuye en $(16, 20]$.

La potencia máxima se entrega a las 16 horas. Siendo esta potencia máxima de

$$3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(16-12)\right) = 3 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 6 \text{ kW.}$$

- b) La energía producida hasta el momento t es la integral definida de 0 a t de la potencia.

$$E(t) = \int_0^t P(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ \int_8^t 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ \int_8^{20} 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

Empezamos calculando la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= 3x + 3 \int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx = \\ &= 3x + 3 \frac{8}{\pi} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) \right) = 3x - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) + K \end{aligned}$$

Obtenemos la expresión de las integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_8^t 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= \left[3x - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) \right]_8^t = \\ &= \left[3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \right] - \left[3 \cdot 8 - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(8-12)\right) \right] = \\ &= 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) - 24 + \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \boxed{-24 + 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right)} \\ \int_8^{20} 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= -24 + 3 \cdot 20 - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(20-12)\right) = \\ &= -24 + 60 - \frac{24}{\pi} \cos(\pi) = \boxed{36 + \frac{24}{\pi}} \end{aligned}$$

La función queda $E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ -24 + 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 36 + \frac{24}{\pi} & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar (2, 2) de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S, AB está en S.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S.

b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

a) Consideramos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b(c+d) \\ 0 & (a+b)(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc+bd \\ 0 & ac+ad+bc+bd \end{pmatrix}$$

La matriz AB es triangular superior y el elemento que ocupa el lugar (2, 2) de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila. La matriz AB está en S.

b1) La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{vmatrix} = a(a+b) \quad |A| = 0 \Rightarrow a(a+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}$$

Las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ de S son invertibles cuando $a \neq 0$ y $a+b \neq 0$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ es una matriz de S invertible entonces $a \neq 0$ y $a+b \neq 0$. Hallamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}}{a(a+b)} = \frac{1}{a(a+b)} \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a(a+b)} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$$

La matriz A^{-1} es triangular superior. Comprobamos que la suma de los elementos de la primera fila nos da como resultado el elemento que ocupa la 2ª fila y 2ª columna.

$$\frac{1}{a} + \frac{-b}{a(a+b)} = \frac{a+b-b}{a(a+b)} = \frac{a}{a(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

Se cumple la igualdad y la matriz A^{-1} es una matriz de S.

b2) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ vemos cuando $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+b(a+b) \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab+b(a+b) = b \\ (a+b)^2 = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \\ b(2a+b) = b \rightarrow b(2a+b-1) = 0 \\ (a+b)^2 - (a+b) = 0 \rightarrow (a+b)(a+b-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ a=1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ 2a+b=1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ o \\ a+b=1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a=0 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow a=0 \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ o \\ a=0; b=1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=1 \end{cases} \end{cases} \\ \text{Si } a=1 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow a=1 \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1, b=0 \\ o \\ a=1; b=-1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ o \\ b=0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Las matrices de S que cumplen $A^2 = A$ son cuatro:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .

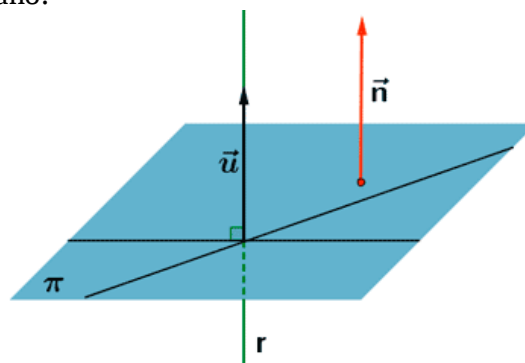
b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

a) Obtenemos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t) \Rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 1)$$

$$\pi \equiv x + y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

El vector director de la recta y el normal del plano son el mismo. La recta corta perpendicularmente el plano.



b) Determinamos la expresión de la distancia de un punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 0 \\ r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P_r, \pi) = \frac{|1+t+1+t+1+t|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}}$$

Averiguamos el valor de t para que la distancia valga $\sqrt{3}$.

$$d(P_r, \pi) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |3+3t| = (\sqrt{3})^2 = 3 \Rightarrow$$

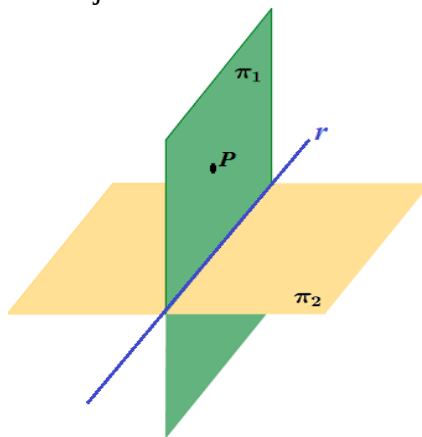
$$\Rightarrow \begin{cases} 3+3t = 3 \rightarrow 3t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow \boxed{P_r(1, 1, 1)} \\ 3+3t = -3 \rightarrow 3t = -6 \rightarrow t = -2 \rightarrow \boxed{Q_r(-1, -1, -1)} \end{cases}$$

En la recta r hay dos puntos a una distancia $\sqrt{3}$ de π : $P_r(1, 1, 1)$ y $Q_r(-1, -1, -1)$.

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
- (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene la recta r y pasa por el punto $P(0,0,1)$. Este plano tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Otro vector director del plano es el vector que une el punto P con un punto Q_r de la recta.

$$r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t) \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ Q_r(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ P(0, 0, 1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y + 0 - z + 1 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : x - y - z + 1 = 0}$$

El plano de ecuación $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ contiene a la recta r y pasa por el punto $(0, 0, 1)$.

Hallamos el segundo plano π_2 que contiene la recta r y debe ser perpendicular al plano π_1 .

Este plano tiene el vector director de la recta como un vector director del plano y otro vector director del plano es el vector normal del plano π_1 .

$$\pi_1 : x - y - z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n}_1 = (1, -1, -1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ Q_r(0, 1, 0) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

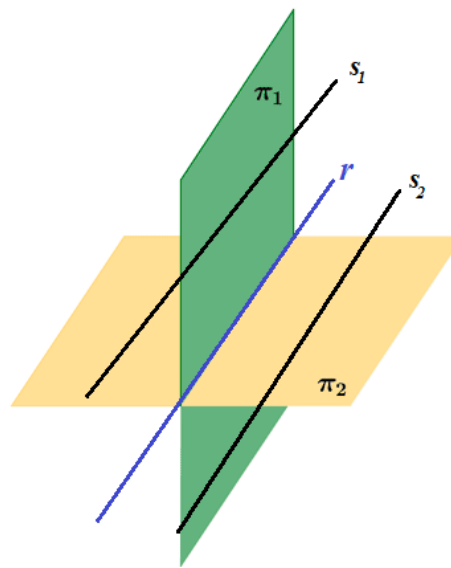
$$\Rightarrow -x - y + 1 + 0 + z - y + 1 - 0 = 0 \Rightarrow -x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0}$$

Los planos que se cortan en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pasa por el punto $(0, 0, 1)$ son $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0$.

b) Una recta s_1 contenida en el plano π_1 que no corte la recta r debe ser paralela a dicha recta, por lo que un vector director de la recta s_1 es $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$.

Una recta s_2 contenida en el plano π_2 que no corte la recta r debe ser paralela a dicha recta, por lo que un vector director de la recta s_2 es $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$.

Las rectas s_1 y s_2 tienen el mismo vector director $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$, por lo que son paralelas.



Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
 b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

- a) Para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$ el denominador de la función debe anularse para este valor.

$$3 \cdot 2 - a = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Para $a = 6$ se cumple lo pedido. La función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 6}$. Comprobamos que la recta $x = 3$ es asíntota vertical y estudiamos el resto de asíntotas.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \frac{2^2 - 1}{3 \cdot 2 - 6} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty} - \frac{6}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{3x - 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{6}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{6}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x - 6} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 - \frac{6}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{6}{\infty}} = \frac{2}{3}$$

La recta $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ es asíntota oblicua de la función.

- b) Para que la función no tenga asíntota vertical debe poder simplificarse la expresión racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a} = \frac{(x-1)(x+1)}{3x - a}$$

Para poder simplificarse debe anularse el denominador para $x=1$ o para $x=-1$.

$$x = -1 \Rightarrow 3(-1) - a = 0 \Rightarrow -3 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 - a = 0 \Rightarrow 3 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Para $a = -3$ o $a = 3$ la función no tiene asíntota vertical.

Si $a = -3$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x+1)} = \frac{1}{3}(x-1)$. Esta función es una recta y no tiene asíntota vertical.

Si $a = 3$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \frac{1}{3}(x+1)$. Esta función es una recta y no tiene asíntota vertical.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 xf(x) dx$$

Obtenemos la expresión como función a trozos de la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Si tomamos un valor menor que -1 , por ejemplo $x = -2$ tenemos que $(-2)^2 - 1 > 0$.

Si tomamos un valor entre -1 y 1 , por ejemplo $x = 0$ tenemos que $0^2 - 1 < 0$.

Si tomamos un valor mayor que 1 , por ejemplo $x = 2$ tenemos que $2^2 - 1 > 0$.

La función quedaría $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi(x^2 - 1)) & \text{si } x < -1 \\ \sin(\pi(1 - x^2)) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin(\pi(x^2 - 1)) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando un cambio de variable.

$$\int xf(x) dx = \int x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 - 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int x \sin(\pi t) \frac{dt}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(\pi t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} (-\cos(\pi t)) = \frac{-\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} + K$$

Al intervalo $[0, 2]$ pertenece $x = 1$, que es un punto donde se produce un cambio de definición de la función, por lo que calculamos la integral definida como la suma de la integral definida de 0 a 1 más la integral definida de 1 a 2 .

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_0^2 xf(x) dx &= \int_0^1 xf(x) dx + \int_1^2 xf(x) dx = \int_0^1 x \sin(\pi(1 - x^2)) dx + \int_1^2 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \\ &= -\int_0^1 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx + \int_1^2 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \\ &= \left[\frac{\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} \right]_0^1 + \left[\frac{-\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} \right]_1^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\cos(\pi(1^2-1))}{2\pi} \right] - \left[\frac{\cos(\pi(0^2-1))}{2\pi} \right] + \left[\frac{-\cos(\pi(2^2-1))}{2\pi} \right] - \left[\frac{-\cos(\pi(1^2-1))}{2\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos(-\pi)}{2\pi} + \frac{-\cos(3\pi)}{2\pi} - \frac{-1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$