

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	E
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.

Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.
 - Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .
- b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

- a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
 b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

- a) El $100 - 75 = 25$ % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan tarde por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

El 15% de los alumnos viven fuera de la localidad y el $100 - 75 = 25\%$ de ellos llegan tarde, es decir, el $0.15 \cdot 0.25 = 0.0375 = 3.75$ % del total.

El 85% de los alumnos viven en la misma localidad y el 5% de ellos llegan tarde, es decir, el $0.05 \cdot 0.85 = 0.0425 = 4.25$ % del total.

El porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora es $3.75 + 4.25 = 8\%$.

- b) Llamamos L al suceso “el alumno vive en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo” y T a “el alumno llega tarde a clase por la mañana”.

Por los datos proporcionados sabemos que $P(L) = 0.85$; $P(\bar{L}) = 1 - 0.85$; $P(\bar{T} / \bar{L}) = 0.75$ y por lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $P(T) = 0.08$.

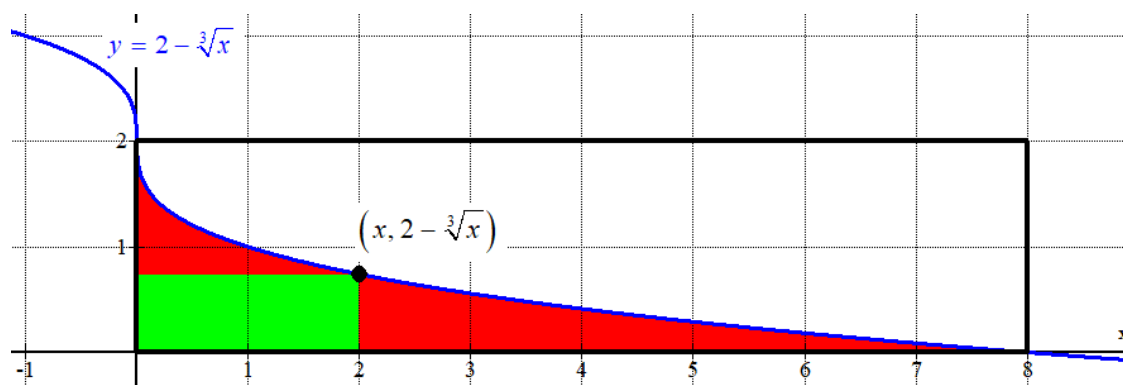
Nos piden calcular $P(\bar{L} / \bar{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L} / \bar{T}) = \frac{P(\bar{L} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{L})P(\bar{T} / \bar{L})}{1 - P(T)} = \frac{(1 - 0.85) \cdot 0.75}{1 - 0.08} = \boxed{\frac{45}{368} \approx 0.1223}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana tiene un valor de $\frac{45}{368} \approx 0.1223$.

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo. Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Para que el área roja sea lo menor posible el rectángulo verde debe tener la mayor área posible. Hallamos la expresión del área del rectángulo de base x y altura $2 - \sqrt[3]{x}$.

$$A(x) = x(2 - \sqrt[3]{x}) = 2x - x \cdot x^{1/3} = 2x - x^{4/3}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = 2x - x^{4/3} \Rightarrow A'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{4/3-1} = 2 - \frac{4x^{1/3}}{3} = \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3} = 0 \Rightarrow 6 - 4\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow 6 = 4\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

La función presenta un punto crítico en $x = \frac{27}{8}$. Averiguamos el signo de la segunda derivada en dicho valor.

$$A'(x) = \frac{6 - 4x^{1/3}}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{3}x^{1/3-1}}{3} = \frac{-4}{9}x^{-2/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow A''\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}} < 0$$

Para $x = \frac{27}{8}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función tiene un máximo relativo para $x = \frac{27}{8}$. El área roja es la menor posible para $x = \frac{27}{8}$.

El área del rectángulo que es la bandera tiene un valor de $8 \cdot 2 = 16$ unidades cuadradas.

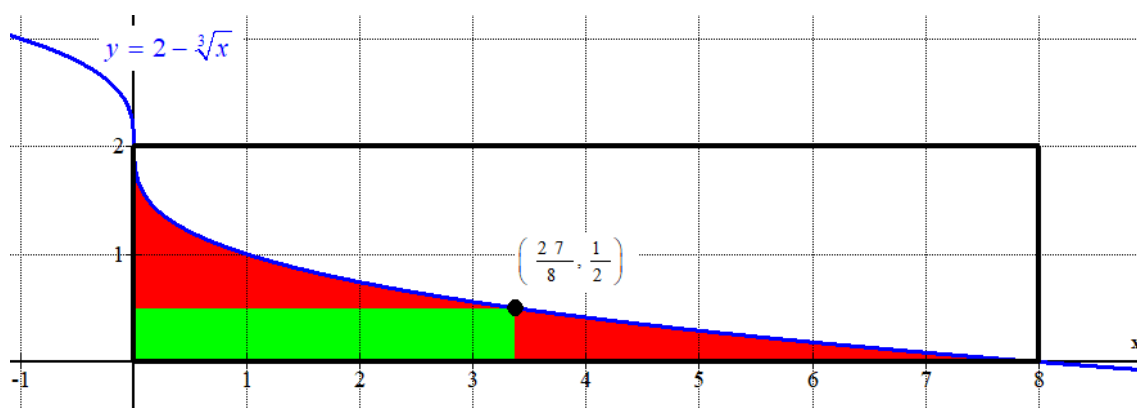
El área del trozo de bandera situada por debajo de la gráfica de $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ es el valor de la integral definida de la función de 0 a 8.

$$\int_0^8 2 - x^{1/3} dx = \left[2x - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1+1/3} \right]_0^8 = \left[2x - \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^8 = \left[2 \cdot 8 - \frac{3}{4} 8^{4/3} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{3}{4} 0^{4/3} \right] = 16 - 12 = 4$$

El área de color blanco vale $16 - 4 = 12$ unidades cuadradas.

El área del rectángulo verde es $A\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8} \left(2 - \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \right) = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} = 1.6875 \text{ u}^2$.

El área de la región de color rojo vale $4 - 1.6875 = 2.3125$ unidades cuadradas.



Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.

b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz $A + I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + I)^T}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{2}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b1) Calculamos primero el determinante de la matriz C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el valor del determinante de $(2C)^{100}$.

$$|(2C)^{100}| = |2C|^{100} = \left\{ \begin{array}{l} C \text{ es una matriz cuadrada de orden } 3 \\ |2C| = 2^3 |C| \end{array} \right\} = (2^3 |C|)^{100} =$$

$$= \{ \text{Sabemos que } |C| = 1 \} = (2^3 \cdot 1)^{100} = \boxed{2^{300}}$$

El determinante vale 2^{300} .

b2) Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

La matriz A tiene determinante no nulo y es invertible.
Obtenemos la expresión de la matriz AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0-2 \\ 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+2-1 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

Esta matriz no es cuadrada y por tanto no tiene matriz inversa.

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .

b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} P_1(1, 1, 0) \\ \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0) \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{0}{0}$$

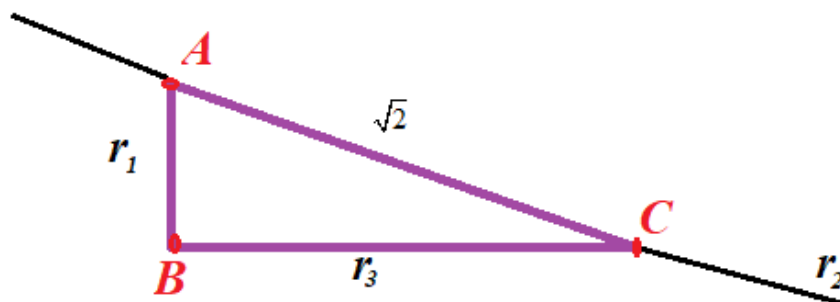
Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1, 1, 0) \\ Q_2(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r_1 y r_2 se cortan.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos el vértice A del triángulo rectángulo. Este punto es la intersección de las rectas r_1 y r_2 .

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \\ r_2 &\equiv \begin{cases} x=1+s \\ y=s \\ z=0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 1+t=1+s \\ 1=s \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow s=t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,1,0)}$$

El punto B pertenece a la recta r_1 y sus coordenadas son $B(1+t, 1, 0)$.

El punto C pertenece a la recta r_2 y sus coordenadas son $C(1+s, s, 0)$.

Para que el triángulo ABC sea rectángulo el vector $\overrightarrow{BC}$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{BA}$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= (1+s, s, 0) - (1+t, 1, 0) = (s-t, s-1, 0) \\ \overrightarrow{BA} &= (2, 1, 0) - (1+t, 1, 0) = (1-t, 0, 0) \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (s-t, s-1, 0) \cdot (1-t, 0, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-t)(1-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s-t=0 \rightarrow \boxed{s=t} \\ 1-t=0 \rightarrow \boxed{t=1} \end{cases}$$

Tenemos dos opciones para formar un triángulo rectángulo. Averiguamos cuando se cumple que la hipotenusa tenga longitud $\sqrt{2}$.

$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} A(2, 1, 0) \\ B(1+1, 1, 0) = (2, 1, 0) \Rightarrow A=B \\ C(1+s, s, 0) \end{cases}$$

Para $t=1$ los puntos A y B son el mismo y no existe el triángulo ABC.

Para $t=s$ hallamos la longitud de los catetos.

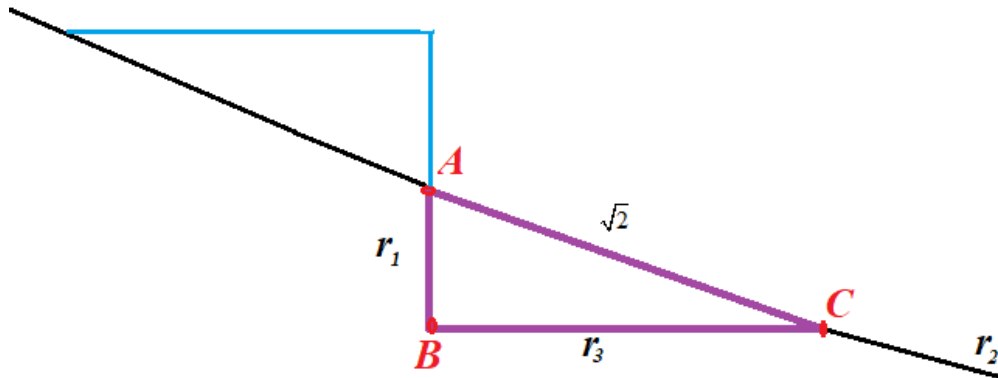
$$t=s \Rightarrow \begin{cases} A(2, 1, 0) \\ B(1+s, 1, 0) \\ C(1+s, s, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1+s, 1, 0) - (2, 1, 0) = (s-1, 0, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (1+s, s, 0) - (1+s, 1, 0) = (0, s-1, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(s-1)^2 + 0^2 + 0^2} = |s-1| \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (s-1)^2 + 0^2} = |s-1| \end{cases}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |s-1| \\ |\overrightarrow{BC}| = |s-1| \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = |s-1|^2 + |s-1|^2 \Rightarrow 2|s-1|^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |s-1|^2 = 1 \Rightarrow |s-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} s-1=1 \rightarrow s=2 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(3,1,0) \\ C(3,2,0) \end{cases} \\ s-1=-1 \rightarrow s=0 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1,1,0) \\ C(1,0,0) \end{cases} \end{cases}$$



Existen dos soluciones posibles. Hallamos la recta r_3 que contiene los puntos B y C.

$$\left. \begin{array}{l} B(3,1,0) \in r_3 \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{BC} = (3,2,0) - (3,1,0) = (0,1,0) \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

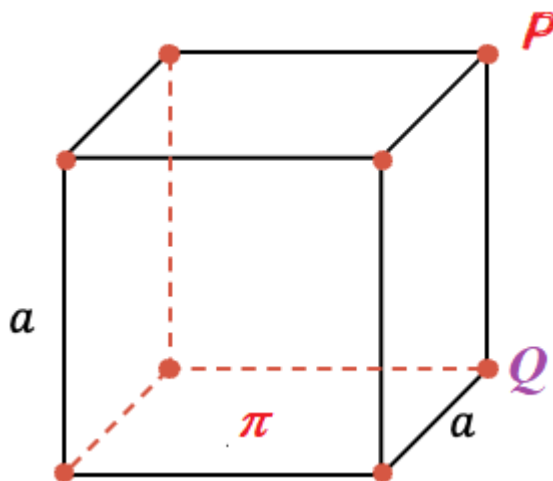
$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,0) \in s_3 \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{BC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow s_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Las rectas solución del problema son $r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y $s_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.



a) La longitud del lado del cubo es la distancia del punto P al plano $\pi: 2x - 2y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow a = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}}$$

La longitud el lado del cubo es $\frac{2}{3}$ unidades.

El volumen del cubo es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ unidades cúbicas.

b) Hallamos el vértice del cubo que es la proyección ortogonal del punto P en el plano. Para ello primero hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -2, 1) \\ P(1, 2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto Q que buscamos es el punto de corte de la recta r y el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \pi: 2x - 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{2}{9} = \frac{13}{9} \\ y = 2 - 2\frac{2}{9} = \frac{14}{9} \\ z = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)}$$

Otro vértice del cubo es el punto $Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Para que exista el logaritmo neperiano debe ser $x > 0$. Además, el denominador no se debe anular, por lo que $x \neq 1$. El dominio de la función es $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

Obtenemos la expresión de la derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

Tenemos un punto crítico en $x = e$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 1$ y $x = e$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = \frac{\ln(0.1) - 1}{(\ln(0.1))^2} = -0.6 < 0$

. La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,e)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{\ln(2) - 1}{(\ln(2))^2} = -0.6 < 0$. La

función decrece en $(1,e)$.

- En el intervalo $(e,+\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{\ln(e^2) - 1}{(\ln(e^2))^2} = \frac{1}{4} > 0$.

La función crece en $(e,+\infty)$.

La función decrece en $(0,1) \cup (1,e)$ y crece en $(e,+\infty)$.

Como la función decrece antes de $x = e$ y crece después podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x = e$.

Tenemos que $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$, por lo que las coordenadas del mínimo relativo son (e,e)



Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$$

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-a \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(3x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) \end{array} \right\} = \\ &= (x-a) \frac{-\cos(3x)}{3} - \int \frac{-\cos(3x)}{3} dx = \frac{-(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = \\ &= \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} = \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} + K \end{aligned}$$

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left[\frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \left[\frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{\operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{9} \right] - \left[\frac{(a-0)\cos(3 \cdot 0)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3 \cdot 0)}{9} \right] = \\ &= \frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{9} - \frac{a\cos(0)}{3} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{9} = \frac{-\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{0}{9} - \frac{a}{3} - \frac{0}{9} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} - a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a}{9} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a - 3a}{9} = \boxed{\frac{\pi - 6a}{9}} \end{aligned}$$

Utilizamos el resultado obtenido para resolver la igualdad.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \frac{\pi - 6a}{9} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \pi - 6a = 2\pi \Rightarrow -6a = \pi \Rightarrow \boxed{a = \frac{-\pi}{6}}$$

El valor que cumple la igualdad es $a = \frac{-\pi}{6}$.