

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: touchdown, field goal y extra point al que solo se puede optar después de anotar un touchdown. Según la normativa de la liga, un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto.

De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante touchdown, field goal y extra point. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos.
- La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos.

Halle el número de touchdowns, field goals y extra points anotados por el equipo.

Pregunta 2. Dada la función real de variable real $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.
- b) (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$.

Pregunta 3. Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Halle la distancia entre s y t .
 - b2) Halle el coseno del ángulo que forman r y s .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(B/A) = 0.375$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular $P(B)$.
- b) (1 punto) Calcular $P(\bar{A}/B)$.

Pregunta 4.2. En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82.5% de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

- a) (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.
- b) (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10%, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = x^2 + bx$.

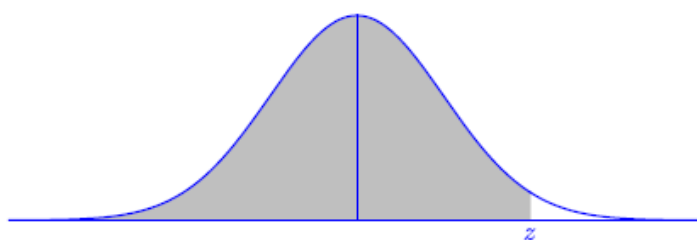
- a) (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x - 1$? Justifique la respuesta.

Pregunta 5.2. Calcule los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1. (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: touchdown, field goal y extra point al que solo se puede optar después de anotar un touchdown. Según la normativa de la liga, un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto.

De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante touchdown, field goal y extra point. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos.
- La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos.

Halle el número de touchdowns, field goals y extra points anotados por el equipo.

Llamamos “x” al número de touchdowns anotados, “y” al número de field goals y “z” al número de extra points. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

Un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto. Ha anotado 63 puntos $\rightarrow 6x + 3y + z = 63$.

El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos $\rightarrow 2y = x$

La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos $\rightarrow x + y = 4z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y + z = 63 \\ 2y = x \\ x + y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6 \cdot 2y + 3y + z = 63 \\ 2y + y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15y + z = 63 \\ 3y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 63 - 15y \\ 3y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 4(63 - 15y) \Rightarrow 3y = 252 - 60y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63y = 252 \Rightarrow \boxed{y = \frac{252}{63} = 4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 63 - 15 \cdot 4 = 3} \\ \boxed{x = 2 \cdot 4 = 8} \end{array} \right.$$

El equipo ha anotado 8 touchdowns, 4 field goals y 3 extra points.

Pregunta 2. Dada la función real de variable real $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.
 b) (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$.

a) Obtenemos la expresión de la función valor absoluto como una función a trozos.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 = x \\ \frac{6-4}{2} = 1 = x \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 > 0 \\ x=2 \Rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3 < 0 \\ x=6 \Rightarrow 6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in (-\infty, 1) \rightarrow f(x) > 0 \\ x \in (1, 5) \rightarrow f(x) < 0 \\ x \in (5, +\infty) \rightarrow f(x) > 0 \end{array}$$

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 < x < 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \notin (-\infty, 1) \\ -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \in (1, 5) \\ 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \notin (5, +\infty) \end{cases}$$

El único punto crítico se obtiene para $x=3$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 2 & \text{si } x > 5 \end{cases} \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

Para $x=3$ se anula la primera derivada y la segunda derivada toma valor negativo. La función presenta un máximo relativo para $x=3$.

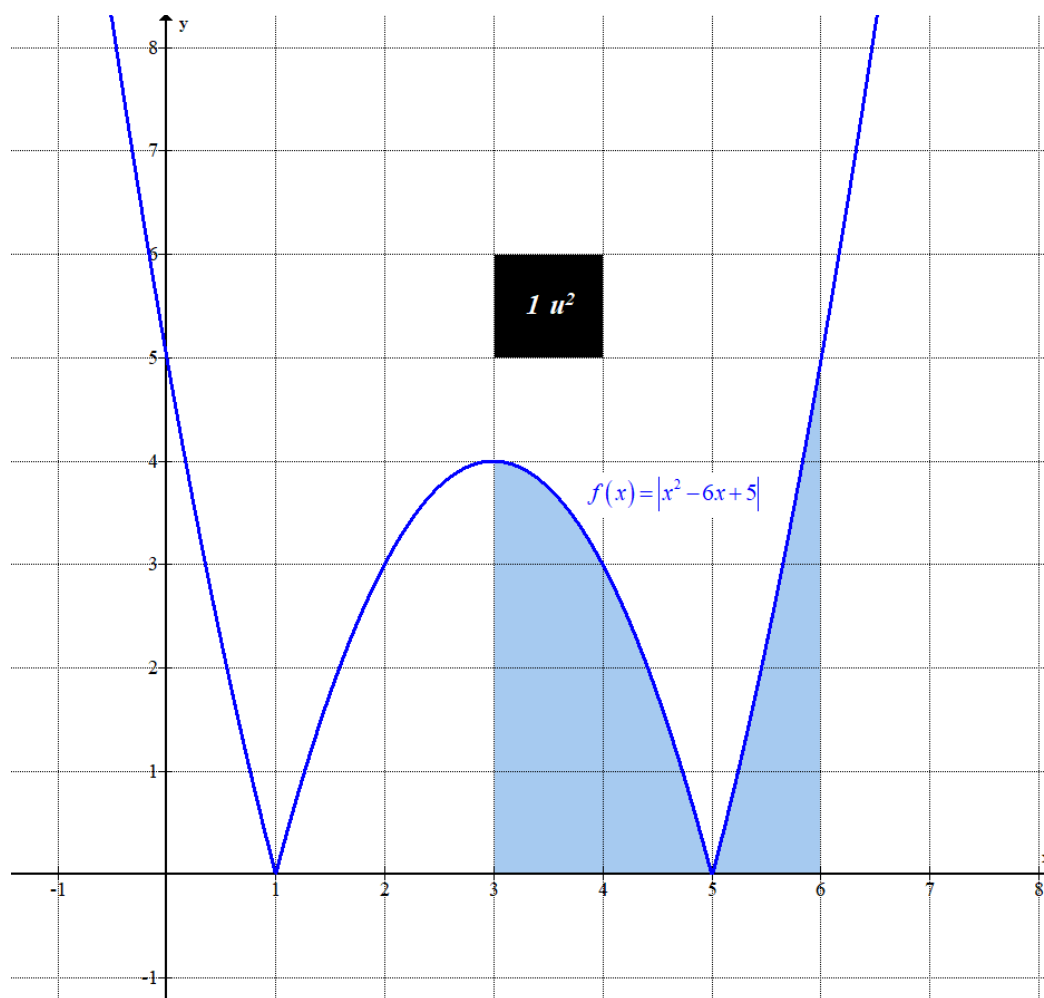
Para $x=3$ la función vale $f(3) = |3^2 - 6 \cdot 3 + 5| = |-4| = 4$.



- b) Como $x=5$ pertenece al intervalo $(3,6)$ la función cambia de definición en este intervalo. Hallamos el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$ como la suma de la integral definida de 3 a 5 de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y la integral definida de 5 a 6 de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_3^5 -x^2 + 6x - 5 dx + \int_5^6 x^2 - 6x + 5 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_3^5 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_5^6 = \\ &= \left[\frac{-5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 \right] + \left[\frac{6^3}{3} - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 \right] - \left[\frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right] = \\ &= \frac{-125}{3} + 75 - 25 + 9 - 27 + 15 + 72 - 108 + 30 - \frac{125}{3} + 75 - 25 = \frac{-250}{3} + 91 = \boxed{\frac{23}{3} \approx 7.66 u^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{23}{3} \approx 7.66$ unidades cuadradas.



Pregunta 3. Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s .
 b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 b1) Halle la distancia entre s y t .
 b2) Halle el coseno del ángulo que forman r y s .

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y - 2y + 3z = 3 \Rightarrow -y + 3z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -3 + 3z \Rightarrow s: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(-3, -3, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 3, 1) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} A(1, 2, -5) \in r \\ B(2, 4, -11) \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1, 2, -5) \in r \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 4, -11) - (1, 2, -5) = (1, 2, -6) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son paralelas ni coincidentes.

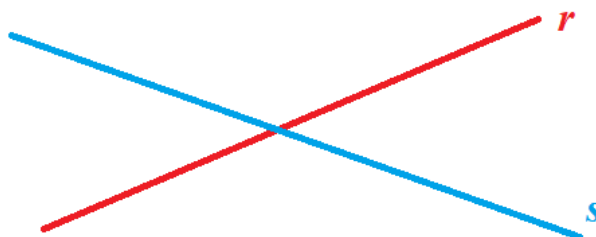
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{1}{-6}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -5) \\ P_s(-3, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP_s} = (-3, -3, 0) - (1, 2, -5) = (-4, -5, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \\ \overrightarrow{AP_s} = (-4, -5, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_s}] = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -4 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 72 - 5 + 8 - 15 - 90 = 0$$

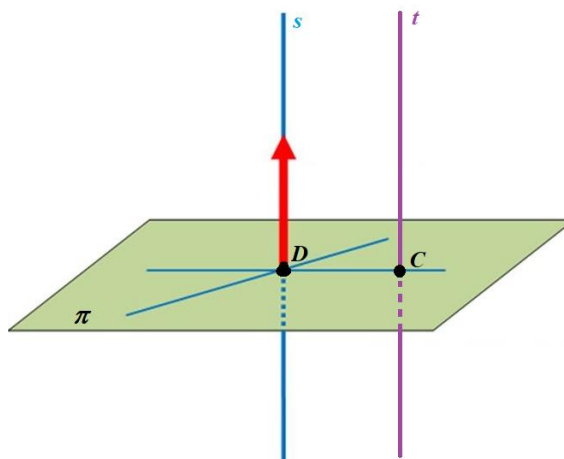
Como el producto mixto es nulo las rectas r y s se cortan (coinciden en un punto).



b1) Hallamos la ecuación de la recta t . Esta recta es paralela a la recta s por lo que tiene como vector director $\vec{v}_s = (3, 3, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_t = \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ C(1, 0, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las rectas s y t son paralelas. Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta t que pasa por el punto C . Luego hallamos el punto D de corte de la recta s con el plano π . La distancia entre las rectas es el módulo del vector $\overrightarrow{CD}$.



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta t que pasa por el punto C . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_t = (3, 3, 1) \\ C(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 3y + z + K = 0 \\ C(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 0 + 0 + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = -3 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + 3y + z - 3 = 0}$$

Hallamos el punto D de corte de la recta s con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 3y + z - 3 = 0 \\ s: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-3 + 3\lambda) + 3(-3 + 3\lambda) + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 + 9\lambda - 9 + 9\lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 19\lambda = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{21}{19} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 3\frac{21}{19} = \frac{6}{19} \\ y = -3 + 3\frac{21}{19} = \frac{6}{19} \\ z = \frac{21}{19} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right)}$$

Calculamos la distancia entre las rectas s y t .

$$\left. \begin{array}{l} D\left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right) \\ C(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{-13}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right)$$

$$d(s, t) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{-13}{19}\right)^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2 + \left(\frac{21}{19}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1.3377u}$$

La distancia entre las rectas s y t vale $\frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1.3377$ unidades.

b2) Las rectas r y s se cortan. Utilizamos el producto escalar de sus vectores directores para determinar el coseno del ángulo que forman.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{v}_s, \vec{u}_r) = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{u}_r|} =$$

$$= \frac{(3, 3, 1)(1, 2, -6)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{3 + 6 - 6}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{779}}{779}$$

El coseno del ángulo que forman r y s vale $\frac{3\sqrt{779}}{779} \approx 0.1075$.

Pregunta 4.1. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(B/A) = 0.375$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(\bar{A}/B)$.

a) Como $P(\bar{A}) = 0.6$ entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.375 \\ P(A) = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.375 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \cdot 0.375 = 0.15$$

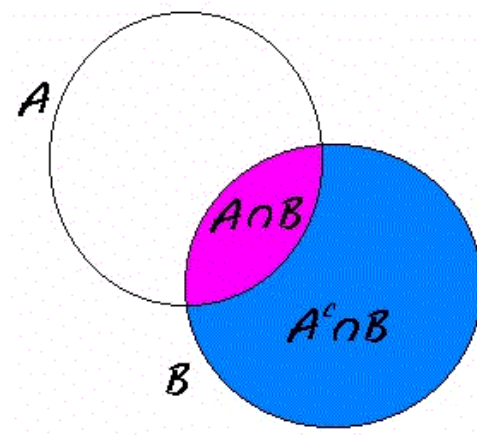
Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A) = 0.4 \\ P(A \cup B) = 0.75 \\ P(A \cap B) = 0.15 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.75 = 0.4 + P(B) - 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.75 - 0.4 + 0.15 \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.5}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.15}{0.5} = \boxed{0.7}$$



Pregunta 4.2. En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82.5% de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

- a) (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.
- b) (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10%, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

- a) X = Número de hogares que no clasifican los residuos en un grupo de 10. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que un hogar no clasifique bien los residuos = $1 - 0.825 = 0.175$. $X = B(10, 0.175)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 1)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} 0.175^0 \cdot 0.825^{10} + \binom{10}{1} 0.175^1 \cdot 0.825^9 =$$

$$= 0.825^{10} + 10 \cdot 0.175 \cdot 0.825^9 \approx \boxed{0.4559}$$

La probabilidad de que a lo sumo uno de los 10 hogares no clasifique correctamente sus residuos tiene un valor aproximado de 0.4559.

- b) X = Número de hogares que no clasifican los residuos en un grupo de 200. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 200 y p = probabilidad de que un hogar no clasifique bien los residuos = 0.175. $X = B(200, 0.175)$.

Para que no sean sancionados el número de errores debe ser menor del 10% de hogares, es decir, menor de $0.1 \cdot 200 = 20$ hogares. Nos piden calcular $P(X < 20)$. Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta binomial por una normal Y de media

$$np = 200 \cdot 0.175 = 35 \text{ y desviación típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.175 \cdot 0.825} = \frac{\sqrt{462}}{2} \approx 5.3735.$$

$$Y = N\left(35, \frac{\sqrt{462}}{2}\right).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 35 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.825 = 165 > 5$.

$$P(X < 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 19.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 35}{\sqrt{462}/2} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{19.5 - 35}{\sqrt{462}/2}\right) = P(Z \leq -2.88) = P(Z \geq 2.88) = 1 - P(Z \leq 2.88) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.998 = \boxed{0.002}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986

La probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados tiene un valor de 0.002.

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = x^2 + bx$.

- a) (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x - 1$? Justifique la respuesta.

- a) La recta $y = x - 1$ tiene pendiente $m = 1$. Para que la recta sea tangente a la función en $x = a$ debe cumplirse que $f'(a) = 1$ y que $f(a) = a - 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x + b \\ f'(a) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a - 1 \\ f(x) = x^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow a - 1 = a^2 + ba$$

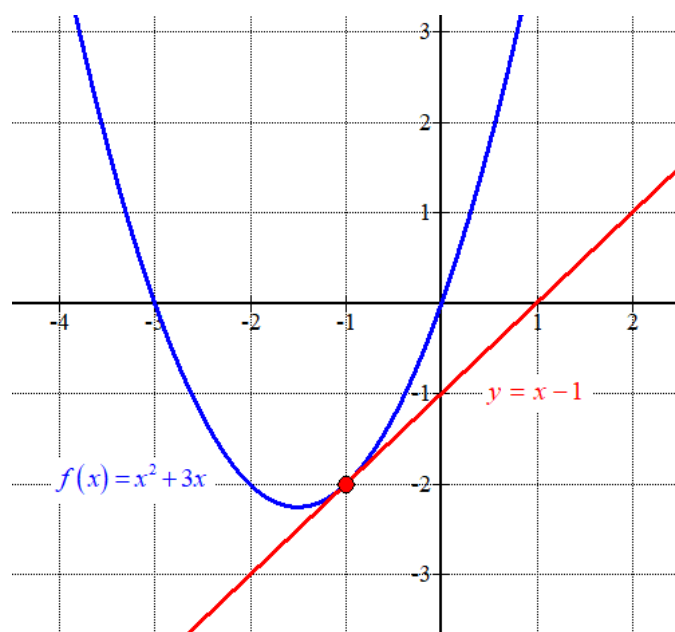
Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a - 1 = a^2 + ba \\ b = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 1 = a^2 + (1 - 2a)a \Rightarrow a - 1 = a^2 + a - 2a^2 \Rightarrow$$

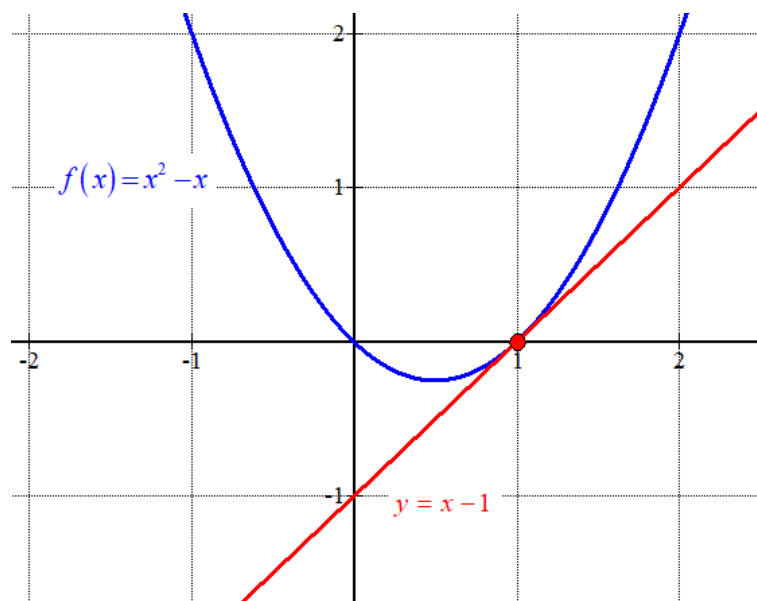
$$\Rightarrow -1 = -a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow b = 1 - 2(-1) = 3 \\ a = 1 \rightarrow b = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Existen dos soluciones posibles.

Para $b = 3$ la función queda $f(x) = x^2 + 3x$ y la recta $y = x - 1$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = -1$.



Para $b = -1$ la función queda $f(x) = x^2 - x$ y la recta $y = x - 1$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$.



- b) Una recta paralela a $y = x - 1$ tiene su misma pendiente y por tanto tiene ecuación $y = x + c$.
Con el mismo razonamiento del apartado anterior: Para que la recta sea tangente a la función en $x = a$ debe cumplirse que $f'(a) = 1$ y que $f(a) = a + c$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x + b \\ f'(a) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a + c \\ f(x) = x^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow a + c = a^2 + ba$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = a^2 + ba \\ b = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a^2 + ba - a \\ 2a = 1 - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a^2 + (b-1)a \\ a = \frac{1-b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c = \left(\frac{1-b}{2}\right)^2 + (b-1)\frac{1-b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{(1-b)^2}{4} + \frac{(b-1)(1-b)}{2} = \frac{(1-b)^2}{4} - \frac{(1-b)^2}{2} = \frac{-(1-b)^2}{4} \Rightarrow \boxed{c = -\left(\frac{1-b}{2}\right)^2}$$

Para cualquier valor de b la recta $y = x - \left(\frac{1-b}{2}\right)^2$ es una recta paralela a $y = x - 1$ siendo tangente a la gráfica de la función $f(x)$.

Si $b = -1$ o $b = 3$ la recta tangente es la propia recta $y = x - 1$. Y si $b \neq -1$ y $b \neq 3$ la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a $y = x - 1$.

Pregunta 5.2. Calcule los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$

a) Calculamos el valor del límite multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{+\infty}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

b) Calculamos el valor del límite utilizando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)} &= \frac{e^0 - 1}{\ln(1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3e^{3x}}{1}}{\frac{2}{1 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}(1 + 2x)}{2} = \frac{3e^{3 \cdot 0}(1 + 2 \cdot 0)}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$