

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m^2 y la parte no techada, 50 €/m^2 pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi: 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}.$$

- a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 - b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

- a) (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
- b) (1 punto) $P((A \cap B)|(A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

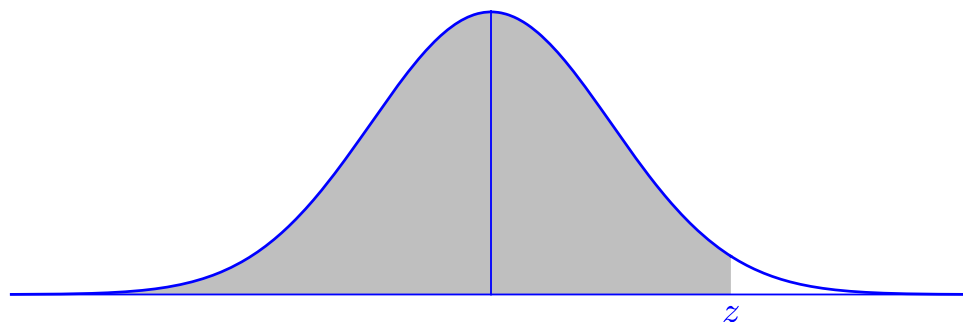
Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.
- b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.

a) Cálculo de los dos valores de λ para la discusión: 0.2 puntos por cada valor. Justificación de los valores de λ para rango 2: 0.3 puntos. Justificación de los valores de λ para rango 3: 0.3 puntos.

b) Cálculo de la matriz inversa A^{-1} : 0.5 puntos. Expresión correcta para calcular X : 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

2.

Planteamiento: 1.1 puntos (0.6 puntos por escribir la relación entre x e y y la función que determina el coste de solar el jardín, 0.5 puntos por expresar la función dependiendo de una sola variable y derivar igualando a cero).

Resolución: 0.9 puntos (0.6 puntos por el cálculo justificado del valor que optimiza la función, 0.1 puntos por justificar que es un mínimo, 0.2 puntos por obtener las dimensiones pedidas).

3.

a) Recta normal: 0.2 puntos. Punto de corte de recta y plano: 0.3 puntos. Uso de la fórmula del punto medio: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b1) Determinación del paralelismo entre la recta y el plano: 0.2 puntos. Planteamiento: 0.4 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

b2) Cada vector director: 0.3 puntos. Punto del plano: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

4.1.

a) Identificación del suceso: 0.3 puntos. Tipificación: 0.2 puntos. Uso correcto de la tabla: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b) Identificación de la binomial: 0.2 puntos. Parámetros correctos de la binomial: 0.1 puntos por cada uno. Identificación del suceso: 0.2 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

(Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

4.2.

a) Planteamiento con la definición de $P(B|A)$: 0.3 puntos. Cálculo de $P(A)$: 0.3 puntos. Cálculo de cada probabilidad pedida: 0.2 puntos.

b) Planteamiento: 0.6 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

(Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

5.1.

Identificación de los límites de integración: 0.4 puntos. Integral bien planteada: 0.3 puntos. Integración por partes: 0.7 puntos. Regla Barrow: 0.4 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

5.2.

a) Planteamiento de la continuidad: 0.3 puntos. Planteamiento de la derivabilidad: 0.3 puntos. Obtención de los valores de a y b : 0.4 puntos.

b) Punto de tangencia 0.2 puntos. Pendiente de la recta tangente: 0.4 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.4 puntos.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

a) Las dos últimas filas de A son linealmente independientes, luego para cualquier valor de λ el rango de A es mayor o igual que 2. El determinante de A es $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Para $\lambda \neq 1, 3$ el rango de A es 3 y para $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ es 2.

b) Como para $\lambda = 2$ la matriz A tiene rango 3 y tiene inversa:

$$X = A^{-1}(A^2 - I) = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.

Sean x e y las dimensiones del rectángulo cubierto, con $0 < x < 56$ e $0 < y < 42$. Los dos triángulos rectángulos que quedan sin techar son semejantes: $\frac{42-y}{x} = \frac{y}{56-x} \Leftrightarrow y = \frac{168-3x}{4}$.

El coste de alicatar el jardín es $C(x, y) = 30xy + 50 \left(\frac{x(42-y)}{2} + \frac{y(56-x)}{2} \right) = 1050x + 1400y - 20xy$.

Sustituyendo el valor de y en $C(x, y)$, se obtiene la función a optimizar, $C(x) = 15x^2 - 840x + 58800$. El mínimo de la función ($C'(x) = 0$) se alcanza en el valor $x = 28$ porque $C'(x) < 0$ para $x < 28$ y $C'(x) > 0$ para $x > 28$. Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo serán 28 m de largo y 21 m de ancho.

3.

a) Para determinar el punto simétrico Q de P respecto al plano π se construye la recta perpendicular a π por P :

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(2, 2, -1).$$

Se halla el punto de corte de esta recta con el plano π : $2(2+2\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) = 13 \Leftrightarrow \lambda = 1$. El punto de corte M del plano π con la recta normal tiene coordenadas $(4, 2, -1)$. Este punto M es el punto medio de P y su simétrico Q . Luego:

$$M = \frac{P+Q}{2} \Leftrightarrow Q = 2M - P = (6, 4, -2).$$

b1) El plano y la recta son paralelos puesto que el vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 4)$ de la recta r es perpendicular al vector normal $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$ del plano π . Además el punto $P(2, 0, 0)$ de la recta r no cumple la ecuación del plano.

Por lo tanto, la distancia entre el plano y la recta es igual a la distancia entre un punto de la recta y el plano:

$$d(\pi, r) = d(\pi, P) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

b2) El plano contiene a cualquier punto de la recta r , por ejemplo, $P(2, 0, 0)$, tiene como vectores directores al vector director de r , es decir, $\vec{v}_r = (1, 1, 4)$, y al vector normal del plano π , $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$. Una ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9x + 9y + 18 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

4.1.

a) La probabilidad p de que una batería sea defectuosa viene dada por

$$p = P(X < 21) = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 \approx 0.1587.$$

b) Lote de 10 (Binomial). Sea Y el número de baterías defectuosas. $Y \sim B(n = 10; p = 0.1587)$. La probabilidad de no defectuosa es $q = 1 - p = 0.8413$. Se pide hallar la probabilidad de que como máximo una batería sea defectuosa ($Y \leq 1$):

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \binom{10}{0} 0.8413^{10} + \binom{10}{1} 0.1587 \cdot 0.8413^9 \approx 0.5127.$$

4.2.

a) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 0.6$. $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.2P(A)$. Entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8P(A) + 0.4 \Rightarrow P(A) = 0.25 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.75 \text{ y } P(A \cap B) = 0.05.$$

b) $P((A \cap B)|(A \cup B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1}{12} \approx 0.0833$.

5.1.

El área está determinada por la siguiente integral que se resuelve por integración por partes:

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = 1.$$

5.2.

a) El dominio de la función es toda la recta real, $\mathbb{R}$. Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$,

debe cumplirse que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow b = 2$. Como $f'(x) =$

$$\begin{cases} 6x - a \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}, f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \text{ si } f'(0^-) = -a = f'(0^+) = 2 \Rightarrow a = -2.$$

b) $f(2) = \frac{2e^2}{5}$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$ es $m = f'(2) = \frac{2e^2}{25}$. La ecuación (en forma punto-pendiente) de la recta tangente buscada es $y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2)$.