



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2026 - JULIO

IMPORTANTE: En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

- a) **[1 ptos.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.
b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k .

PREGUNTA 2: Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+1}$.

- a) **[0,5 ptos.]** Demuestre que la distancia de $P(x, y)$ al punto $A(2, 0)$ viene dada por la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$.
b) **[1 pto.]** Determine el valor de x para que la distancia a A sea mínima.
c) **[0,5 ptos.]** Calcule esa distancia mínima.

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2, 2, -2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

PREGUNTA 4 (a elegir entre 4.1 y 4.2):

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1, 2)$.

4.2) Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

- a) **[0,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$
b) **[1,5 ptos.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

PREGUNTA 5 (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En una urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.

- a) **[1 pto.]** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
 b) **[1 pto.]** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 .

5.2) **[2 ptos.]** La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94.52% tiene menos de 32 años, y un 21.19% tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	x	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0950	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
5	0	0,9510	0,8000	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
10	0	0,9043	0,6000	0,3439	0,1977	0,1069	0,0562	0,0281	0,0146	0,0090	0,0043	0,0021	0,0010	0,0009
	1	0,0907	0,3085	0,3908	0,3697	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0043	0,0707	0,1848	0,2697	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
11	0	0,8951	0,5800	0,3177	0,1755	0,0880	0,0430	0,0211	0,0105	0,0058	0,0028	0,0013	0,0006	0,0005
	1	0,0957	0,3165	0,3939	0,3728	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0051	0,0777	0,1908	0,2728	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
12	0	0,8860	0,5600	0,2966	0,1584	0,0768	0,0384	0,0192	0,0096	0,0050	0,0024	0,0011	0,0005	0,0004
	1	0,0983	0,3233	0,3966	0,3755	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0055	0,0799	0,1940	0,2760	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
13	0	0,8769	0,5400	0,2755	0,1393	0,0648	0,0324	0,0162	0,0081	0,0042	0,0021	0,0010	0,0005	0,0004
	1	0,0997	0,3299	0,3982	0,3771	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0059	0,0815	0,1981	0,2801	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
14	0	0,8678	0,5200	0,2544	0,1182	0,0576	0,0288	0,0144	0,0072	0,0038	0,0019	0,0009	0,0004	0,0003
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0063	0,0831	0,2002	0,2822	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
15	0	0,8587	0,5000	0,2333	0,0971	0,0480	0,0240	0,0120	0,0060	0,0030	0,0015	0,0007	0,0003	0,0002
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0067	0,0847	0,2024	0,2844	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
16	0	0,8496	0,4800	0,2122	0,0760	0,0384	0,0192	0,0096	0,0048	0,0024	0,0012	0,0006	0,0003	0,0002
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0071	0,0861	0,2046	0,2866	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
17	0	0,8405	0,4600	0,1911	0,0549	0,0288	0,0144	0,0072	0,0036	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0075	0,0875	0,2068	0,2888	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
18	0	0,8314	0,4400	0,1700	0,0338	0,0170	0,0085	0,0042	0,0021	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0079	0,0889	0,2090	0,2909	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
19	0	0,8223	0,4200	0,1489	0,0127	0,0060	0,0030	0,0015	0,0007	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0083	0,0903	0,2112	0,2929	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
20	0	0,8132	0,4000	0,1278	0,0016	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1000	0,3333	0,4000	0,3789	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0087	0,0917	0,2134	0,2949	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703

SOLUCIONES

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

a) **[1 ptos.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.

b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k .

a) Ponemos los datos en una tabla.

	Manzanas	Peras	Naranjas
Cajas tipo A (x)	x	x	x
Cajas tipo B (y)	$2y$	y	y
Cajas tipo C (z)	z	$2z$	z
TOTALES	$x + 2y + z$	$x + y + 2z$	$x + y + z$

Como usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas el sistema de ecuaciones es:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 400 \\ x + y + 2z = 500 \\ x + y + z = k \end{array} \right\}$$

b) Discutimos el sistema en función del valor de k .

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 400 \\ x + y + 2z = 500 \\ x + y + z = k \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +y \quad +2z \quad = 500 \\ -x \quad -2y \quad -z \quad = -400 \\ \hline -y \quad +z \quad = 100 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +y \quad +z \quad = k \\ -x \quad -2y \quad -z \quad = -400 \\ \hline -y \quad \quad = k - 400 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 400 \\ -y + z = 100 \\ -y \quad = k - 400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ -y \quad \quad = k - 400 \\ y \quad -z \quad = -100 \\ \hline -z \quad = k - 500 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 400 \\ -y + z = 100 \\ -z = k - 500 \end{array} \right\}$$

Obtenemos la expresión de la solución del sistema.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ -z=k-500 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ \boxed{z=500-k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y+500-k=400 \\ -y+500-k=100 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=k-100 \\ -y=k-400 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=k-100 \\ \boxed{y=400-k} \end{array} \right\} \Rightarrow x+2(400-k)=k-100 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x+800-2k=k-100 &\Rightarrow \boxed{x=3k-900=3(k-300)}
 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x=3(k-300)$; $y=400-k$; $z=500-k$. Donde k debe ser una cantidad entera que representa el número de naranjas que se han usado en la elaboración de las cajas. Debe ser positivo el valor de $x=3(k-300)$, por lo que el número k de naranjas debe ser mayor de 300. Como $y=400-k$ también debe ser positivo el número k de naranjas debe ser menor de 400. Con estas dos condiciones el valor de z es positivo.

El problema tiene solución única para todo valor k entero y comprendido entre 300 y 400.

PREGUNTA 2: Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función

$$g(x) = \sqrt{x+1}.$$

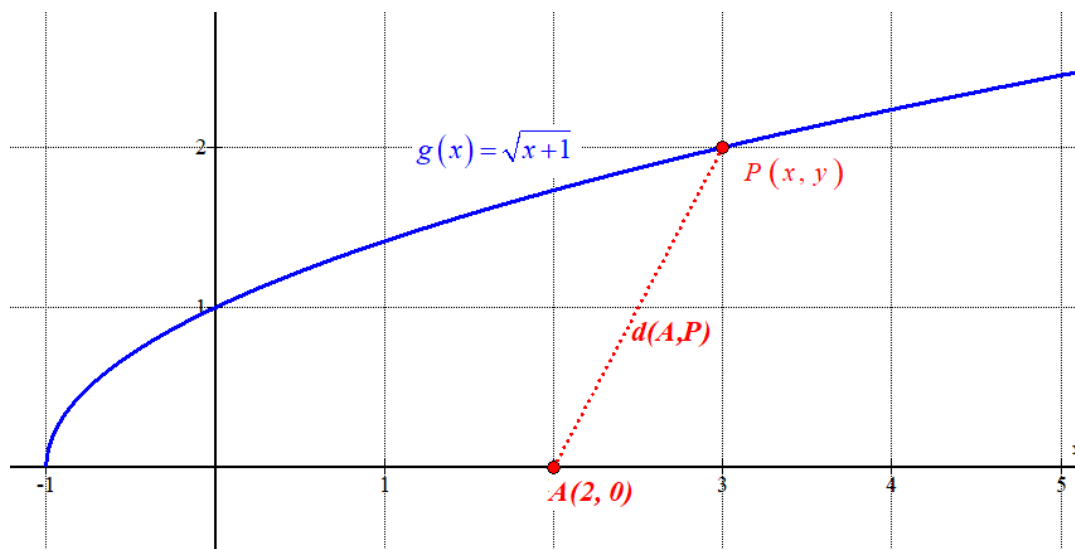
a) [0,5 ptos.] Demuestre que la distancia de $P(x, y)$ al punto $A(2, 0)$ viene dada por la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}.$$

b) [1 pto.] Determine el valor de x para que la distancia a A sea mínima.

c) [0,5 ptos.] Calcule esa distancia mínima.

a) Dibujamos la situación planteada.



La distancia del punto A al punto P es el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x, \sqrt{x+1}) \\ A(2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (x, \sqrt{x+1}) - (2, 0) = (x-2, \sqrt{x+1})$$

$$f(x) = d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x+1})^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + x + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}} = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Hemos obtenido el punto crítico $x = \frac{3}{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-1, 1.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 3}{2\sqrt{0^2 - 3 \cdot 0 + 5}} = \frac{-3}{2\sqrt{5}} < 0$. La función decrece en $(-1, 1.5)$.
- En el intervalo $(1.5, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0$. La función crece en $(1.5, +\infty)$.

Para $x = \frac{3}{2}$ la primera derivada se anula y la función decrece antes y crece después. La función presenta un mínimo relativo para este valor. Este mínimo relativo es el mínimo absoluto.

c) Hallamos el valor de la distancia para $x = \frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5} = \boxed{\frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66}$$

La distancia mínima tiene un valor de $\frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$ unidades.

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2, 2, -2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r . Y a partir de ellas obtenemos las coordenadas de un punto de la recta y un vector director.

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ y = 2z - x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2z - x + 3 - z = 4 \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow y = 2z - 1 + z + 3 = 2 + 3z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(1, 2, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \end{cases}$$

El plano que contiene la recta r y el punto P tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector $\overrightarrow{PQ_r}$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(1, 2, 0) \\ P(-2, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (1, 2, 0) - (-2, 2, -2) = (3, 0, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(1, 2, 0) \in \pi \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (3, 0, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 2(y - 2) + 9z - 0 - 3(y - 2) - 6(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 4 + 9z - 3y + 6 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -6x - 5y + 9z + 16 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 6x + 5y - 9z - 16 = 0$.

4.1) [2 ptos.] Justifique que la derivada de la función $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1, 2)$.

El **Teorema del valor medio** establece que si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

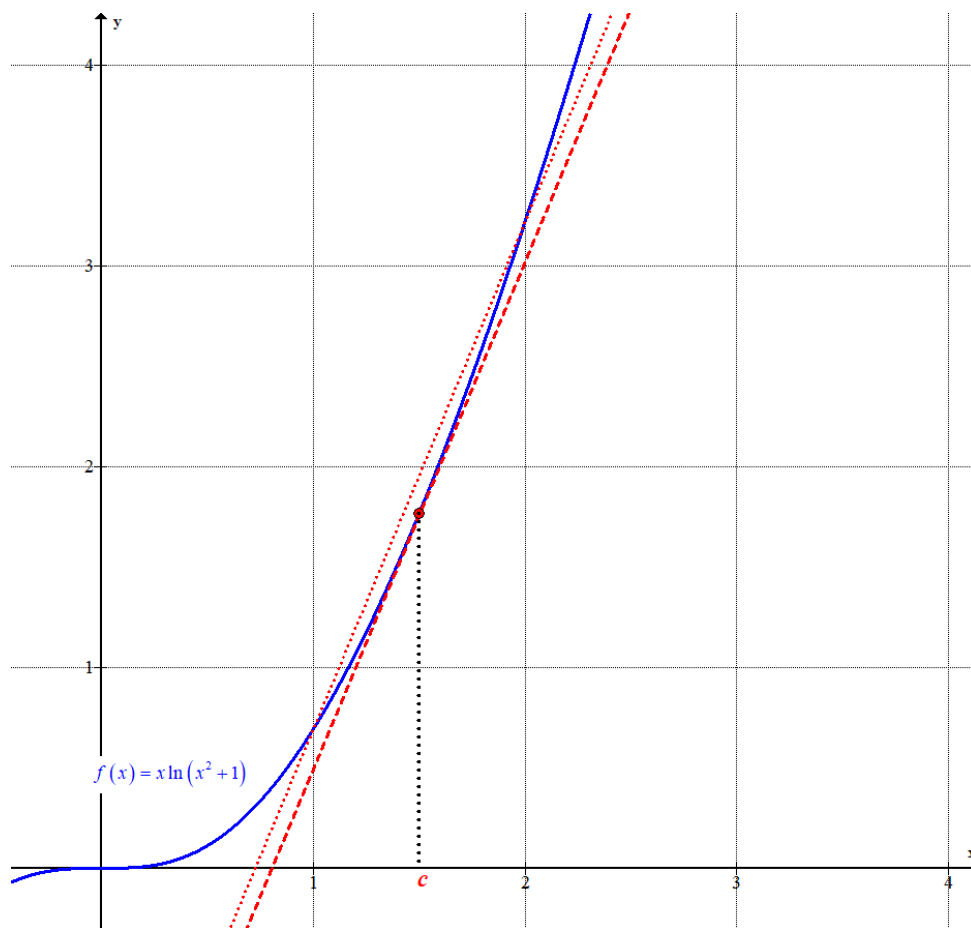
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para el ejercicio consideramos la función $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ que es una función continua en todo $\mathbb{R}$ pues es producto de una función logarítmica de una expresión siempre positiva ($x^2 + 1 > 0$) y otra polinómica. También es derivable en todo $\mathbb{R}$ por el mismo motivo.

Consideramos el intervalo $(1, 2)$ y entonces aplicando el teorema del valor medio existe $c \in (1, 2)$ tal

que $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}.$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2 \cdot \ln(2^2 + 1) = 2 \ln 5 = \ln 5^2 = \ln 25 \\ f(1) = 1 \cdot \ln(1^2 + 1) = \ln 2 \\ f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{\ln 25 - \ln 2}{1} = \ln 25 - \ln 2 = \ln\left(\frac{25}{2}\right)$$



4.2) Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

a) **[0,5 pto.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) **[1,5 pto.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

a) Calculamos la integral pedida usando el método de cambio de variable.

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2} + \cos(x) \right) dx = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}(x) + K$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \pi] \end{cases}$$

La gráfica corta el eje X en $x = \frac{2\pi}{3}$. El área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\pi$ es la suma de los valores absolutos de la integral definida de la función de 0 a $\frac{2\pi}{3}$ y el de la integral definida de la función de $\frac{2\pi}{3}$ a π .

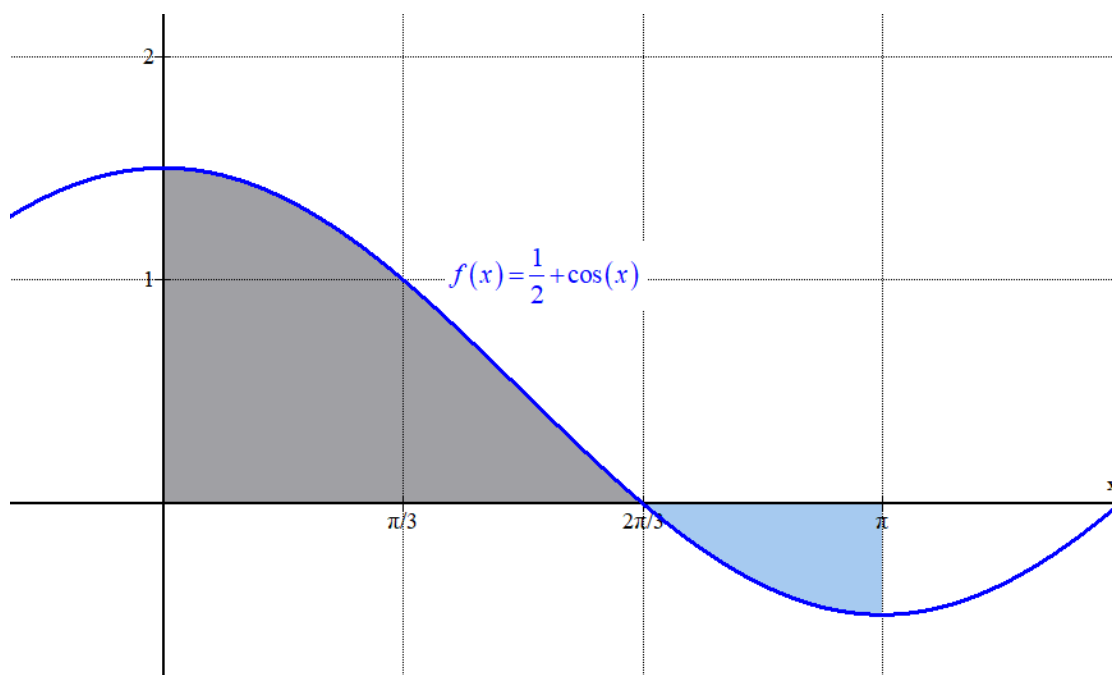
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \cos(x) \right) dx &= \left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x) \right]_0^{2\pi/3} = \\ &= \left[\frac{2\pi/3}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] - \left[\frac{0}{2} + \operatorname{sen}(0) \right] = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{2\pi/3}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos(x) \right) dx &= \left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x) \right]_{2\pi/3}^{\pi} = \\ &= \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}(\pi) \right] - \left[\frac{2\pi/3}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \end{aligned}$$

El área es la suma del valor absoluto del resultado de ambas integrales.

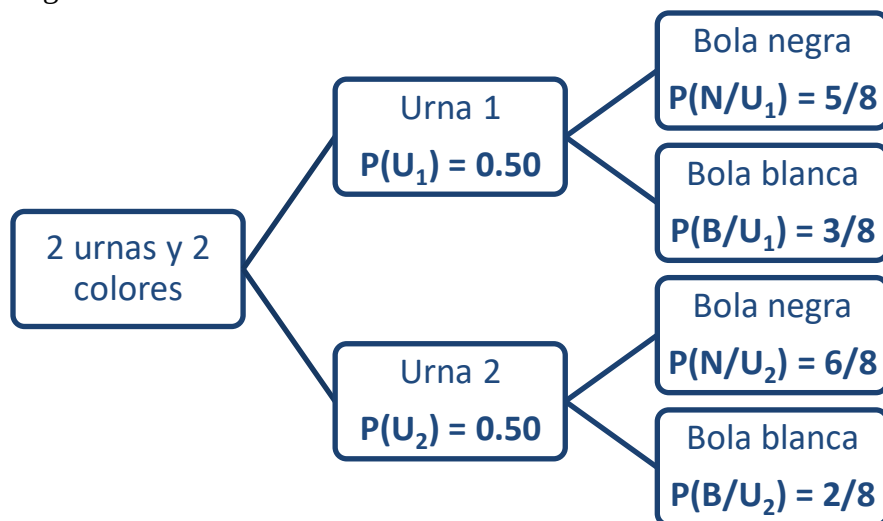
$$\left. \begin{array}{l} \text{Área 1} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Área 2} = \left| \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.26 \text{ u}^2$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.26$ unidades cuadradas.



- 5.1) En una urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.
- a) [1 pto.] Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
- b) [1 pto.] Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 .

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Calculamos el valor de la probabilidad $P(B)$. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(U_1)P(B/U_1) + P(U_2)P(B/U_2) = 0.5 \cdot \frac{3}{8} + 0.5 \cdot \frac{2}{8} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca vale 0.3125.

- b) Nos piden calcular $P(U_1/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1)P(B/U_1)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot \frac{3}{8}}{0.3125} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Sabiendo que la bola ha salido blanca, la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 vale 0.6.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

El experimento “elegir una urna y sacar una bola” es lo mismo que “juntamos las bolas en una bolsa y extraemos una de ellas”. Así tendríamos 16 bolas juntas, siendo 11 negras y 5 blancas.

Con este cambio la probabilidad de sacar una bola blanca vale $\frac{5}{16}$.

Sabiendo que la bola ha salido blanca, la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 vale $\frac{3}{5}$, pues de las 5 bolas blancas de la bolsa 3 procedían de la urna U_1 .

5.2) [2 ptos.] La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94.52% tiene menos de 32 años, y un 21.19% tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

Nos dicen que $P(X < 32) = 0.9452$.

$$P(X < 32) = 0.9452 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9452 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{32 - \mu}{\sigma} = 1.6 \Rightarrow 32 - \mu = 1.6\sigma \Rightarrow \boxed{32 - 1.6\sigma = \mu}$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9342
1.6	0.9452
1.7	0.9554

Nos dicen que $P(X < 20) = 0.2119$.

$$P(X < 20) = 0.2119 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0.2119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ 0.2119 < 0.5 \rightarrow \frac{20 - \mu}{\sigma} < 0 \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{-(20 - \mu)}{\sigma}\right) = 0.2119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{\mu - 20}{\sigma}\right) = 0.2119 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\mu - 20}{\sigma}\right) = 1 - 0.2119 = 0.7881 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mu - 20}{\sigma} = 0.8 \Rightarrow \mu - 20 = 0.8\sigma \Rightarrow \boxed{\mu = 0.8\sigma + 20}$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7277
0.7	0.7643
0.8	0.7881
0.9	0.8124

Juntamos las dos ecuaciones obtenidas y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 0.8\sigma + 20 \\ 32 - 1.6\sigma = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow 32 - 1.6\sigma = 0.8\sigma + 20 \Rightarrow 12 = 2.4\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{12}{2.4} = 5 \Rightarrow \mu = 0.8 \cdot 5 + 20 = 24$$

La media es de 24 años y la desviación típica es de 5 años.