

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN PAU JULIO 2026 MATEMÁTICAS II

Por la propia naturaleza de la disciplina, una misma pregunta puede admitir diferentes soluciones correctas. Por supuesto, cualquier solución de cualquiera de las preguntas del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, aunque no esté incluida en este documento.

El examen consta de un total de cinco preguntas. Las tres primeras preguntas sin opciones. Las dos últimas preguntas con dos opciones cada una, para hacer solo una de esas opciones. La elección de la primera o la segunda opción puede cambiar de una pregunta a otra. Si se responden las 2 opciones de una pregunta, solo se corregirá la primera opción contestada. Las preguntas se pueden hacer en cualquier orden. La puntuación máxima de cada pregunta es de 2 puntos. Las cinco preguntas son:

Pregunta 1: Sentido numérico y algebraico (2 puntos).

Pregunta 2: Sentido de la medida (2 puntos).

Pregunta 3: Sentido espacial (2 puntos).

Pregunta 4 (opciones 4.1 y 4.2): Sentido de la medida (2 puntos).

Pregunta 5 (opciones 5.1 y 5.2): Sentido estocástico (2 puntos).

Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se pueden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 6 de julio de 2026.

Pedro Nicolás Zaragoza
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Didáctica de las CC. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia

Pregunta 1: Sentido numérico y algebraico (2 puntos)

Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A , B y C . En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A , y cajas de tipo B y z cajas de tipo C , y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

- (1 pto.) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.
- (1 pto.) Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k .

Solución:

a) En las x cajas de tipo A habrá x manzanas, x peras y x naranjas. En las y cajas de tipo B habrá $2y$ manzanas, y peras e y naranjas. En las z cajas de tipo C habrá z manzanas, $2z$ peras y z naranjas. En total, habrá $x + 2y + z$ manzanas, $x + y + 2z$ peras, y $x + y + z$ naranjas, así es que el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 2y + z = 400 \\ x + y + 2z = 500 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

así es que el rango es 3 y, por el teorema de Roché – Frobenius, el sistema es compatible determinado. Para calcular la única solución podemos usar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 400 & 2 & 1 \\ 500 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 3k - 900, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 400 & 1 \\ 1 & 500 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 400 - k, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 400 \\ 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 500 - k.$$

Pregunta 2: sentido de la medida (2 puntos)

Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+1}$.

- (0,5 ptos.) Demuestre que la distancia de $P(x, y)$ al punto $A(2, 0)$ viene dada por la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$.
- (1 pto.) Determine el valor de x para que la distancia a A sea mínima.
- (0,5 ptos.) Calcule esa distancia mínima.

Solución: a) El punto P se puede escribir como $P(x, \sqrt{x+1})$. La distancia entre $A(2, 0)$ y P es

$$d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x+1})^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 5} = f(x).$$

b) La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}},$$

que se anula si, y solo si, $x = \frac{3}{2}$. Como $f'(x) < 0$ en $(0, \frac{3}{2})$ (tómese, por ejemplo, $f'(1)$) y $f'(x) > 0$ en $(\frac{3}{2}, +\infty)$ (tómese, por ejemplo, $f'(2)$), entonces $x = \frac{3}{2}$ minimiza la distancia.

c) La distancia es

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Pregunta 3: sentido espacial (2 puntos)

Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2, 2, -2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Solución: El vector director de r se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -i + 3j + k = (-1, 3, 1).$$

Es fácil ver que $R(1, 2, 0)$ satisface la ecuación de los dos planos, de modo que $R \in r$. Podemos usar el punto $R(1, 2, 0)$, el vector $\vec{v}_r = (-1, 3, 1)$ y el vector $\vec{PR} = (3, 0, 2)$ para calcular la ecuación del plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x + 5y - 9z - 16 = 0.$$

Pregunta 4: sentido de la medida (a elegir entre 4.1 y 4.2, de 2 puntos cada una)

Opción 4.1 (2 ptos.): Justifique que la derivada la función $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1, 2)$.

Solución: $f(x)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$ de modo que, por el teorema de Lagrange, existe un punto $c \in (1, 2)$ tal que

$$f'(c) = f(2) - f(1) = 2 \ln(5) - \ln(2) = \ln(25) - \ln(2) = \ln\left(\frac{25}{2}\right).$$

Opción 4.2 (2 ptos.): Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

- a) **(0,5 ptos.)** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.
- b) **(1,5 ptos.)** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

a) La integral es inmediata:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \cos(x) \right) dx = \frac{1}{2}x + \sin(x) + C.$$

b) Observemos que $f(0) = \frac{3}{2} > 0$ y $f(\pi) = -\frac{1}{2} < 0$, y que $x = \frac{2\pi}{3}$ es solución de $f(x) = 0$, de modo que el área pedida es:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f(x)dx &= \left[\frac{1}{2}x + \sin(x) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left[\frac{1}{2}x + \sin(x) \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= \frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \frac{\pi}{6} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pregunta 5: sentido estocástico (a elegir entre 5.1 y 5.2, de 2 puntos cada una)

Opción 5.1 (2 ptos.): En la urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.

- a) **(1 pto.)** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
- b) **(1 pto.)** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 .

Solución:

Llamamos:

- a) U_1 al suceso correspondiente a extraer la bola de U_1 ,
- b) U_2 al suceso correspondiente a extraer la bola de U_2 ,

c) N al suceso correspondiente a extraer una bola negra,

d) B al suceso correspondiente a extraer una bola blanca.

Tenemos entonces que $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$, $P(N|U_1) = \frac{5}{8}$, $P(B|U_1) = \frac{3}{8}$, $P(N|U_2) = \frac{6}{8}$ y $P(B|U_2) = \frac{2}{8}$.

a) Usando el Teorema de la Probabilidad Total, se tiene que

$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3+2}{16} = \frac{5}{16}.$$

b) Usando el Teorema de Bayes, se tiene que

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5}.$$

Opción 5.2 (2 ptos.): La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

Solución: Llamamos X a la variable aleatoria correspondiente a la edad. Llamamos Z a una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(0, 1)$. Entonces, tenemos que

$$0,9452 = P(X < 32) = P\left(Z < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right),$$

y la tabla nos dice que $\frac{32 - \mu}{\sigma} = 1,6$, es decir, $\mu + 1,6 \cdot \sigma = 32$. Por otro lado, como $P(X < 20) = 0,2119$, tenemos que

$$0,7881 = 1 - 0,2119 = P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\mu - 20}{\sigma}\right),$$

y la tabla nos dice que $\frac{\mu - 20}{\sigma} = 0,8$, es decir, $\mu - 0,8 \cdot \sigma = 20$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mu + 1,6 \cdot \sigma = 32 \\ \mu - 0,8 \cdot \sigma = 20 \end{cases}$$

tenemos $\mu = 24$ y $\sigma = 5$.