

Prueba de Acceso a la Universidad

Curso: 2025-2026

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Responde P1, P2 y P3, una de entre P4.1 y P4.2 y otra entre P5.1 y P5.2.

P1) En Navarra, aproximadamente un 1.4% de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del 97% (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del 96% (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:

- (i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?
- (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?
- (iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?

P2) Sea $y = f(x)$ la función positiva que cumple la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$

- (i) Expresa y en función de x y demuestra que existe un punto c en su dominio tal que $f'(c) = -1$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.
- (ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX ?

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $A(2, 4, -2)$ y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

P4.1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2 - 4)x + (a + 2)y + 2z = 4 \\ (4 - a^2)x + z = 2 \\ (a^2 - 4)x + (a + 2)y + az = -4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

P4.2) Dadas las siguientes matrices A y B , calcula $|A \cdot B^{-1}|$ en función del parámetro t . ¿Para qué valores de t no existe $|A \cdot B^{-1}|$?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

P5.1) Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1}$$

P5.2) Estudia las asíntotas y simetrías de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$.

AYUDA

- Volumen de una esfera: $\frac{4}{3} \pi R^3$
- Área de una esfera: $4\pi R^2$
- Ecuación de circunferencia de radio R centrada en (a, b) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$Z \sim N(0, 1)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0016	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0085
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2426	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2708	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3120
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-t^2/2} dt$$

SOLUCIONES

- P1)** En Navarra, aproximadamente un 1.4% de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del 97% (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del 96% (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:
- (i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?
 - (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?
 - (iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?

Llamamos I al suceso “la persona es intolerante al gluten”, $T+$ a “el test da positivo” y $T-$ a “el test da negativo”.

Por la información proporcionada tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(I) = 0.014; P(T+/I) = 0.97; P(T-/I) = 0.03; P(T-/ \bar{I}) = 0.96; P(T+/ \bar{I}) = 0.04.$$

(i) Debemos calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(I)P(T+/I) + P(\bar{I})P(T+/ \bar{I}) = 0.014 \cdot 0.97 + 0.986 \cdot 0.04 = \frac{2651}{50000} = 0.05302$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé positivo vale 0.05302.

(ii) Debemos calcular $P(T-)$. Utilizamos la probabilidad del suceso contrario $T+$ que ya hemos calculado.

$$P(T-) = 1 - P(T+) = 1 - 0.05302 = 0.94698$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé negativo vale 0.94698

(iii) Debemos calcular $P(I/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/T+) = \frac{P(I \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(I)P(T+/I)}{P(T+)} = \frac{0.014 \cdot 0.97}{0.05302} = \frac{679}{2651} \approx 0.2561$$

La probabilidad de que una persona que ha dado positivo en el test sea intolerante al gluten es de 0.2561.

P2) Sea $y = f(x)$ la función positiva que cumple la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$

(i) Expresa y en función de x y demuestra que existe un punto c en su dominio tal que $f'(c) = -1$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.

(ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX ?

(i) Despejamos y de la expresión.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x-1)^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - x^2 \Rightarrow \boxed{y = +\sqrt{2x - x^2}}$$

La función es $y = +\sqrt{2x - x^2}$.

El dominio de la función es $[0, 2]$.

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1 \in [0, 2] \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Existe } \sqrt{2x - x^2}$$

La función $y = +\sqrt{2x - x^2}$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$. Aplicando el teorema

del valor medio tenemos que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$.

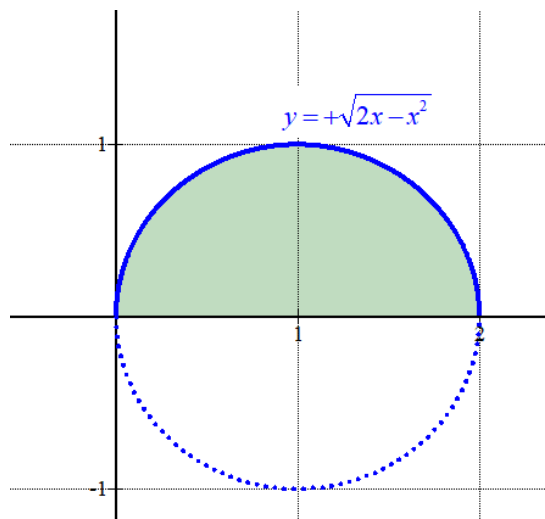
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f'(c) = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 - 2^2} - \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}}{1} = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1$$

(ii) La ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia de radio 1 y centro en

$C(1, 0)$. La función $y = +\sqrt{2x - x^2}$ es la parte positiva de la circunferencia.

El área contenida en la circunferencia es $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ unidades cuadradas.

El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX es la mitad del área del círculo y vale $\frac{\pi}{2}$ unidades cuadradas.



P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $A(2, 4, -2)$ y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Determinamos la posición relativa de ambas rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(2, -1, 0) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 3) \\ Q_r(-1, -2, 1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s Q_r}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_s(2, -1, 0) \\ Q_r(-1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_s Q_r} = (-1, -2, 1) - (2, -1, 0) = (-3, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 3) \\ \overrightarrow{P_s Q_r} = (-3, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s Q_r}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 18 - 1 - 0 - 2 - 3 = -24 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan. Hallamos las coordenadas de un punto genérico de cada recta.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(2, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow B(2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow C(-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda)$$

La recta t debe contener los puntos A, B y C. Para ello los puntos deben estar alineados y para ello los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales. Hallamos los valores de α y λ para que esto ocurra.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 4, -2) \\ B(2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) - (2, 4, -2) = (-\alpha, -5 + 2\alpha, \alpha + 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 4, -2) \\ C(-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda) - (2, 4, -2) = (-3 + \lambda, -6, 3 + 3\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{-\alpha}{-3 + \lambda} = \frac{-5 + 2\alpha}{-6} = \frac{\alpha + 2}{3 + 3\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\alpha}{-3 + \lambda} = \frac{-5 + 2\alpha}{-6} \rightarrow 6\alpha = 15 - 6\alpha - 5\lambda + 2\lambda\alpha \rightarrow 12\alpha + 5\lambda - 2\alpha\lambda = 15 \\ \frac{-5 + 2\alpha}{-6} = \frac{\alpha + 2}{3 + 3\lambda} \Rightarrow -15 + 6\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = -6\alpha - 12 \rightarrow 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12\alpha + 5\lambda - 2\alpha\lambda = 15 \rightarrow (\times 3) \\ 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 36\alpha + 15\lambda - 6\alpha\lambda = 45 \\ 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right.$$

$$\overline{48\alpha} \quad \quad \quad \overline{= 48} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3)}$$

La recta t buscada es la recta que pasa por el punto A y que tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3) \\ A(2, 4, -2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{3}$$

P4.1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2 - 4)x + (a + 2)y + 2z = 4 \\ (4 - a^2)x + z = 2 \\ (a^2 - 4)x + (a + 2)y + az = -4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a \end{pmatrix}$

y como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 & 4 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a & -4 \end{pmatrix}$.

Usamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado pero más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 & 4 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 4 - a^2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline a^2 - 4 \quad a + 2 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad a + 2 \quad 3 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ a^2 - 4 \quad a + 2 \quad a \quad -4 \\ -a^2 + 4 \quad -a - 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a - 2 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{a^2 - 4 \quad a + 2 \quad 2}^A & 4 \\ 0 & a + 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & a - 2 & -8 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{1cm}}_{A/B}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 \\ 0 & a + 2 & 3 \\ 0 & 0 & a - 2 \end{vmatrix} = (a^2 - 4)(a + 2)(a - 2) = (a + 2)^2 (a - 2)^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a + 2)^2 (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 0 \ 2}^A & 4 \\ 0 \ 0 \ 3 & 6 \\ \underbrace{0 \ 0 \ -4}_{A/B} & -8 \end{array} \right)$. La columna tercera es el doble de la columna segunda. El rango

de la matriz A y A/B es 1, menor que el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene infinitas soluciones. Determinamos la expresión de estas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 0 \ 2}^A & 4 \\ 0 \ 0 \ 3 & 6 \\ \underbrace{0 \ 0 \ -4}_{A/B} & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2z = 4 \\ 3z = 6 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \lambda; \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}}$$

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 4 \ 2}^A & 4 \\ 0 \ 4 \ 3 & 6 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0}_{A/B} & -8 \end{array} \right)$.

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema no tiene solución.

P4.2) Dadas las siguientes matrices A y B, calcula $|A \cdot B^{-1}|$ en función del parámetro t . ¿Para qué valores de t no existe $|A \cdot B^{-1}|$?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa de B su determinante debe ser distinto de cero.

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a & & \\ t & 4t & t^2 \\ -t & -3t & -t^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a & & \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -t & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2(t-1) \end{aligned}$$

El determinante de B se anula para $t=0$ y para $t=1$.

La expresión $|A \cdot B^{-1}|$ solo existe para valores de t distintos de 0 y de 1.

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a & & \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ -t+1 & -t^2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a & & \\ t+1 & t^2 & 4 \\ -t+1 & -t^2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ 0 & t-2 & -t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(t+1)(t-2) \end{aligned}$$

Sabemos que $|A| = 2(t+1)(t-2)$ y $|B| = t^2(t-1)$. También sabemos que $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$.

Calculamos la expresión de $|A \cdot B^{-1}|$ para valores de t distintos de 0 y 1.

$$|A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2(t+1)(t-2)}{t^2(t-1)}$$

P5.1) Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{\frac{x-2}{4^{2x+1} - 1}}$$

Calculamos la integral indefinida usando un cambio de variable.

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx = \frac{e^2}{4} \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \tan(x) = t \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \cos^2(x) dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^2}{4} \int \frac{e^t}{\cos^2(x)} \cos^2(x) dt = \frac{e^2}{4} \int e^t dt = \frac{e^2}{4} e^t = \boxed{\frac{e^2}{4} e^{\tan(x)} + K}$$

Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{\frac{x-2}{4^{2x+1} - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{(2^2)^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{2^{\frac{2x-4}{2x+1}} - 1} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{4}{-\infty}}{2 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{2+0}{2+0} = 1$$

$$\dots = \frac{2^{-\infty} - 2}{2^1 - 1} = \frac{\frac{1}{2^{+\infty}} - 2}{1} = \frac{1}{+\infty} - 2 = 0 - 2 = \boxed{-2}$$

P5.2) Estudia las asíntotas y simetrías de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$.

Estudiamos la simetría de la función.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2 + 2}{-x - 2} = \frac{3x^2 + 2}{-x - 2}$$

$$-f(x) = -\frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \frac{3x^2 + 2}{-x + 2}$$

La función no presenta ningún tipo de simetría, ni par ni impar.

El dominio de la función son todos los números reales menos los valores que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \frac{3 \cdot 2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{14}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{3 + 0}{0 - 0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

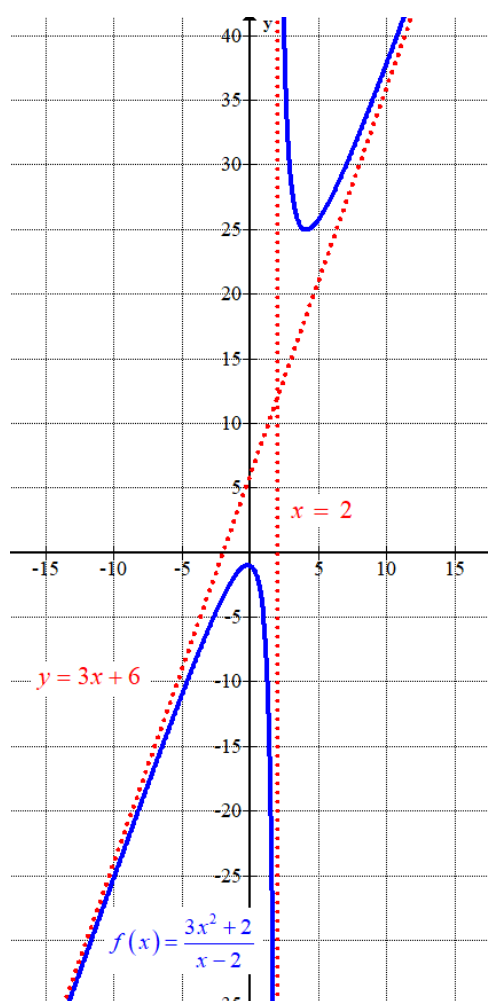
Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{6 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{6 + 0}{1 - 0} = 6$$

La recta $y = 3x + 6$ es asíntota oblicua de la función.



La gráfica es simétrica respecto del punto $(2, 12)$.

Para $x = 2 - 1 = 1$ tenemos que $f(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 2}{1 - 2} = -5$.

Para $x = 2 + 1 = 3$ tenemos que $f(3) = \frac{3 \cdot 3^2 + 2}{3 - 2} = 29$.

Se cumple que $\frac{-5 + 29}{2} = 12$.

Para $x = 2 - 2 = 0$ tenemos que $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 2}{0 - 2} = -1$.

Para $x = 2 + 2 = 4$ tenemos que $f(4) = \frac{3 \cdot 4^2 + 2}{4 - 2} = 25$.

Se cumple que $\frac{-1 + 25}{2} = 12$.

Y así se cumple para cualquier par de valores simétricos respecto de $x = 2$.