

PRIMER EJERCICIO.

Sea x la cantidad de recipientes que ha llevado el productor A, y la correspondiente a la productora B y z la cantidad aportada por la productora C. El sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación descrita es:

$$\begin{cases} 10x + 15y + 12z = 612, \\ x + y + z = 48, \\ 5x + 9y + 4z = 304. \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 12$, $y = 20$, $z = 16$.

Multiplicando cada uno de estos valores por el importe que recibe cada productor por recipiente entregado, se tiene que el productor A recibe 60€, la productora B, 180€ y la productora C, 64€.

SEGUNDO EJERCICIO.

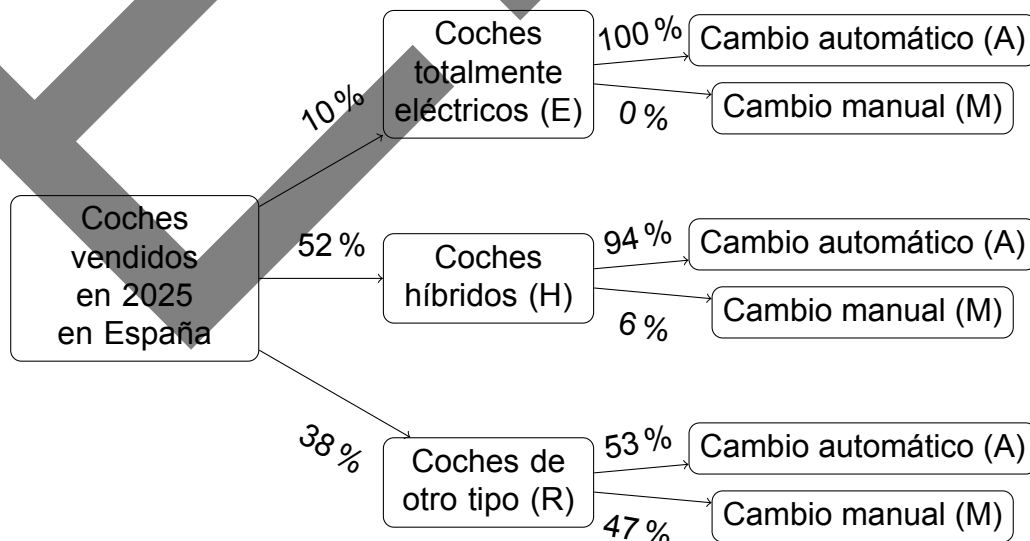
(a) Para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea $y = 3 - 3x$ deben ser $f(0) = 3$ y $f'(0) = -3$, es decir, $C = 3$ y $B = -3$.

Para que f tenga un extremo relativo en el punto $x = 1$ debe ser $f'(1) = 0$, o sea, $A = 0$.

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ y $f''(x) = 6x$. Por tanto, $f''(1) > 0$ y f tiene un mínimo relativo en el punto $x = 1$.

TERCER EJERCICIO.

Los datos del problema se resumen en el siguiente árbol



(a) $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|H)P(H) + P(A|R)P(R) = 1 \times 0,1 + 0,94 \times 0,52 + 0,53 \times 0,38 = 0,7902$. Multiplicando esta probabilidad por el total de coches, se deduce que se vendieron 907.663 coches con cambio automático.

$$(b) P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{0,94 \times 0,52}{0,7902} = 0,6186.$$

CUARTO EJERCICIO.

(4A) En primer lugar, el punto de corte de las rectas r_1 y r_2 es $P = (1, 0, 0)$. La recta perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ y que pasa por el punto P tiene ecuación paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Para calcular el simétrico de P con respecto al plano dado, se puede calcular el punto de corte de la recta r con el plano π , que es el punto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. El punto P' cumple que M es el punto medio entre P y P' , por tanto, $P' = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Otra posibilidad es tener en cuenta que $d(P, \pi) = d(P', \pi)$.

(4B) La ecuación paramétrica de la recta r es

$$\begin{cases} x = 1 + 6t, \\ y = 7 + 3t, \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$$

(a) El punto de corte de esa recta con el plano, que corresponde a $t = -1/3$. Es decir, $Q = (-1, 6, 17/3)$.

(b) Si denotamos por α el ángulo buscado y por β el ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal al plano, entonces $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|} = \frac{(6, 3, -5) \cdot (2, 1, -3)}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-5)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = 0,9583.$$

Por tanto, $\beta = 16,60^\circ$ y $\alpha = 73,4^\circ$.

QUINTO EJERCICIO.

(5A) Comenzamos descomponiendo el integrando como suma de un polinomio y una fracción propia:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} = 1 + \frac{-x + 5}{x^2 - x - 2}.$$

En segundo lugar, descomponemos la fracción propia en suma de dos fracciones simples:

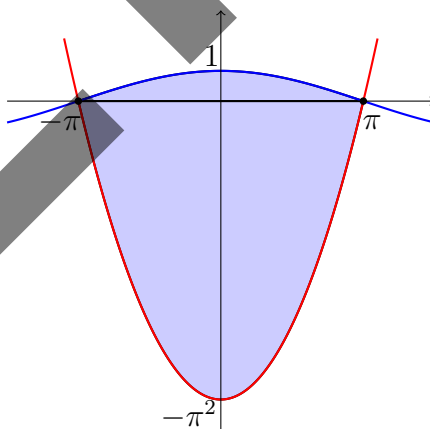
$$\frac{-x + 5}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 1} \right) dx \\ &= x + \ln |x - 2| - 2 \ln |x + 1| + C \\ &= x + \ln \frac{|x - 2|}{(x + 1)^2} + C. \end{aligned}$$

(5B) La parábola corta al eje horizontal cuando $x = -\pi$ y cuando $x = \pi$ y tiene el vértice en el punto $(0, -\pi^2)$. $f(x) = \cos(x/2)$ se hace cero cuando $x = -\pi$ y $x = \pi$ y su gráfica tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

(a) El recinto solicitado es:



(b) El área se calcula mediante la siguiente integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - (x^2 - \pi^2) \right) dx = \left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + \pi^2 x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 4 + \frac{4\pi^3}{3}.$$

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Si no se demanda una técnica particular de resolución, cualquier desarrollo que conduzca a la solución será válido.
4. Si el ejercicio está correcto (siguiendo la técnica indicada, en su caso), se dará por bueno íntegramente. Sólo en el caso de no ser completamente correcto, se aplicarán las puntuaciones indicadas para cada paso en los criterios de corrección.
5. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
6. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
7. En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
8. Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo, en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
9. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
10. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
11. Se valorará la buena presentación del examen.
12. Se valorarán negativamente los planteamientos incorrectos, la confusión de conceptos y la abundancia de errores de cálculo.
13. Los errores aislados se valorarán negativamente cuando indiquen falta de reflexión crítica o de sentido común.
14. Se valorará negativamente la falta de rigor matemático en las explicaciones y la incorrecta utilización de los símbolos matemáticos, con una penalización de hasta 0,2 puntos en cada ejercicio.
15. Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

PRIMER EJERCICIO

- Planteamiento del sistema (1 punto).
- Resolución del sistema (0,75 puntos).
- Cálculo del importe a pagar a cada productor (0,25 puntos).

SEGUNDO EJERCICIO

- Cálculo correcto del parámetro C (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del parámetro B (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del parámetro A (0,5 puntos).
- Análisis del extremo en $x = 1$ (0,5 puntos).

TERCER EJERCICIO

- Árbol o tabla que resume los datos del problema (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado (a) (0,75 puntos).
- Resolución correcta del apartado (b) (0,75 puntos).

CUARTO EJERCICIO

4A

- Cálculo correcto del punto de intersección de las rectas (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la ecuación de la recta r perpendicular al plano y que pasa por P (0,5 puntos).
- Obtención correcta del punto simétrico P' (1 punto).

4B

- (a) ■ Cálculo correcto de la ecuación de la recta r que tiene vector director $\vec{v}$ y que pasa por el punto P (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del punto de intersección de la recta r y el plano dado (0,5 puntos).
- (b) ■ Cálculo correcto del ángulo formado por el vector director de la recta r y el vector normal al plano (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del ángulo pedido (0,5 puntos).

QUINTO EJERCICIO

5A

- Separación del integrando como suma de un polinomio y una fracción propia (0,5 puntos).
- Descomposición de la fracción propia en fracciones simples (0,5 puntos).
- Cálculo de la integral (0,5 puntos).
- Explicación de los pasos realizados (0,5 puntos).

5B

- (a) Dibujo correcto del recinto (1 punto).
- (b) Cálculo del área del recinto, aplicando la regla de Barrow (1 punto).