



UNIBERTSITATEAN
SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2 puntos cada uno.

En los ejercicios CUARTO y QUINTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas del examen.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color. Solo se pueden utilizar bolígrafos o rotuladores para hacer gráficos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.

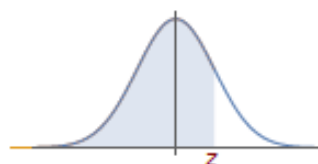


UNIBERTSITATEAN
SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIKOA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026
MATEMÁTICAS II



PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T . El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas

considerado. En el caso del nitrógeno a $T = 300$ K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298 \text{ m/s}$.

- (a) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.
- (b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.
- (c) (0,5 puntos) Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T , la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica,
- $$\sigma = \frac{k_B T}{m}.$$

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a+2. \end{cases}.$$

- (a) (1 punto) Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución.
- (b) (1 punto) Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIKOA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026
MATEMÁTICAS II



TERCER EJERCICIO (2 puntos).

(a) (1 punto) Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x - 3)$ e $y = x(2 - x)$.

(b) (1 punto) Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

(a) (1,5 puntos) Discute la posición relativa de la recta r y el plano π en función de los valores del parámetro A .

(b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de la recta r al plano π en función de los valores del parámetro A .

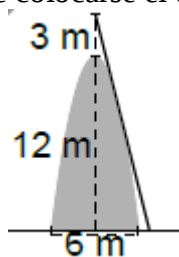
(4B) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

(a) (1,5 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π .

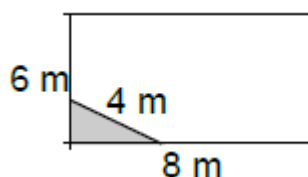
(b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la distancia de A a π ?

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?



SOLUCIONES

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T . El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas

considerado. En el caso del nitrógeno a $T = 300$ K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298 \text{ m/s}$.

(a) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) (0,5 puntos) Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T , la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

Sea X = La primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K. $X = N(0, 298)$.

(a) Debemos calcular $P(|X| < 300)$.

$$P(|X| < 300) = P(-300 < X < 300) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-300-0}{298} < Z < \frac{300-0}{298}\right) =$$

$$= P(-1.01 < Z < 1.01) = P(Z < 1.01) - P(Z < -1.01) = P(Z < 1.01) - P(Z \geq 1.01) =$$

$$= P(Z < 1.01) - [1 - P(Z < 1.01)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8438 - 1 + 0.8438 = \boxed{0.6876}$$

	0'00	0'01	
0'0	0'5000	0'5040	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'
1'0	0'8413	0'8438	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'

(b) Calculamos la probabilidad $P(-600 \leq X \leq -300)$.

$$\begin{aligned}
 P(-600 \leq X \leq -300) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-600-0}{298} \leq Z \leq \frac{-300-0}{298}\right) = \\
 &= P(-2.01 \leq Z \leq -1.01) = P(Z \leq -1.01) - P(Z \leq -2.01) = \\
 &= P(Z \geq 1.01) - P(Z \geq 2.01) = 1 - P(Z \leq 1.01) - [1 - P(Z \leq 2.01)] = \\
 &= P(Z \leq 2.01) - P(Z \leq 1.01) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9778 - 0.8438 = \boxed{0.134}
 \end{aligned}$$

	0'00	0'01	0
0'0	0'5000	0'5040	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6
0'6	0'7257	0'7291	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7
0'9	0'8159	0'8186	0'8
1'0	0'8413	0'8438	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9
2'0	0'9772	0'9778	0'9

(c) Las moléculas de argón tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T , la desviación típica correspondiente es menor $\sigma = \frac{k_B T}{m}$. En el cálculo de $P(|X| < 300) = P(-300 < X < 300)$ al tipificar para la obtención de este valor dividimos 300 por la desviación típica $P\left(\frac{-300}{\sigma} < Z < \frac{300}{\sigma}\right)$. Al ser menor la desviación típica del argón el resultado de la división es mayor y el intervalo $\left(\frac{-300}{\sigma}, \frac{300}{\sigma}\right)$ tiene mayor amplitud y la probabilidad del argón será mayor que la de la molécula de nitrógeno.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a+2. \end{cases}.$$

(a) (1 punto) Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución.

(b) (1 punto) Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior.

(a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a-2 & a & a-1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{vmatrix} = \cancel{a(a-1)} + a(a-2) - \cancel{a(a-1)} - a = a(a-2) - a =$$

$$= a(a-2-1) = a(a-3)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=3 \end{cases}$$

Como $a \neq 0$ nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -3 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \\ -1 \quad -3 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 3 \quad 0 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: El sistema dado tiene más de una solución para $a = 3$.

(b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{1 \quad 3 \quad 0 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ \boxed{z = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 - 3y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las infinitas soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

(a) (1 punto) Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x-3)$ e $y = x(2-x)$.

(b) (1 punto) Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

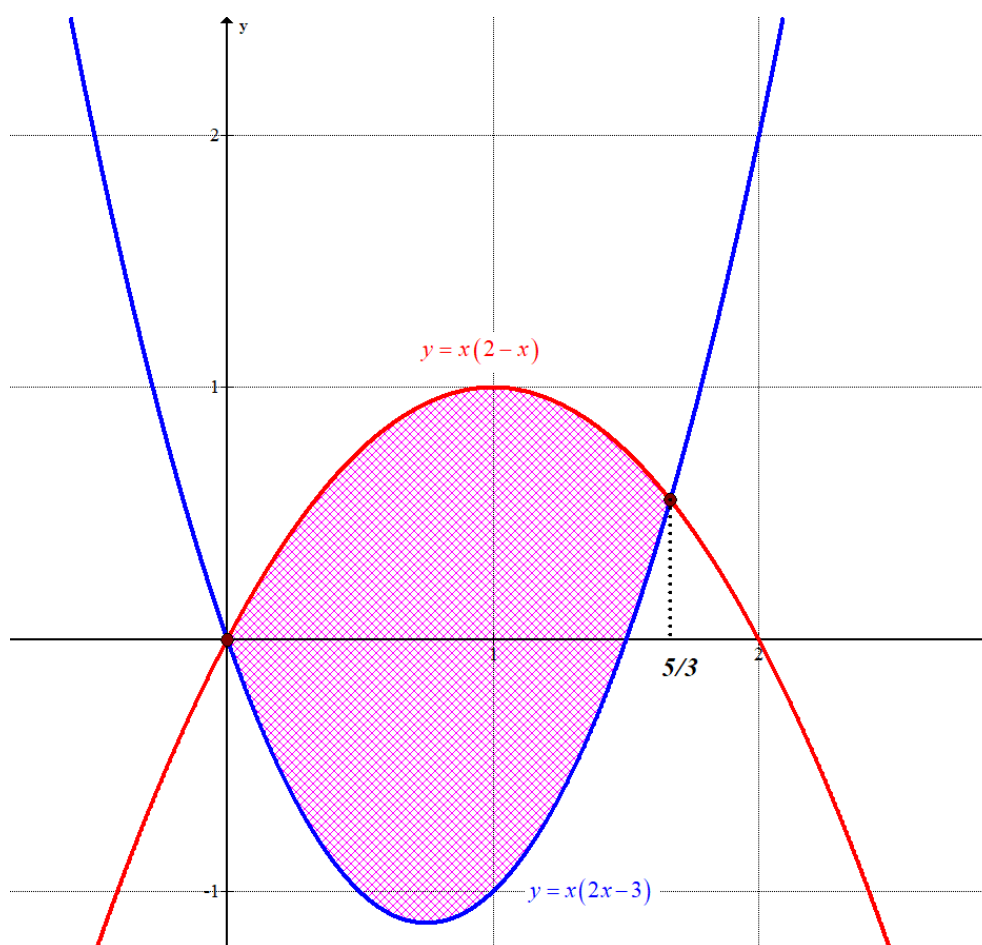
(a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x(2x-3) \\ y = x(2-x) \end{array} \right\} \Rightarrow x(2x-3) = x(2-x) \Rightarrow x(2x-3) - x(2-x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2x-3-2+x) = 0 \Rightarrow x(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x-5 = 0 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores de cada parábola y dibujamos el recinto limitado por ellas.

x	$y = x(2x-3)$	x	$y = x(2-x)$
0	0	0	0
1	-1	1	1
$5/3$	$5/9$	$5/3$	$5/9$
2	2	2	0



- (b) Contando cuadrados de 1 unidad cuadrada el área del recinto dibujado debe tener un valor entre 2 y 3 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto como la integral definida de 0 a 5/3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{5/3} 2x - x^2 - (2x^2 - 3x) dx = \int_0^{5/3} 2x - x^2 - 2x^2 + 3x dx = \int_0^{5/3} -3x^2 + 5x dx = \\ &= \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} \right]_0^{5/3} = \left[-\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{5\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2} \right] - \left[-0^3 + \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{-125}{27} + \frac{125}{18} = \boxed{\frac{125}{54} \approx 2.315 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.315 unidades cuadradas.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

(a) (1,5 puntos) Discute la posición relativa de la recta r y el plano π en función de los valores del parámetro A .

(b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de la recta r al plano π en función de los valores del parámetro A .

(a) Determinamos un vector director y un punto de la recta, y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-1, 2, 1)$$

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{cases}$$

Comprobamos si el vector director y el vector normal son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (-1, 2, 1)(1, 1, -1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

Los vectores son perpendiculares y la recta es paralela o está contenida en el plano. Para que la recta esté contenida en el plano el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + 2y + z + A = 0 \\ P_r(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 2 + 0 + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

Para $A = -2$ la recta está contenida en el plano y para $A \neq -2$ la recta es paralela al plano.

(b) Para $A = -2$ la recta está contenida en el plano y la distancia de la recta al plano es 0.

Para $A \neq -2$ calculamos la distancia de la recta al plano como la distancia del punto P_r de la recta al plano.

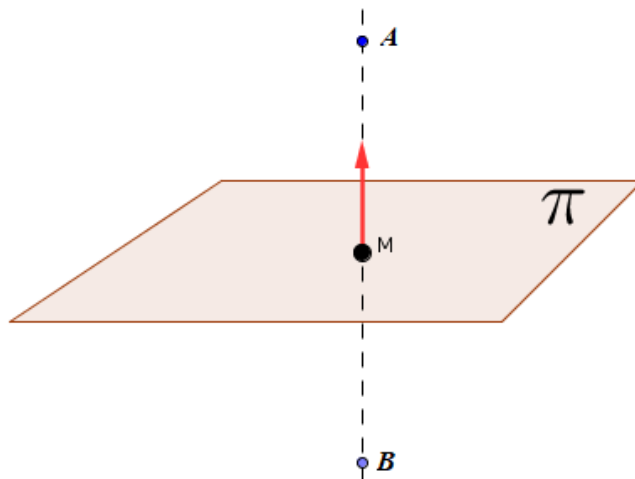
$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + 2y + z + A = 0 \\ P_r(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-0 + 2 + 0 + A|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{|A + 2|}{\sqrt{6}}}$$

(4B) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

(a) (1,5 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π .

(b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la distancia de A a π ?

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El punto medio M del segmento AB pertenece al plano.

$$M = \frac{(1,1,2) + (-1,0,3)}{2} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 3) - (1, 1, 2) = (-2, -1, 1)$$

El plano que buscamos contiene el punto M y tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 1) \\ M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -2x - y + z + D = 0 \\ M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + D = 0 \Rightarrow$$

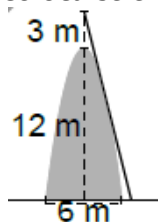
$$\Rightarrow D = -2 \Rightarrow \pi: -2x - y + z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z + 2 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$.

(b) La distancia del punto A al plano π es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22 \text{ u}}$$

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



Situamos el origen de coordenadas en el punto de encuentro de la altura con la base y hallamos la ecuación de la parábola del montículo.

El vértice de la parábola tiene coordenadas $(0, 12)$ y los puntos de corte con el eje de abscisas son $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$.

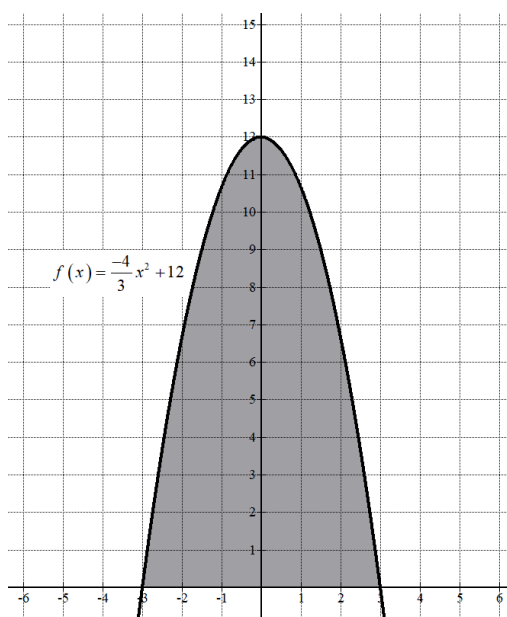
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + c = 12 \rightarrow c = 12 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 12$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 0 \\ f(-3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + 12 = 0 \\ 9a - 3b + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{18a + 24 = 0} \Rightarrow a = \frac{-24}{18} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 9 \cdot \frac{-4}{3} + 3b + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12 + 3b + 12 = 0 \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La parábola tiene ecuación $f(x) = \frac{-4}{3}x^2 + 12$.



La escalera debe ser tangente a la curva y pasar por el punto $C(0, 15)$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la parábola en $x = a$.

$$f(x) = \frac{-4}{3}x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = \frac{-8}{3}x$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - \left(\frac{-4}{3}a^2 + 12\right) = \frac{-8a}{3}(x - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{4}{3}a^2 - 12 = \frac{-8a}{3}x + \frac{8a^2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-8a}{3}x + \frac{4}{3}a^2 + 12}$$

La recta tangente debe pasar por el punto C(0, 15).

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{-8a}{3}x + \frac{4}{3}a^2 + 12 \\ x = 0 \rightarrow y = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 15 = \frac{-8a}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3}a^2 + 12 \Rightarrow 3 = \frac{4}{3}a^2 \Rightarrow 9 = 4a^2 \Rightarrow$$

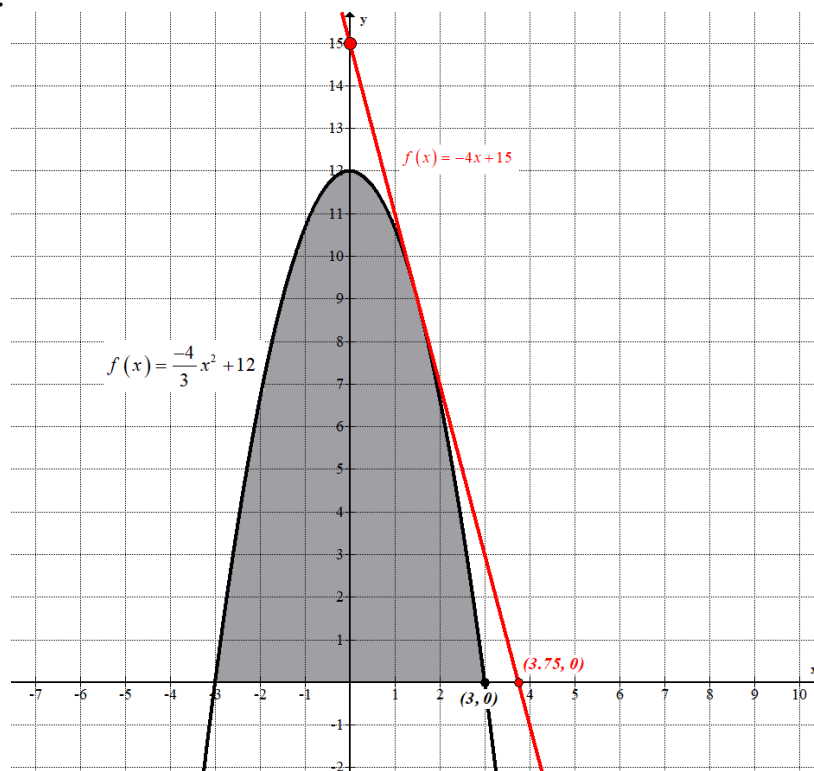
$$\Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{y = \frac{-8}{3} \cdot \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12 = -4x + 15}$$

La ecuación de la recta tangente (escalera) es $y = -4x + 15$.

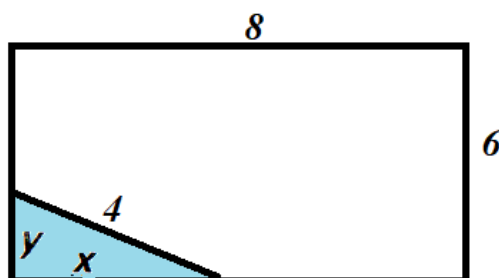
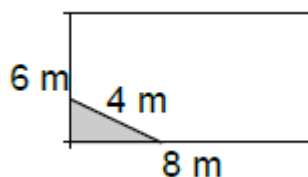
Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + 15 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x + 15 = 0 \Rightarrow 4x = 15 \Rightarrow \boxed{x = \frac{15}{4} = 3.75}$$

La distancia del punto de apoyo de la escalera al extremo inferior del montículo es $3.75 - 3 = 0.75$ metros.



(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?



El recinto que delimita la barra de 4 metros es un triángulo rectángulo de catetos x e y . Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$x^2 + y^2 = 4^2 \rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{16 - x^2}}$$

Obtenemos la expresión del área delimitada por la barra.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{16 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{16 - x^2}; \quad x \in [0, 4]$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = \frac{(\sqrt{16 - x^2})^2 - x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - x^2 - x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow 8 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83 \in (0, 4)}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

- En el intervalo $[0, 2\sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{8 - 1^2}{\sqrt{16 - 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{15}} > 0. \text{ La función crece en } [0, 2\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(2\sqrt{2}, 4]$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$A'(3) = \frac{8-3^2}{\sqrt{16-3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{7}} < 0. \text{ La función decrece en } (2\sqrt{2}, 4].$$

La función área tiene un punto crítico en $x = 2\sqrt{2} \approx 2.83$, crece antes y decrece después de $x = 2\sqrt{2} \approx 2.83$. La función tiene un máximo relativo en dicho valor.

Para $x = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ hallamos el valor de y : $y = \sqrt{16 - (\sqrt{8})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

La barra de 4 metros debe apoyarse a 2.83 metros de la esquina de la sala.

