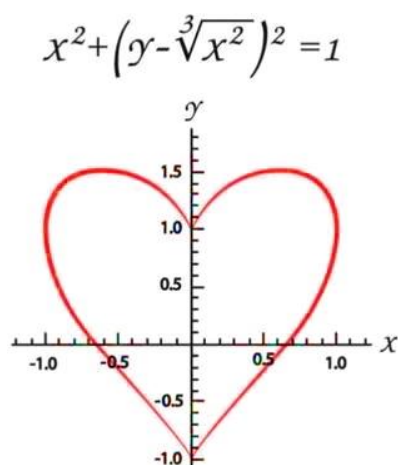
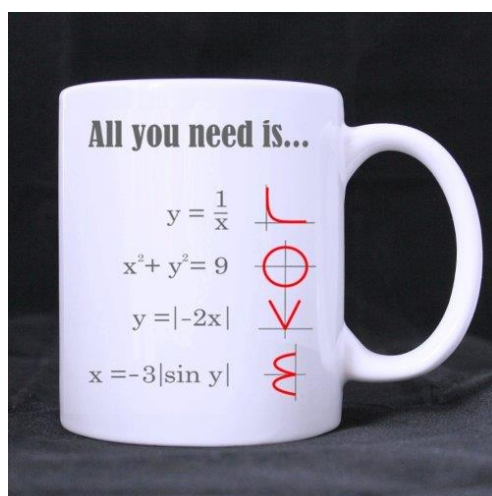


2º de bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Bloque 2 de 3 - Análisis

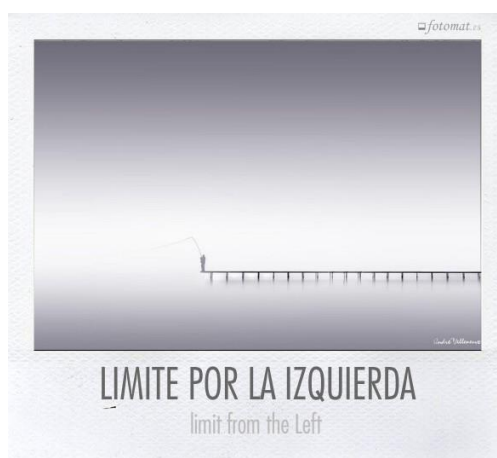
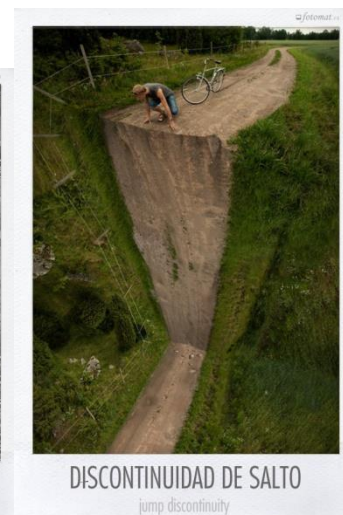
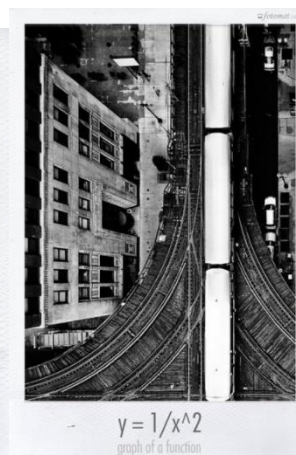


www.ebaumatematicas.com

Tema 5. Límites y continuidad de funciones.	4
1. Límite de una función cuando $x \rightarrow a$ (en un punto)	4
1.1. Cuestiones previas	4
1.2. Idea inicial de límite de una función en un punto (cuando $x \rightarrow a$).	8
1.3. Definición de límite de una función en un punto	9
1.4. Límites laterales	9
2. Cálculo práctico de límites	11
2.1. Casos inmediatos	11
2.2. Algunas propiedades de las operaciones con límites	11
2.3. Indeterminaciones	12
2.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow a$. Indeterminación $\frac{0}{0}$	13
2.5. El caso $\frac{k}{0}$	14
3. Límite de una función cuando $x \rightarrow \infty$ (en el infinito)	15
3.1. Límite finito de una función cuando $x \rightarrow \infty$	16
3.2. Límite infinito de una función cuando $x \rightarrow \infty$	16
3.3. Límite de una función polinómica en el infinito	17
3.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow \infty$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$	17
3.5. La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones con raíces	19
3.6. La indeterminación 1^∞ . El número e (no entra en PAU Murcia 2026)	19
3.7. Comportamiento de las funciones exponenciales en el infinito (no entra en PAU Murcia 2026)	21
3.8. La indeterminación de la forma $\infty - \infty$	22
4. Asíntotas de una función.	23

5. Continuidad de una función.....	27
5.1. Estudio de la continuidad de una función en un punto.....	27
5.2. Funciones continuas.	28
6. Representación gráfica de rectas, parábolas y funciones a trozos.	30
6.1. Función constante (recta horizontal).....	30
6.2. Función lineal y afín (recta oblicua).....	30
6.3. Función cuadrática (parábola).....	30
6.4. Funciones a trozos.....	32
7. Resumen de operaciones con expresiones infinitas.....	34
 Ejercicios.....	35
Tema 6. Derivadas.	39
1. Derivada de una función en un punto.....	41
1.1. Definición.....	41
1.2. Interpretación geométrica de la derivada (recta tangente a la función).....	42
1.3. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.....	43
2. Función derivada.....	44
2.1. Derivada de algunas funciones.....	44
3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones.....	45
4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales.....	47
4.1. Derivada de potencias y raíces.....	47
4.2. Derivada de las funciones logarítmicas.....	47
4.3. Derivada de las funciones exponenciales.....	48
4.4. Tabla de la derivada de las funciones usuales.....	48
4.5. Derivadas sucesivas.....	49
5. Aplicación de la derivada para el estudio de la variación de una función.....	51
5.1. Crecimiento y decrecimiento.....	51
5.2. Máximos y mínimos relativos.....	51
5.3. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad, convexidad, inflexión.....	53
6. Optimización de funciones. Problemas de optimización.....	58
 Ejercicios:.....	60
Tema 7. Integrales	63
1. Concepto de integral indefinida.....	63
1.1. Primitiva de una función.....	63
1.2. Integral indefinida.....	64
1.3. Propiedades de la integral indefinida.....	65
2. Relación de integrales inmediatas.....	66
3. Técnicas y métodos de integración.....	66
3.1. Descomposición elemental.....	67
3.2. Integración por cambio de variable.....	68
4. Integral definida: área bajo una curva.....	70
4.1. Propiedades de las integrales definidas.....	72
4.2. Regla de Barrow.....	73
4.3. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos.....	75
 Ejercicios:.....	80
Ejercicios de Análisis en pruebas PAU y EBAU de Murcia	82

Veo matemáticas por todas partes. Y tú, ¿también la ves?



Tema 5. Límites y continuidad de funciones.



1. Límite de una función cuando $x \rightarrow a$ (en un punto)

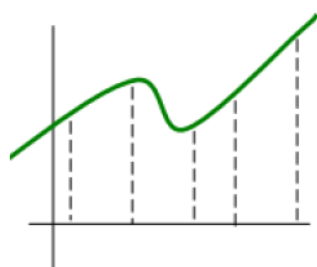
1.1. Cuestiones previas

Una **función** real de variable real: $f : \text{Dom}f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
es una relación que a cada elemento x de un subconjunto de $\mathbb{R}$ ($\text{Dom}f$) le asigna un **único** elemento y de un subconjunto de $\mathbb{R}$.

A las magnitudes que intervienen en una función se les llama **variables**. Una de ellas es la **variable independiente** y la otra, cuyos valores se deducen (dependen) de los valores de la primera, se llama **variable dependiente**.

La variable independiente se designa por x y sus valores son representados en el eje horizontal (eje de abscisas). La variable dependiente se designa por y , sus valores son representados en el eje vertical (eje de ordenadas).

La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, con $x \in \text{Dom}f$.



SI ES UNA FUNCIÓN



NO ES UNA FUNCIÓN

Una función se puede describir verbalmente, con una tabla de valores, dando su gráfica, o por medio de su fórmula o expresión algebraica.

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.

Al conjunto de todos los valores x que tienen imagen, se llama **dominio de f** ($\text{Dom}f$).
El conjunto de todas las imágenes se llama **recorrido de f** ($\text{Rec}f$).

Si $a \in \text{Dom}f \Rightarrow a$ tiene imagen $\Rightarrow$ el punto $(a, f(a))$ está en la gráfica de f y ningún otro punto de abscisa a está en la gráfica de f (puesto que a solo tiene una imagen).

Si $a \notin \text{Dom}f \Rightarrow a$ no tiene imagen $\Rightarrow$ no hay ningún punto de la gráfica de f cuya abscisa sea $a \Rightarrow$ la gráfica de f no cruza la recta vertical $x = a$.

Si $b \notin \text{Rec}f \Rightarrow$ no existe a del dominio cuya imagen sea $b \Rightarrow$ no hay ningún punto de la gráfica de f cuya ordenada sea $b \Rightarrow$ la gráfica de f no cruza la recta horizontal $y = b$.

El dominio de una función puede estar determinado por:

- la definición de la función,
- por la propia naturaleza de la magnitud cuyas cantidades son los valores de la variable independiente, o
- por las operaciones que aparecen en la expresión algebraica de la función, que pueden no estar definidas para ciertos valores.

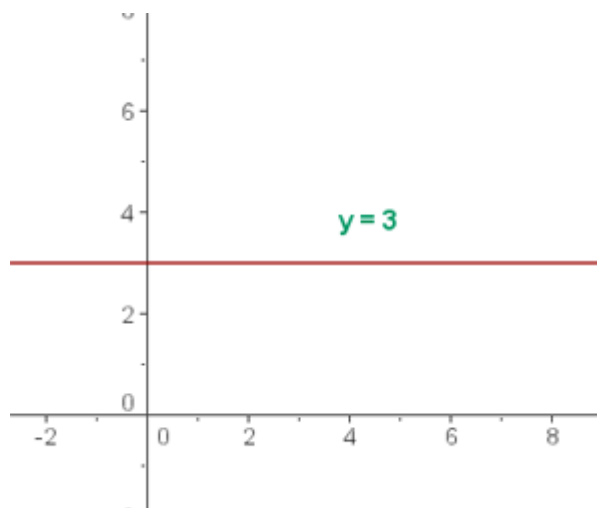
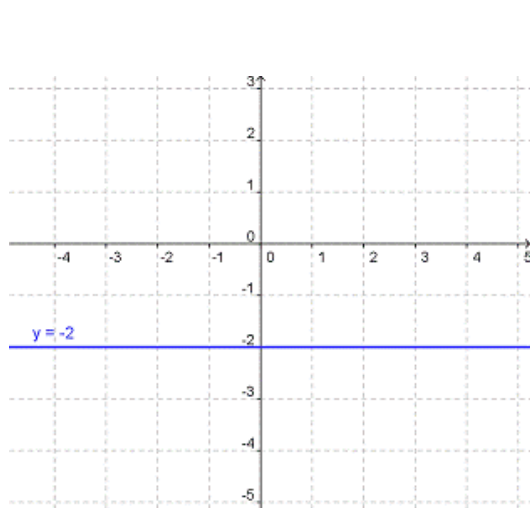
Dominios de algunos modelos de funciones:

Las funciones polinómicas ($y = 3x^4 - 5x^2 + x - 2$) y las exponenciales (a^x) están definidas en todo $\mathbb{R}$.

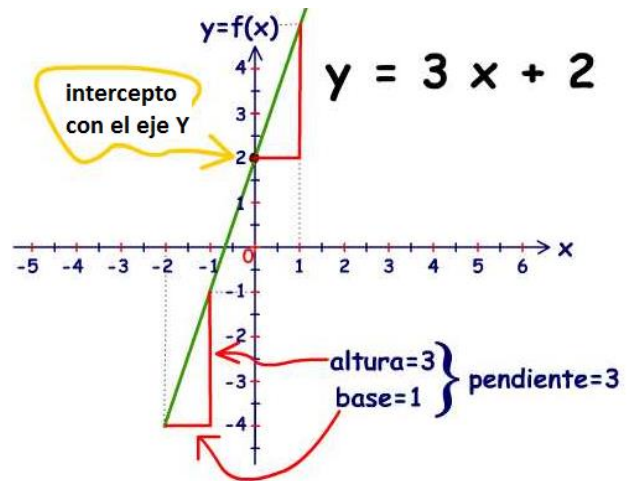
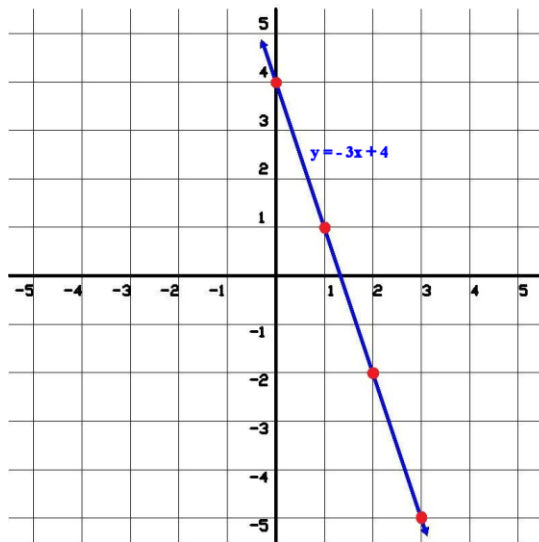
Las funciones racionales ($f(x) = \frac{x-2}{x+2} \rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2\}$) tienen como dominio todos los reales salvo los valores que anulan el denominador.

GRÁFICAS DE ALGUNOS MODELOS FUNCIONALES.

Funciones polinómicas de grado 0 $\rightarrow$ La recta horizontal. $y = c$



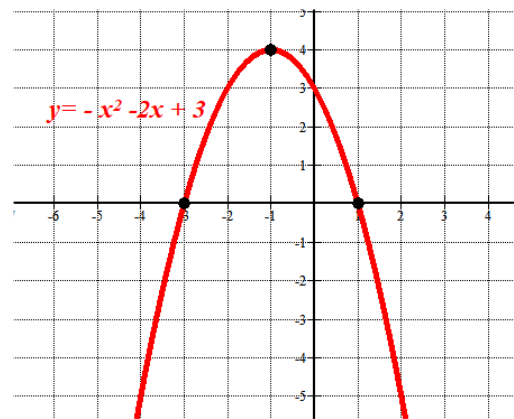
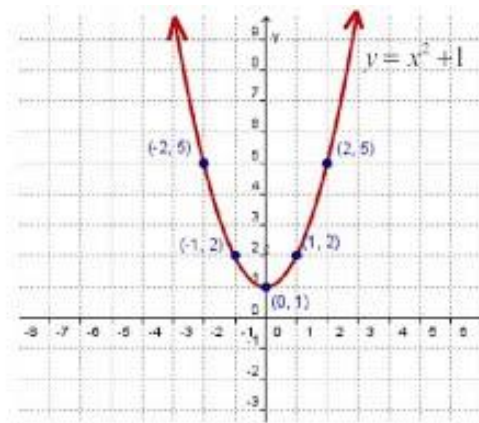
Funciones polinómicas de grado 1 $\rightarrow$ La recta oblicua. $y = bx + c$



Funciones polinómicas de grado 2 → La parábola. $y = ax^2 + bx + c$

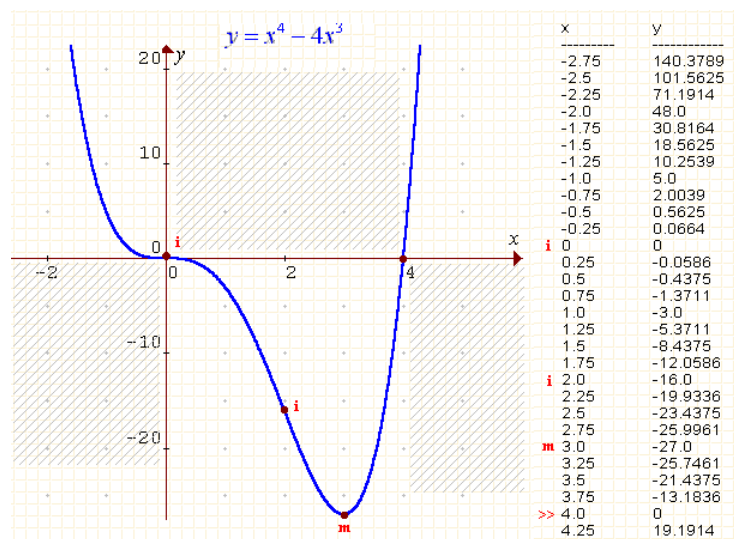
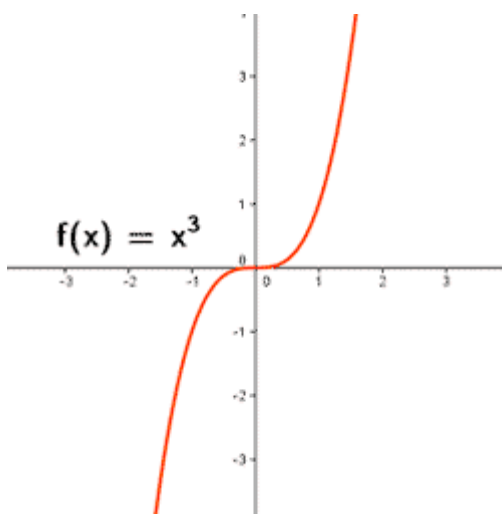
$$y = x^2 + 1$$

x	y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

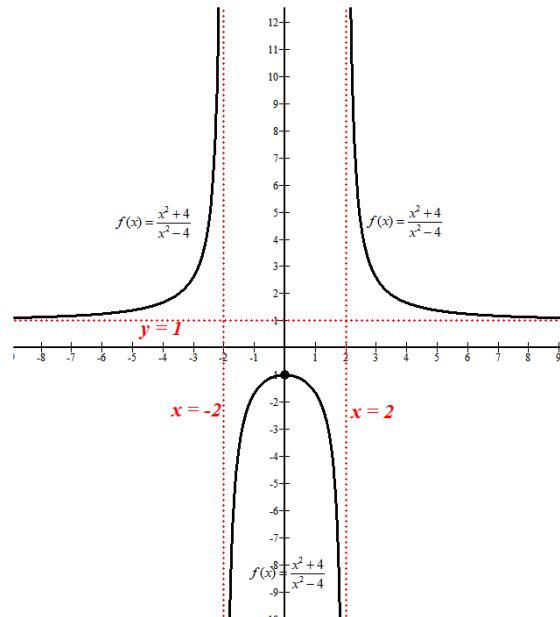
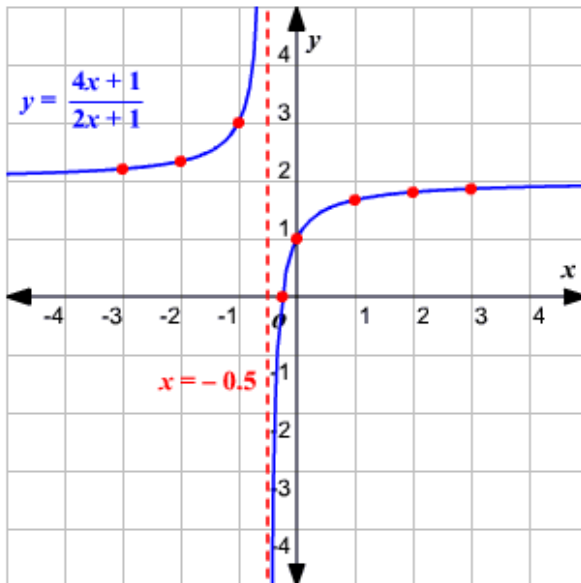


Funciones polinómicas de grado 3 → $y = x^3$

Funciones polinómicas de grado 4 → $y = x^4 - 4x^2$



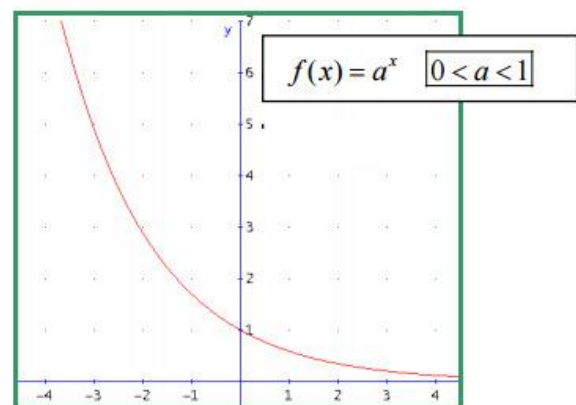
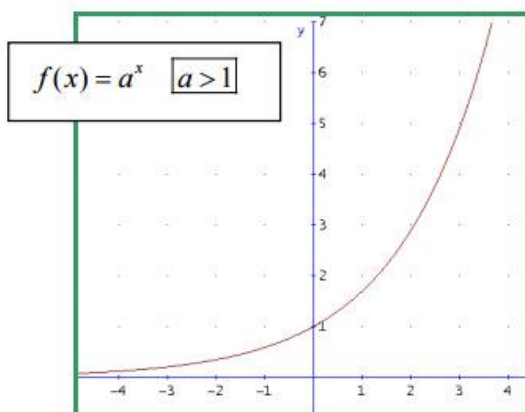
Funciones racionales



Función exponencial

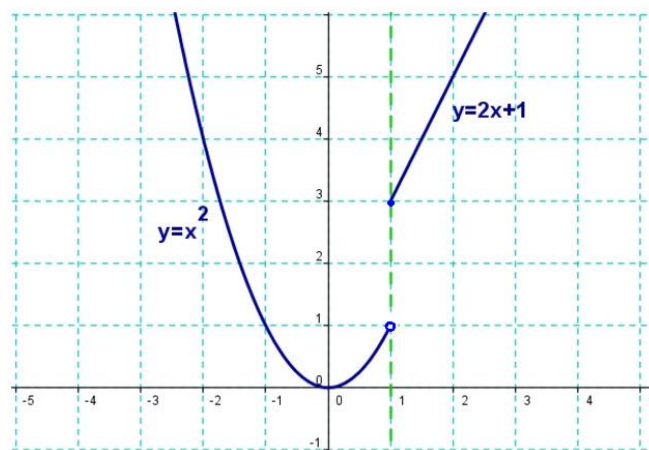
$$y = f(x) = a^x$$

Función exponencial



Función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



1.2. Idea inicial de límite de una función en un punto (cuando $x \rightarrow a$).

Si una función f está definida para todos los valores de x próximos a a , aunque no necesariamente en el mismo a , entonces, se dice que el límite de $f(x)$ vale L , cuando x tiende a a , si el valor de $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a .

Se escribe así: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Se lee: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a .

Si una función $f(x)$ no tiende a ningún número concreto, cuando x tiende a a , se dice que no tiene límite cuando x tiende a a .

Ejemplos:

Usando la calculadora puede estudiarse el límite, cuando x tiende a 2, de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 3$

b) $g(x) = \frac{3}{x-2}$

c) $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

Para ello, en todos los casos, se darán a x valores próximos a 2 y se calcularán los valores que toma la respectiva función.

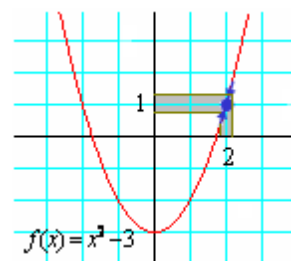
a) Para $f(x) = x^2 - 3$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$f(x) = x^2 - 3$	0,61	0,9601	0,996001	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41

Tanto para valores menores que 2 como para mayores que 2 (en ambos casos próximos a 2), la función toma valores muy próximos a 1.

En este caso se escribe, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$.

Observa que la función está definida en $x = 2$ y que el límite coincide con $f(2)$.



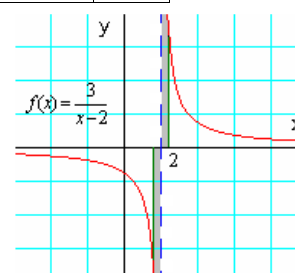
b) Para $g(x) = \frac{3}{x-2}$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$g(x) = \frac{3}{x-2}$	-30	-300	-3000	¿?	3000	300	30

Para valores cercanos y menores que 2, la función toma valores grandes y negativos; para valores cercanos y mayores que 2, la función toma valores cada vez más grandes.

En este caso, no existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y que tampoco



tiene límite en ese punto.

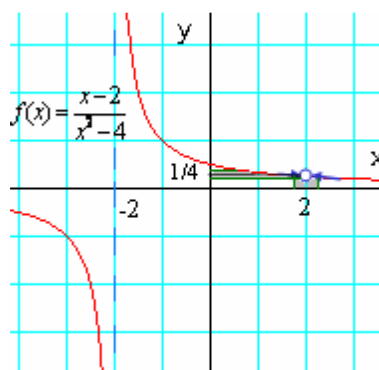
c) Para $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$	0,2564	0,2506	0,25006	$\rightarrow 0,25 \leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439

Para valores próximos y menores que 2, la función se acerca cada vez más a 0,25; y lo mismo hace para valores próximos y mayores que 2.

En este caso, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$

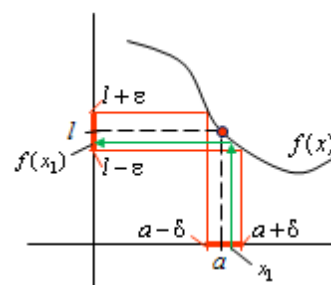
Observa que la función no está definida en $x = 2$ y sin embargo tiene límite en ese punto.



1.3. Definición de límite de una función en un punto

A la vista de los ejemplos anteriores, se concluye:

- 1) Para la existencia del límite de una función en un punto a no importa que la función esté o no definida en ese punto.
- 2) Lo que importa son los valores que toma la función en un entorno de ese punto a .
- 3) Existirá el límite, y su valor será L , cuando todos los puntos próximos a a se transformen, mediante la función, en puntos próximos a L . Esto es, si x_1 está cerca de a , entonces $f(x_1)$ está cerca de L .



O con más precisión (como curiosidad os pongo la definición matemática):

Existirá el límite de $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$, y su valor será L , si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

1.4. Límites laterales

En la definición de límite no se distingue entre las posibilidades de que x se aproxime a a con valores mayores o menores que a . No obstante, algunas veces conviene distinguir si $x \rightarrow a$ por la izquierda (siendo $x < a$), que se escribe $x \rightarrow a^-$, o si $x \rightarrow a$ por la derecha (siendo $x > a$), denotado por $x \rightarrow a^+$.

Esta distinción da lugar al estudio de los límites laterales.

- Al $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda.
- Al $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ se le llama límite lateral por la derecha.

**Observación:**

Este estudio tiene interés cuando:

- 1) La función está definida a trozos y se quiere calcular el límite en alguno de los puntos de unión de los diferentes trozos.
- 2) La función tiene asíntotas verticales y se quiere determinar la posición de la curva respecto a ellas.

Pues bien, para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los límites laterales y que sean iguales. Esto es, para que exista es necesario que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

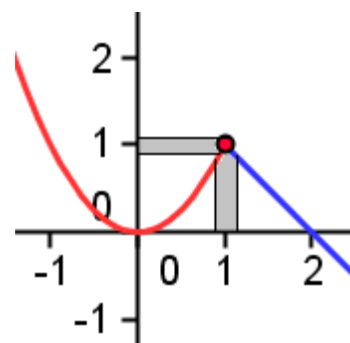
Ejemplos:

- a) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1$

Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale

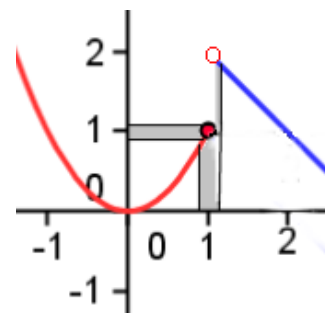
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$



- b) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + x) = 2$

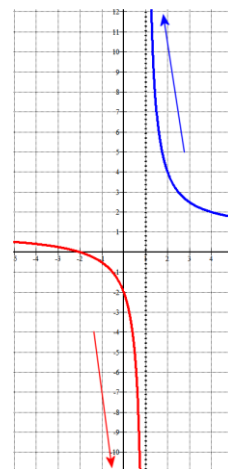
Como ambos límites no coinciden, no existe el límite.



- c) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Como ambos límites no coinciden, no existe el límite.



2. Cálculo práctico de límites

2.1 Casos inmediatos

Si $f(x)$ es una función usual (polinómicas, racionales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto $x = a$, suele cumplirse que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Esto es, el límite se resuelve sustituyendo el valor a en la función.



Observaciones:

- 1) Que la función pueda evaluarse en $x = a$ no es determinante para que exista el límite.
- 2) No obstante, lo primero que debe hacerse para calcular un límite es sustituir x por a . Si existe $f(a)$ y la función no está definida a trozos, se aceptará que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- 3) Las funciones que cumplen que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, se llaman **continuas**.

Ejemplos:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} 2^{x+3} = 2^{2+3} = 2^5 = 32$
- e) $\lim_{x \rightarrow 3} (\ln(x^2 - 2)) = \ln(3^2 - 2) = \ln 7$
- f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$
- g) Esto no es así en el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ ya que al sustituir obtenemos $\frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ que no es una operación válida. No podemos calcular este límite de forma tan sencilla como hemos calculado los anteriores.

2.2. Algunas propiedades de las operaciones con límites

En relación con las operaciones algebraicas pueden aplicarse las siguientes propiedades.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = n$, siendo m y n finitos, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \pm n$
 “El límite de una suma es igual a la suma de los límites.”
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = m \cdot n$

“El límite de un producto es igual al producto de los límites”

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{m}{n}$$

“El límite de un cociente es igual al cociente de los límites”. Siendo n un valor no nulo.

$$4. \text{ Si } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = m^n$$

“El límite de una potencia es igual al límite de la base elevada al límite del exponente”

$$5. \text{ Si } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\log_c f(x) \right) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \log_c m$$

“El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite”

2.3. Indeterminaciones

Hay siete casos en los que al sustituir el valor $x = a$ en la función dada se llega a situaciones extrañas, no definidas, que reciben el nombre de **indeterminaciones**: formas indeterminadas.

Escritas esquemáticamente, estas 7 indeterminaciones son:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^\infty \quad 0 \cdot \infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$



Observaciones:

1) Cuando en estas expresiones se escribe 0 quiere significar que se está ante un valor tan pequeño como se quiera (infinitesimal). El concepto matemático que lo define es el de infinitésimo. Así, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Por tanto, la indeterminación $\frac{0}{0}$ es el cociente de dos infinitésimos. Surge si se plantea un

límite como el siguiente: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$; esto es, cuando $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en el punto $x = 2$.

Igualmente, en las demás indeterminaciones, cada vez que se escribe 0 se está diciendo que la función es un infinitésimo en el punto en cuestión.

2) Análogamente, cuando se escribe 1 se quiere indicar una expresión que tiende a 1, que toma los valores 0,999... o 1,000..., sin que necesariamente tome nunca el valor 1.

3) Por último, cuando se escribe ∞ se quiere significar que la expresión toma valores tan grandes como se quiera: mayores (en valor absoluto) que cualquier número dado.

Ejemplos:

En los límites siguientes, al sustituir, aparecen las formas que se indican.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{8}{x-2} \right) = \infty - \infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1^{+\infty}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \frac{1}{x^2-4} = 0 \cdot \infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

Algunas veces estas formas indeterminadas pueden resolverse. Los métodos de resolución están muy estudiados y se concretan en los siguientes procedimientos:

- 1) Algebraicos. Consisten en aplicar las propiedades de las operaciones con límites y, cuando estas sean insuficientes, recurrir a transformaciones algebraicas en la función dada: simplificar, extraer factor común, sumar o restar, operar con potencias y raíces, con logaritmos...

Se aplicará este método en límites de los tipos: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\infty - \infty$ 1^∞ $0 \cdot \infty$

- 2) Regla de L'Hôpital, dando así entrada al cálculo infinitesimal. Se verá con las derivadas. Allí se resolverán las 7 formas indeterminadas.

2.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow a$. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. El único caso de límite no inmediato es cuando da lugar a la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Esto es, cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$. Este caso puede resolverse factorizando los polinomios y simplificando la expresión inicial.

Ejemplo:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ no resulta inmediato ya que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$. Puede resolverse así:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación) } = \dots$$

Factorizamos el polinomio $x^2 - 4$, haciendo la división por Ruffini con el número 2 al que tiende x :

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2.5. El caso $\frac{k}{0}$

Cuando al hacer cualquier límite aparezca la expresión $\frac{k}{0}$, se pondrá que el valor de ese límite es **infinito** (∞). Esto significa que, aunque el límite no existe, el valor de la función se hace tan grande como se quiera, **infinitamente** grande. En estos casos es conveniente estudiar los límites laterales en el punto, pues con frecuencia se obtienen signos distintos para el infinito.



Observación:

Cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$: la recta $x = a$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0} = \pm\infty$. Si estudiamos los límites laterales:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = (\text{probamos con } 1,9) \frac{\text{positivo}}{\text{negativo}} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = (\text{probamos con } 2,1) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty$

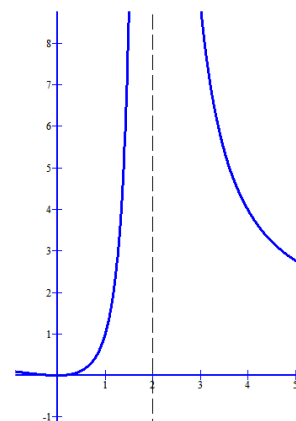


No coinciden los límites laterales, son infinito pero de signo distinto. En estos límites se

puede decir que no existen $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \nexists$ o que vale $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \pm\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{4}{0} = \pm\infty$. Si estudiamos los límites laterales:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = (\text{probamos con } 1,9) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty$



$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = (\text{probamos con } 2,1) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty$$

Coinciden los límites laterales y el límite es $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = +\infty$



Ejercicios:

Calcula el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x^4} =$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} =$

Solución: a) -2

b) $5/6$

c) $\pm\infty$

d) $+\infty$

e) $\pm\infty$



Observación:

Es frecuente confundir $\frac{k}{0}$ y $\frac{0}{k}$. ¿Está clara la diferencia? ¿ $\frac{0}{k} = ?$

3. Límite de una función cuando $x \rightarrow \infty$ (en el infinito)

Antes de estudiar estos límites conviene recordar algunos resultados de las operaciones relacionadas con el infinito.

$$+\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$[\infty - \infty]$ es indeterminado.

$$+\infty \pm k = +\infty$$

$$-\infty \pm k = -\infty$$

$$(+k) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-k) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$[0 \cdot \infty]$ es indeterminado.

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{\infty}{k} = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ es indeterminado.}$$

$$\infty^{(+k)} = \infty$$

$$\infty^{(-k)} = 0$$

$$k^{+\infty} = +\infty; \text{ si } k > 1$$

$$k^{+\infty} = 0; \text{ si } 0 < k < 1$$

$$k^{-\infty} = 0; \text{ si } k > 1$$

$$k^{-\infty} = +\infty; \text{ si } 0 < k < 1$$

$$\left[1^{\infty} \right] \text{ es indeterminado.}$$

En todos los casos $+k$ indica un número positivo fijo y $-k$ indica uno negativo.

3.1. Límite finito de una función cuando $x \rightarrow \infty$

Pongamos un ejemplo de esta situación.

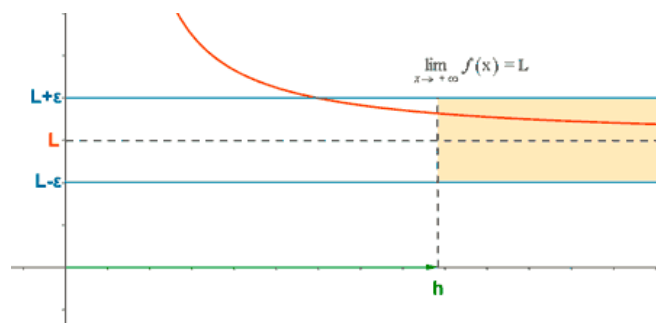
La función $f(x) = \frac{2x-1}{x+8}$ tiende a 2 cuando $x \rightarrow +\infty$.

Efectivamente, si $x = 1000 \rightarrow f(1000) = 1,983$; si $x = 10000 \rightarrow f(10000) = 1,9995$;...

Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+8} = 2$

La definición precisa es la siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 / \forall x > h \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



3.2. Límite infinito de una función cuando $x \rightarrow \infty$

La función $f(x) = x^2 - 1$ toma valores cada vez más grandes cuando $x \rightarrow +\infty$. Efectivamente, si $x = 100 \rightarrow f(100) = 9999$; si $x = 1000 \rightarrow f(1000) = 999999$,

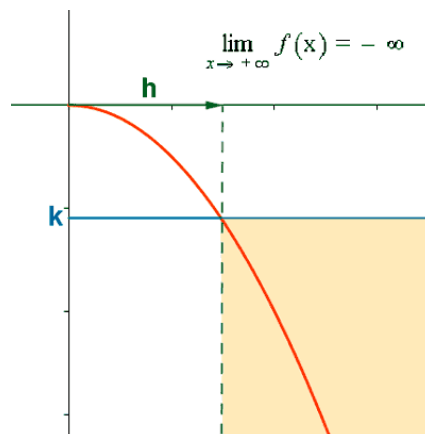
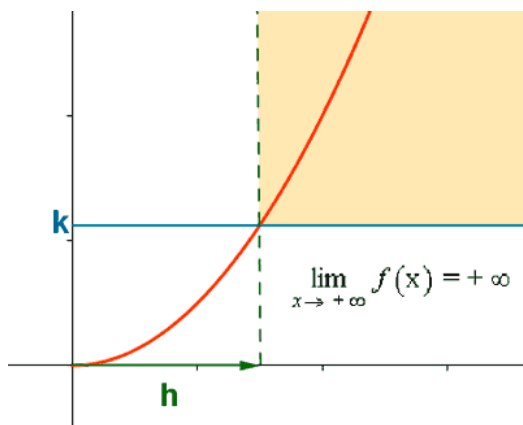
Se escribe: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$

La función $f(x) = -x^2 + 1$ toma valores cada vez más pequeños cuando $x \rightarrow +\infty$. Efectivamente, si $x = 100 \rightarrow f(100) = -9999$; si $x = 1000 \rightarrow f(1000) = -999999$,

Se escribe: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$

La función $f(x) = x^3 - 3$ toma valores cada vez más pequeños cuando $x \rightarrow -\infty$. Efectivamente, si $x = -100 \rightarrow f(-100) = -999997$; si $x = -1000 \rightarrow f(-1000) = -999999997$,

Se escribe: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 8} = -\infty$



3.3. Límite de una función polinómica en el infinito

Si $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (+\infty)^n = \pm\infty$$

El signo $+\infty$ o $-\infty$ depende del coeficiente de mayor grado del polinomio, aplicando en todos los casos las reglas de los signos.

Ejemplos:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 3) = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 4x - 3) = -\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 4x - 3) = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 300x^3 + x - 2) = +\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 300x^3 + x - 2) = +\infty$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 - 300x^3 + x - 2) = -\infty$

3.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow \infty$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, al calcular $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría la expresión indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; no obstante se resuelve muy fácilmente, pues su valor depende de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$:

- Si grado de $P(x) >$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$
- Si grado de $P(x) =$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.
- Si grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Un procedimiento para justificar estos resultados consiste en dividir el numerador y el denominador de la función dada por la mayor potencia de x presente en la expresión, como se hace en el ejemplo siguiente. Además, en todos los casos se tendrán en cuenta los signos.

Ejemplos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^2 + 3 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^3}} + \frac{4x}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} + \frac{4\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + 4} = \frac{-1 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^4 + 3 + 4x^3} = \boxed{0}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^4 + 3 + 4x^3} = \boxed{0}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x + 3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4} = \frac{+\infty}{4} = \boxed{+\infty}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 4x - 3}{x + 3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{4} = \frac{-\infty}{4} = \boxed{-\infty}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^3 + 3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \boxed{-1}$$



Ejercicios:

Calcula los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^4 + 3 + 4x^3} =$$

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x+3+4x^3} =$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{x+3+4x^2} =$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -8x^4 + 4x^3 - 5x + 2 =$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^4 + 4x^3 - 5x + 2 =$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 5x + 2 =$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+4x^2-2x^4}{x+3+2x^3} =$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+3-4x^3 =$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+3-4x^3} =$

Solución: a) 0 b) 0 c) -3/4 d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$ g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$

3.5. La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación puede resolverse aplicando la comparación de grados, teniendo en cuenta que al aparecer raíces los exponentes pueden ser fraccionarios.

Ejemplos:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4} \cdot x^{3/2}}{x} = \boxed{+\infty}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \cdot x^{3/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{\sqrt[3]{4}}$
- c)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4} \cdot x^{3/3}}{x} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4} \cdot x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 5x + \sqrt{x+3}}{x+8\sqrt{x^2+x-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x+8\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x+8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{9} = \boxed{-\infty}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + \sqrt{x+3}}{x+8\sqrt{x^2+x-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x+8\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x+8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{9} = \boxed{-\frac{5}{9}}$

3.6. La indeterminación 1^∞ . El número e (no entra en PAU Murcia 2026)

El número e se define como el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828182846...$$

Una forma de resolver estas indeterminaciones es aplicar la transformación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty [\text{Indeterminación}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1]g(x)}$$

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \boxed{e^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right)^{-1} = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2} \right) (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2-2} \right) (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-9}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right)} = e^0 = \boxed{1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-9}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3)} = \boxed{e^3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1 \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-x-2}{x-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x-2} \right) (x^2-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2+9}{x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x)} = e^{-\infty} \{ \text{Como } e=2,71...>1 \} = \boxed{+\infty}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} - 1 \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1-x-2}{x+2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{x+2} \right) (x^2-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2+9}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x)} = e^{-\infty} \{ \text{Como } e=2,71...>1 \} = \boxed{0}$$



Observación:

Como se aprecia en los diferentes resultados de los límites calculados en los ejemplos anteriores la *indeterminación* significa que no se puede predecir el resultado, pudiendo ser este muy variable.

**Ejercicios:**

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x =$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+4}\right)^{\frac{3x^2}{x-6}} =$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + \sqrt{x^2+3}}{x + 3\sqrt{x^2+x-5}} =$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{x + 3\sqrt{x^2+x-5}} =$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2+x}{x + \sqrt{x^4+x-5}} =$

Solución: a) e^{-2} b) e^5 c) e^6 d) -1 e) $-\infty$ f) -2

3.7. Comportamiento de las funciones exponenciales en el infinito (no entra en PAU Murcia 2026)

El límite cuando $x \rightarrow \infty$ de las funciones exponenciales se calcula como sigue.

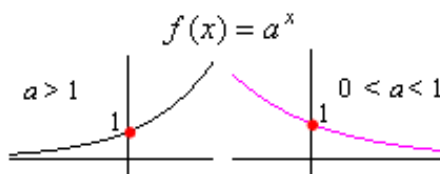
Para el cálculo de límites de expresiones potenciales, además de las propiedades usuales de la potenciación, se emplean las siguientes:

• Si $f(x) > 0$, entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$ y también $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

• $\begin{cases} a^{+\infty} = +\infty; \text{ si } a > 1 \\ a^{+\infty} = 0; \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$

• $\begin{cases} a^{-\infty} = 0; \text{ si } a > 1 \\ a^{-\infty} = +\infty; \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$

En este contexto viene bien recordar la representación gráfica de las funciones exponenciales elementales.

**Ejemplos:**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)} = e^{+\infty} = \{e = 2,71... > 1\} = \boxed{+\infty}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)} = e^{-\infty} = \{e = 2,71... > 1\} = \boxed{0}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x)} = e^{-\infty} = \{e = 2,71... > 1\} = \boxed{0}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = \left\{\frac{3}{2} = 1,5 > 1\right\} = \boxed{+\infty}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4}\right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4}\right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = 4^{+\infty} = \{4 > 1\} = \boxed{+\infty}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4}\right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4}\right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = 4^{-\infty} = \{4 > 1\} = \boxed{0}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4}\right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4}\right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2} = 0,5 < 1\right\} = \boxed{0}$$

**Ejercicios:**

Calcula los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+2}{x-3}\right)^x =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{x-3}\right)^x =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{3x-3}\right)^x =$$

Solución: a) 0 b) $+\infty$ c) 0

3.8. La indeterminación de la forma $\infty - \infty$

Cuando se plantea la indeterminación $\infty - \infty$, tanto cuando $x \rightarrow a$ como cuando $x \rightarrow \infty$, el procedimiento general consiste en operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Estas otras formas se resolverían por cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Ejemplos:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9} \right)$ es una forma indeterminada $\infty - \infty$. Sumemos las fracciones algebraicas y simplifiquemos todo lo posible la expresión.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(2x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2+1}{(x-3)(x+3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(2x^2+6x-3x-9)-x^2-1}{(x-3)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2+3x-10}{(x-3)(x+3)} \right) = \frac{8}{0} = \boxed{\pm\infty} \end{aligned}$$

Este resultado se podría decir que no existe, ya que el límite por la derecha de 3 es $+\infty$ y por la izquierda es $-\infty$.

- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-3}{2x-3} - \frac{x^2+5x}{x+2} \right) = \infty - \infty$ (Indeterminación)

Para resolverla realizamos la resta de las fracciones:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-3}{2x-3} - \frac{x^2+5x}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x^2-3)(x+2) - (x^2+5x)(2x-3)}{(2x-3)(x+2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3+4x^2-3x-6 - (2x^3-3x^2+10x^2-15x)}{(2x-3)(x+2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2+12x-6}{2x^2+x-6} \right) = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminación)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{2} \right) = \boxed{\frac{-3}{2}} \end{aligned}$$

4. Asíntotas de una función.

Una función puede tener tramos en los que la gráfica se aleja indefinidamente. Estos tramos se llaman ramas infinitas de la función.

Cuando una rama infinita se acerca indefinidamente a una recta se llama **asíntota**.

Asíntotas verticales

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical en $x = a$** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Para hallar las asíntotas verticales se observa el dominio de la función.

Para conocer la posición de la curva respecto de las asíntotas se hallan los límites laterales.

Ejemplo

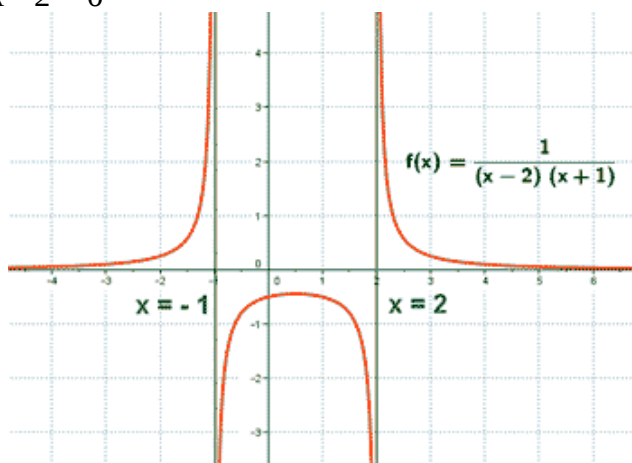
Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ las asíntotas verticales corresponden a los valores que anula al denominador.

Las raíces son: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x_1 \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x_2 \end{cases}$

Calculamos los límites laterales en $x = -1$ y en $x = 2$ y así comprobamos el comportamiento de la función en las proximidades de sus asíntotas.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Asíntotas horizontales

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal en** $y = b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Para hallar la asíntota horizontal en $y = b$ se halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ si se obtiene un valor finito existe asíntota horizontal, pero si el resultado es ∞ no existe asíntota horizontal.

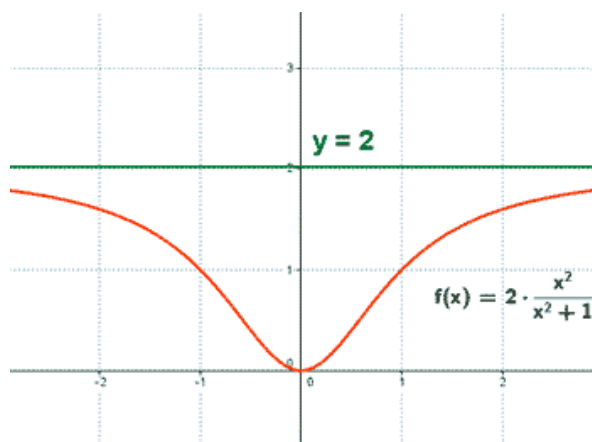
Ejemplo:

Calcula las asíntotas horizontales de la siguiente función: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

Para hallar las asíntotas horizontales calculamos el límite en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

La asíntota horizontal es $y = 2$.



Asíntotas oblicuas

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** en $y = mx + n$ si:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

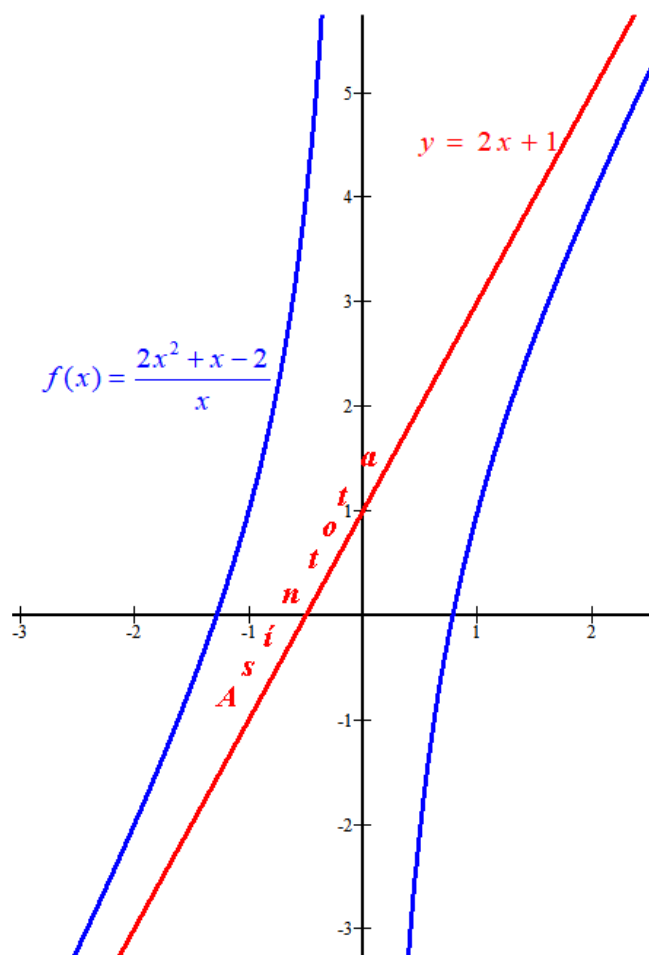
Ejemplo:

Para hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x}$ calculamos:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + x - 2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x^2} + \cancel{x} - 2}{\cancel{x^2}} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} - 2}{\cancel{x}} = 1$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es: $y = 2x + 1$



5. Continuidad de una función

5.1. Estudio de la continuidad de una función en un punto

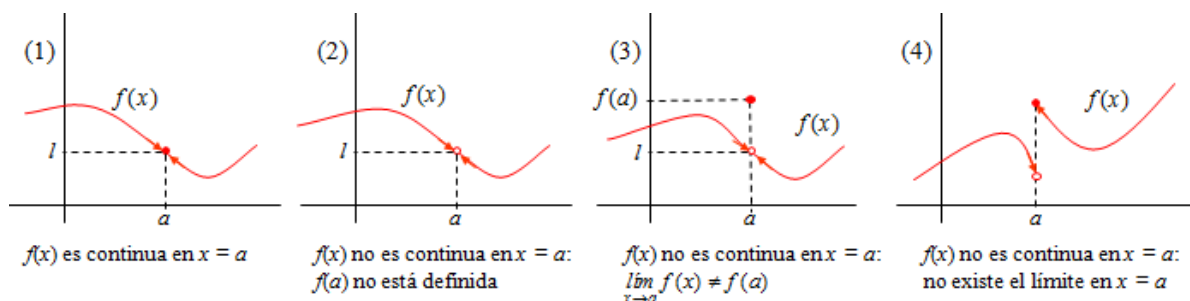
Una función es continua en un punto cuando el límite de la función en dicho punto es igual al valor de la función en él.

La definición es la siguiente: $f(x)$ es continua en el punto $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Para comprobar si una función es continua en $x = a$ procederemos realizando los 3 pasos:

- 1) La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$.
- 2) Existe el límite en $x = a$: existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- 3) El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$.

De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$.

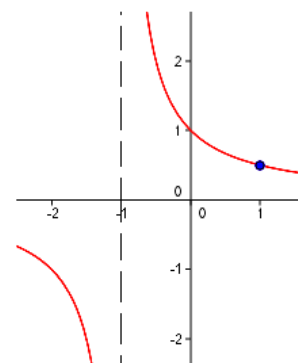


Ejemplos:

- 1) La función $f(x) = \frac{4}{x+1}$ es discontinua en $x = -1$, pues en ese punto no está definida.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} &= \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} &= \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x+1} = \infty \text{ (No existe)}$$

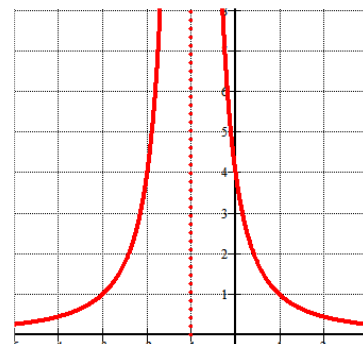


No existe la función ni el límite $\rightarrow$ La función presenta una **discontinuidad inevitable de salto infinito** en $x = -1$.

- 2) La función $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ es discontinua en $x = -1$, pues en ese punto no está definida.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{(x+1)^2} &= \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{(x+1)^2} &= \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$



No existe la función, pero si existe el límite (es infinito) $\rightarrow$ La función presenta una **discontinuidad inevitable de salto infinito** en $x = -1$.

- 3) La función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x+2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es discontinua en

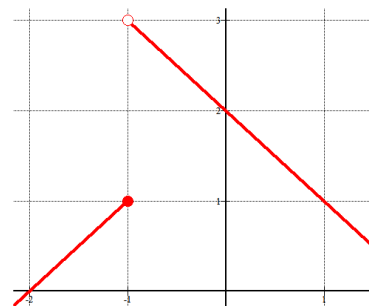
$x = -1$, En ese punto la función vale $f(-1) = 1$.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} x+2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} -x+2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Como existe la función y no existe el límite (son finitos) $\rightarrow$ La

función presenta una **discontinuidad inevitable de salto finito** en $x = -1$.



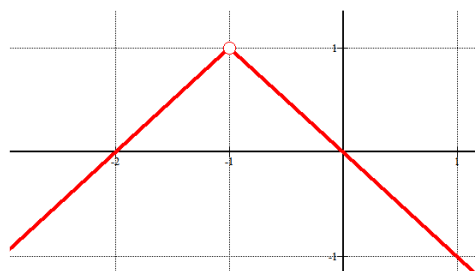
- 4) La función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es discontinua

en $x = -1$, pues en ese punto no está definida la función.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} x+2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} -x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

Como existe el límite y no existe la función $\rightarrow$ La función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = -1$.



- 5) La función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es continua en

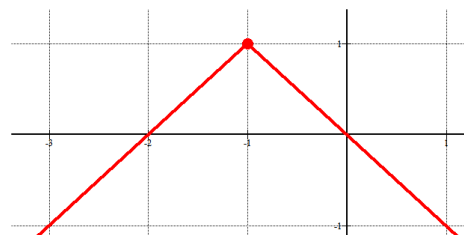
$x = -1$.

En ese punto la función está definida y vale $f(-1) = 1$.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} x+2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} -x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

Como existe la función, el límite y son iguales $\rightarrow$ La función es **continua** en $x = -1$.



5.2. Funciones continuas.

- 1) Las **funciones polinómicas** $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, son continuas para todo número real x .

Ejemplos:

Son funciones continuas:

- $f(x) = 2$. Las funciones constantes se representan mediante una recta horizontal.
- $f(x) = 2x - 1$. La función polinómica de primer grado es una recta.
- $f(x) = x^2 + 2x - 1$. La función polinómica de segundo grado es una parábola.
- $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 1$. Todos los polinomios, de cualquier grado son funciones continuas.

- 2) Las **funciones racionales** $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$, son continuas en todos los puntos de su dominio; esto es, siempre que no se anule el denominador.

Ejemplos:

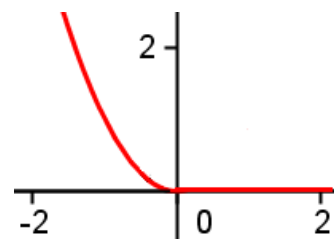
- a) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2}$ es continua siempre, para todo número real, pues su denominador siempre es distinto de 0.
- b) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4}$ es continua para todo número real distinto de 2, y -2. Para esos dos valores se anula el denominador.
- 3) Las **funciones con radicales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales** son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplos:

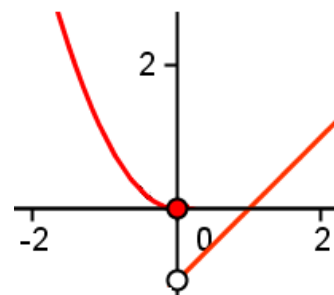
- a) La función $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ es continua para todo $x \geq 2$; y para todo $x \leq -2$. En el primer caso por la derecha; en el segundo, por la izquierda. No está definida en el intervalo $(-2, 2)$.
- b) La función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es continua sólo en el intervalo $[-2, 2]$, que es su dominio de definición.
- c) La función $f(x) = \log(x^2-1)$, que está definida siempre que $x \notin [-1, 1]$, es continua para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- d) La función $f(x) = (x-3)e^{2x+1}$ es continua en todo $\mathbf{R}$. En cambio, $f(x) = (x-3)e^{\frac{2}{x-1}}$ no es continua en $x = 1$, ya que no está definida en ese punto.
- 4) Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.

Ejemplos:

- a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en todo $\mathbf{R}$.



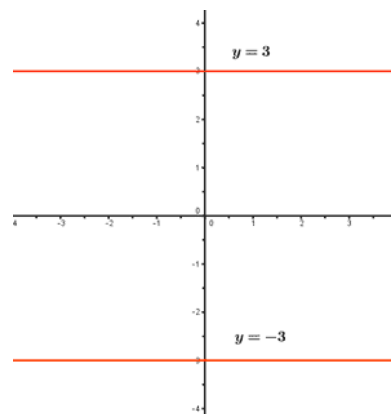
- b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$.



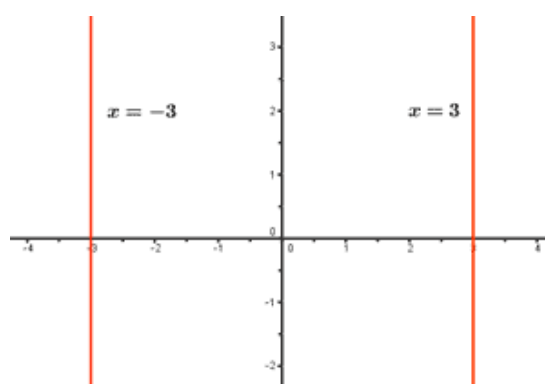
6. Representación gráfica de rectas, parábolas y funciones a trozos.

6.1. Función constante (recta horizontal)

Las funciones $y = 3$ e $y = -3$ son funciones constantes.



$x = k$ es una recta paralela al eje Y. No es función puesto que para un valor determinado existen infinitas imágenes.



6.2. Función lineal y afín (recta oblicua)

La función $y = mx$ se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas.

La función $y = mx + n$ se denomina **función afín** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el eje OY por el punto $(0, n)$.

$$f(x) = 2x$$

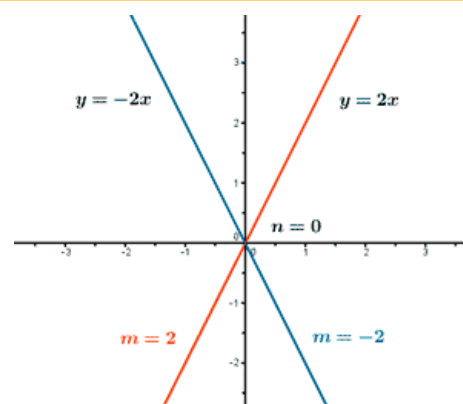
x	0	-1	1
y	0	-2	2

$$f(x) = -2x$$

x	0	-1	1
y	0	2	-2

Función creciente ($m > 0$)

Función decreciente ($m < 0$)



6.3. Función cuadrática (parábola)

Representa gráficamente la función: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

1) Puntos de corte con los ejes:

Para $x = 0$ tenemos que $f(0) = 6$, luego el punto de corte con el eje Y es $(0, 6)$.

Para $y = 0$ tenemos que $0 = x^2 - 5x + 6$ así que resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = x \\ \frac{5-1}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son $(2, 0)$ y $(3, 0)$.

2) Vértice de la parábola:

$$\text{Vértice} \left(\frac{-b}{2a}, f \left(\frac{-b}{2a} \right) \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4} \right)$$

3) Máximos o mínimos:

Como $a > 0$ entonces tenemos un mínimo, que coincide con el vértice $\text{Mínimo} \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4} \right)$

4) Crecimiento o decrecimiento:

Como $a > 0$, tenemos que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 5/2)$ y creciente en el intervalo $(5/2, +\infty)$.

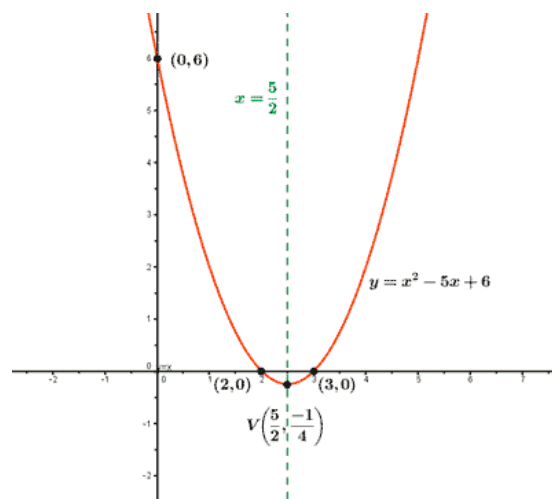
5) Concavidad o convexidad:

Como $a > 0$ la función es cóncava en todo su dominio.

6) Tabla de valores:

Construimos una tabla de valores con los puntos de corte con los ejes, el vértice y otros puntos alrededor de él.

x	$y = x^2 - 5x + 6$
0	6
2	0
5/2	-1/4
3	0



Representa gráficamente la función: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

1) Puntos de corte con los ejes:

Para $x = 0$ tenemos que $f(0) = -6$ luego el punto de corte con el eje Y es $(0, -6)$.

Para $y = 0$ tenemos que $0 = -x^2 + 5x - 6$ así que resolvemos la ecuación de segundo grado, siendo sus raíces $x = 2$ y $x = 3$.

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son $(2, 0)$ y $(3, 0)$.

2) Vértice de la parábola:

$$\text{Vértice}\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

3) Máximos o mínimos:

Como $a < 0$ entonces tenemos un máximo, que coincide con el vértice. **Máximo** $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

4) Crecimiento o decrecimiento:

Como $a < 0$, tenemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 5/2)$ y decreciente en el intervalo $(5/2, +\infty)$.

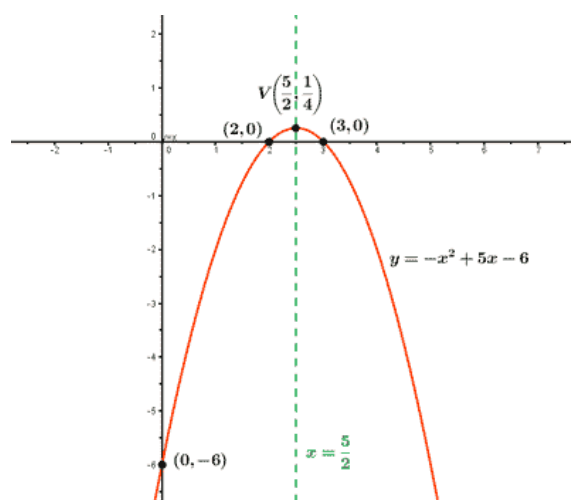
5) Concavidad o convexidad:

Como $a < 0$ la función es convexa en todo su dominio.

6) Tabla de valores:

Construimos una tabla de valores con los puntos de corte con los ejes, el vértice y otros puntos alrededor de él.

x	$y = -x^2 + 5x - 6$
0	-6
2	0
$5/2$	$1/4$
3	0



6.4. Funciones a trozos

Una **función definida a trozos** es aquella cuyo dominio está dividido en intervalos disjuntos, y cada intervalo de la función viene dada por expresiones matemáticas distintas.

Representar la función siguiente:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

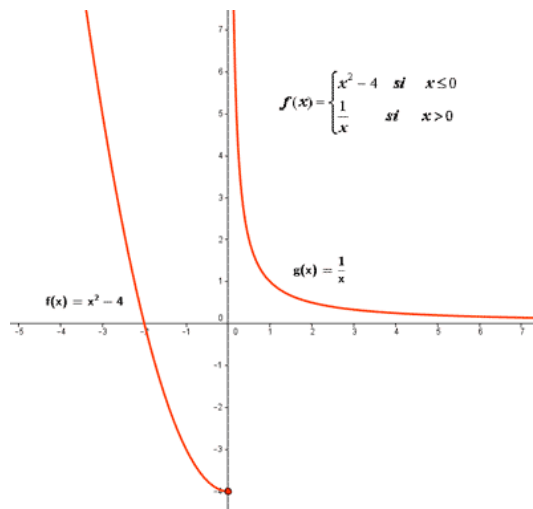
Se dibuja cada gráfica en el intervalo que está definida.

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$x (x \leq 0)$	$f(x) = x^2 - 4$
0	-4
-1	-3
-2	0
-3	5

$x (x > 0)$	$f(x) = \frac{1}{x}$
0,5	2
1	1
2	0,5
4	0,25



Ejercicios.

Representa la gráfica de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = -x + 4$

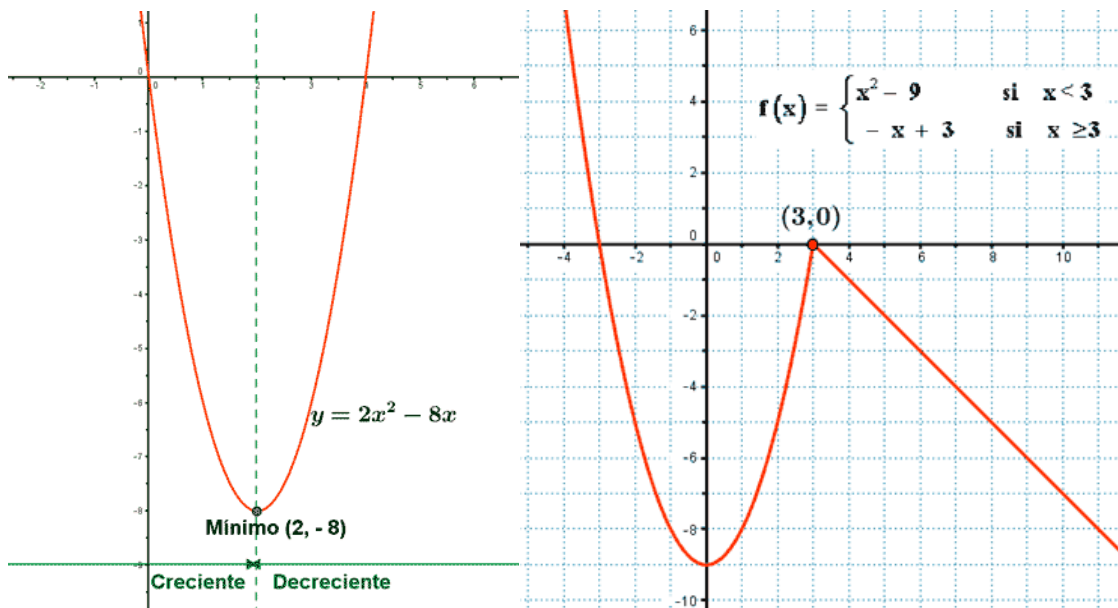
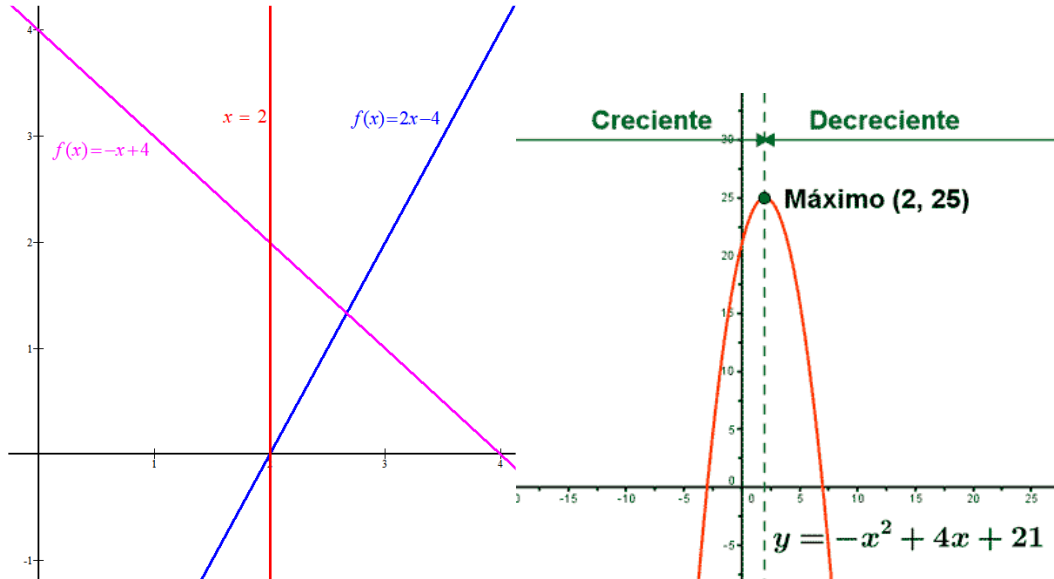
c) $x = 2$

d) $y = -x^2 + 4x + 21$

e) $y = 2x^2 - 8x$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Soluciones:



7. Resumen de operaciones con expresiones infinitas

Suma	$K + (+\infty) = +\infty$ Siendo K un número real cualquiera $K + (-\infty) = -\infty$ Siendo K un número real cualquiera $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
Producto	$K \cdot (+\infty) = +\infty$ Siendo K un número real positivo $K \cdot (+\infty) = -\infty$ Siendo K un número real negativo $K \cdot (-\infty) = -\infty$ Siendo K un número real positivo $K \cdot (-\infty) = +\infty$ Siendo K un número real negativo $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
Cociente	$\frac{K}{\infty} = 0$ Siendo K un número real cualquiera $\frac{+\infty}{K} = +\infty$ Siendo K un número real positivo $\frac{+\infty}{K} = -\infty$ Siendo K un número real negativo $\frac{-\infty}{K} = -\infty$ Siendo K un número real positivo $\frac{-\infty}{K} = +\infty$ Siendo K un número real negativo $\frac{0}{K} = 0$ Siendo $K \neq 0$ $\frac{K}{0} = \infty$ (Indeterminación)
Potencia	$K^{+\infty} = +\infty$ Siendo $K > 1$ $K^{+\infty} = 0$ Siendo $0 < K < 1$ $K^{-\infty} = 0$ Siendo $K > 1$ $K^{-\infty} = +\infty$ Siendo $0 < K < 1$ $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ $(+\infty)^{-\infty} = 0$



Ejercicios

Cálculo de límites por métodos algebraicos

1. Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 =$	; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 =$	; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + x^2 =$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 - x^2 =$
c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 =$	; $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 =$	; $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - x^2 =$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} =$	; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} =$	; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 - x^2} =$
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^2} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^3} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^3 - x^2} =$
f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^3}{x^2} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^2}{x^3} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^2}{x^3 - x^2} =$
g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^4 + x^3}{x^2} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^4}{x^3} =$	; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^5}{x^3 - x^2} =$

2. Tanteando con la calculadora, indica el valor de los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} =$

3. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^4 - x^3 - x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x} \right)$

4. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 10x}{x^3 - 3x + 4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x - 5x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 12x}$

5. Calcula el valor de los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3x}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{2x - 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{\sqrt{x^3 + 5x - 3}}$

6. Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{1}{(x-2)^2}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{x}{x+2}}$

7. Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x^2+1} \right)^{\frac{-3x+2}{x}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^{\frac{-3x+2}{x^2-1}}$

8. Halla el valor de los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+5x-6}{x^2-9} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-3} - \frac{x^2+3}{x^2} \right)$

Continuidad y gráficas

9. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

- a) $f(x) = x^3 + 8$ b) $f(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 8}$ d) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 8}$
- e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ f) $f(x) = \sqrt{x+4}$ g) $f(x) = e^{x-2}$ h) $f(x) = \log(5x-6)$

10. Indica los puntos de discontinuidad de $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11. Dibuja la gráfica de las rectas siguientes, indicando si son continuas y el valor de los límites en el $-\infty$ y en $+\infty$:

a) $f(x) = -1$ b) $f(x) = 2$ c) $x = 3$ d) $f(x) = 2x - 2$ e) $f(x) = -x + 2$ f) $x = -2$

12. Dibuja la gráfica de las parábolas siguientes, indicando si son continuas y el valor de los límites en el $-\infty$ y en $+\infty$:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = -x^2 + x + 2$ d) $f(x) = x^2 + 2x$ e) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$. Estudia la continuidad y representa gráficamente.

14. Calcula el valor de K para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 5 \\ 4x + k & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Representala gráficamente para el valor de k obtenido.

15. Determina a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Soluciones

1. a) $+\infty$; $+\infty$; $-\infty$ b) $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$ c) 4; 0; -2 d) 0; 0; 0 e) 1; 0; 0
f) $-\infty$; -1; -1 g) $-\infty$; $-\infty$; $+\infty$

2. 0; $+\infty$

3. a) -1. b) 12. c) 0.

4. a) 0. b) $-3/5$. c) $+\infty$.

5. a) $1/2$. b) $1/2$. c) $+\infty$.

6. a) $+\infty$. b) 3.

7. a) 1. b) No existe: 0; $+\infty$. c) 1

8. a) $+\infty$. b) $2/3$. c) 3

9. a) No tiene. b) -2 c) $\{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$ d) No tiene e) No tiene f) $(-\infty, -4)$ g) No tiene h) $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$

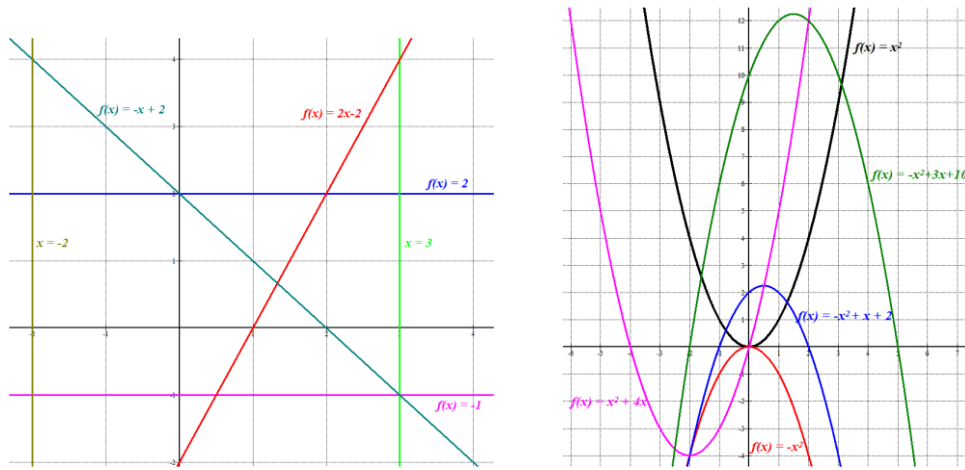
10. $x=1$; $x=2$

11. a) Es continua, como es constante $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ b) Es continua, como es

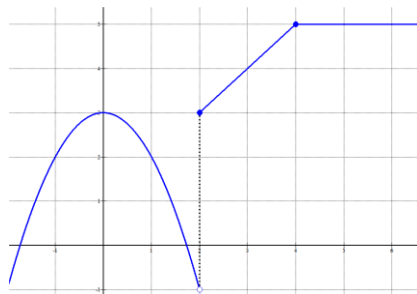
constante $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. c) No es función y por lo tanto ni es continua ni

podemos hablar de límites. d) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e) Es continua

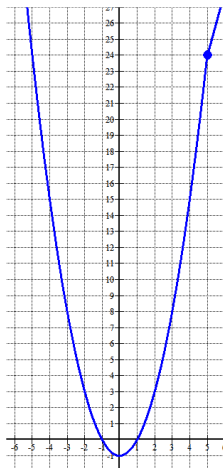
y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ f) No es función y por lo tanto ni es continua ni podemos hablar de límites.



12. a) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. c) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. d) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. e) Es continua y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



13. Es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.



14. $K = 4$.

15. $a = 1$. $b = -1$.

Tema 6. Derivadas.

No es lo mismo...



... bajar por el tobogán de un parque infantil que tirarse desde lo más alto de una montaña rusa.

Si dibujáramos el perfil del descenso de estas tres atracciones podríamos decir que se trata de la gráfica de tres funciones decrecientes, pero es evidente que el ritmo de decrecimiento en cada una de ellas es muy diferente. Por ejemplo, hablaríamos de un decrecimiento lento en el primer caso y un decrecimiento muy rápido en el tercero. ¿Cómo describirías el de la segunda imagen?

¿Cómo podemos cuantificar la velocidad a la que crece o decrece una función? con la derivada.

Ya sabes que la **derivada** de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** en ese punto. Pues bien, ese número es el que nos informará de si una función está creciendo en un punto o decreciendo y a qué ritmo lo está haciendo.

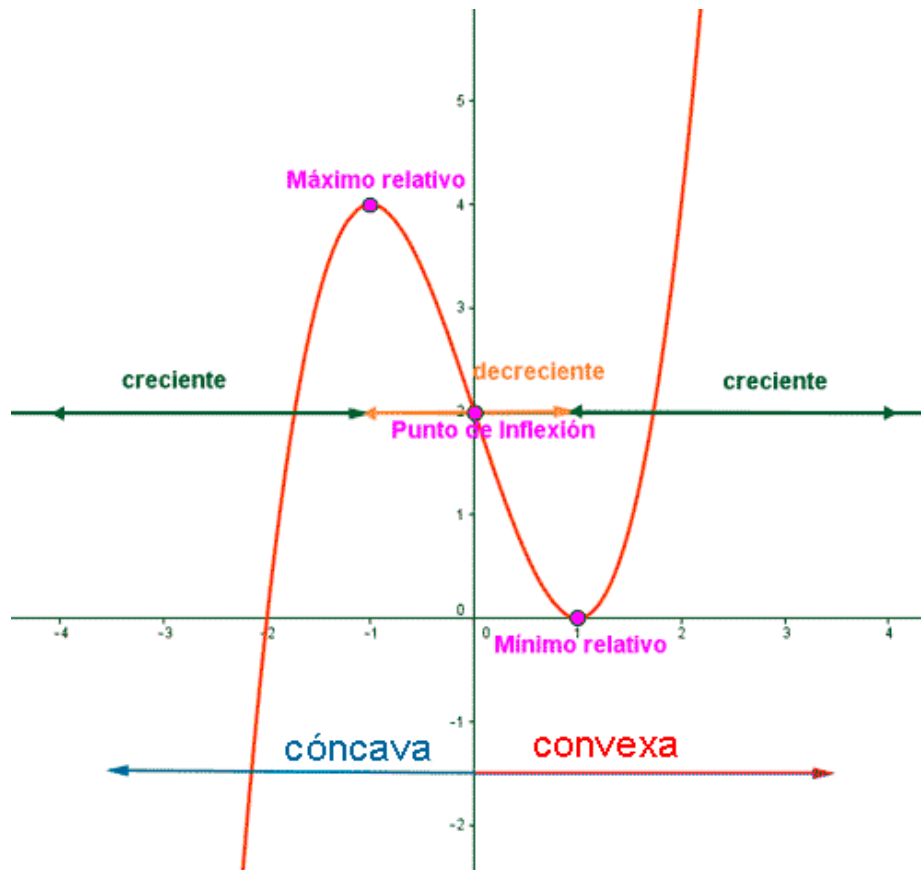
La derivada nos informa de cómo y a qué velocidad varía una función

En este tema definiremos formalmente conceptos como **máximo y mínimo relativo** —en la tercera imagen aparece un máximo— o **punto de inflexión**, como los que puedes visualizar en la segunda imagen. Gracias al cálculo de estos puntos podrás **dibujar** con precisión **gráficas de funciones** que hasta ahora sólo podías esbozar.

Acabaremos resolviendo problemas para que puedas apreciar la gran potencia que tiene la derivada tanto como herramienta de cálculo como en el análisis de funciones.

Un tipo de **problemas** muy interesantes son los **de optimización**. En la vida cotidiana interesa con frecuencia lograr que una cierta magnitud sea lo más grande o lo más pequeña posible. Por ejemplo: calcular el precio a que debe venderse un producto para obtener el máximo beneficio, o bien, averiguar la forma que debe tener una caja de una cierta capacidad para que el coste de producción sea mínimo. Resolveremos problemas sencillos y dejaremos los más complejos para el curso que viene, que es cuando dispondrás de las herramientas de cálculo necesarias.

Observando la gráfica podemos establecer los siguientes aspectos de la función:



- Dominio = $\mathbb{R}$
- Continua en todo su dominio.
- Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 0)$
- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 1)$.
- Máximo relativo en el punto $(-1, 4)$ y mínimo relativo en el punto $(1, 0)$. No es ni máximo ni mínimo absoluto.
- Cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$.
- Punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 2)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Vamos a estudiar varios aspectos relativos a una función sin hacer uso de su gráfica.

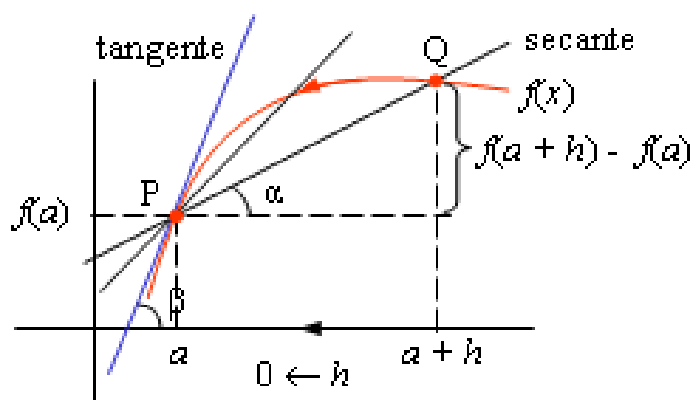
1. Derivada de una función en un punto

1.1. Definición

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si existe el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este límite se denota por $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.



La derivada es el límite de un cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la variable dependiente ($f(x)$) en relación con la variación de la variable independiente (x).

El cociente mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra. Cuando se impone que la variable independiente varíe una cantidad infinitesimal (eso indica que $h \rightarrow 0$), lo que se está calculando es la tasa de variación instantánea de la función $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, **qué le pasa a $f(x)$ cuando varía x en los alrededores de un punto a .**



Ejemplo:

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -9 - h^2 - 6h + 12 + 4h = -h^2 - 2h + 3$ y

$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = -9 + 12 = 3$, se tendrá:

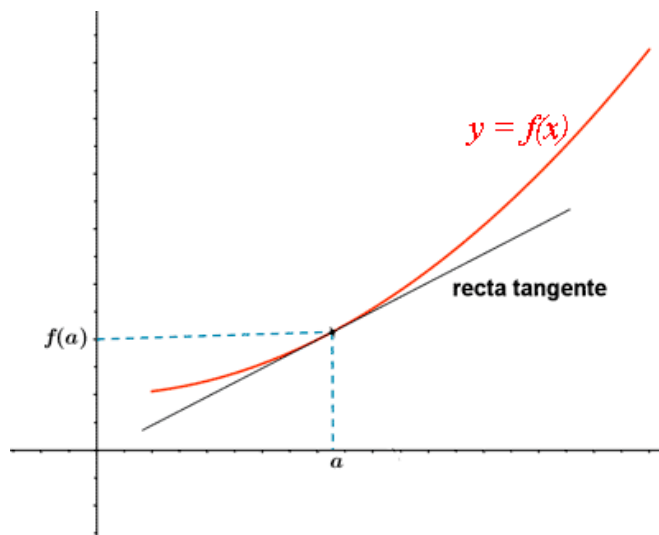
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-2)}{h} = -2$$

Luego $f'(3) = -2$. Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre la variación de ambas variables vale -2 .

1.2. Interpretación geométrica de la derivada (recta tangente a la función)

La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$. Esto es, en la recta $y = mx + n$ se tiene que $m = f'(a)$; como además la recta pasa por $P(a, f(a))$, se obtiene que la ecuación de dicha **recta tangente** será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$



Observaciones:

1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor se aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.
2. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.
3. El alumno aplicado y con buena memoria recordará que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable x .

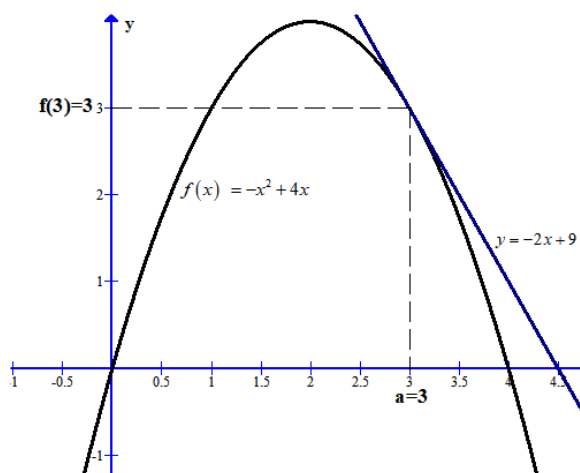


Ejemplo:

La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3).$$

Y como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene: $y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9$.



1.3. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

- 1) Que la función sea continua en dicho punto.
- 2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

• Derivadas laterales

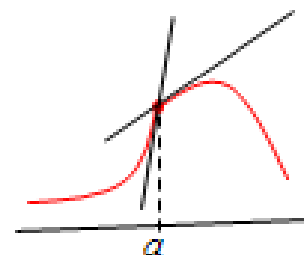
$$\text{Izquierda: } f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Derecha: } f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.



• Continuidad y derivabilidad

La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:

- “Si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$ ”
- El recíproco no es cierto: “si $f(x)$ es continua en $x = a \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$ ”

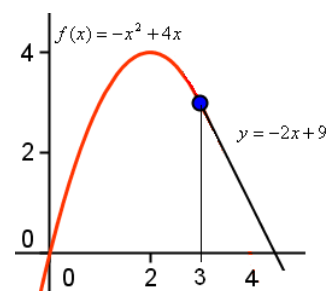
Para comprobar este resultado basta con dar un contraejemplo. El más sencillo es considerar la función $f(x) = |x|$, que es continua en $x = 0$ pero no derivable.



Ejemplos:

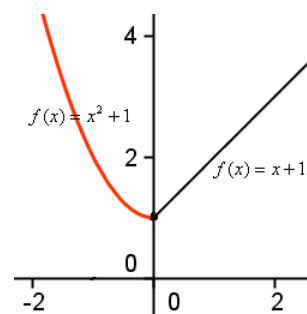
- a) La función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x < 3 \\ -2x + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua y derivable

en el punto donde se unen las funciones a trozos, en $x = 3$. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos. (Recuerda que $y = -2x + 9$ es la recta tangente a $y = -x^2 + 4x$ en $x = 3$).



- b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$, pero no

es derivable en ese punto. (En el punto $x = 0$, la función hace un cambio brusco, tiene un pico).



2. Función derivada

La función derivada de una función $f(x)$ es una nueva función que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f'(x)$. Su definición es la siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si $y = f(x)$, se escribe $y' = f'(x)$. También es frecuente escribir $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ o $y' = \frac{dy}{dx}$.

2.1. Derivada de algunas funciones

Para obtener la función derivada de cualquier función conviene seguir el proceso siguiente:

- 1) Dada $y = f(x)$, hallar $f(x+h)$.
- 2) Hallar y simplificar la diferencia $f(x+h) - f(x)$.
- 3) Escribir y simplificar el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
- 4) Resolver el límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. En el cálculo de este límite suele estar la dificultad mayor.



Observaciones:

Para las funciones usuales existen una serie de fórmulas que dan su función derivada. Más adelante se dará una breve tabla con las más frecuentes.

Aquí, para que se aprecie el método a seguir (y quizás la dificultad de ello) se obtendrá la derivada de una función sencilla.



Ejemplos:

a) La función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ puede obtenerse así:

- 1) Se calcula $f(x+h)$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) = x^2 + h^2 + 2xh + 2x + 2h$$

- 2) Se halla $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h) - f(x) = \cancel{x^2} + h^2 + 2xh + \cancel{2x} + 2h - (\cancel{x^2} + \cancel{2x}) = h^2 + 2xh + 2h = h(h + 2x + 2)$$

- 3) Se forma el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(h + 2x + 2)}{h} = h + 2x + 2$$

4) Se resuelve el límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x + 2) = \boxed{2x + 2}$$

Por tanto, la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ es $f'(x) = 2x + 2$

Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Así:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2; \quad f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4; \quad f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$$

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Se puede demostrar que la derivada de una función polinómica es la siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$



Ejemplos:

- $f(x) = -32 \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
- $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$
- $f(x) = x^5 + x^3 + x - 32 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Cuando las funciones no aparezcan en su forma tan simple o cuando intervengan más de una función se aplicarán las siguientes propiedades.

Derivada de una constante por una función:

$$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$$



Ejemplos:

- $y = -4x^4 \Rightarrow y' = -4 \cdot 4x^3 = -16x^3$
- $y = \frac{-1}{4} x^4 \Rightarrow y' = \frac{-1}{4} \cdot 4x^3 = -x^3$
- $y = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1} \Rightarrow y' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$
- $y = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3} \Rightarrow y' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

**Ejemplos:**

$$\text{a. } (3x^5 - 4x^3)' = 15x^4 - 12x^2$$

$$\text{b. } \left(-\frac{2}{5}x - 4\right)' = -\frac{2}{5}$$

Derivada de un producto de funciones:

$$f(x) = p(x) \cdot s(x) \Rightarrow f'(x) = p'(x) \cdot s(x) + p(x) \cdot s'(x)$$

**Ejemplos:**

$$\text{a. } y = 3x^5 \cdot 5x^4 \Rightarrow y' = 15x^4 \cdot 5x^4 + 3x^5 \cdot 20x^3 = 75x^8 + 60x^8 = 135x^8. \text{ También se puede multiplicar primero y derivar después, obteniendo el mismo resultado.}$$

$$y = 3x^5 \cdot 5x^4 = 15x^9 \Rightarrow y' = 135x^8.$$

$$\text{b. } y = (2x - 3)(x^3 - 5) \Rightarrow y' = (2)(x^3 - 5) + (2x - 3)(3x^2) = 2x^3 - 10 + 6x^3 - 9x^2 = 8x^3 - 9x^2 - 10$$

Derivada de un cociente de funciones:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$$

**Ejemplos:**

$$\text{a. } y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\text{b. } y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{(2x - 3)(x - 1) - 1(x^2 - 3x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2}$$

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena):

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

**Ejemplos:**

$$\text{a. } y = (3x^5)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^5)^3 \cdot 15x^4 = 4 \cdot 27 \cdot x^{15} \cdot 15 \cdot x^4 = 1620x^{19}. \text{ Evidentemente esta derivada sirve como ejemplo, pero la forma lógica de hallarla es simplificar antes de derivar para hacerla de forma más ágil y segura.}$$

$$y = (3x^5)^4 = 81x^{20} \Rightarrow y' = 1620x^{19}$$

- b. $y = (3x^5 - 3x^3 + 5x - 12)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^5 - 3x^3 + 5x - 12)^3 \cdot (15x^4 - 9x^2 + 5)$. Con esta derivada es más lógico utilizar la regla de la cadena.

4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales

4.1. Derivada de potencias y raíces

Son dos casos particulares de funciones compuestas: $y = (f(x))^n$ e $y = \sqrt[n]{f(x)}$

Sus derivadas son:

$$y = k \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = k \cdot x^n \Rightarrow y' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

El caso particular de la raíz cuadrada es conveniente aprenderse la fórmula rápida:

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

La derivada de las raíces también puede obtenerse convirtiendo la raíz en una potencia de exponente fraccionario y derivando como potencia:

$$y = \sqrt[n]{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x)$$



Ejemplos:

a. $y = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x + \frac{1}{4}$

b. $y = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32\right)^5 \Rightarrow y' = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32\right)^4 \cdot \left(4x^3 - 4x + \frac{1}{4}\right)$

c. $y = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 10x}{2 \cdot \sqrt{x^3 - 5x^2 + 3}}$

d. $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 10x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 5x^2 + 3)^2}}$

4.2. Derivada de las funciones logarítmicas

Logaritmo **neperiano**: $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

Para la función compuesta: $y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Logaritmo en **base a**: $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$



Observación:

$\log_a e$ es un número, por ejemplo $\log_2 e = 1,442695\dots$; $\log e = 0,4342944819\dots$

Para la función compuesta: $y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$



Ejemplos:

a. $y = \ln(x^2 - 4x + 11) \Rightarrow y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 11}$

b. $y = \log(x^2 - 4x + 11) \Rightarrow y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 11} \cdot \log e$

4.3. Derivada de las funciones exponenciales

Exponencial de **base a**: $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

Para la función compuesta: $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$

Exponencial de **base e**: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Para la función compuesta: $y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$



Ejemplos:

a. $y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \cdot \ln 10 = 2,310^x$

b. $y = 2^{x^2 - 4x} \Rightarrow y' = 2^{x^2 - 4x} \cdot (2x - 4) \ln 2$

c. $y = e^{x^2 - 4} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2 - 4}$

4.4. Tabla de la derivada de las funciones usuales

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella:

- **c, n, a** y **e** son números
- **x** designa la variable independiente.
- **y** representan la función de **x**.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS	
Función	Función derivada
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ o bien $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

4.5. Derivadas sucesivas

A la función derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda; se escribe $f''(x)$. De manera análoga se puede definir la derivada tercera: $f'''(x)$, que es la derivada de la derivada segunda. Y también la derivada de orden 4: $f^{(4)}(x)$, que es la derivada de la derivada tercera.

A la derivada de orden n se le llama derivada n -ésima; y se escribe $f^{(n)}(x)$.



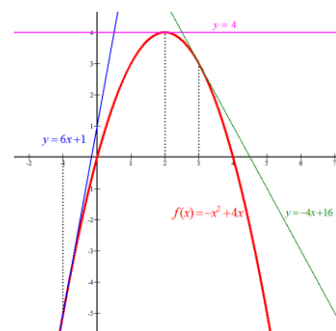
Ejercicios:

1. Calcula la derivada primera, segunda y tercera de $f(x) = -x^2 + 4x$
2. Calcula la derivada de $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 3)^5$
3. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$
4. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$

5. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$
6. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3}{x^3}$
7. Calcula la derivada de $f(x) = 2 - 7x^3 + \frac{4}{x^5} - 5\sqrt{x}$
8. Calcula la derivada de $f(x) = 3^{4x-1}$
9. Calcula la derivada de $f(x) = e^{x^2-x}$
10. Calcula la derivada de $f(x) = \ln(x^4 + x)$
11. Calcula la derivada de $f(x) = \log(3x^2 + 2)$
12. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^x$
13. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 \cdot e^x$
14. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$
15. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^{-x}$
16. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot \ln x$
17. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$
18. Calcula la derivada de $f(x) = 2^{-x^3+2x} + e^{-x/2}$
19. Calcula la derivada de $f(x) = -x^2 + 4x$. Determina la ecuación de las rectas tangentes a su gráfica en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$. Dibuja la gráfica de la función y las rectas tangentes halladas.

Soluciones:

- 1) $f'(x) = -2x + 4$; $f''(x) = -2$; $f'''(x) = 0$
- 2) $f'(x) = 5(x^3 - 2x^2 - 3)^4(3x^2 - 4x)$
- 3) $f'(x) = \frac{-3x^2 - 15}{(x^2 - 5)^2}$
- 4) $f'(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$
- 5) $f'(x) = \frac{2x}{5 \cdot \sqrt[5]{(x^2 + 1)^4}}$
- 6) $f'(x) = \frac{-9}{x^4}$
- 7) $f'(x) = -21x^2 - \frac{20}{x^6} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$
- 8) $f'(x) = 4\ln 3 \cdot 3^{4x-1}$
- 9) $f'(x) = (2x - 1) \cdot e^{x^2-x}$
- 10) $f'(x) = \frac{4x^3 + 1}{x^4 + x}$
- 11) $f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 2}$
- 12) $f'(x) = e^x \cdot (1 + x)$
- 13) $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$
- 14) $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot (1 + 2x^2)$
- 15) $f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$
- 16) $f'(x) = 1 + \ln x$
- 17) $f'(x) = \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2}$
- 18) $f'(x) = (-3x^2 + 2)2^{-x^3+2x} \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}$
- 19) $f'(x) = -2x + 4$.
Tangente en $x = -1 \rightarrow y = 6x + 1$.
Tangente en $x = 2 \rightarrow y = 4$.
Tangente en $x = 4 \rightarrow y = -4x + 16$



5. Aplicación de la derivada para el estudio de la variación de una función

El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la obtención de máximos y mínimos relativos.

5.1. Crecimiento y decrecimiento

- $f(x)$ es **creciente** en un punto $x = a$ si $f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ es **decreciente** en un punto $x = a$ si $f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

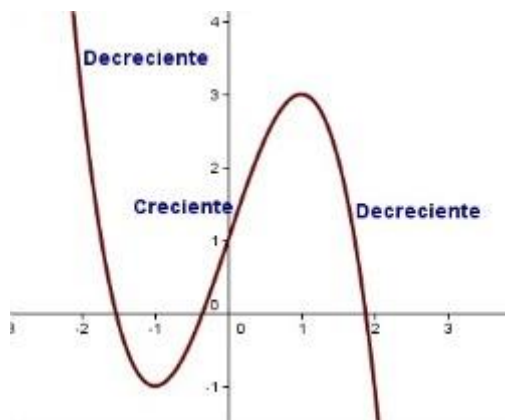
Caracterización del crecimiento o decrecimiento mediante la derivada primera (y')

Si $f'(a) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

Si $f'(a) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.



La situación del dibujo se describe como:

La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$

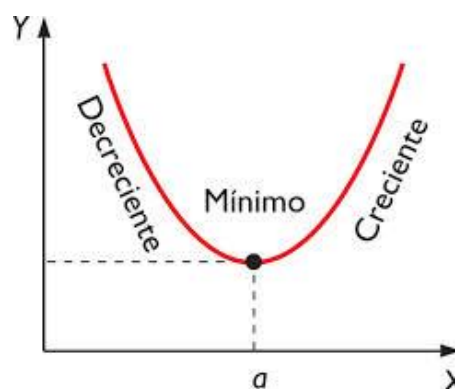
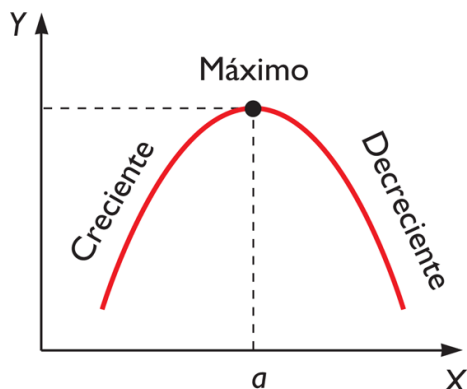
5.2. Máximos y mínimos relativos.

Máximos

- Una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más pequeño que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es creciente ($y' > 0$) y después de este valor la función es decreciente ($y' < 0$).

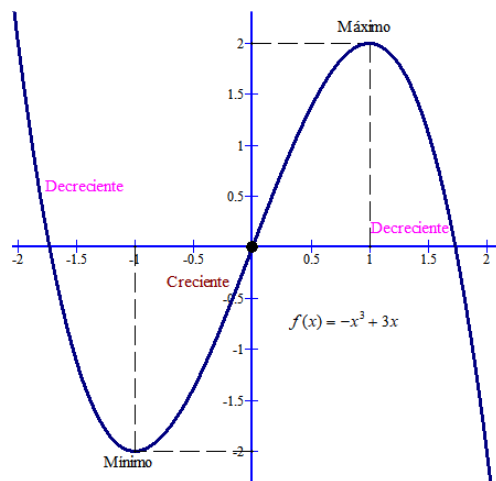
Mínimos

- Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más grande que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es decreciente ($y' < 0$) y después de este valor la función es creciente ($y' > 0$).



Caracterización del máximo o mínimo mediante la derivada primera y segunda

- **Máximo relativo** en $x = a$ si se cumple: $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$.
- **Mínimo relativo** en $x = a$ si se cumple: $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$.



La situación del dibujo se describe como:

La función tiene un **mínimo relativo** en el punto $(-1, -2)$ y un **máximo relativo** en el punto de coordenadas $(1, 2)$.

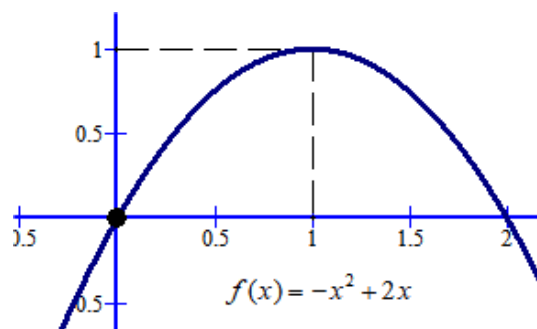


Ejemplo:

La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es creciente a la izquierda del punto $x = 1$, y decreciente a su derecha, pues $f'(x) = -2x + 2$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Por tanto, $f(x) = -x^2 + 2x$ tiene un máximo en $x = 1$.

Es evidente que $f'(1) = 0$.

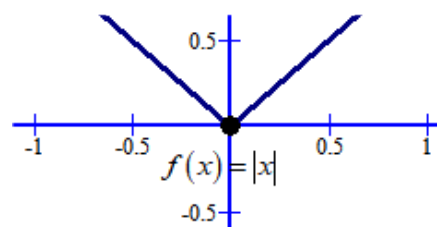
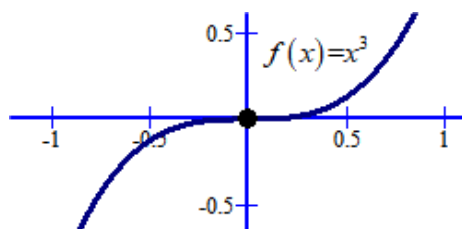


La determinación de los puntos singulares de una función (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también puntos estacionarios o críticos; y los puntos en los que la función no está definida), permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.



Observaciones:

- Puede haber mínimo sin que $f'(x) = 0$. Así, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.
 - Puede suceder que $f'(x) = 0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$. Su derivada, $f'(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:
 - Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
 - Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
- Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un **punto de inflexión**.

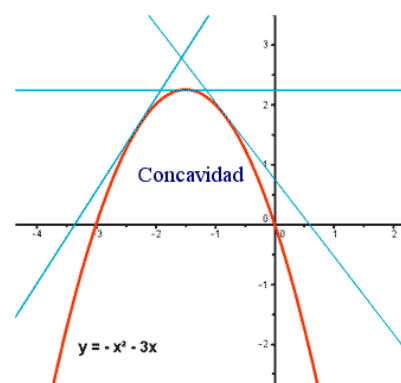


5.3. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad, convexidad, inflexión

La concavidad y la convexidad dependen del punto de vista del que mira. Adoptaremos la decisión de que la concavidad será así: $\cap$; y la convexidad, así: $\cup$. En algunos libros se expresa al revés.

Observa lo que sucede en un intervalo de **concavidad**.

- Las tangentes a la curva están por encima de ella.
- Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez menor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes decrecen. (La pendiente viene dada por la derivada).
- Luego la derivada decrece: $f'(x)$ es decreciente.
- En consecuencia, su derivada (la de $f'(x)$) será negativa: $f''(x) < 0$.

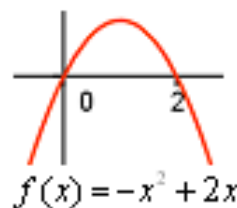


- Los máximos se dan siempre en una concavidad.
- Por tanto, si en $x = a$ hay un máximo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) < 0$.

**Ejemplos:**

- a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es cóncava, pues su derivada segunda es siempre negativa:

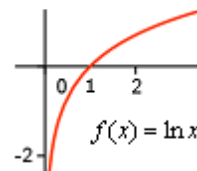
$$f'(x) = -2x + 2 \rightarrow f''(x) = -2 < 0.$$



- b) La función logaritmo, $f(x) = \ln x$ es cóncava en todo su dominio: $\mathbf{R}^+$.

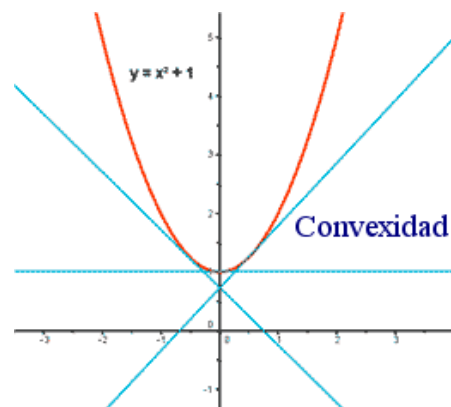
Efectivamente, derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \text{ para todo } x.$$



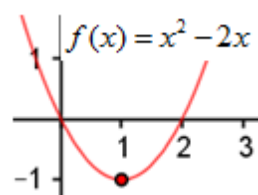
Observa lo que sucede en un intervalo de **convexidad**.

- Las tangentes a la curva están por debajo de ella.
- Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez mayor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes crecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
- Luego la derivada crece: $f'(x)$ es creciente.
- En consecuencia, su derivada será positiva: $f''(x) > 0$.
- Los mínimos se dan siempre en una convexidad.
- Por tanto, si en $x = a$ hay un mínimo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) > 0$.

**Ejemplos:**

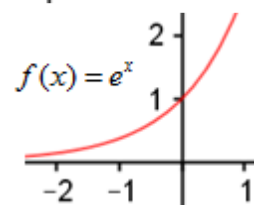
- a) La función $f(x) = x^2 - 2x$ es convexa, pues su derivada segunda es siempre positiva:

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f''(x) = 2 > 0.$$



- b) La función exponencial, $f(x) = e^x$ es convexa siempre, pues su derivada segunda es siempre positiva:

$$f'(x) = e^x \rightarrow f''(x) = e^x > 0 \text{ para todo } x.$$



Para estudiar la concavidad o convexidad en un intervalo:

Si $f''(x) < 0$ en el intervalo (x_1, x_2) la función $f(x)$ es cóncava en ese intervalo.

Si $f''(x) > 0$ en el intervalo (x_1, x_2) la función $f(x)$ es convexa en ese intervalo.

Para estudiar si en $x = a$ hay un **máximo** o un **mínimo**

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ la función $f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$.

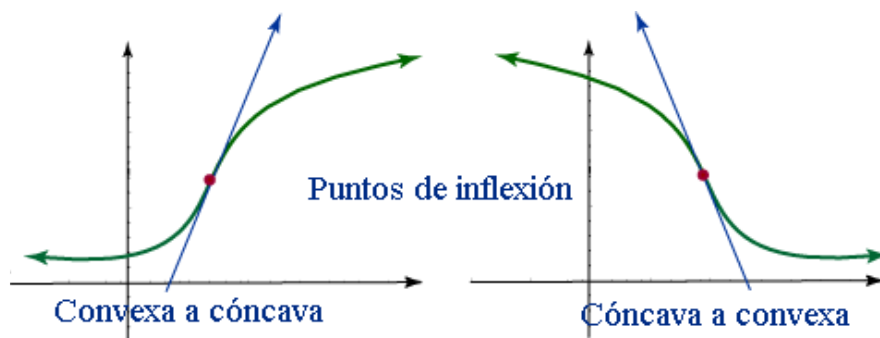
Puede observarse que los máximos se dan en concavidades; y los mínimos, en convexidades.

Puntos de inflexión

Los puntos en los que la curva cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman **puntos de inflexión**; en esos puntos, la tangente corta a la curva.

Se cumple también que:

- Si $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x)$ entonces $f''(a) = 0$.



Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^4 - 2x^2$, vista en un ejemplo anterior, cumple:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Los puntos $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$, son los puntos críticos de la función y candidatos a máximos o mínimos.

Para decidirlo estudiemos la variación de la derivada primera:

- Antes de $x = -1$, por ejemplo $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4(-2)^3 - 4(-2) = -32 + 8 = -24 < 0$.
Decreciente.

- Entre $x = -1$ y $x = 0$, por ejemplo

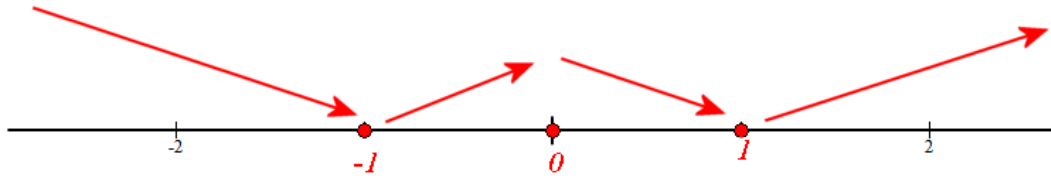
$$x = -0,5 \rightarrow f'(-0,5) = 4(-0,5)^3 - 4(-0,5) = -0,5 + 2 = 1,5 > 0. \text{ Creciente.}$$

- Entre $x = 0$ y $x = 1$, por ejemplo

$$x = 0,5 \rightarrow f'(0,5) = 4(0,5)^3 - 4(0,5) = 0,5 - 2 = -1,5 < 0. \text{ Decreciente.}$$

- Después de $x = 1$ por ejemplo $x = 2 \rightarrow f'(2) = 4(2)^3 - 4(2) = 32 - 8 = 24 > 0$. Creciente.

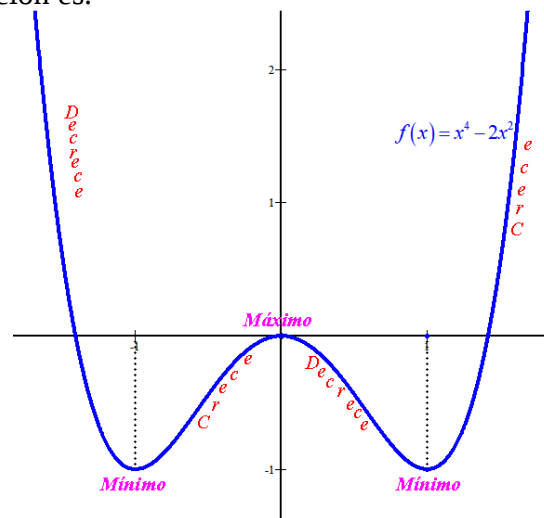
Obteniendo el esquema siguiente, que nos permitirá establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos.



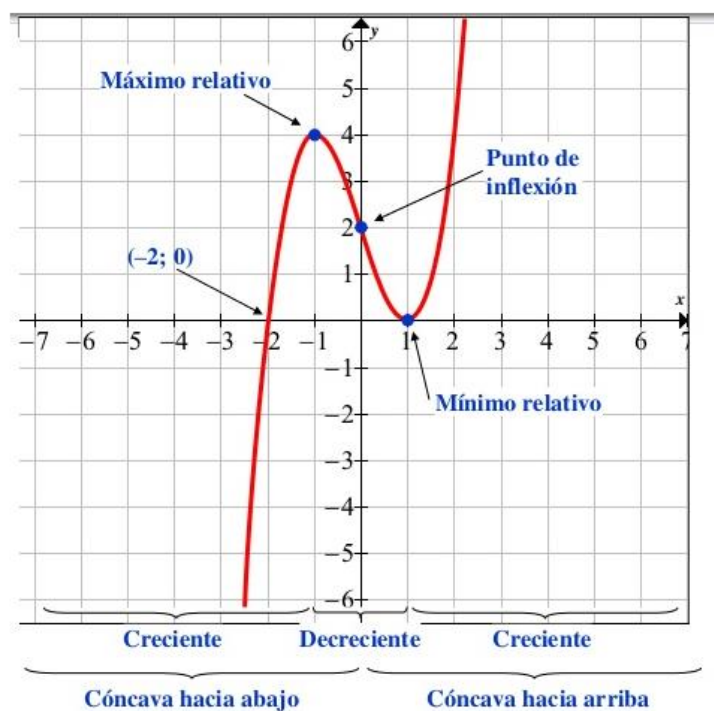
Observando esta evolución de la función, se puede afirmar:

- En los intervalos $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ la función decrece
- En el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ la función crece.
- En $x = -1$ hay un mínimo.
- En $x = 0$ hay un máximo.
- En $x = 1$ hay un mínimo.

La gráfica de esta función es:



b) La función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ se puede estudiar de la misma manera, obteniendo las conclusiones que aparecen indicadas en su gráfica:

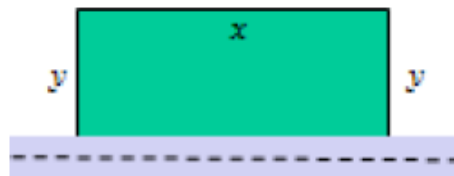


6. Optimización de funciones. Problemas de optimización

La optimización es uno de los problemas económicos más interesantes de resolver. Consiste en determinar el valor que maximiza (beneficios) o minimiza (costes) una función sujeta a determinadas condiciones.

Un problema de optimización clásica es el siguiente:

Se desea construir, al lado de una carretera, una zona de descanso para automovilistas. Tendrá forma rectangular y estará vallada por los tres lados no adyacentes a la carretera. Si su superficie es de 7.200 m^2 , ¿qué dimensiones debe tener para que el coste de la valla sea mínimo?



La situación planteada se representa en la figura adjunta, que en este, como en la mayoría de los casos, es clave para entender el problema.

Planteamiento y resolución de un problema de optimización

Un problema de optimización vendrá dado, generalmente, en términos de enunciado. Se dice que está planteado cuando se sabe exactamente qué función hay que hacer máxima o mínima; quedará resuelto cuando se halle y critique la solución. Para ello, puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

- 1) Saber qué objetivo hay que hacer máximo o mínimo. Esto se deduce de la lectura del enunciado.

En el ejemplo anterior hay que hacer mínimo el coste de la valla. (Este mismo ejemplo nos servirá para ilustrar los demás pasos).

- 2) Expresar en forma de función el objetivo propuesto.

El coste de la valla será mínimo cuando su longitud (L) sea mínima.

Por tanto, la función que hay que hacer mínima es $L = x + 2y$.

Generalmente esta función dependerá de varias variables; aquí, de dos. Hay que determinar cuál de ellas depende de la(s) otra(s) y buscar en el enunciado la relación que liga esas variables; esta relación siempre es una igualdad. Se obtendrá así una función de una sola variable, que puede designarse por $f(x)$ o por cualquier otra letra. Aquí se ha elegido L .

En $L = x + 2y$ aparecen dos variables, x e y , que son las medidas del largo (x) y ancho (y) de la zona de descanso.

¿Qué relación existe entre x e y ? Como se dice que la superficie de la zona es de 7.200 m^2 , y esta superficie vale $S = x \cdot y$, se tendrá que $7200 = x \cdot y$. De donde:

$$y = \frac{7200}{x} \Rightarrow L(x) = x + 2 \frac{7200}{x}.$$

(Aquí termina el planteamiento del problema. Ahora hay que resolverlo)

- 3) Determinar el máximo o mínimo buscado.

Los óptimos se encuentran entre los puntos críticos de la función, que son las soluciones $f'(x) = 0$. Para que sea máximo hay que exigir que $f''(x) < 0$; y para que sea mínimo, que $f''(x) > 0$.

En este caso hay que buscar un punto que cumpla: $L'(x) = 0$ y $L''(x) > 0$.

Como

$$L(x) = x + 2 \frac{7200}{x} = x + \frac{14400}{x} \Rightarrow \left. \begin{aligned} L'(x) &= 1 - \frac{14400}{x^2} \\ L'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{14400}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 14400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 14400 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{14400} = \pm 120$$

La solución $x = -120$ hay que descartarla por no tener sentido una longitud negativa. Calculamos la derivada segunda y la valoramos en $x = 120$.

$$L'(x) = 1 - \frac{14400}{x^2} \Rightarrow L''(x) = 2 \cdot \frac{14400}{x^3} \Rightarrow L''(120) = 2 \cdot \frac{14400}{120^3} > 0.$$

Por tanto, el mínimo pedido se obtiene cuando $x = 120$ metros e $y = 60$ m.



Ejemplos:

1. Descomponer el número 80 en dos sumandos cuyo producto sea máximo.

Solución:

Llamemos a estos números x e y .

- 1) El objetivo es hacer máximo el producto de dichos números.
- 2) La función es $P = x \cdot y$, como la suma de ambos es 80, tenemos:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ P = x \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 80 - x \\ P = x \cdot y \end{cases} \Rightarrow P(x) = x \cdot (80 - x) = 80x - x^2$$

- 3) Para hallar el máximo de la función, calculamos su derivada e igualamos a 0:

$$P'(x) = 80 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40$$

Además, tenemos que: $P''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 40$ es un máximo.

Por lo tanto, **los números son: $x = 40$ y $y = 40$**

2. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,1x^2 + 3x + 100$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x) = 25 - 0,3x$ ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:

- a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
- b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Solución:

- a) El nivel de producción es el número de unidades que hay que producir para alcanzar un determinado fin.
 - 1) El objetivo es determinar el número de unidades que hay que producir para que el coste medio por unidad, $M(x)$, sea mínimo.
 - 2) El coste por unidad se halla dividiendo el coste total, $C(x)$, entre las unidades producidas.

$$x: M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,1x^2 + 3x + 100}{x} = 0,1x + 3 + \frac{100}{x}.$$

3) Para que $M(x)$ sea mínimo, su derivada debe ser 0:

$$M'(x) = 0,1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{0,1x^2 - 100}{x^2} = 0 \Rightarrow 0,1x^2 - 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1x^2 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{100}{0,1}} = \sqrt{1000}$$

$$\text{Como } M''(x) = \frac{200}{x^3} \Rightarrow M''(\sqrt{1000}) = \frac{200}{(\sqrt{1000})^3} > 0$$

Luego, el mínimo se da cuando $x = \sqrt{1000}$ aproximadamente 31,6 unidades.

Esta respuesta no es adecuada ya que las unidades deben ser 31 o 32, al tratarse de un caso real. Valoramos $M(31)=9,3258$ y $M(32)=9,325$, debe elegirse $x = 32$ unidades como solución óptima del problema.

El precio unitario mínimo será $M(32)=9,325$ u.m.

b) El objetivo es maximizar los beneficios obtenidos por la fabricación y venta de x unidades de producto.

Estos beneficios, $B(x)$, se hallan restando los costes a los ingresos:

$$B(x) = \text{Ingresos totales} - \text{Costes totales.}$$

Los ingresos, $I(x)$, se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio por unidad. Por tanto,

$$I(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (25 - 0,3x) = 25x - 0,3x^2.$$

De donde,

$$B(x) = I(x) - C(x) = (25x - 0,3x^2) - (0,1x^2 + 3x + 100)$$

$$B(x) = -0,4x^2 + 22x - 100$$

Para que $B(x)$ sea máximo, $B'(x) = 0$:

$$B'(x) = -0,8x + 22 = 0$$

$$x = \frac{22}{0,8} = 27,5$$

Como $B''(x) = -0,8 < 0$, el punto hallado da el máximo beneficio, que asciende a

$$B(27,5) = 202,5 \text{ u.m.}$$

Como en el apartado a), la respuesta debe ser $x = 27$ o $x = 28$. En este caso es indiferente, pues $B(27) = B(28) = 202,4$.



Ejercicios:

Tangente a una curva

- Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:
 - $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto $x = 3$.
 - $y = \frac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
 - $f(x) = e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$.
- La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes en el punto $x = \frac{2}{3}$. ¿Cuál debe ser el valor de b ?
- Determina los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 9x + 5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

Cálculo de derivadas

- Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(1)$, si existe.
 - $f(x) = (1+2x)(x-x^2)^3$
 - $f(x) = \ln \sqrt{2x^2 - 2x}$
- Dada $f(x) = \frac{2x}{(x^2-3)^3}$, halla los valores de $f'(1)$ y $f''(1)$.
- Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.
- Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x = -\frac{1}{2}$.
- Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:
 - $f(x) = -2xe^{x^2}$
 - $f(x) = (1-x^2)e^x$
 - $f(x) = \ln(2x^2+2)$
- Deriva, simplificando el resultado: $f(x) = \frac{x^2-x}{(2x-1)^2}$
- Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula $f'(-1)$, si existe.
 - $f(x) = \frac{2x^3-3x}{x^2-1}$
 - $f(x) = x^2 e^{2x-2}$

Crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión

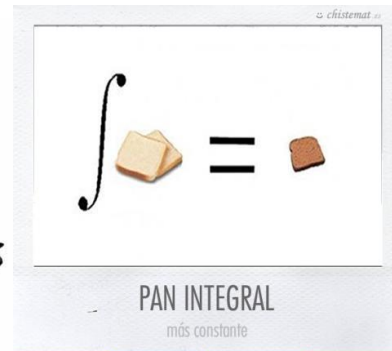
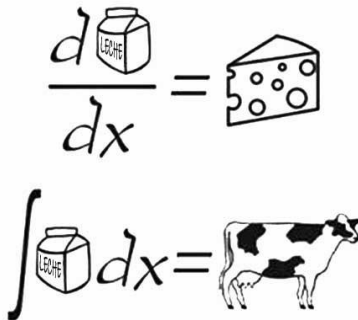
- Dada la función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$, determina:
 - Los puntos de corte con el eje OX.
 - Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - Sus máximos y mínimos.

- d. Sus puntos de inflexión.
12. Dada la función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
13. Calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{4}{x}$ pase por el punto $(-1, -3)$ y admita en ese punto una tangente horizontal.
14. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $(1/2, 4)$.
b) Para esos valores de a y b estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus máximos y mínimos.

Solución:

1. a) $y = -2x + 9$ b) $y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ c) $y = -x + 3$ 2. $b = -\frac{7}{3}$
3. $(-1, -2)$ y $(3, 2)$, $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$
4. a) $f'(x) = (3 + 2x - 14x^2)(x - x^2)^2$; -52 b) $f'(x) = \frac{2x-1}{2x^2-2x}$; $-\frac{3}{4}$
5. $f'(x) = \frac{-10x^2-6}{(x^2-3)^4}$; $f''(x) = \frac{60x^3+108x}{(x^2-3)^5}$; -1 ; $-\frac{21}{4}$
6. $x = \pm \frac{1}{2}$; $x = 0$; $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\frac{40}{27}$; $\frac{16}{3}$
8. a) $f'(x) = -2e^x(1+2x^2)$; -2 b) $f'(x) = (x^2-1)e^x$; -1 c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; 0
9. $f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$
10. a) $f'(x) = \frac{2x^4-3x^2+3}{(x^2-1)^2}$; No existe b) $f'(x) = 2x(1+x)e^{2x-2}$; 0
11. a) $x = -3$; $x = 2$ b) crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 2)$
c) max. $x = -2$. Min $x = 2$ d) $x = -1$
12. Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo en $x = 0$.
13. $a = 4$ y $b = 5$.
14. $a = 4$; $b = 5$ 27. a) $a = 4$; $b = 1$ b) Crece en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$ y decrece en $(-1/2, 1/2)$. Máximo $(-1/2, -4)$; mínimo $(1/2, 4)$

Tema 7. Integrales



1. Concepto de integral indefinida

La derivada de una función permite conocer la tasa de variación (el cambio instantáneo) de un determinado fenómeno a partir de su función. Con la integración, el proceso es inverso: se trata de conocer la función inicial a partir de su derivada: partiendo del estudio de la variación de un fenómeno, llegar a conocer la función que lo explica.

1.1. Primitiva de una función

Si se conoce una función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x)$ aplicando las fórmulas.

El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama integración.



A la función $F(x)$ se le llama primitiva de la función $f(x)$. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$



- a) Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces: una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.



Observación:

Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando:
 $F'(x) = (x^2 + 3x + 14)' = 2x + 3$.

Todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + K$, donde K es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$.

- b) Si $F(x) = \ln(3x + 1)$, su derivada es $F'(x) = \frac{3}{3x + 1}$; en consecuencia, una primitiva de

$$f(x) = \frac{3}{3x + 1} \text{ será } F(x) = \ln(3x + 1).$$

→ **Todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x + 1) + K$ son primitivas de $f(x) = \frac{3}{3x + 1}$.**

- c) Para hallar una primitiva de $f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 17}}$ hay que saber la fórmula de la “derivada de la

raíz”; esto es, que si $y = \sqrt{x^3 + 17} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 17}}$. En consecuencia, una primitiva de

$$f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 17}} \text{ será } F(x) = \sqrt{x^3 + 17}.$$



Observación:

A lo largo de este tema se estudiarán los métodos básicos de integración, pero se deben conocer con soltura (y de memoria) las fórmulas de derivación.

1.2. Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x) + K$, donde K es un número que se llama constante de integración.

Se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x) + K, \text{ (} dx \text{ indica la variable de integración; de derivación).}$$

En consecuencia, la derivada y la integral son “operaciones” inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{y} \quad \int f'(x)dx = f(x).$$

**Ejemplos:**

a) $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + K$. Puede comprobarse que $(x^2 + 3x + K)' = 2x + 3$.

b) $\int \frac{3}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + K$. Puede comprobarse que $(\ln(3x+1) + K)' = \frac{3}{3x+1}$.

c) $\int 4x^3 dx = x^4 + K$. Puede comprobarse que $(x^4 + K)' = 4x^3$.

d) Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x) = 4x^3$ que cumple $F(1) = 0$.

Una primitiva está calculada en el ejemplo anterior y es $F(x) = x^4 + K$, calculemos K para que $F(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + K = 0 \Rightarrow K = -1$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x) = x^4 - 1}$

1.3. Propiedades de la integral indefinida

La integral de un **número por una función** es igual al número por la integral de la función:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

Esto implica que los números que multiplican a una función pueden *entrar y salir* del integrando, según convenga.

Esta propiedad facilita el cálculo de integrales mediante el sencillo procedimiento de ajustar constantes.

**Ejemplos:**

a) Para hallar $\int 8x^3 dx$ puede realizarse el procedimiento siguiente:

$$\int 8x^3 dx = \int 2 \cdot 4x^3 dx = 2 \int 4x^3 dx = 2(x^4 + K) = \boxed{2x^4 + K}$$

b) Para hallar $\int 7x^3 dx$ puede realizarse el procedimiento siguiente:

$$\int 7x^3 dx = 7 \int x^3 dx = 7 \int \frac{1}{4} \cdot 4x^3 dx = 7 \cdot \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{7}{4} \int 4x^3 dx = \frac{7}{4}(x^4 + K) = \boxed{\frac{7}{4}x^4 + K}$$

La integral de **una suma de funciones** es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**Ejemplos:**

a) $\int (2x+3)dx = \int 2x dx + \int 3 dx = \boxed{x^2 + 3x + K}$

b) $\int (e^x + 1)dx = \int e^x dx + \int 1 dx = \boxed{e^x + x + K}$

2. Relación de integrales inmediatas

Las integrales de las funciones usuales, que conviene saber de memoria, son las siguientes.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
$\int C dx = Cx + K$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$; siendo $n \neq -1$	
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + K$	
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$	$\int x^{-1} dx = \ln x + K$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + K$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	
$\int e^x dx = e^x + K$	



Ejemplos:

- a) $\int dx = x + K$
- b) $\int -\frac{1}{2} dx = -\frac{1}{2}x + K$
- c) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$
- d) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + K$
- e) $\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln x + K$
- f) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + K$

3. Técnicas y métodos de integración

Cuando el cálculo de una integral no sea inmediato, cuando el integrando no coincida con alguna de las fórmulas anteriores, se recurrirá a algún método de integración.

Estos métodos son procedimientos que permiten escribir el integrando inicial en otro equivalente cuya integral sea más sencilla de calcular.

3.1. Descomposición elemental

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas...

Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral.



Ejemplos:

a)

$$\int (6x^2 + 5x - 1) dx = \{\text{Se descompone en suma de integrales}\} =$$

$$= 6 \int x^2 dx + 5 \int x dx - \int dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - x = \boxed{2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + K}$$

b)

$$\int (x^2 - 3)^2 dx = \{\text{Se realiza la operación indicada en el integrando}\} =$$

$$= \int (x^4 + 9 - 6x^2) dx = \int x^4 dx + \int 9 dx - 6 \int x^2 dx = \frac{x^5}{5} + 9x - 6 \frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + K}$$

c)

$$\int \frac{4}{5-6x} dx = \{\text{Se ajustan las constantes en busca de la integral del logaritmo}\} =$$

$$= 4 \cdot \frac{-1}{6} \int \frac{-6}{5-6x} dx = \boxed{\frac{-2}{3} \ln(5-6x) + K}$$

d)

$$\int \frac{5x^2 + 4x - 3}{x^2} dx = \{\text{Se hace la división indicada en el integrando}\} =$$

$$= \int \left(\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{4\cancel{x}}{x^2} - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int 5 dx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= 5x + 4 \ln x - 3 \int x^{-2} dx = 5x + 4 \ln x - 3 \frac{x^{-1}}{-1} = \boxed{5x + 4 \ln x + \frac{3}{x} + K}$$

e)

$$\int \frac{4}{1+x^2} dx = \{\text{Se ajustan las constantes en busca de la integral del arco tangente}\} =$$

$$= 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \boxed{4 \arctg x + K}$$

f)

$$\int \frac{4+x}{1+x^2} dx = \{\text{Se separa en busca de la integral del arco tangente y logaritmo}\} =$$

$$= \int \frac{4}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \boxed{4 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K}$$

**Observación:**

Para aplicar este método es necesario conocer muy bien las fórmulas de integrales inmediatas. (Además hay que tener “suerte” y paciencia, pues no siempre que se hace una transformación da el resultado apetecible. Con frecuencia hay que volver a intentarlo o recurrir a otro método).

También es imprescindible operar con soltura.

g)

$$\int \frac{4+x-2x^3}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{El polinomio del numerador es de mayor grado que el denominador,} \\ \text{y se realiza la división de polinomios} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -2x^3 + x + 4 \quad \begin{array}{|l} x^2 \quad +1 \\ +2x^2 + 2x \quad -2x \\ \hline +3x + 4 \end{array} \end{array} \right\} = \int -2x + \frac{3x+4}{1+x^2} dx = \int -2x dx + \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx =$$

$$= -2 \int x dx + \int \frac{3x}{1+x^2} dx + \int \frac{4}{1+x^2} dx = -2 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \boxed{-x^2 + \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + 4 \operatorname{arctg} x + K}$$

3.2. Integración por cambio de variable

Consiste en hacer un cambio de variable ($x = g(t)$ o $t = h(x)$, según convenga) de manera que la integral inicial resulte más fácil de calcular.

El proceso es el siguiente.

Si se desea hallar la integral $\int f(x) dx$, si se hace $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt$.

Con esto, puede escribirse: $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$.

Una vez resuelta la integral en la variable t hay que deshacer el cambio inicial, pues la solución debe darse en función de x .

**Ejemplos:**

- a) Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse un cambio de variable para que sea más fácil la integral resultante, para ello se puede valorar que la base es más sencilla si la cambiamos por t y así no tenemos que hacer ajustes de constantes.

$t = 2x - 3 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ Sustituyendo en la integral inicial quedaría:

$$\int (2x-3)^5 dx = \int t^5 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{2} \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{12}$$

Deshaciendo el cambio de variable (volviendo a x)

$$\int (2x-3)^5 dx = \frac{t^6}{12} = \boxed{\frac{(2x-3)^6}{12} + K}$$

b)

$$\int e^{4x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 4x \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \int e^t \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int e^t dt = \frac{1}{4} e^t =$$

$$= \{ \text{Deshaciendo el cambio de } t \text{ a } 4x \} = \boxed{\frac{1}{4} e^{4x} + K}$$

$$\text{c) } \int \frac{4}{5-6x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 5-6x \Rightarrow dt = -6dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{6} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{4}{t} \frac{-1}{6} dt = \frac{-4}{6} \int \frac{1}{t} dt = \frac{-2}{3} \ln t = \{ \text{Deshago el cambio } t \text{ a } (5-6x) \} = \boxed{\frac{-2}{3} \ln(5-6x) + K}$$

$$\text{d) } \int x\sqrt{1+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{1+x} = t \Rightarrow 1+x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int x \cdot t \cdot 2t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como debo quitar esa } x \\ \text{despejo la } x \text{ del cambio de variable} \\ \text{y la sustituyo por } x = t^2 - 1 \end{array} \right\} = \int (t^2 - 1) t \cdot 2t dt = \int 2t^4 - 2t^2 dt =$$

$$= 2 \int t^4 dt - 2 \int t^2 dt = 2 \frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} = \boxed{\frac{2}{5} \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} + K}$$

- e) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ = Puede hacerse con un cambio de variable, todo el denominador lo llamamos t .

$$1 + e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x}$$

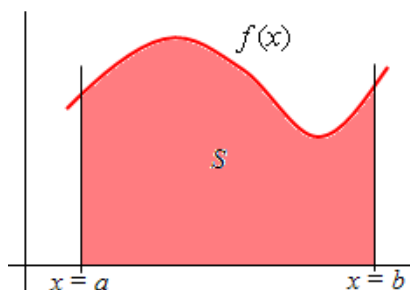
$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{\cancel{e^x}}{t} \frac{dt}{\cancel{e^x}} = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$$

Deshaciendo el cambio de variable t por $1+e^x$:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln t = \boxed{\ln(1+e^x) + K}$$

4. Integral definida: área bajo una curva

La integral definida permite calcular el área del recinto limitado, en su **parte superior** por la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa, en su **parte inferior** por el eje OX , y en los **laterales** por las rectas $x=a$ y $x=b$. Esto es, el área S del recinto coloreado en la figura adjunta.



Al valor de esta área se le llama “**integral definida de $f(x)$ entre a y b** ” y se escribe: $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \text{integrando} \\ \text{límites de integración} \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \text{límite superior} \\ a = \text{límite inferior} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

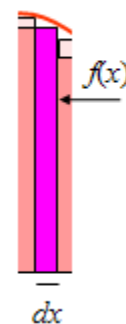


Observación:

El signo $\int$ es en realidad una ese (S de suma) estirada. Los números a y b son los límites (en el sentido de bordes) de integración. La función $f(x)$ se llama integrando. Así pues, $\int_a^b f(x)dx$ indica que hay que integrar (sumar) $f(x)$ desde el punto a hasta el punto b .

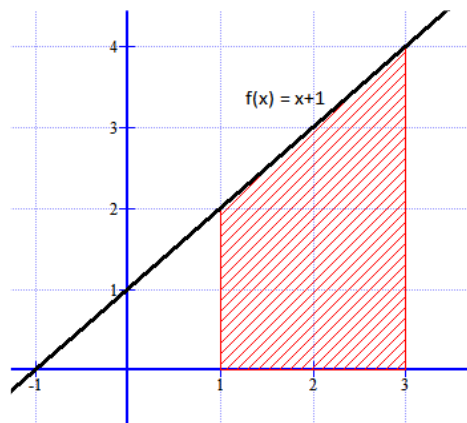
El símbolo dx se lee diferencial de x , siendo x la variable independiente de la función f . La expresión $f(x) \cdot dx$ puede considerarse el área del rectángulo señalado a la derecha, cuya base es dx y su altura, $f(x)$; ambas variables, con dx pequeña.

$\int_a^b f(x)dx$ es la suma del área de esos rectángulos desde a hasta b .



Ejemplos:

- a) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x+1$ entre $x=1$ y $x=3$:
Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



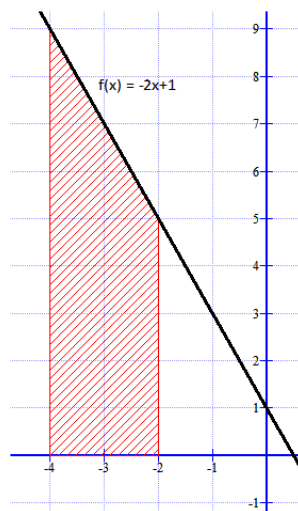
El área pedida será:

$$\text{Área} = \int_1^3 x + 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 5 \text{ cuadraditos} + 2 \text{ medios cuadraditos} \end{array} \right\} = 6 \text{ u}^2$$

O bien con métodos geométricos:

Área de la zona sombreada = Área del cuadrado de lado 2 + el área del triángulo de base y altura 2 = $2^2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4 + 2 = 6 \text{ u}^2$.

- b) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -2x + 1$ entre $x = -4$ y $x = -2$:
Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



El área pedida será:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{-2} -2x + 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 12 \text{ cuadraditos} + \\ + 4 \text{ trozos que parecen ser 2 cuadraditos} \end{array} \right\} = 14 \text{ u}^2$$

O bien con métodos geométricos:

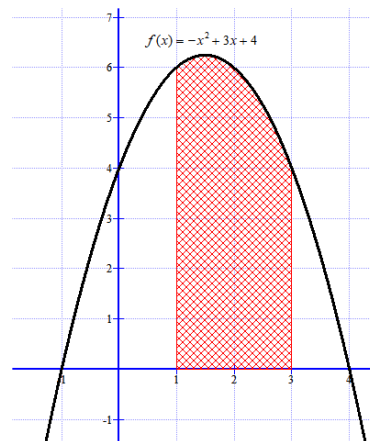
Área de la zona sombreada =

= Área del rectángulo de base 2 y altura 5 + el área del triángulo de base 2 y altura 4 =

$$= 2 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 4}{2} = 10 + 4 = 14 \text{ u}^2$$

- c) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ entre $x = 1$ y $x = 3$:

Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



El área pedida será:

$$\text{Área} = \int_1^3 -x^2 + 3x + 4 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 10 \text{ cuadraditos} + \\ + 3 \text{ trozos que parecen ser 1 cuadradito} \end{array} \right\} = 11' \dots \text{ u}^2$$



Observación:

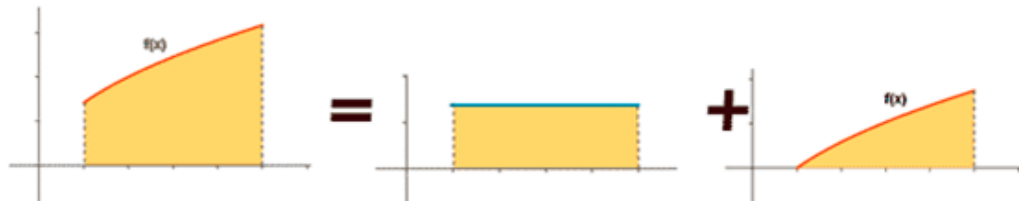
Para hallar el **área** bajo una curva el método del conteo no ha sido muy preciso. Con métodos geométricos ya no es posible el cálculo del área bajo una curva. Necesitamos otro método, aquí es donde aparece el **cálculo integral** y las integrales definidas.

4.1. Propiedades de las integrales definidas

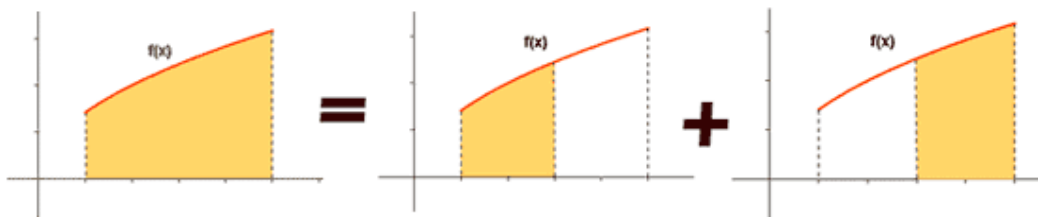
- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$ Si los límites de integración coinciden, la integral definida vale 0.
- 2) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.
- 3) $\int_a^b k dx = k(b-a)$. Siendo K un número real cualquiera.

4) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. Siendo K un número real cualquiera. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

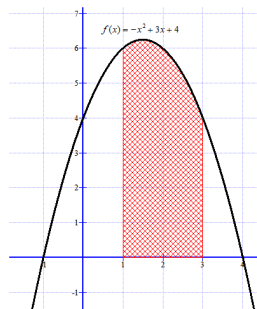
5) $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales.



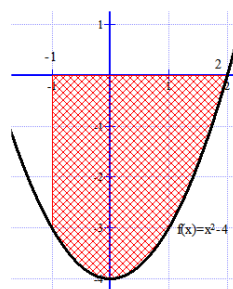
6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Siendo c un punto interior del intervalo [a, b], la integral definida se descompone como suma de dos integrales correspondientes a los intervalos [a, c] y [c, b].



7) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$



8) Si $f(x) \leq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$



4.2. Regla de Barrow

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es $\int f(x)dx = F(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



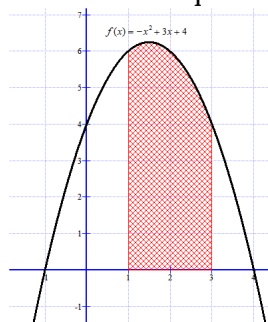
Ejemplos:

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = \boxed{2}$

b) $\int_0^1 2 - e^x dx = [2x - e^x]_0^1 = (2 \cdot 1 - e^1) - (2 \cdot 0 - e^0) = 2 - e + 1 = \boxed{3 - e}$

c) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ entre $x = 1$ y $x = 3$:

Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:

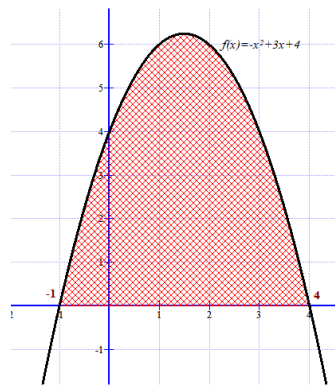


El área pedida será:

$$\begin{aligned} \int_1^3 -x^2 + 3x + 4 dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{-54 + 81 + 72}{6} - \frac{-2 + 9 + 24}{6} = \frac{68}{6} = \frac{34}{3} = 11,333... u^2 \end{aligned}$$

d) Vamos a calcular el área encerrada entre la gráfica anterior y el eje de OX . En estos casos no se dan los extremos a y b del intervalo, sino que hay que determinarlos. Para ello, basta con resolver la ecuación $f(x) = 0$, pues a y b son los puntos de corte de la gráfica con el eje OX .

Así, si se desea calcular la superficie encerrada entre la curva $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y el eje OX , los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $0 = -x^2 + 3x + 4$. (En la figura anterior se observa que esos puntos son -1 y 4).



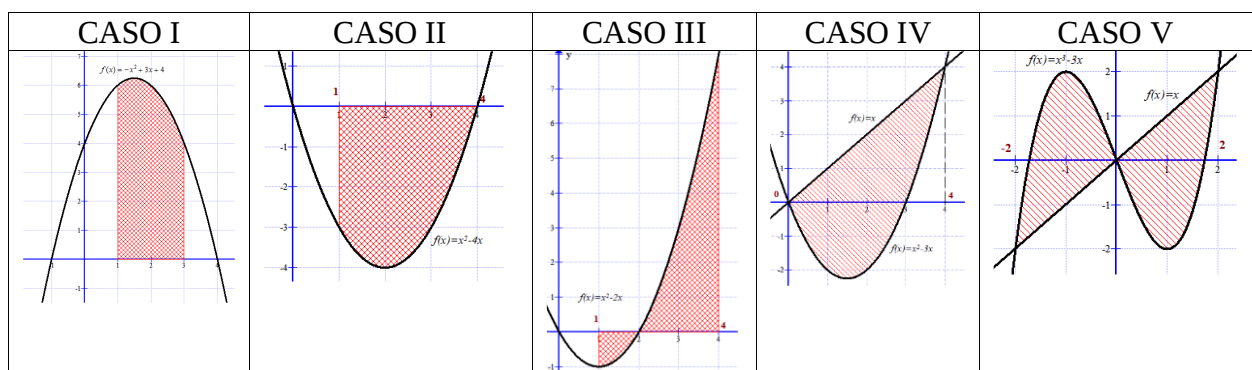
El valor del área es:

$$\int_{-1}^4 -x^2 + 3x + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + 3\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) =$$

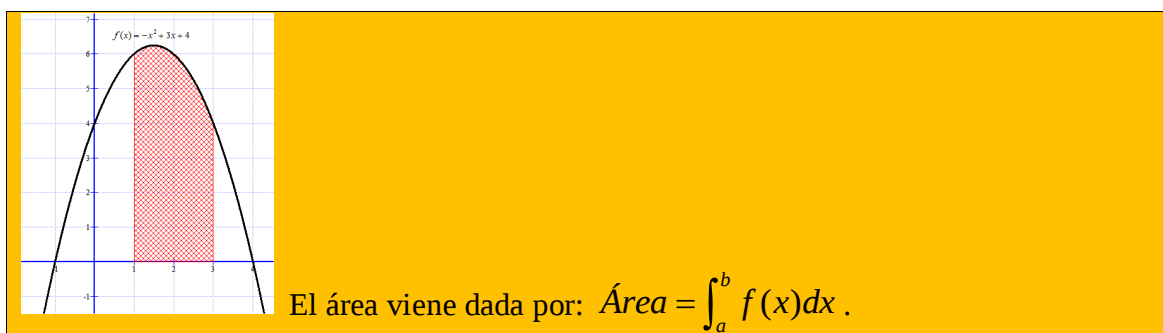
$$= \frac{-128 + 144 + 96}{6} - \frac{2 + 9 - 24}{6} = \frac{125}{6} = \boxed{20,83... u^2}$$

4.3. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos

Pueden presentarse los siguientes casos:

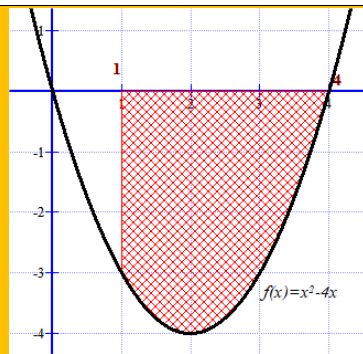


Caso I. La función es positiva en todo el intervalo de integración.



Ejemplo:

Este ejemplo ha sido resuelto anteriormente: $\text{Área} = \int_1^3 -x^2 + 3x + 4 dx = \boxed{\frac{34}{3} u^2}$.

Caso II. La función es negativa en todo el intervalo de integración.

El área viene dada por: $\text{Área} = -\int_a^b f(x)dx$

o bien $\text{Área} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

**Observación:**

- 1) Es evidente que el recinto por debajo del eje, limitado por $f(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual al recinto superior, limitado por $-f(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$.
- 2) Es evidente que el área de un recinto plano no puede tener valor negativo.

**Ejemplo:**

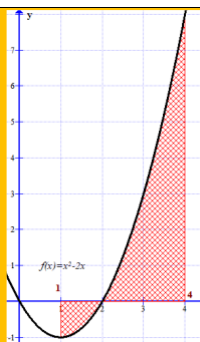
El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 4x$ y el eje OX viene dada por:

$$\int_1^4 x^2 - 4x dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 \right) = \frac{-64}{3} - 32 + \frac{1}{3} + 2 = -\frac{153}{3}$$

$$\text{Área} = -\int_1^4 x^2 - 4x dx = \boxed{\frac{153}{3} u^2}$$

Caso III. La función cambia de signo en el intervalo de integración (corta al eje OX).

El punto c , de corte, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$



El área viene dada por: $\text{Área} = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^b f(x)dx \right|$

**Ejemplos:**

- a) El área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX , en el intervalo $[1, 4]$, que aparece en la imagen superior, se obtiene realizando los siguientes pasos.

Averigüemos el punto o puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX :

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}; \text{ El único valor que está en el intervalo } [1, 4] \text{ es } x = 2.$$

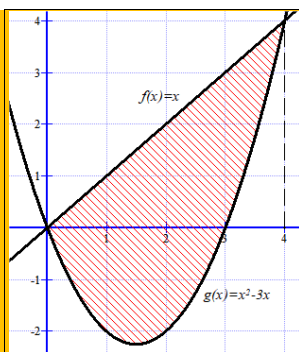
Calculemos las dos integrales definidas (de 1 a 2 y de 2 a 4) y sumando sus valores absolutos obtendremos el valor final del área.

$$\int_1^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 \right) = \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_2^4 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = \frac{20}{3}$$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 x^2 - 2x dx \right| + \left| \int_2^4 x^2 - 2x dx \right| = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \boxed{\frac{22}{3} u^2}$$

Caso IV. Si el recinto viene limitado por dos curvas, con $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo de integración.



El área encerrada entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$, siendo $f(x) \geq g(x)$; $x = a$ y $x = b$ sus puntos de corte, viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

**Ejemplos:**

- a) El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 3x$, que aparece en la imagen superior, tiene un paso previo que es comprobar si se cortan sus gráficas y averiguar cuál es mayor.

$$x = x^2 - 3x \Rightarrow 0 = x^2 - 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Y con un valor de x comprendido entre 0 y 4 (por ejemplo $x=2$) vemos cual es mayor:

$$f(2) = 2 \text{ y } g(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \Rightarrow f(x) \geq g(x) \text{ en el intervalo } [0, 4]$$

El área se obtendrá con la expresión:

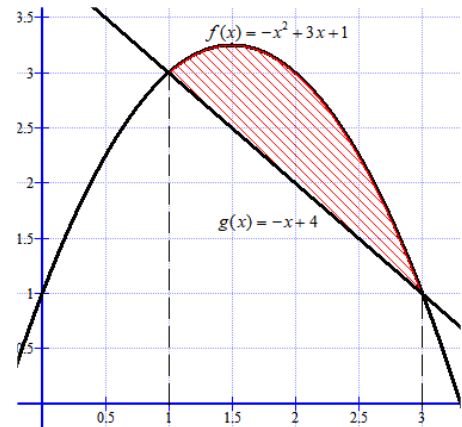
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 f(x) - g(x) dx = \int_0^4 x - (x^2 - 3x) dx = \int_0^4 -x^2 + 4x dx = \\ &= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{-4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right) = \boxed{\frac{32}{3} u^2} \end{aligned}$$

b) El cálculo del área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x + 4$ tiene un paso previo que es comprobar si se cortan sus gráficas y averiguar cuál de ellas es mayor.

$$-x^2 + 3x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Y con un valor de x comprendido entre 1 y 3 (por ejemplo $x = 2$) vemos cual es mayor:

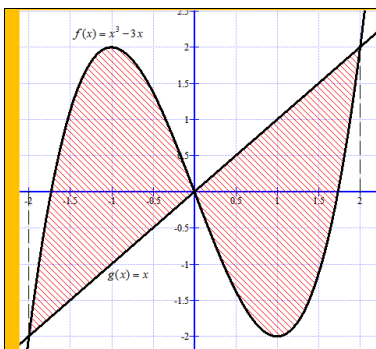
$$\begin{aligned} f(2) &= -4 + 6 + 1 = 3 \text{ y } g(2) = -2 + 4 = 2 \\ \Rightarrow f(x) &\geq g(x) \text{ en el intervalo } [0, 3] \end{aligned}$$



El área se obtendrá con la expresión:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 f(x) - g(x) dx = \int_1^3 -x^2 + 3x + 1 - (-x + 4) dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx = \\ &= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \left(\frac{-3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{-1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) = \boxed{\frac{4}{3} u^2} \end{aligned}$$

Caso V. Si el recinto viene limitado por dos curvas que se cortan en el intervalo de integración.



El área encerrada entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$, siendo $x = a$, $x = c$ y $x = b$ sus puntos de corte, viene dada por:

$$\text{Área} = \left| \int_a^c f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) - g(x) dx \right|$$



Ejemplos:

- a) El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2$, que es el sombreado de la imagen inferior, viene dada por:

Primero averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas, resolviendo la ecuación

$$x^2 - 3x = x^3 - 3x^2$$

$$0 = x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$0 = x(x^2 - 4x + 3)$$

$$x = 0; x = 1; x = 3$$

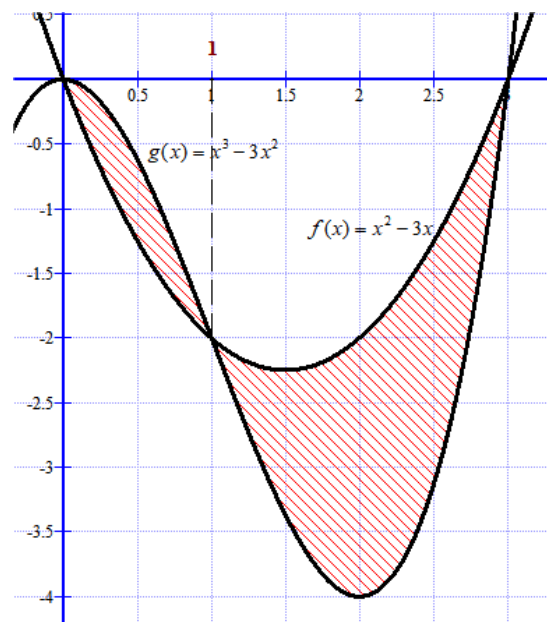
$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_1^3 x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) dx \right| =$$

$$\text{Como } x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$\int x^3 - 4x^2 + 3x dx =$$

$$= \int x^3 - 4x^2 + 3x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$



El área quedaría:

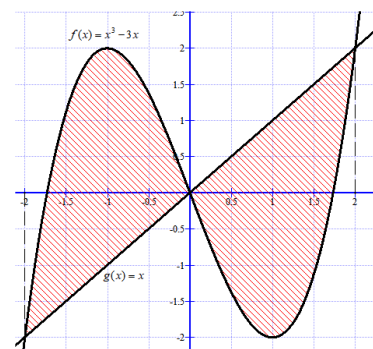
$$\text{Área} = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - 0 \right) \right| + \left| \left(\left(\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \right) \right| = \left| \frac{5}{12} \right| + \left| \frac{-32}{12} \right| = \boxed{\frac{37}{12} u^2}$$

- b) El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$, que es el sombreado de la imagen, viene dada por:

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 x^3 - 3x - (x) dx + \int_0^2 x - (x^3 - 3x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = (0 + 4) + (4 - 0) = \boxed{8 u^2}$$





Ejercicios:

Integrales indefinidas

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx & \text{b) } \int x(4 - 4x^2) dx & \text{c) } \int \frac{e^{-2x}}{5} dx \\ \text{d) } \int \frac{5x}{3 + 3x^2} dx & \text{e) } \int (1 - x)^3 dx & \text{f) } \int 2xe^{3x^2} dx \\ \text{g) } \int (2 - 3x)^2 dx & \text{h) } \int 5x(1 - 2x^2)^2 dx & \text{i) } \int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx \end{array}$$

2. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int 5x(1 - 2x)^2 dx \quad \text{b) } \int (3x^2 - 2x)^2 dx \quad \text{c) } \int \frac{x}{1 + 3x^2} dx$$

3. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int e^{4x} dx & \text{b) } \int e^{x/3} dx & \text{c) } \int xe^{1-x^2} dx \\ \text{d) } \int 4^x dx & \text{e) } \int 4 \cdot 3^x dx & \text{f) } \int (e^{2x} + e^{-x}) dx \end{array}$$

4. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx \quad \text{b) } \int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x} dx$$

5. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

6. Calcula la siguiente integral $\int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx$

7. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{2}{(1 + x)^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{2x}{(1 + x)^2} dx$$

Integrales definidas y áreas

8. Halla el valor de:

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (x^2 + 2) dx \quad \text{b) } \int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}} dx \quad \text{c) } \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx \quad \text{d) } \int_0^1 xe^{-3x^2+1} dx$$

9. Calcula el área de la región limitada por $y = \frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

10. Calcula el área determinada por las curvas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$, representadas en el dibujo adjunto.

Soluciones:

$$1. \text{ a) } x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{3/2} + K \quad \text{ b) } 2x^2 - x^4 + K \quad \text{ c) } -\frac{1}{10}e^{-2x} + K \quad \text{ d) } \frac{5}{6}\ln(3+3x^2) + K$$

$$\text{ e) } -\frac{1}{4}(1-x)^4 \quad \text{ f) } \frac{1}{3}e^{3x^2} + K \quad \text{ g) } 4x - 6x^2 + 3x^3 + K \quad \text{ h) } -\frac{5}{12}(1-2x^2)^3 + K \quad \text{ i) }$$

$$\frac{1}{3}\ln(x^3+2) + K$$

$$2. \text{ a) } \frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 5x^4 + K \quad \text{ b) } \frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + K \quad \text{ c) } \frac{1}{6}\ln(1+3x^2) + K$$

$$3. \text{ a) } \frac{1}{4}e^{4x} + K \quad \text{ b) } 3e^{x/3} + K \quad \text{ c) } -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + K \quad \text{ d) } 4^x \cdot \frac{1}{\ln 4} + K \quad \text{ e) } \frac{4}{\ln 3} \cdot 3^x + K \quad \text{ f) } \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x}$$

$$4. \text{ a) } -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3\ln x + K \quad \text{ b) } x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5\ln x + K$$

$$5. 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + K$$

$$6. \frac{-1}{1+e^x} + K$$

$$7. \text{ a) } \frac{-2}{1+x} + K \quad \text{ b) } 2\ln(1+x) + \frac{2}{1+x} + K$$

$$8. \text{ a) } 65/3 \quad \text{ b) } 8 \quad \text{ c) } 7/3 \quad \text{ d) } -\frac{1}{6}(e^{-2} - e)$$

$$9. 3/2$$

$$10. 128/15 u^2$$

Ejercicios de Análisis en pruebas PAU y EBAU de Murcia

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de análisis que han aparecido en las pruebas EBAU o PAU de los últimos años en Murcia. Si se desea ver la resolución detallada de los ejercicios ir al archivo correspondiente a la PAU o EBAU de ese año en la web www.ebaumatematicas.com.

Extraordinaria 2026

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Dada la función:

$$f(x) = x^3 \cdot (x-5)^2$$

Se pide:

- Determinar el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
- Calcule la función derivada $f'(x)$ y determine los puntos críticos. **[0,75 puntos]**
- Estudie la monotonía de $f(x)$, indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 p]**
- Determine el valor o valores de x donde la función tiene un extremo relativo. Calcule el valor de la función en dichos puntos. **[0,5 puntos]**
- Calcule $\int f(x) dx$. **[0,5 puntos]**

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}$. b) Los tres puntos críticos son: $x=0$, $x=3$ y $x=5$. c) La función crece en $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(3, 5)$. d) Tiene un máximo relativo en $x=3$ y un mínimo relativo en $x=5$. El máximo relativo de la función es $f(3)=108$ y el mínimo relativo es $f(5)=0$.

Ordinaria 2026

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Wiam podrá acceder a una importante cantidad de dinero si consigue desbloquear una caja fuerte con un PIN de cinco dígitos, resolviendo un reto de análisis matemático. Para ello, y dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x-1}$$

tiene que:

- Calcular el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
 - Estudiar la existencia de asíntotas. **[0,5 puntos]**
 - Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Identificar los extremos relativos utilizando el criterio de la primera derivada. **[0,75 puntos]**
 - Escribir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$. **[0,5 puntos]**
- Por último:
- Hallar el área de la región limitada por la curva $y=x^2+2$ y las rectas $y=x$, $x=0$ y $x=1$. **[1 punto]**

Solución: a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$. b) $x=1$ es asíntota vertical. La función no tiene asíntota horizontal. La recta $y=2x+2$ es asíntota oblicua de la función.

- c) La función crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1) \cup (1, 3)$. El máximo relativo tiene coordenadas $(-1, -4)$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(3, 12)$. d) $y = -6x - 6$. e) El área es de 1.8333 unidades cuadradas.

Extraordinaria 2025

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [3 puntos] Dada la función:

$$f(x) = \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4}$$

- a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**
 b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**
 c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **[1 punto]**
 d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**
 e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$. **[0,75 puntos]**

Solución: a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$. Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(0, \frac{9}{4})$. b) $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. La recta $y = 1$ es asíntota horizontal. c) La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. d) El mínimo local tiene coordenadas $(0, \frac{9}{4})$. e) $y = \frac{6}{5}x - \frac{18}{5}$.

CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x) = 144x - 0.1x^2 - 50000$$

donde x es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

- a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**
 b) Evalúa e interpreta la primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$ ¿Qué recomendarías al propietario?. **[0,5 puntos]**
 c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(x)$. **[1 punto]**
 d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**
 e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

Solución: a) Obtiene unas ganancias de 1750 euros. b) El signo negativo de la derivada indica que el beneficio mensual va decreciendo conforme aumentan el número de hamburguesas vendidas. Recomendaría al propietario no vender más de 750 hamburguesas. Vendiendo más hamburguesas el beneficio disminuye. c) El beneficio crece por debajo de 720 hamburguesas al mes y decrece por encima de 720 hamburguesas mensuales. d) El número de hamburguesas que maximiza el beneficio es de 720. e) 1840 euros.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**

b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. **[1,75 puntos]**

Solución: a) $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx = 2\ln|x-1| + 2\sqrt{x^3} + C$ b) $\frac{32}{3} \approx 10.667$ unidades cuadradas.

CUESTIÓN 2:

[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**

b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. **[1,75 puntos]**

Solución: a) $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx = \ln|x| + 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{9}e^{3x} + C$ b) $\frac{22}{3} \approx 7.333$ unidades cuadradas.

Ordinaria 2025

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[3 puntos] Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$$

a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**

b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 punto]**

d) Calcula los máximos y mínimos locales. **[0,75 puntos]**

Solución: a) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$. b) $x=1$ es asíntota vertical. $y = -x - 1$ es asíntota oblicua. c) La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(-1, 1) \cup (1, 3)$. d) El mínimo local tiene coordenadas $(-1, 2)$ y el máximo local tiene coordenadas $(3, -6)$.

CUESTIÓN 2:

[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

$$N(t) = \frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0 \leq t \leq 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. **[1 punto]**

b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**

c) Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t = 2$. **[0,25 puntos]**

- d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

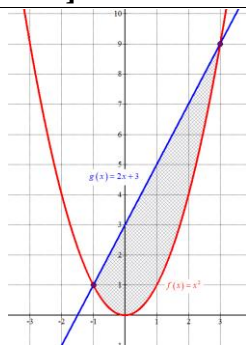
Solución: a) Durante la primera hora de concierto crece el número de asistentes al concierto y de la primera a la quinta hora del concierto disminuye el número de asistentes. b) El número máximo de asistentes al concierto se produce al cabo de 1 hora siendo 5000 los asistentes en ese momento. c) $N'(2) = -0.74 < 0$. Este resultado nos indica que el número de asistentes disminuye cuando han pasado 2 horas de concierto. d) 3750 asistentes.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2 puntos] Realiza:

- a) Si $\int_0^2 f(x) dx = 4$, ¿a qué es igual $\int_0^2 [f(x) + 3] dx$? **[0,25 puntos]**
- b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

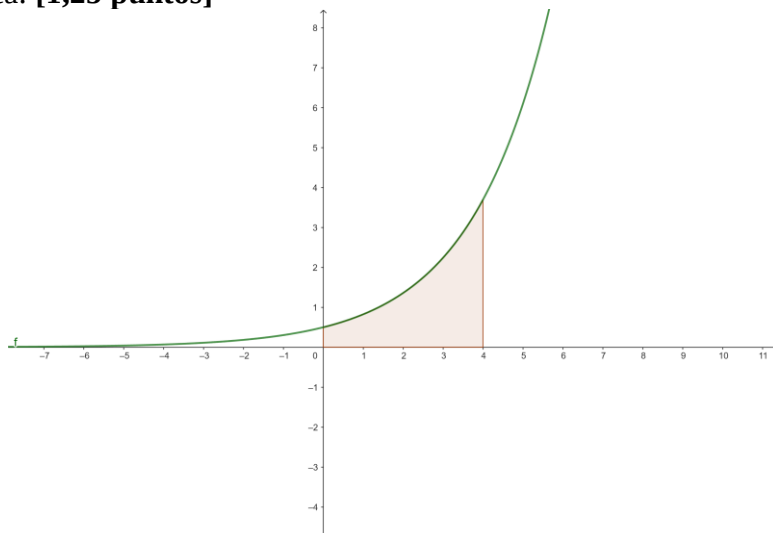


Solución: a) 10. b) . El área tiene un valor de 10.667 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 2:

[2 puntos] Realiza:

- a) Calcula los valores de los límites de integración a y b de manera que se cumpla $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. **[0,25 puntos]**
- b) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$:
- b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**
- b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



Solución: a) $a = -2$ y $b = 5$. b.1) $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} e^{x/2} dx$ b.2) 6.39 unidades cuadradas.

Extraordinaria 2024

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \leq x \leq 5$.

Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)

b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

Solución: a) El número de espectadores aumenta de la hora 3 hasta la hora 5.

b) El mayor número de espectadores se produce en la quinta hora con 24000 espectadores.

c) El menor número de espectadores se produce en la tercera hora con 4000 espectadores

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$. (1 punto)

Solución: a) La función es continua para $a = 4$ y $b = -2$. b) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)

b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. El único punto de corte con los ejes es el punto $A\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

b) Hay dos asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$. $y = 0$ es asíntota horizontal. c) La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ d) Un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$:

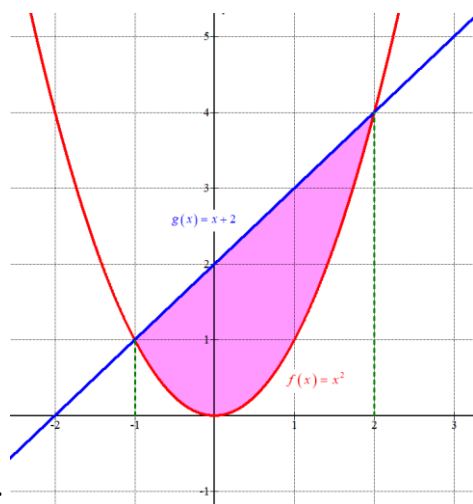
a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ en el punto $x = 1$.

(1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$. (1,25 puntos)

Solución: a) $y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$ b) El área tiene un valor de 0.405 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.



Solución: El área tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas

Ordinaria 2024

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^2 - 18q + 14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p = 10 - q$, se desea conocer:

- La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
- El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
- El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
- El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución: a) $B(q) = -2q^2 + 28q - 14$ b) El beneficio es máximo produciendo 7 unidades c) 3 euros. d) El beneficio máximo que se puede obtener es de 84 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ ax^2 - 6x + 3a & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$ (1 punto)
- Para este valor de a y para $x \geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x = 3$ (1,5 puntos)

Solución: a) La función es continua en $x = 3$ para $a = 2$ b) $y = 6x - 12$

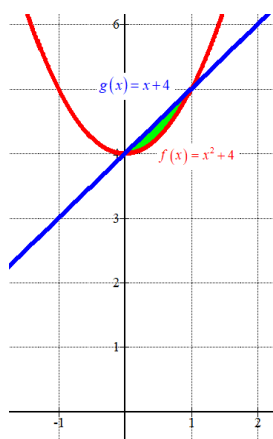
CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, calcule:

- El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)

- b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
 c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
 d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. El único punto de corte con los ejes es el punto $A(0, -1)$
 b) Hay dos asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$. $y = 1$ es asíntota horizontal. c) La función crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ d) Un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = x^2 + 4$ y la recta $g(x) = x + 4$. Calcular su área.



Solución: El área del recinto tiene un valor de $\frac{1}{6} \approx 0.166u^2$.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$:

- a) Calcular $\int f(x) dx$. (1 punto)
 b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ (1,5 puntos)

Solución: a) $\int f(x) dx = \ln(e^x + 2) + C$ b) El área tiene un valor de $\ln(e + 2) - \ln 3 \approx 0.45u^2$.

Extraordinaria 2023

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q) = q^2 - 16q + 48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p = 12 - q$, donde p es el precio unitario de venta. Determine:

- a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
 b) El nivel de producción, q , para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
 c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
 d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

Solución: a) $B(q) = -2q^2 + 28q - 48$ b) El beneficio es máximo con un nivel de producción de 7 unidades. c) El precio sería de 5 por unidad. d) Un beneficio máximo de 50.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax+5 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{3x-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
 b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$. (1 punto)

Solución: a) Los valores buscados son $a = 0$, $b = 2$. b) $f'(x) = \frac{-3x-1}{(x-1)^3}$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$, calcule:

- a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
 b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
 c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
 d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. El único punto de corte con los ejes es el punto $A(2, 0)$.

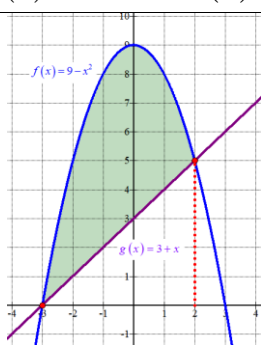
b) $x=0$ es asíntota vertical. No existe asíntota horizontal. c) La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (0, 2)$. d) La función presenta un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$:

- a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)
 b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

Solución: a) $y = 3x + 9$ b) Área = $3e^3 \approx 60.26u^2$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = 3 + x$ y calcular su área.



Solución: a) Área = $\frac{125}{6} \approx 20.83 u^2$

Ordinaria 2023

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

- La función beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
- El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
- El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución: a) $B(q) = -q^3 + 27q - 10$ b) El beneficio es máximo produciendo 3 unidades. c) 44 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{8x-2}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
- Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (1 punto)

Solución: a) La función es continua en todo su dominio $= (0, +\infty)$.

b) La función es creciente en todo su dominio. c) $y = \frac{x}{4} + 3$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

- El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
- Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

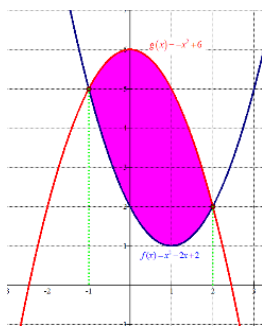
Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$. El único punto de corte con los ejes es el punto $A(0, 0)$.

b) Hay dos asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 3$. $y = -2$ es asíntota horizontal.

c) La función decrece en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y crece en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

d) La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.



Solución: a) Área = 9 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$:

- a) Calcular $\int f(x) dx$. (1 punto)
 b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisa y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos)

Solución: a) $\int f(x) dx = (\ln x)^2 + C$ b) 1 unidad cuadrada.

Julio 2022

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$, donde q es el número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

- a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.
 b) El nivel de producción, q , para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
 c) El precio para el que el beneficio es máximo.
 d) El beneficio máximo.

Solución: a) $B(q) = -2.2q^2 + 396q - 400$ b) En $q = 90$ hay un máximo relativo de la función beneficio. c) El precio para una producción de 90 unidades es $p = 220$ €. d) $B(90) = 17420$ €

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.
 b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$. (1,5 puntos)

Solución: a) Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 0$. b) $y = x$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

- a) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
 b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
 c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 d) Máximos y mínimos locales.

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$. Hay tres puntos de corte con los ejes coordenados: $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$;

$(-1, 0)$ y $(1, 0)$. b) $x = 2$; $x = -2$ son asíntotas verticales. $y = -1$ es asíntota horizontal.

c) La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. El mínimo relativo es $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

- a) Calcular la derivada $f'(x)$ (1 punto)

b) Calcular $\int f(x) dx$. (1 punto)

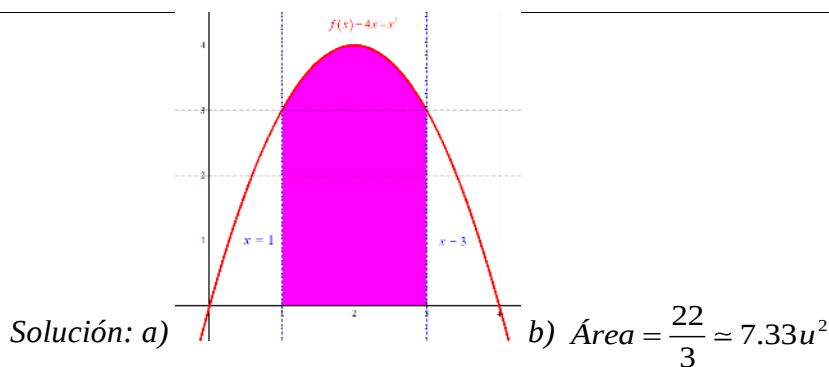
c) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$ (0,5 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ b) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$ c) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$ (1 punto)

b) Calcule el área del recinto del apartado anterior. (1,5 puntos)



Junio 2022

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone su respuesta (2 puntos).

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

Solución: a) El máximo beneficio se consigue el primer año. b) 37000 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x=2$. (1 punto)

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$. (1,5 puntos)

Solución: a) $k=1$ b) $y = -3x + 2$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^2 e^x$, calcule:

a) El dominio de definición de la función. (0,5 puntos)

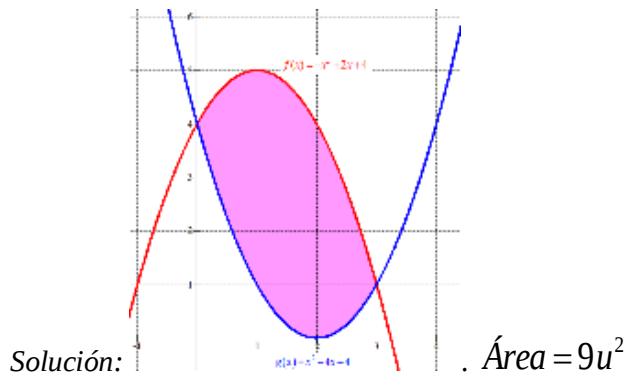
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

c) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

d) Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 e^x$ en el punto de abscisa $x=1$. (0,5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}$. b) La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0)$.
c) el máximo relativo tiene coordenadas $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ y $(0, 0)$ el mínimo relativo. d) $f'(1) = 3e$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar la región del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.



CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 2}$:

- a) Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1} dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,5 puntos)

Solución: a) $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1} dx = \ln(e^{x^2} + 1) + C$. b) Área = $\ln(e + 2) - \ln 3 \approx 0.45u^2$

Julio 2021

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t , mediante la función $f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto.

¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

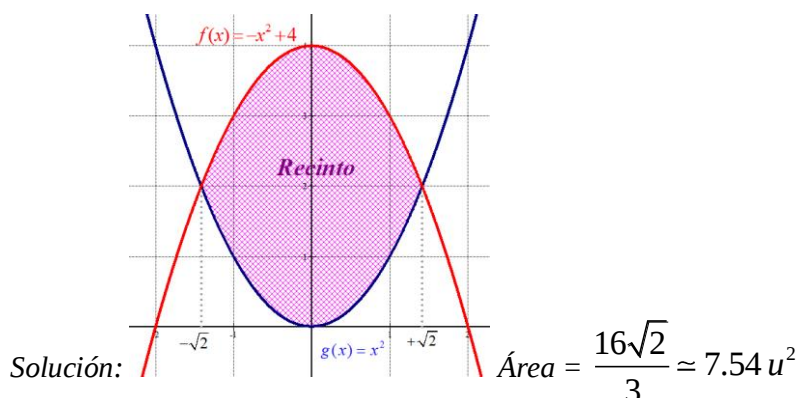
Solución: La máxima afluencia es de 10000 jóvenes y se produce a las 6 horas.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^2 + 3x + \frac{b}{x}$:

- a) Calcule los valores a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$ y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos)
b) Si en la función anterior $a = 2$ y $b = 0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$ (1 punto)

Solución: a) Los valores buscados son $a = -\frac{4}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$ b) $y = 7x - 2$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.



CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = xe^{x^2}$:

- Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).
- Calcular $\int xe^{x^2} dx$ (1 punto).
- Calcular $\int_0^{1/2} xe^{x^2} dx$ (0,5 puntos)

Solución: a) El valor de la pendiente en el punto $x = 0$ es 1 b) $\frac{e^{x^2}}{2} + K$ c) $\frac{e-1}{2}$

Junio 2021

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y su precio de venta es: $p = 50 - \frac{x}{4}$ euros.

Hallar:

- El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.
- El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).
- El beneficio máximo.

Solución: a) Deben venderse 15 unidades para obtener un beneficio máximo. b) El precio es 46.25 euros.

c) El beneficio máximo es de 87.5.

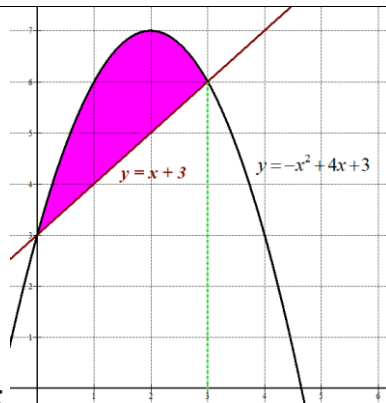
CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcula el valor de a , b y c para que:

- La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo local.
- Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución: a) Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{3}{2}$ y $c = 0$ b) La función crece en

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.



Solución: $\text{Área} = 4.5 \text{ u}^2$.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$:

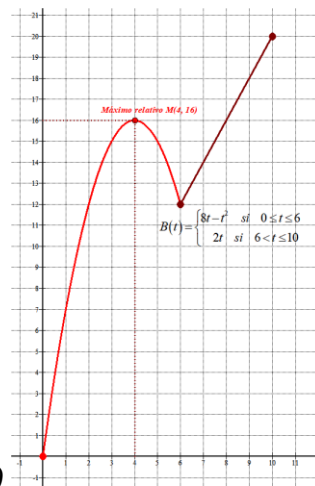
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ (1 punto).
- Calcular $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ (1 punto).
- Calcular $\int_1^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ (0,5 puntos)

Solución: a) $y = 2x$ b) $\ln(x^2 + 1) + K$ c) $\ln 5 - \ln 2$

Septiembre 2020

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

- Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos)
- Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto)
- Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos)



Solución: a) $a = 8$ b) Crece del año 0 hasta el 4º año y entre el año 6º y el año 10º. Decece entre el año 4º y el 6º. c) En el año 4, siendo este beneficio de 16.

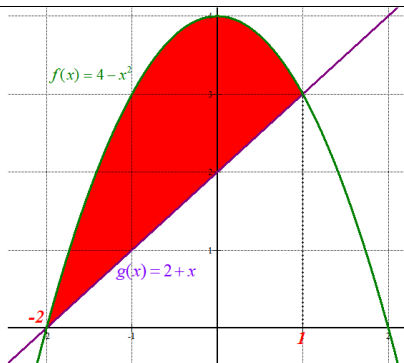
CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 2) \ln x$ (1 punto)

b) $f(x) = e^{4x^3+2}$ (1 punto)

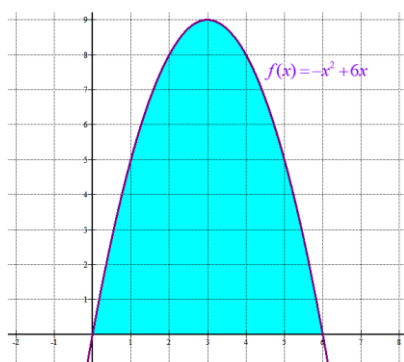
Solución: a) $f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2 - 2}{x}$ b) $f'(x) = 12x^2 e^{4x^3+2}$

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.



Solución: Área = $4.5 u^2$

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



Solución: Área = $36 u^2$

Julio 2020

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

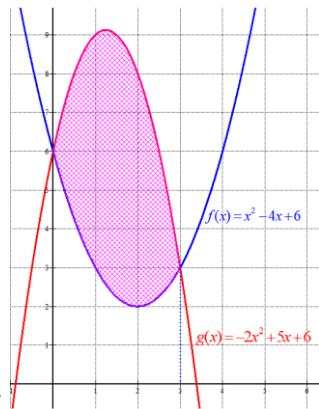
Solución: El beneficio máximo es de 36, obtenido al vender 6 ordenadores semanalmente.

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

- Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$. (1 punto)
- Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (1 punto)

Solución: a) Los valores buscados son $a = b = -1$. b) Máximo relativo en $x = \frac{-2}{3}$ y mínimo relativo en $x = 2$. La función crece en $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$.

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.



Solución: Área = $13,5 u^2$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$:

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (1 punto)
- Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ el eje OX y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1$. (1 punto)

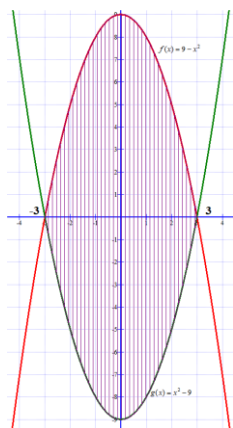
Solución: a) La tangente tiene ecuación $y = -0,25x + 0,75$ b) Área = $\ln 2 = 0,69 u^2$

Septiembre 2019

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?. (2 puntos)

Solución: En $x = 2$ hay un máximo de la pendiente de la tangente de la función. La ecuación de esta tangente en $x = 2$ es $y = 5x - 3$.

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcula su área. (2 puntos)



Solución: Área = $72 u^2$

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. (0,75 puntos)

b) $f(x) = xe^{2x}$. (0,75 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ b) $f'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x) = 2e^{x+1}$,

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. (1 punto)

Solución: a) $y = 2e^2x$ b) Área = $2e^2 - 2e = 9,34 u^2$

Junio 2019

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. (2 puntos)

Solución: Debe vender 9 unidades, siendo el beneficio máximo obtenido con esta venta de 64 €.

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ x^2-2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$. **(1 punto)**

Solución: a) Los parámetros buscados son $a = -2$ y $b = 4$. b) $\int_1^3 f(x)dx = \frac{14}{3}$

CUESTIÓN B2.

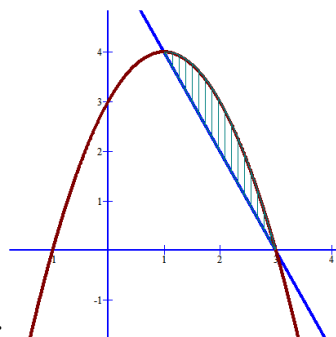
a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3 . **(1 punto)**

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. **(1 punto)**

Solución: a) Los valores pedidos son $a = -2$ y $b = 3$.

b) La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 2)$. Tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área. **(2 puntos)**



Solución: El área de la región es $\frac{4}{3} u^2$

Septiembre 2018

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = x^3 \ln(2x+5) + ax + b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0) = 2$ y $f'(0) = 1$. **(1,5 puntos)**

Solución: $a = 1$ y $b = 2$.

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 (-x^3 + 3x - 2) dx$. **(0,75 puntos)**

b) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$. **(0,75 puntos)**

c) $\int 2e^{2x} dx$. **(0,5 puntos)**

Solución: a) $\int_1^2 (-x^3 + 3x - 2) dx = \frac{-5}{4}$ b) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \ln(x^3 + 1) + K$ c) $\int 2e^{2x} dx = e^{2x} + K$

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = 5x^3 e^{2x} + \frac{1}{x^2 + 1}$:

- a) Calcular $f'(0)$. (1,5 puntos)
 b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1). (0,5 puntos)

Solución: a) $f'(0) = 0$ b) $y = 1$.

CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro a para que se cumpla $\int_0^1 (ax^3 - 9x^2 + 10) dx = 2a$. (1,5 puntos)

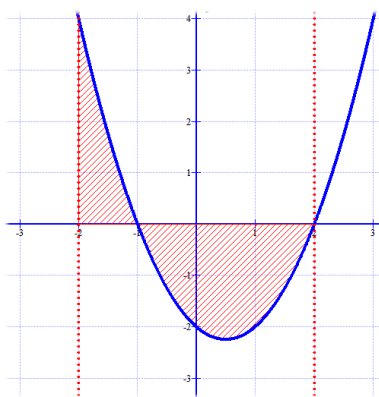
Solución: $a = 4$

Junio 2018

CUESTIÓN A2. Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x) = 2x^2 - 45x + 100$, donde x es el número de unidades de producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo (2 puntos)

Solución: 15 unidades nos aportan un beneficio máximo de 350 unidades monetarias.

CUESTIÓN A3. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área. (1,5 puntos)



Solución: Área = $\frac{19}{3} u^2$

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

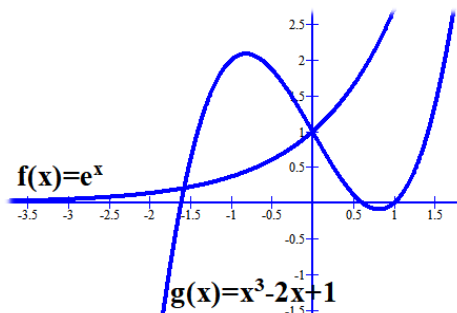
a) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x) = x^2 \ln(x^2)$. (0,75 puntos)

c) $h(x) = e^{-3x+x^2}$. (0,5 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^6}}$ b) $g'(x) = 2x \ln(x^2) + 2x$ c) $h'(x) = e^{-3x+x^2} \cdot (-3+2x)$

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3 - 2x + 1$, cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura:



Hallar el área del recinto limitado por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$. (1,5 puntos)

Solución: $\text{Área} = \frac{3}{4} + \frac{1}{e} = 1,11 u^2$

Septiembre 2017

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ donde a y b son números reales, hallar el valor de a y b para que se cumpla que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$. (1,25 puntos)

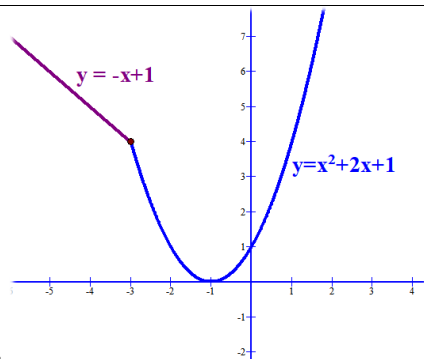
Solución: El valor de a y b buscado es $a = b = 1$

CUESTIÓN A3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } -3 \leq x \end{cases}$$

a) Hacer la representación gráfica de dicha función. (0'5 puntos)

b) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y = 2x + 5$. (1'75 puntos)



Solución:

El valor del área pedida es de 10'6 unidades²

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x) = x^2 e^{x^2}$. (0,75 puntos)

c) $h(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$. (0,75 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{x+1}{(2x+1)^{3/2}}$ b) $g'(x) = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2}$ c) $h'(x) = \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2}$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x) = 2e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1) = 0$. (1,25 puntos)

Solución: $F(x) = e^{2x-2} - 1$

Junio 2017

CUESTIÓN A2. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

$$f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad 0 \leq t \leq 11$$

Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$). (0,25 puntos)

b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. (1,5 puntos)

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo. (0,25 puntos)

Solución: a) 8407 millones de litros. b) En el año 6. c) Un volumen de 8432 millones de litros.

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 (-x^2 + 3x + 1) dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \frac{2}{x+2} dx$. (0,75 puntos)

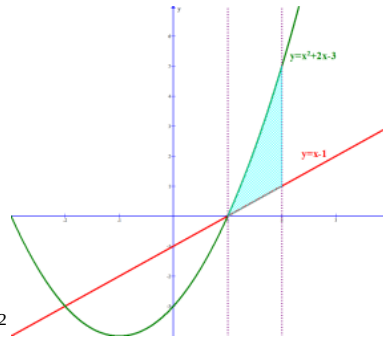
Solución: a) $\int_1^2 (-x^2 + 3x + 1) dx = \frac{19}{6}$ b) $\int \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x+2| + C$

CUESTIÓN B2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 7x^2 + a$ y $g(x) = \sqrt{2x-1} + bx$ donde a y b son números reales, hallar a y b sabiendo que $f(1) = g(1)$ y $f'(1) = g'(1)$. (2,5 puntos)

Solución: Obtenemos un valor para $a = -5$ y para $b = -12$

CUESTIÓN B3. Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función

$f(x) = x^2 + 2x - 3$, la recta $y = x - 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)



Solución: $\text{Área} = \frac{11}{6} u^2 = 1'83 u^2$

Septiembre 2016

CUESTIÓN A2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 \ln x + 2e^x$. (1 punto)

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}$. (0,75 puntos)

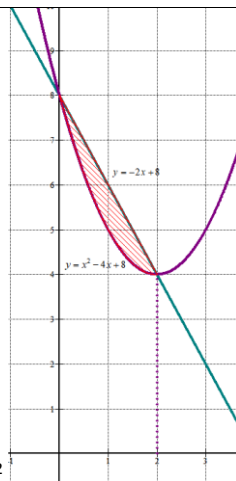
c) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$. (0,75 puntos)

Solución: a) $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^4 + 2e^x$

b) $g'(x) = \frac{-2}{7\sqrt[7]{(2x+5)^8}}$ c)

$h'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2}$

CUESTIÓN A3. Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = x^2 - 4x + 8$ y la recta $y = -2x + 8$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)



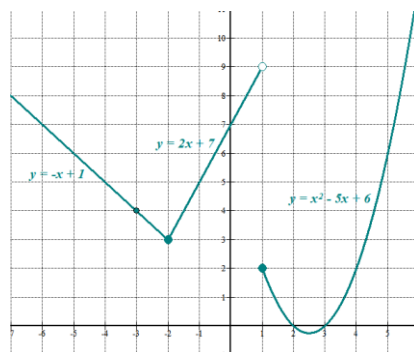
Solución: $\text{Área} = \frac{4}{3} = 1,33 u^2$

CUESTIÓN B2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x+7 & \text{si } -2 < x < 1 \\ ax^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ donde } a \in \mathbb{R} :$$

- a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = -2$. (0,5 puntos)
 b) Hallar a para que la función sea continua en $x = 1$ (0,75 puntos)
 c) Para $a = 1$ hacer la representación gráfica de la función (0,75 puntos)

Solución: a) la función es continua en $x = -2$.



b) La función es continua en $x = 1$ si $a = 8$. c)

CUESTIÓN B3. Calcular las siguientes integrales:

- a) $\int (-x + 2e^x) dx$ (0,75 puntos)
 b) $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2} - 1 \right) dx$ (0,75 puntos)

Solución: a) $\int (-x + 2e^x) dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + K$ b) $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2} - 1 \right) dx = -\frac{13}{24}$

Junio 2016

Cuestión A.2. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + 2b}{x^2 + 1}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

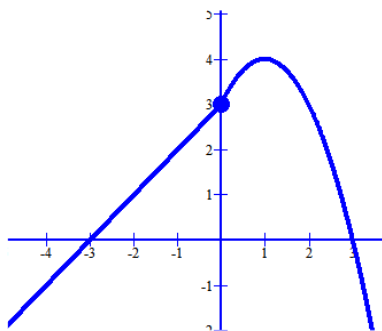
- a. Hallar el dominio de $f(x)$. (0'5 puntos)
 b. Hallar a y b para que la función tenga una asíntota horizontal en $y = 2$ y pase por el punto $(0, 4)$. (0'75 puntos)
 c. Para $a = 1$ y $b = 1$ hallar $f'(x)$. (0'75 puntos)

Solución: a. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ b. $a = b = 2$ c. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

Cuestión A.3. Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a. Representa gráficamente la función f . (0'75 puntos)
 b. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica de f y el eje OX. (1'25 puntos)



Solución: El área es de 13'5 unidades cuadradas.

Cuestión B.2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

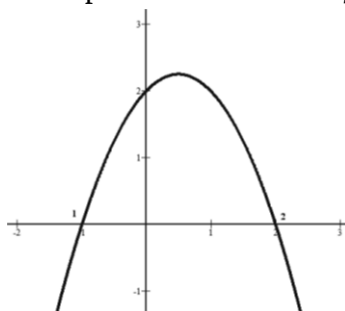
a. $f(x) = e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}$ (1 punto)

b. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2}$ (0'75 puntos)

Solución: a. $f'(x) = \frac{e^{x^2-2} \cdot [4x^2 + 4x + 1]}{2\sqrt{x+1}}$

b. $f'(x) = \frac{x^4 + 7x^2 - 2}{(x^2 + 2)^2}$

Cuestión B.3. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^2 + x + a$ donde $a \in \mathbb{R}$



Sabiendo que el área encerrada por el recinto asociado que limita la curva con el eje OX vale $\frac{9}{2}$, utilizar esta información para hallar el valor del parámetro a . (1'25 puntos)

Solución: $a = 2$

Septiembre 2015

CUESTIÓN A2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$. (0,5 puntos)

b) $g(x) = (x-1)\ln x$. (0,5 puntos)

c) $h(x) = e^{2x^5-1}$. (0,5 puntos)

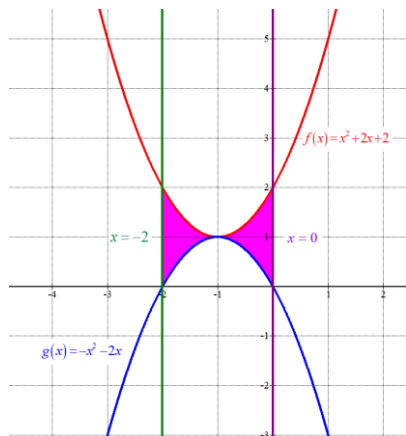
Solución: a) $f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$

b) $g'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$

c)

$h'(x) = 10x^4 \cdot e^{2x^5-1}$

CUESTIÓN A3. Hallar el área del recinto acotado limitado por las curvas $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = -x^2 - 2x$ y las rectas $x = -2$ y $x = 0$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (2 puntos)



Solución: El área del recinto es de $\frac{4}{3}u^2$.

CUESTIÓN B2. En las cuatro primeras horas de un concierto, el número de miles de asistentes después de t horas, una vez comenzado, varía según la función

$$f(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t \quad 0 \leq t \leq 4.$$

Hallar el número máximo de asistentes al concierto en ese intervalo de tiempo. (2 puntos)

Solución: El número máximo de asistentes al concierto es de 76000 y se alcanza a las 2 horas.

CUESTIÓN B3. Hallar las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 (x^3 + 2x - 1) dx$ (0,75 puntos) b) $\int (5e^x + 3) dx$ (0,75 puntos)

Solución: a) $\int_0^2 (x^3 + 2x - 1) dx = 6$ b) $\int (5e^x + 3) dx = 5e^x + 3x + K$

Junio 2015

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, calcular:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,5 puntos)

b) Los máximos y mínimos relativos. (0,5 puntos)

c) Los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)

Solución: a) La función crece en $(0,1)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ b) Las coordenadas del mínimo relativo son $(0,0)$ y las del máximo relativo son $(1, \frac{1}{6})$. c) $(0,0)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$.

CUESTIÓN A3. Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ que cumpla que $F(1) = 0$. (1,5 puntos)

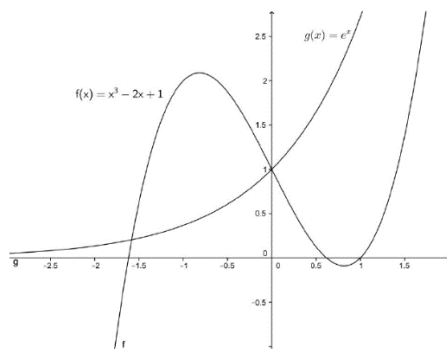
Solución: $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{23}{12}$

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$, donde a , b y c son números reales, hallar los valores de a , b y c para que la función cumpla las siguientes condiciones:

- pase por el origen de coordenadas,
- su derivada se anule en $x = 0$ y
- la pendiente de la tangente a su gráfica en $x = 1$ valga 2. (2 puntos)

Solución: Los valores buscados son $a = -\frac{2}{3}$; $b = c = 0$ y la función queda $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3$

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = e^x$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura



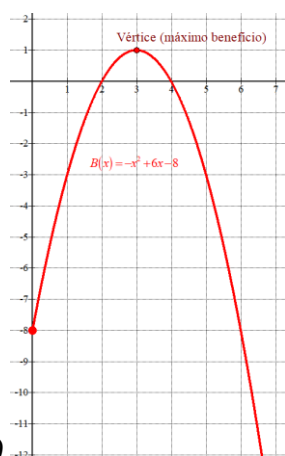
Hallar el área encerrada por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$. (1,5 puntos)

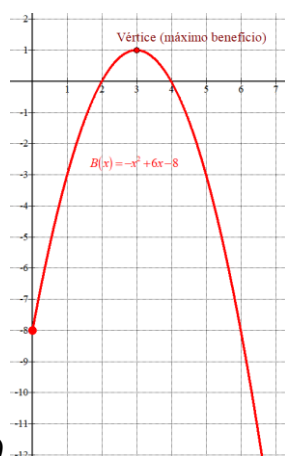
Solución: Área = $\frac{3}{4} + \frac{1}{e} \approx 1.118 u^2$

Septiembre 2014

CUESTIÓN A2. El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una fábrica por la producción de aceite viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 6x - 8$ donde x representa los hectolitros de aceite producidos en una semana.

- Representar la función $B(x)$ con $x \geq 0$. (0,5 puntos)
- Calcular los hectolitros de aceite que se debe producir cada semana para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (1 punto)



Solución: a)  b) El máximo beneficio que se puede obtener es de 1000 € y se obtiene produciendo 3 hectolitros de aceite a la semana.

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2 - 6x - 4}{x^2 - 4}$, hallar su dominio, los puntos de corte con los ejes y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$. (2,5 puntos)

Solución: Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$; Los puntos de corte con los ejes son $A(0,1)$ y $B(-1,0)$; La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$ es $f'(1)=6$.

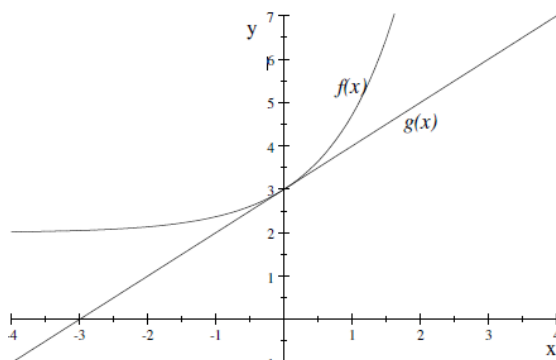
CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + x - a}{x^2 - b}$, donde a y b son números reales.

a) Hallar a y b sabiendo que $x=1$ y $x=-1$ son sus asíntotas verticales y que $f(0) = -1$. (1 punto)

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, hallar el resto de las asíntotas y hallar su función derivada $f'(x)$. (1 punto)

Solución: a) Los valores buscados son $a = -1$, $b = 1$. b) La asíntota horizontal es $y = -1$, las asíntotas verticales son $x=1$ y $x=-1$ y no tiene asíntota oblicua. $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$.

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = x + 3$, cuyas gráficas están representadas en la siguiente figura, hallar el área comprendida entre las dos curvas y las rectas $x=0$ y $x=2$.



(2 puntos)

Solución: $\text{Área} = e^2 - 5 \approx 2.389u^2$

Junio 2014

CUESTIÓN A2. El coste de fabricación de un modelo de teléfono móvil viene dado por la función $C(x) = x^2 + 10x + 325$, donde x representa el número de teléfonos móviles fabricados.

Supongamos que se venden todos los teléfonos fabricados y que cada teléfono se vende por 80 euros.

a) Determinar la función de beneficio (definido como ingreso menos coste) que expresa el beneficio obtenido en función de x . (0,5 puntos)

b) ¿Cuántos teléfonos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (1,5 puntos)

c) ¿Para qué valores de x se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (0,5 puntos)

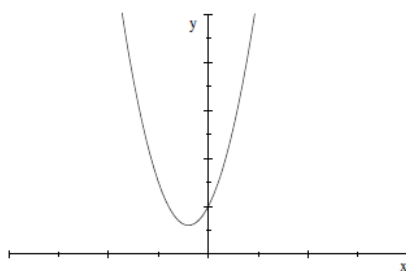
Solución: a) $B(x) = -x^2 + 70x - 325$ b) El máximo beneficio es de 900 € y se obtiene con la fabricación y venta de 35 teléfonos móviles. c) Los beneficios son negativos con menos de 5 móviles fabricados y vendidos. También a partir de 65 móviles fabricados y vendidos.

CUESTIÓN A3. Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (x^5 - 2x + 3) dx$. (0,75 puntos) b) $\int (2e^x + 5) dx$. (0,75 puntos)

Solución: a) $\int (x^5 - 2x + 3) dx = \frac{x^6}{6} - x^2 + 3x + K$ b) $\int (2e^x + 5) dx = 2e^x + 5x + K$

CUESTIÓN B2. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 + 4x + a$, siendo a un número real. Calcular a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 57.



(1,5 puntos)

Solución: $a = 10$.

CUESTIÓN B3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}$ (0,75 puntos) b) $g(x) = \ln(x^2 - 5x)$ (0,75 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$ b) $g'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x}$

Septiembre 2013

CUESTIÓN A2. Se sabe que la expresión que representa el número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t) = at^2 + bt$, $0 \leq t \leq 8$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el número máximo de personas que ha habido ese día ha sido de 128, y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b . (2 puntos)

Solución: Los valores de a y b necesarios para que se cumplan las condiciones requeridas son $a = -8$ y $b = 64$.

CUESTIÓN A3. a) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{x^2-2x}$ y $g(x) = \ln(x^7 + 1)$. (1 punto)

b) Calcule $\int_1^3 (x^2 - 3x - 1) dx$. (1 punto)

Solución: a) $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$; $g'(x) = \frac{7x^6}{x^7+1}$ b) $\int_1^3 (x^2 - 3x - 1) dx = -\frac{16}{3}$

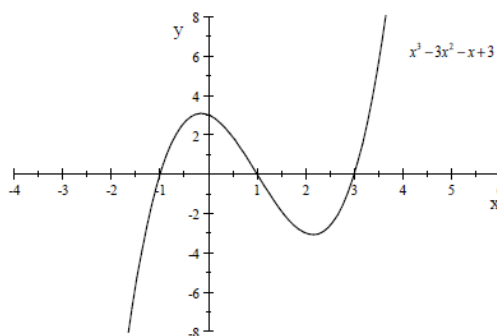
CUESTIÓN B2. Los ingresos obtenidos por la fabricación de x unidades diarias de cierto producto vienen dados por $I(x) = -28x^2 + 5256x$, y los costes vienen dados por la función $C(x) = 22x^2 + 4456x + 814$.

- a) Determinar la función que expresa los beneficios obtenidos por la fabricación de x unidades diarias del producto (sabiendo que los beneficios se definen como los ingresos menos los costes) y calcular el número de unidades diarias que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo. (1,75 puntos)
- b) ¿Cuánto vale dicho beneficio máximo? (0,25 puntos)

Solución: a) $B(x) = -50x^2 + 800x - 814$; hay que fabricar 8 unidades diarias para obtener un beneficio máximo. b) El beneficio máximo es de $B(8) = -50 \cdot 8^2 + 800 \cdot 8 - 814 = 2386$.

CUESTIÓN B3. Se da la siguiente gráfica, que corresponde a la función

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, y se pide calcular el área que encierra la gráfica de la función con el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$



(1,5 puntos)

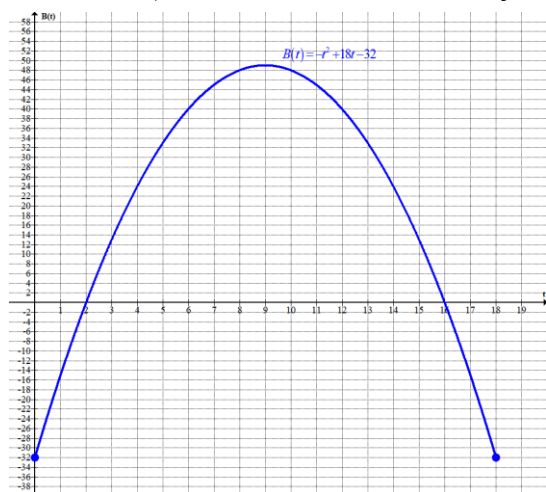
Solución: Área = 5.75 u²

Junio 2013

CUESTIÓN A2. Las funciones $I(t) = -0,5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0,5t^2 - t + 32$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años transcurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

- a) ¿Para qué valores de t , desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes? (0,5 puntos)
- b) Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de t y representarla gráficamente. (0,75 puntos)
- c) ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio. (1,25 puntos)

Solución: a) Coinciden a los dos años y a los 16. b) $B(t) = -t^2 + 18t - 32$



c) Los beneficios máximos se obtienen en el año 9 (vértice) y dichos beneficios son 49000 euros.

CUESTIÓN A3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

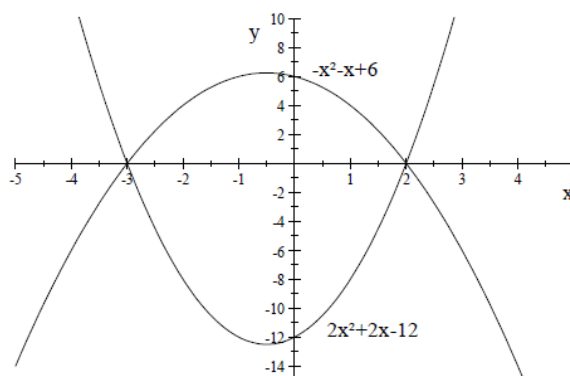
a) $f(x) = e^{x^3+2x}$ (0,5 puntos) b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ (0,5 puntos)

Solución: a) $f'(x) = (3x^2 + 2)e^{x^3+2x}$ b) $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax + b$, hallar a y b sabiendo que en $x = 1$ la función tiene un extremo relativo (un máximo o un mínimo relativo) y que $f(1) = 2$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo relativo? (1,5 puntos)

Solución: Los valores buscados son $a = -4$ y $b = 5$. La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$.

CUESTIÓN B3. Dadas las parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ y $g(x) = -x^2 - x + 6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, hallar el área de recinto acotado encerrado entre ambas.



(1,5 puntos)

Solución: Área = $62.5u^2$

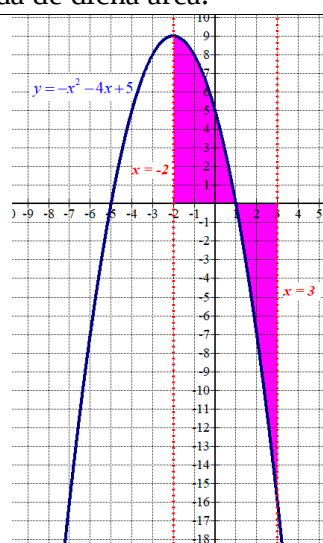
Septiembre 2012

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{4 - x^2}$:

- a) Hallar su dominio. (0,3 puntos)
- b) Determinar las asíntotas. (1,2 puntos)
- c) Hallar su función derivada $f'(x)$. (0,5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. b) Las asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = -2$. La asíntota horizontal es $y = -2$ y no existe asíntota oblicua. c) $f'(x) = \frac{18x}{(4 - x^2)^2}$

CUESTIÓN A3. Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 - 4x + 5$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 3$ y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)



Solución: $\text{Área} = \frac{98}{3} \approx 32.2 u^2$

CUESTIÓN B2. Una empresa estima que el beneficio que obtiene por cada unidad de producto que vende depende del precio de venta según la función:

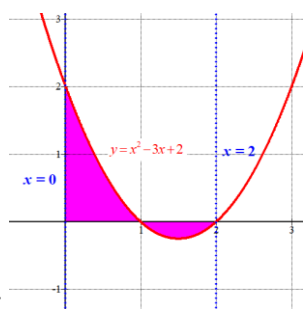
$$B(x) = -3x^2 + 12x - 9,$$

siendo $B(x)$ el beneficio y x el precio por unidad de producto, ambos expresados en euros.

- a) ¿Entre qué precios la función $B(x)$ es creciente? (1,25 puntos)
- b) ¿En qué precio se alcanza el beneficio máximo? (0,5 puntos)
- c) ¿En qué precio el beneficio es 3? (0,25 puntos)

Solución: a) La función $B(x)$ es creciente cuando el precio está entre 0 y 2. b) El beneficio máximo se obtiene con el precio $x = 2$. c) El beneficio es de 3 cuando el precio es $x = 2$.

CUESTIÓN B3. Calcular el área comprendida entre la parábola de ecuación $y = x^2 - 3x + 2$, el eje OX, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)

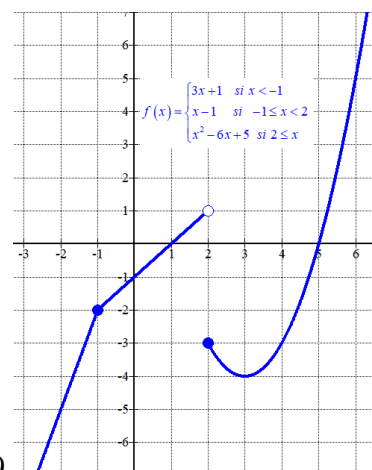


Solución: El área tiene un valor de 1 unidad cuadrada.

Junio 2012

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ ax^2 - 6ax + 5 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$:

- Estudiar la continuidad en $x = -1$. (0,5 puntos)
- Hallar a para que la función sea continua en $x = 2$. (0,75 puntos)
- Para $a = 1$ hacer una representación gráfica de la función. (0,75 puntos)



Solución: a) La función $f(x)$ es continua en $x = -1$. b) $a = 1/2$ c)

CUESTIÓN A3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x-1}$. (0,5 puntos)
- $g(x) = (1-x)^2 e^x$. (0,5 puntos)
- $h(x) = \ln(2x^2 + 2)$. (0,5 puntos)

Solución: a) $f'(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ b) $g'(x) = (x^2 - 1)e^x$ c) $h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

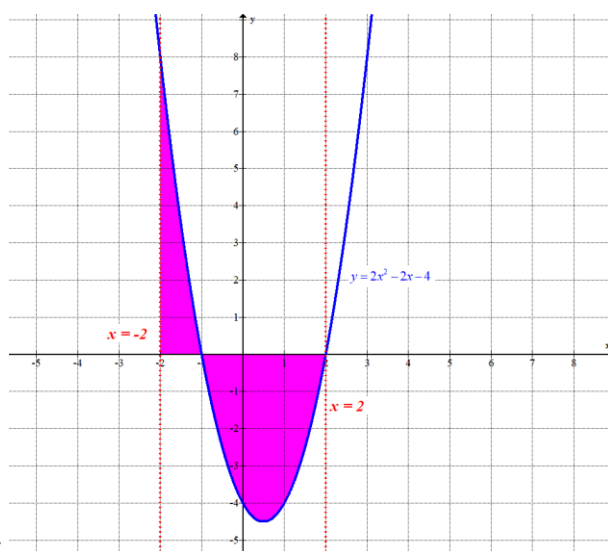
CUESTIÓN B2. Una panadería ha comprobado que el número de panes de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio x en euros según la función $f(x) = 4500 - 1500x$, donde $f(x)$ es el número de panes vendidos cada semana y x el precio por unidad de pan. Calcular:

- La función $I(x)$ que expresa los ingresos semanales por la venta de ese tipo de pan en función del precio por unidad de pan, x . (0,2 5 puntos)

b) El precio al que hay que vender cada pan para que dichos ingresos semanales sean máximos. ¿A cuánto ascenderán los ingresos semanales máximos? (1,75 puntos)

Solución: a) $I(x) = 4500x - 1500x^2$ b) Los ingresos son máximos cuando el precio es de 1.5 €. Estos ingresos semanales máximos son de 3375 €.

CUESTIÓN B3. Hallar el área delimitada por la parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)



Solución:

$$\text{Área} = \frac{11}{3} + 9 = \frac{38}{3} \approx 12.66 u^2$$

Septiembre 2011

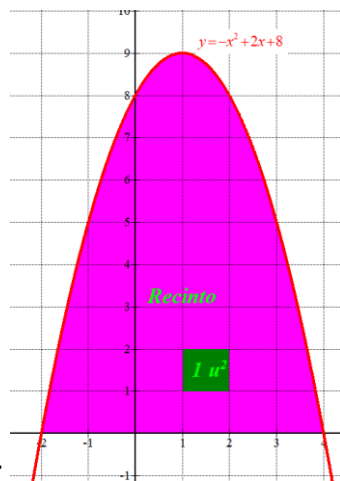
CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2$ calcular:

- El dominio de definición.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y los mínimos.

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}$. b) La función crece en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(-1, 5)$.

c) El máximo relativo tiene coordenadas $\left(-1, \frac{14}{3}\right)$ y el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(5, -\frac{94}{3}\right)$

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 2x + 8$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



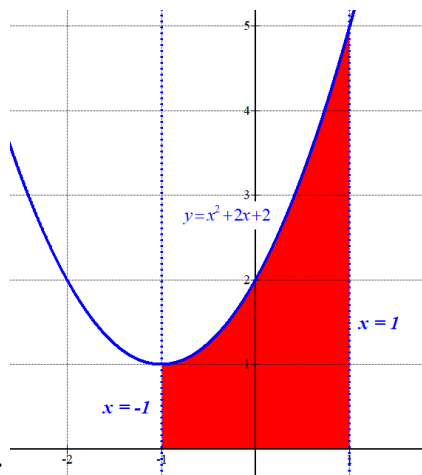
Solución: Área = $36 u^2$

CUESTIÓN B2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$ calcular:

- El dominio de definición.
- Las asíntotas.

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ b) Las asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 2$. La asíntota horizontal es $y = 3$. No tiene asíntota oblicua.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



Solución: Área = $\frac{14}{3} \approx 4.66 u^2$

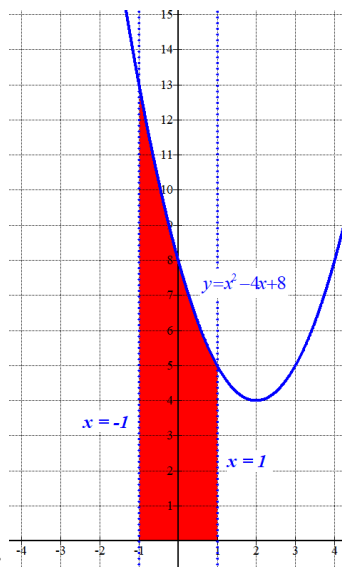
Junio 2011

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$ calcular:

- El dominio de definición.
- Las asíntotas.

Solución: a) El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ b) Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 3$. La asíntota horizontal es $y = 1$. No tiene asíntota oblicua.

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 4x + 8$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



Solución:

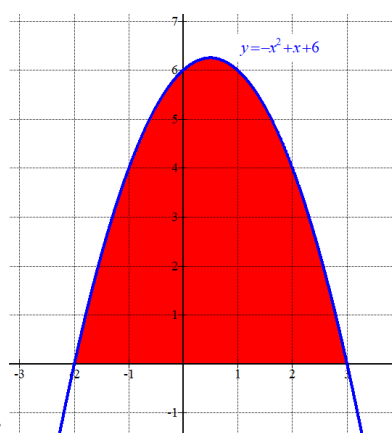
$$\text{Área} = \frac{50}{3} \approx 16.66 u^2$$

CUESTIÓN B2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ calcular:

- El dominio de definición.
- Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Los máximos y los mínimos.

Solución: a) El dominio es todo $\mathbb{R}$ b) La función crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 3)$. c) El máximo tiene coordenadas $(-1, 14)$ y el mínimo tiene coordenadas $(3, -18)$

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + x + 6$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



Solución:

$$\text{Área} = \frac{125}{6} \approx 20.83 u^2$$

Septiembre 2010

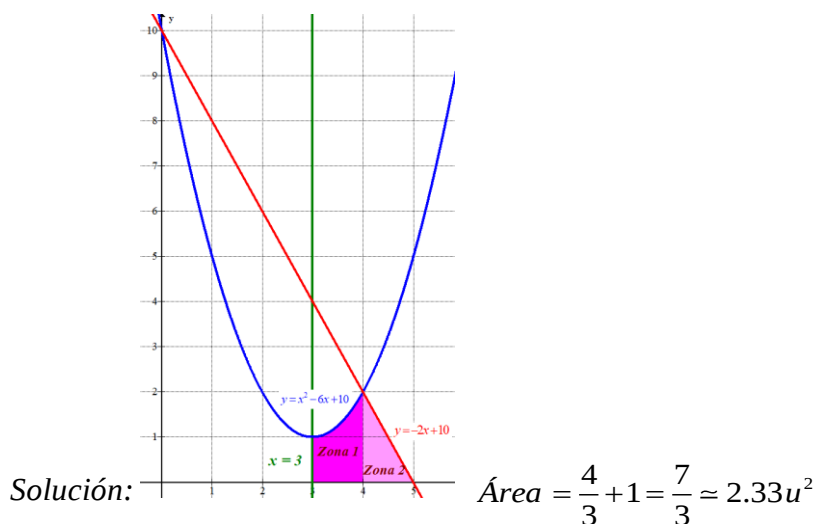
CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = \frac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$ calcular:

a) Dominio.

b) Asíntotas

Solución: a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ b) Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 2$. La asíntota horizontal es $y = 3$. No tiene asíntota oblicua.

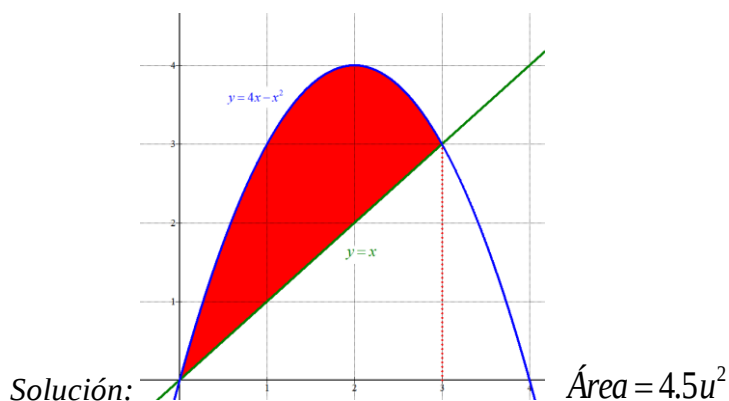
CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 6x + 10$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $y = -2x + 10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



CUESTIÓN B2. (2 puntos) ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

Solución: El número buscado es el número 5.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



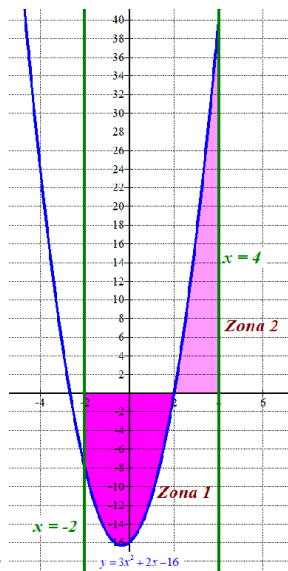
Junio 2010

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$ calcular:

- a) Dominio.
b) Asíntotas

Solución: a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ b) Las asíntotas verticales son $x = -3$ y $x = 1$. La asíntota horizontal es $y = 0$. No tiene asíntota oblicua.

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 + 2x - 16$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 4$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

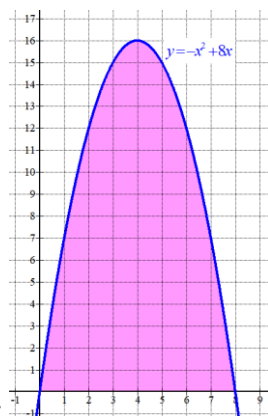


Solución: Área total = 48 + 36 = 84 u²

CUESTIÓN B2. (2 puntos) Un terrateniente posee unos terrenos al borde de un río. Allí desea cercar una parcela y montar una playa privada con todo tipo de servicios. Para ello dispone de 4000 metros de alambrada. ¿Cuál es la superficie máxima, de forma rectangular, que puede cercar y cuál la longitud de ribera apta para el baño?

Solución: La superficie máxima es de 2000000 m² y la ribera apta para el baño será de 2000 m.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 8x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.



Solución: Área = $\frac{256}{3} \approx 85.33$ u²