



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE
ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Esta prueba consta de 4 ejercicios.
- En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
- En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
- La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

Una empresa fabrica dos productos, P_1 y P_2 , a partir de tres recursos productivos: mano de obra, energía y capital. La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente. Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales. Cada unidad de P_1 necesita para su fabricación 10 horas de mano de obra, 10 unidades de energía y 5 unidades de capital; siendo el precio de cada unidad de P_1 800 euros. Cada unidad de P_2 necesita para su fabricación 20 horas de mano de obra y 5 unidades de energía; vendiéndose a 400 euros la unidad de P_2 . La empresa vende todo lo que produce y quiere maximizar sus ingresos anuales por la venta de los dos productos.

- (2.5 puntos)** ¿Cuántas unidades de cada producto han de fabricarse anualmente para maximizar los ingresos? ¿Cuál es dicho ingreso óptimo?
- (0.5 puntos)** ¿Es posible alcanzar el máximo elaborando un único producto?

EJERCICIO 2 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 9x & \text{si } x < 3 \\ \frac{bx+18}{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

- (1 punto)** Determine los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y su gráfica pase por el punto $(2, 2)$.
- Para $a = b = -6$:
 - (0.5 puntos)** Determine las asíntotas de f , en el caso de que existan.
 - (0.75 puntos)** Estudie la monotonía de f y calcule sus extremos relativos.
 - (0.75 puntos)** Esboce la gráfica de f .

B) Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{x-6}{2+x}$.

- (0.75 puntos)** Halle su dominio y determine sus asíntotas.
- (1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura, calculando los extremos relativos y los puntos de inflexión.
- (0.5 puntos)** Represente gráficamente f .

- d) **(0.75 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de en todos aquellos puntos donde la pendiente de dicha recta vale -8 .

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

- A)** Sea una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
- a) **(1 punto)** Se selecciona una muestra de tamaño 81 resultando una media de 20. Calcule un intervalo de confianza al 98.5% para estimar la media poblacional. ¿Qué error máximo se comete en la estimación?
 - b) **(0.75 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debería tener una nueva muestra para que la amplitud del intervalo para la media fuese inferior a 2.16?
 - c) **(0.25 puntos)** Razone qué efecto produciría sobre la amplitud del intervalo una disminución del nivel de confianza.

- B)** Sean A y B dos sucesos del espacio muestral tales que:

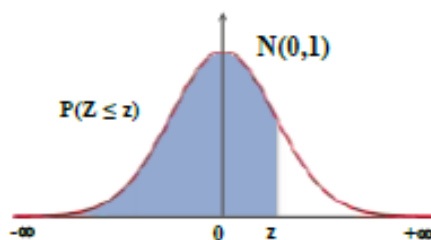
$$P(A) = 0.4, P(B^c) = 0.7, P(A \cup B) = 0.58$$

- a) **(0.5 puntos)** ¿Son A y B independientes? ¿Son incompatibles?
- b) Calcule la probabilidad de que:
 - i) **(0.5 puntos)** Ocurra alguno de los sucesos contrarios.
 - ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B sabiendo que no ha ocurrido A .
 - iii) **(0.5 puntos)** Ocurra uno y solo uno de los dos sucesos.

EJERCICIO 4

Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos quiere analizar el comportamiento de sus usuarios durante la hora punta de la mañana en una determinada ciudad. La duración del trayecto de cada usuario (en minutos) se distribuye según una ley Normal con media 18 y desviación típica 4.

- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto?
- b) **(1.25 puntos)** Se sabe que cada usuario que desbloquea un patinete tiene una probabilidad de 0.9 de completar su trayecto sin incidencias. Si 120 usuarios desbloquean un patinete para moverse por la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980
2,9	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,0	0,9986	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996
3,4	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
3,5	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

Una empresa fabrica dos productos, P_1 y P_2 , a partir de tres recursos productivos: mano de obra, energía y capital. La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente. Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales. Cada unidad de P_1 necesita para su fabricación 10 horas de mano de obra, 10 unidades de energía y 5 unidades de capital; siendo el precio de cada unidad de P_1 800 euros. Cada unidad de P_2 necesita para su fabricación 20 horas de mano de obra y 5 unidades de energía; vendiéndose a 400 euros la unidad de P_2 . La empresa vende todo lo que produce y quiere maximizar sus ingresos anuales por la venta de los dos productos.

- a) **(2.5 puntos)** ¿Cuántas unidades de cada producto han de fabricarse anualmente para maximizar los ingresos? ¿Cuál es dicho ingreso óptimo?
 b) **(0.5 puntos)** ¿Es posible alcanzar el máximo elaborando un único producto?

- a) Llamamos “x” a las unidades de P_1 que se producen al año e “y” a las unidades de P_2 que se producen al año.

Hacemos una tabla con los datos.

	Energía	Mano de obra	Capital	Ingresos
Producto P_1 (x)	10x	10x	5x	800x
Producto P_2 (y)	5y	20y		400y
TOTALES	10x+5y	10x+20y	5x	800x+400y

La función que queremos maximizar son los ingresos que vienen dados por la expresión $I(x, y) = 800x + 400y$.

Las restricciones son las siguientes.

La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente $\rightarrow 10x + 5y \leq 3500$; $5x \leq 1300$

Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales $\rightarrow 10x + 20y \geq 4200$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 20y \geq 4200 \\ 10x + 5y \leq 3500 \\ 5x \leq 1300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 420 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \leq 260 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 420$$

$$2x + y = 700$$

$$x = 260$$

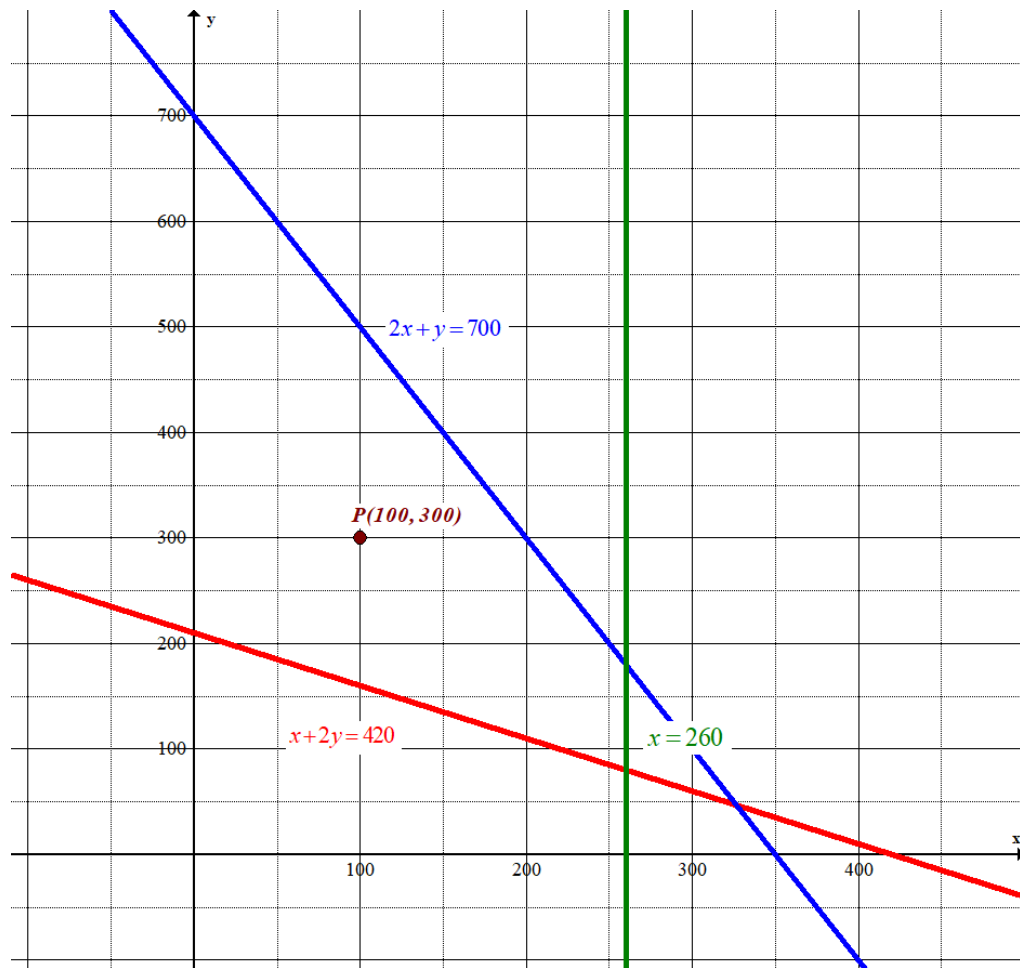
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{420 - x}{2}$
0	210
260	80
420	0

x	$y = 700 - 2x$
0	700
260	180
350	0

x = 260	y
260	0
260	80
260	180

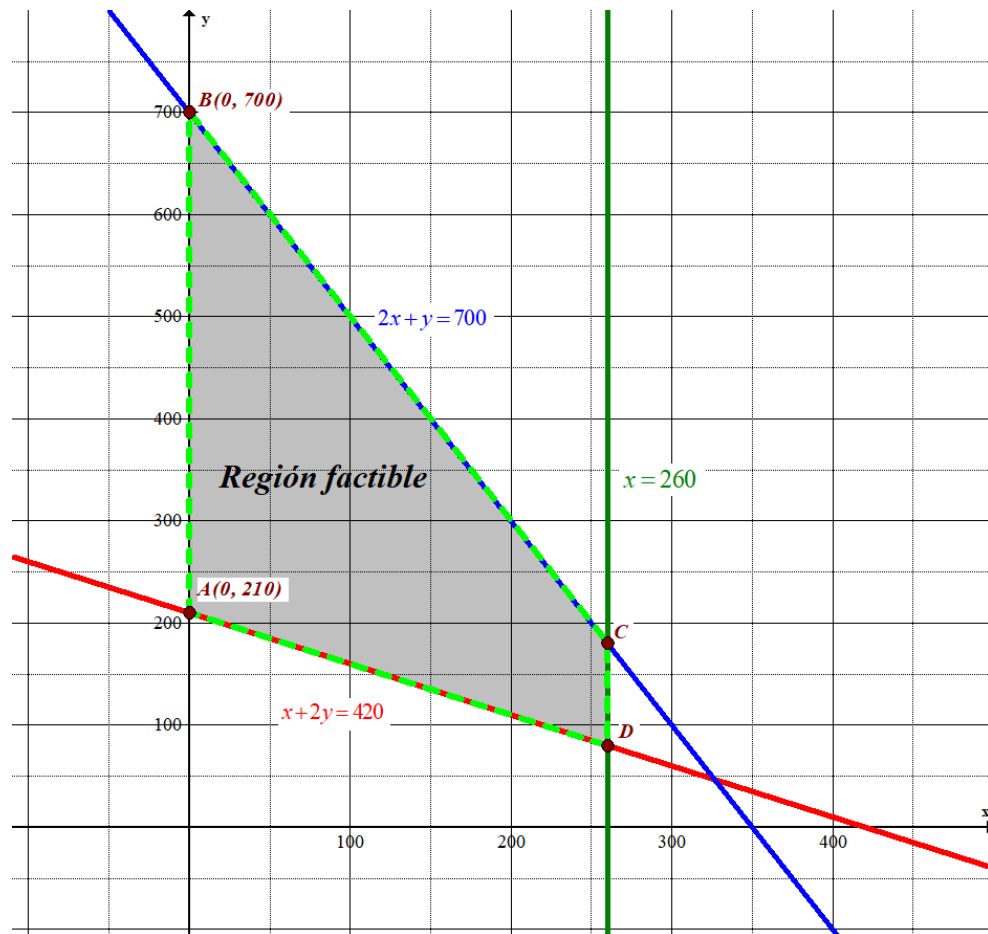
Primer
cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de la recta azul, a la izquierda de la recta vertical verde y por encima de la recta oblicua roja. Comprobamos que el punto $P(100, 300)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 2 \cdot 300 \geq 420 \\ 2 \cdot 100 + 300 \leq 700 \\ 100 \leq 260 \\ 100 \geq 0; 300 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 + 600 \geq 420 \\ 200 + 300 \leq 700 \\ 100 \leq 260 \\ 100 \geq 0; 300 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 700 \\ x = 260 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 260 + y = 700 \Rightarrow y = 700 - 520 = 180 \Rightarrow C(260, 180)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 420 \\ x = 260 \end{array} \right\} \Rightarrow 260 + 2y = 420 \Rightarrow 2y = 160 \Rightarrow y = 80 \Rightarrow D(260, 80)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 800x + 400y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 210) \rightarrow I(0, 210) = 800 \cdot 0 + 400 \cdot 210 = 84000$$

$$B(0, 700) \rightarrow I(0, 700) = 800 \cdot 0 + 400 \cdot 700 = 280000 \text{ Máximo}$$

$$C(260, 180) \rightarrow I(260, 180) = 800 \cdot 260 + 400 \cdot 180 = 280000 \text{ Máximo}$$

$$D(260, 80) \rightarrow I(260, 80) = 800 \cdot 260 + 400 \cdot 80 = 240000$$

El valor máximo es 280000 € y se alcanza en los vértices B(0, 700) y C(260, 180).

El máximo ingreso de 280000 € se consigue en todos los puntos con coordenadas enteras del segmento BC: B(0, 700), (1, 698), (2, 696), (3, 694), ..., (257, 186), (258, 184), (259, 182), C(260, 180).

b) Es posible alcanzar los máximos ingresos fabricando solo 700 unidades del producto P_2 .

EJERCICIO 2

A) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 9x & \text{si } x < 3 \\ \frac{bx+18}{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y su gráfica pase por el punto $(2, 2)$.

b) Para $a = b = -6$:

i) **(0.5 puntos)** Determine las asíntotas de f , en el caso de que existan.

ii) **(0.75 puntos)** Estudie la monotonía de f y calcule sus extremos relativos.

iii) **(0.75 puntos)** Esboce la gráfica de f .

a) Para que la gráfica pase por el punto $(2, 2)$ debe ser $f(2) = 2$.

$$f(2) = 2 \Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2 \Rightarrow 8 + 4a + 18 = 2 \Rightarrow 4a = -24 \Rightarrow \boxed{a = -6}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x < 3 \\ \frac{bx+18}{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

La función debe ser continua en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{3b+18}{3+1} = \frac{3b+18}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{bx+18}{x+1} = \frac{3b+18}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 - 6x^2 + 9x = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3b+18}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b+18 = 0 \Rightarrow 3b = -18 \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

Los valores buscados son $a = b = -6$.

b) Para $a = b = -6$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x < 3 \\ \frac{-6x+18}{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

i) **Asíntotas verticales.** $x = a$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x+18}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-6x}{x} + \frac{18}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6 + \frac{18}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-6 + \frac{18}{+\infty}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{-6+0}{1+0} = -6$$

La recta $y = -6$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua.

Estudiamos la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 6x + 9 = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

ii) Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } x < 3 \\ \frac{-6(x+1) - 1 \cdot (-6x+18)}{(x+1)^2} = \frac{-6x-6+6x-18}{(x+1)^2} = \frac{-24}{(x+1)^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En el intervalo $(3, +\infty)$ la derivada tiene la expresión $f'(x) = \frac{-24}{(x+1)^2}$, que es siempre

negativa. La función decrece en $(3, +\infty)$.

En el intervalo $(-\infty, 3)$ la derivada tiene la expresión $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

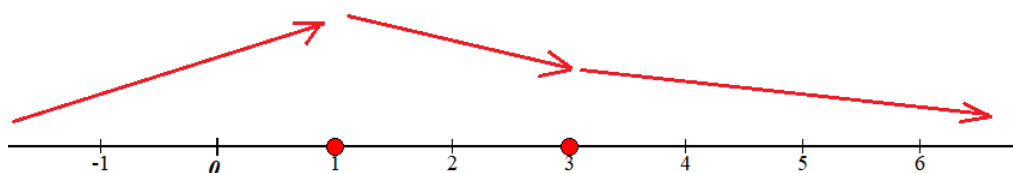
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (1, 3).$$

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:

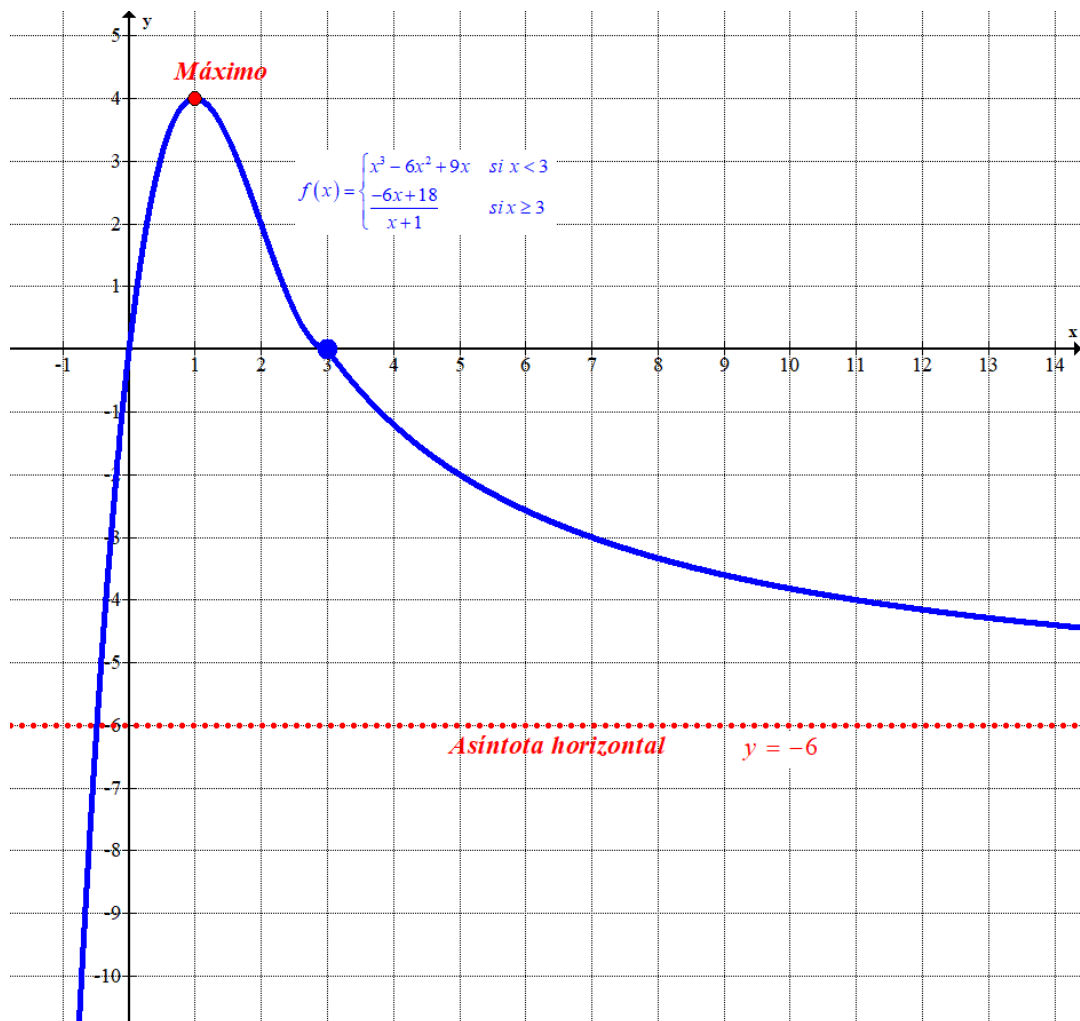


La función tiene un máximo relativo en $x=1$.

Como $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ el máximo relativo y absoluto tiene coordenadas (1, 4).

iii) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$y = x^3 - 6x^2 + 9x$	x	$y = \frac{-6x+18}{x+1}$
-1	-16	3	0
0	0	5	-2
1	4	7	-3
2	2	11	-4



EJERCICIO 2

B) Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{x-6}{2+x}$.

- (0.75 puntos)** Halle su dominio y determine sus asíntotas.
- (1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura, calculando los extremos relativos y los puntos de inflexión.
- (0.5 puntos)** Represente gráficamente f .
- (0.75 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en todos aquellos puntos donde la pendiente de dicha recta vale -8 .

- a) El denominador de la fracción se anula para $x = -2$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$.

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(1 - \frac{x-6}{2+x} \right) = 1 - \frac{-2-6}{2-2} = 1 + \frac{8}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{x-6}{2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{\frac{x}{x} - \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1 - \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} + 1} = 1 - \frac{1 - \frac{6}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + 1} = 1 - \frac{1-0}{0+1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.

- b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = 1 - \frac{x-6}{2+x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1 \cdot (2+x) - 1 \cdot (x-6)}{(2+x)^2} = -\frac{2+x-x+6}{(2+x)^2} = \frac{-8}{(2+x)^2}$$

Esta derivada siempre es negativa. La función decrece en todo su dominio. La función no tiene extremos relativos.

Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-8}{(2+x)^2} = -8(2+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -8(-2)(2+x)^{-3} = \frac{16}{(2+x)^3}$$

Esta derivada segunda nunca se anula. La función no tiene puntos de inflexión.

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x = -2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada segunda vale

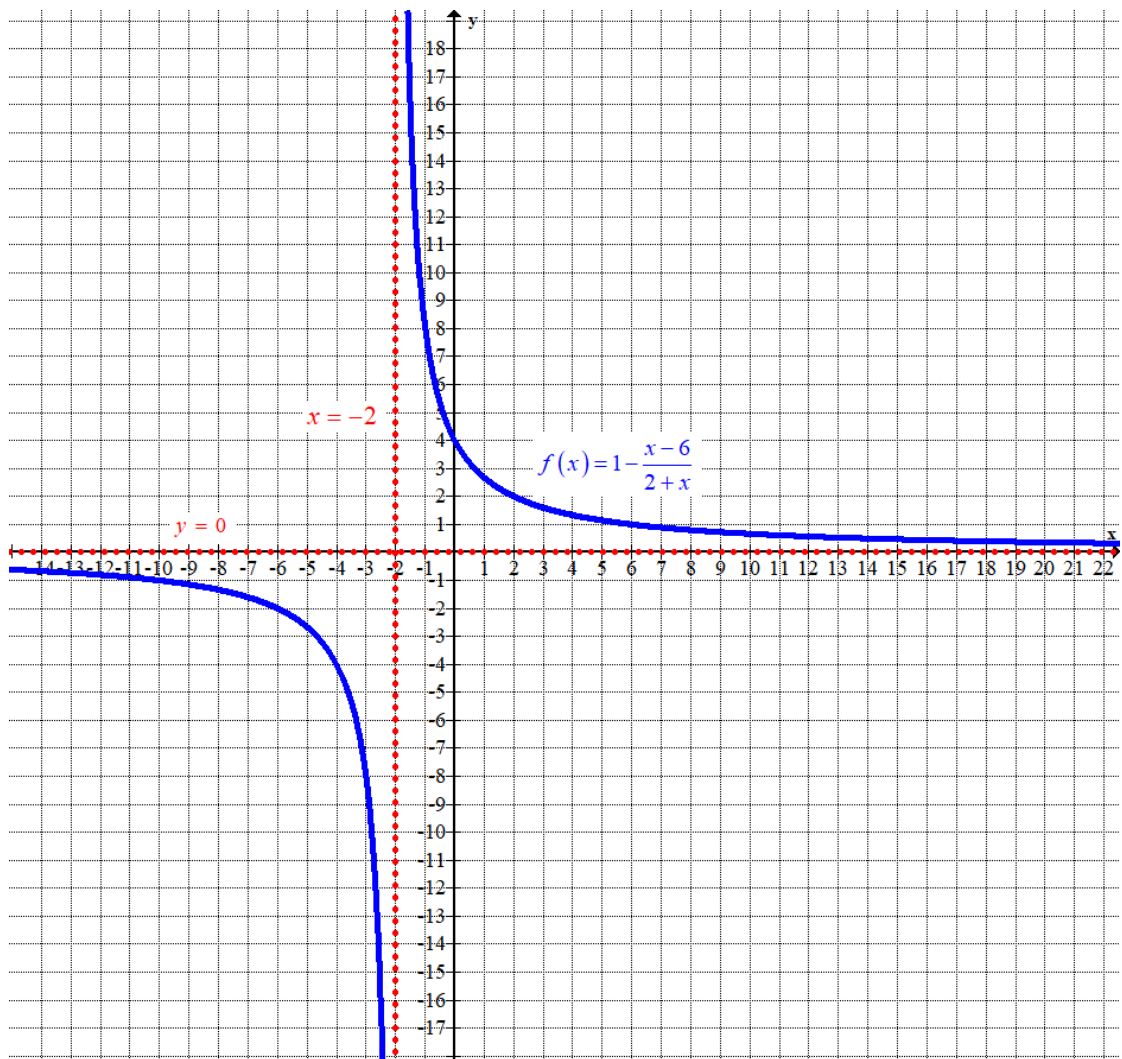
$$f''(-3) = \frac{16}{(2-3)^3} = -16 < 0. \text{ La función es cóncava (}\cap\text{) en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{16}{(2+0)^3} = 2 > 0. \text{ La función es convexa (}\cup\text{) en } (-2, +\infty).$$

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = 1 - \frac{x-6}{2+x}$
-10	-1
-3	-8
0	4
8	0.8



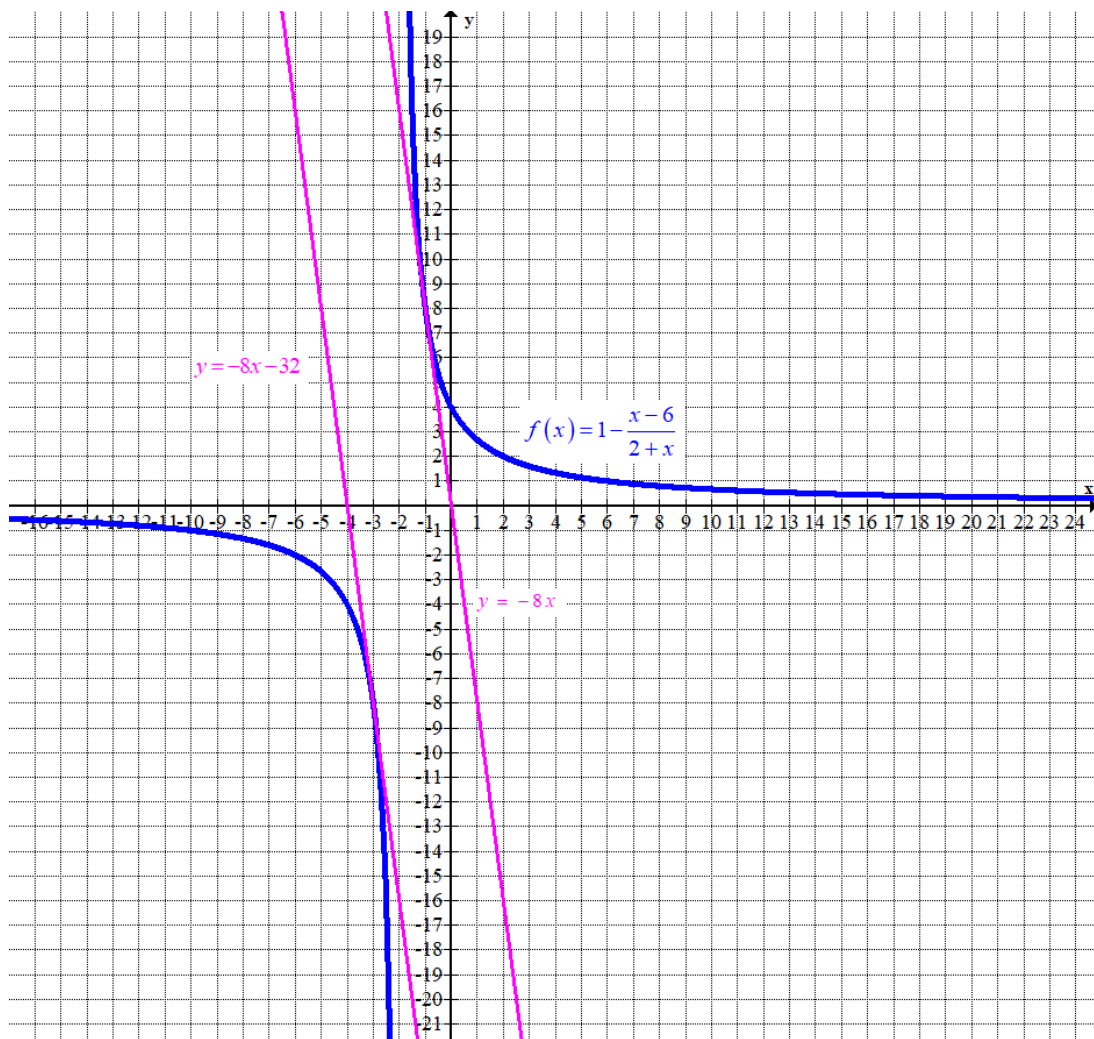
d) La pendiente de la recta tangente en $x = a$ es el valor de la derivada en dicho valor $f'(a)$.
Averiguamos cuando la derivada de la función vale -8 .

$$f'(x) = -8 \Rightarrow \frac{-8}{(2+x)^2} = -8 \Rightarrow (2+x)^2 = 1 \Rightarrow 2+x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 2+x = -1 \rightarrow \boxed{x = -3} \\ 2+x = 1 \rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Hallamos las rectas tangentes a la gráfica de la función en $x = -1$ y en $x = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 1 - \frac{-1-6}{2-1} = 8 \\ f'(-1) = -8 \\ y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 8 = -8(x+1) \Rightarrow y - 8 = -8x - 8 \Rightarrow \boxed{y = -8x}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = 1 - \frac{-3-6}{2-3} = -8 \\ f'(-3) = -8 \\ y - f(-3) = f'(-3)(x+3) \end{array} \right\} \Rightarrow y + 8 = -8(x+3) \Rightarrow y = -8x - 24 - 8 \Rightarrow \boxed{y = -8x - 32}$$



La recta tangente a la gráfica en $x = -1$ tiene ecuación $y = -8x$.

La recta tangente a la gráfica en $x = -3$ tiene ecuación $y = -8x - 32$.

EJERCICIO 3

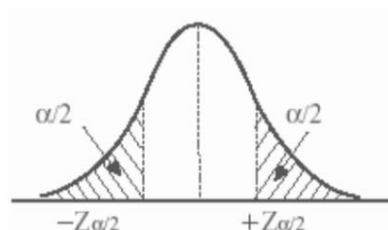
- A) Sea una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
- a) **(1 punto)** Se selecciona una muestra de tamaño 81 resultando una media de 20. Calcule un intervalo de confianza al 98.5% para estimar la media poblacional. ¿Qué error máximo se comete en la estimación?
- b) **(0.75 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debería tener una nueva muestra para que la amplitud del intervalo para la media fuese inferior a 2.16?
- c) **(0.25 puntos)** Razone qué efecto produciría sobre la amplitud del intervalo una disminución del nivel de confianza.

a) Tamaño de la muestra $n = 81$. La media muestral es $\bar{x} = 20$.

Con un nivel de confianza del 98.5 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,985 \rightarrow \alpha = 0,015 \rightarrow \alpha/2 = 0,0075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,43$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = 0.54$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (20 - 0.54, 20 + 0.54) = (19.46, 20.54)$$

- b) Si la amplitud del intervalo para la media es inferior a 2 entonces el error debe ser menor que 1. Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 2.43 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 4.86 \Rightarrow n = 4.86^2 = 23.61$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 24.

- c) Si disminuimos el nivel de confianza $1 - \alpha$ entonces el valor de $z_{\alpha/2}$ también disminuye.

Como la fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ al disminuir el valor de $z_{\alpha/2}$ disminuye el valor del error. La amplitud del intervalo es el doble del error, por lo que la amplitud del intervalo disminuye al disminuir el nivel de confianza.

EJERCICIO 3**B)** Sean A y B dos sucesos del espacio muestral tales que:

$$P(A) = 0.4, P(B^c) = 0.7, P(A \cup B) = 0.58$$

a) **(0.5 puntos)** ¿Son A y B independientes? ¿Son incompatibles?

b) Calcule la probabilidad de que:

i) **(0.5 puntos)** Ocurra alguno de los sucesos contrarios.ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B sabiendo que no ha ocurrido A .iii) **(0.5 puntos)** Ocurra uno y solo uno de los dos sucesos.a) Tenemos que $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.7 = 0.3$ Como $P(A \cup B) = 0.58$ aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 0.58 \\ P(A) = 0.4 \\ P(B) = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.58 = 0.4 + 0.3 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.7 - 0.58 = 0.12}$$

Dos sucesos son independientes si cumplen la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.12 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.12$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.Para que dos sucesos sean incompatibles su intersección debe ser vacía, pero hemos visto que $P(A \cap B) = 0.12 \neq 0$, por lo que $A \cap B \neq \emptyset$.b) i) Debemos hallar $P(A^c \cup B^c)$. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}$$

ii) Debemos hallar $P(B / A^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B / A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0.3 - 0.12}{1 - 0.4} = \boxed{0.3}$$

iii) Debemos hallar $P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c))$.

$$\begin{aligned} P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) &= P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c) = \\ &= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.12 + 0.4 - 0.12 = \boxed{0.46} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos una tabla con las probabilidades que conocemos.

	B	B ^C	
A	0.12		0.4
A ^C			0.6
	0.3	0.7	1

Completamos la tabla.

	B	B ^C	
A	0.12	0.28	0.4
A ^C	0.18	0.42	0.6
	0.3	0.7	1

La probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos sucesos vale $0.18 + 0.28 = 0.46$.

EJERCICIO 4

Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos quiere analizar el comportamiento de sus usuarios durante la hora punta de la mañana en una determinada ciudad. La duración del trayecto de cada usuario (en minutos) se distribuye según una ley Normal con media 18 y desviación típica 4.

- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto?
- b) **(1.25 puntos)** Se sabe que cada usuario que desbloquea un patinete tiene una probabilidad de 0.9 de completar su trayecto sin incidencias. Si 120 usuarios desbloquean un patinete para moverse por la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias?

a) X = La duración del trayecto de cada usuario (en minutos). $X = N(18, 4)$.

Debemos calcular $P(X < 15)$.

$$P(X < 15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 18}{4} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{15 - 18}{4}\right) = P(Z < -0.75) = P(Z > 0.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = \boxed{0.2266}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7600	0,7643	0,7685	0,7724	0,7764	0,7794

La probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto es de 0.2266.

- b) Consideramos X' la variable aleatoria que cuenta el número de patinetes que completan su trayecto sin incidencias de un grupo de 120. Esta variable es una binomial de parámetros n = número de repeticiones = 120 y p = probabilidad de que un usuario complete un trayecto sin incidencias = 0.9. $X' = B(120, 0.9)$.

El número de repeticiones es muy alto. Aproximamos esta variable a una normal Y de media $np = 120 \cdot 0.9 = 108$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0.9 \cdot 0.1} \approx 3.29$.

$Y = N(108, 3.29)$. Esta aproximación es buena pues $np = 108 > 5$ y $nq = 120 \cdot 0.1 = 12 > 5$.

Calculamos $P(X' \geq 110)$.

$$P(X' \geq 110) = \{ \text{Corrección de Yates} \} = P(Y \geq 109.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 108}{3.29} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{109.5 - 108}{3.29}\right) = P(Z \geq 0.46) = 1 - P(Z \leq 0.46) = 1 - 0.6772 = \boxed{0.3228}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123

La probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias es de 0.3228.