



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE
ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Esta prueba consta de 4 ejercicios.
- En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
- En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
- La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, siendo m un

número real.

- (0.75 puntos)** Halle los valores de m para que el rango de A sea 3.
- (0.25 puntos)** Calcule los valores de m para los que A no tiene inversa.
- (1.25 puntos)** Para $m = 2$, calcule A^{-1} y resuelva la ecuación $X \cdot A = C$.
- (0.75 puntos)** Para $m = 1$, clasifique el sistema $A \cdot Y = B$ atendiendo al número de soluciones que tiene.

B) Se considera la función $f(x, y) = 2x + y$ cuando (x, y) pertenece a la región factible delimitada por las inecuaciones:

$$4x + 2y \geq 5; \quad 2x + 5y \leq 9; \quad x + y \leq 3; \quad y \geq 0$$

- (1.5 puntos)** Dibuje la región factible y obtenga sus vértices.
- (0.5 puntos)** Obtenga algún punto de la región factible con abscisa $x = 1$.
- (1 punto)** ¿Para qué valores de x e y se alcanza el máximo de la función f ? ¿Cuánto vale dicho máximo? Análogamente para el mínimo.

EJERCICIO 2

El peso en kilogramos (kg) de una persona que inicia un determinado régimen alimenticio viene dado por la función:

$$P(t) = 75 - \frac{15t}{t+120}; \quad t \geq 0$$

Siendo t el tiempo, en días, que lleva haciendo la dieta.

- (1 punto)** Compruebe que, si la persona sigue de manera continuada el régimen alimenticio, irá reduciendo peso paulatinamente. ¿Cuál es el peso mínimo que podría llegar a alcanzar si pudiera seguir la dieta indefinidamente?
- (0.75 puntos)** ¿Cuántos días debe hacer de régimen para llegar a un peso de 64 kg?
- (1.25 puntos)** El índice de masa corporal viene dado por la función $i(t) = \frac{P(t)}{h^2}$, siendo h la estatura, en metros, de la persona. Se considera que la persona tiene sobrepeso si el índice de masa corporal es superior a 25 kg/m^2 . Si la persona mide 1.68 m , determine si

ha tenido sobrepeso durante la dieta, y en caso afirmativo, calcule los días que han de transcurrir para dejar de tenerlo.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

- La probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 0.82.
- La probabilidad de que ocurran simultáneamente es 0.38.
- La probabilidad de que no ocurra A es 0.35.
- a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que no ocurre A .
- b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.
- c) **(0.75 puntos)** Si repetimos el experimento en 10 ocasiones, halle la probabilidad de que el suceso A ocurra al menos 2 veces.

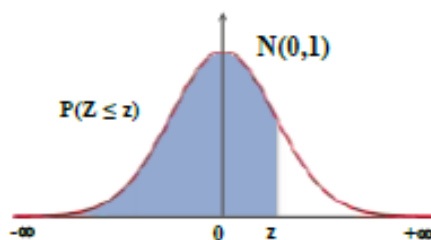
B) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 16 y varianza 4. Se pide:

- a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2.
- b) **(0.5 puntos)** Halle el valor de a para el que $P(X \geq a) = 0.25$.
- c) **(0.75 puntos)** Se consideran muestras de tamaño 64, ¿qué distribución sigue la variable media muestral? ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3?

EJERCICIO 4

Una comunidad autónoma está analizando el rendimiento de sus estudiantes en la última convocatoria de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) en una determinada materia. De los 20000 estudiantes presentados, 12000 cursaron bachillerato en un centro público, 6000 lo hicieron en un centro concertado y el resto en un centro privado no concertado. Para estimar la proporción de estudiantes que suspenden la materia en la PAU, se extrae una muestra aleatoria de 500 estudiantes que han realizado el examen.

- a) **(0.4 puntos)** Determine el tamaño de la muestra que se debe de tomar de cada tipo de centro para realizar un muestreo con afijación proporcional.
- b) Tras realizar el muestreo se obtuvo que 200 de los 500 estudiantes seleccionados suspendieron la asignatura.
 - i) **(1 punto)** Calcule un intervalo de confianza al 99%, para determinar la proporción de estudiantes que suspenden la materia entre todos los presentados. Basándonos en este intervalo, ¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?
 - ii) **(0.6 puntos)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos estudiantes, como mínimo, habría que seleccionar de forma aleatoria para que el error de estimación fuese inferior al 4%?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980
2,9	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,0	0,9986	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996
3,4	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
3,5	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

A) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, siendo m un

número real.

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores de m para que el rango de A sea 3.

b) **(0.25 puntos)** Calcule los valores de m para los que A no tiene inversa.

c) **(1.25 puntos)** Para $m = 2$, calcule A^{-1} y resuelva la ecuación $X \cdot A = C$.

d) **(0.75 puntos)** Para $m = 1$, clasifique el sistema $A \cdot Y = B$ atendiendo al número de soluciones que tiene.

a) Para que el rango de A sea 3 el determinante de la matriz A debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = m^2 + m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2 = m} \\ \frac{-1+3}{2} = \boxed{1 = m} \end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de -2 y 1 el determinante de A es distinto de cero y por tanto su rango es 3.

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $m = 1$ y $m = -2$ el determinante de A es nulo y no tiene inversa.

c) Para $m = 2$ existe la inversa de A . La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2^2 + 2 - 2 = 4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X que cumple la igualdad $X \cdot A = C$.

$$X \cdot A = C \Rightarrow X = CA^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+0-4 & 0+0+0 & -1+0+4 \\ 0+0-6 & 0+4+0 & 0+0+6 \\ -2+0+2 & -2+0+2 & -2+0+2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 3/4 \\ -3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 3/4 \\ -3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

d) Para $m=1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El sistema $A \cdot Y = B$ tiene como matriz de

coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & & A/B \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & A \end{array} \right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B , menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

EJERCICIO 1

B) Se considera la función $f(x,y)=2x+y$ cuando (x,y) pertenece a la región factible delimitada por las inecuaciones:

$$4x+2y \geq 5; \quad 2x+5y \leq 9; \quad x+y \leq 3; \quad y \geq 0$$

a) (1.5 puntos) Dibuje la región factible y obtenga sus vértices.

b) (0.5 puntos) Obtenga algún punto de la región factible con abscisa $x=1$.

c) (1 punto) ¿Para qué valores de x e y se alcanza el máximo de la función f ? ¿Cuánto vale dicho máximo? Análogamente para el mínimo.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$4x+2y=5$$

x	$y = \frac{5-4x}{2}$
0	2.5
0.5	1.5
1.25	0

$$2x+5y=9$$

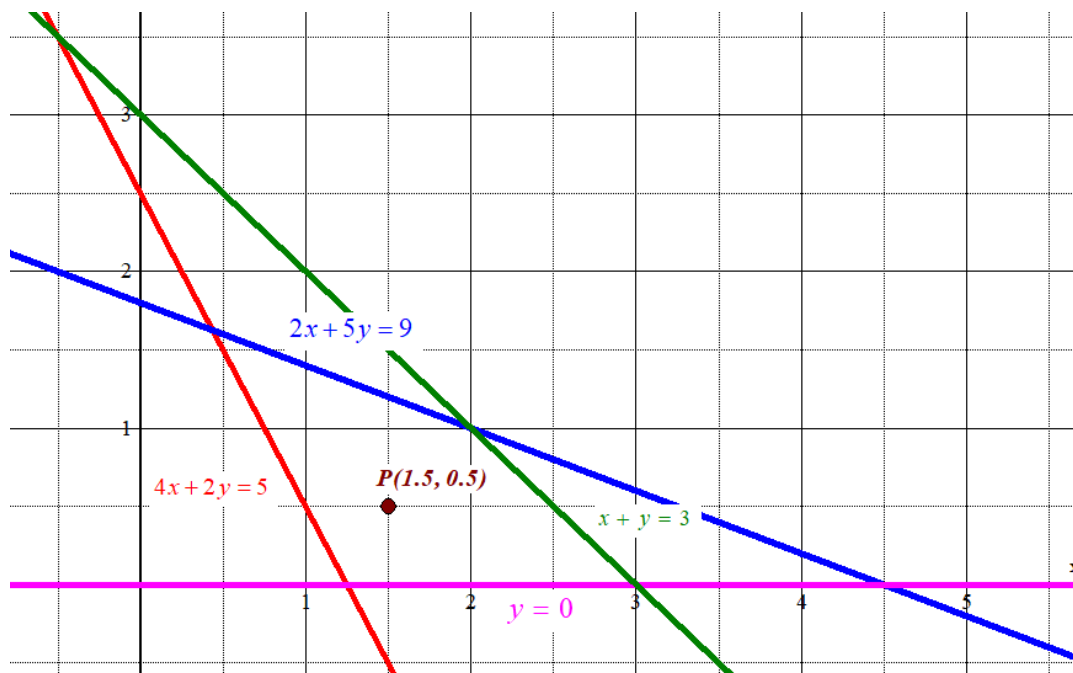
x	$y = \frac{9-2x}{5}$
2	1
4	0.2
4.5	0

$$x+y=3$$

x	$y = 3-x$
0	3
2	1
3	0

$$y=0$$

x	$y=0$
0	0
1.25	0
3	0

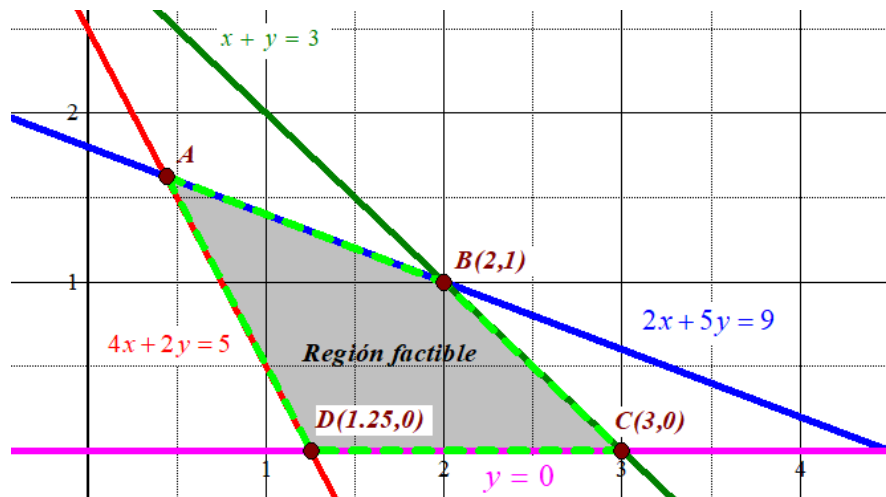


La región factible está situada por debajo de las rectas azul y verde y por encima de la recta roja y la recta horizontal rosa.

Comprobamos que el punto $P(1.5, 0.5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 1.5 + 2 \cdot 0.5 \geq 5 \\ 2 \cdot 1.5 + 5 \cdot 0.5 \leq 9 \\ 1.5 + 0.5 \leq 3 \\ 0.5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6 + 1 \geq 5 \\ 3 + 2.5 \leq 9 \\ 2 \leq 3 \\ 0.5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice A.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ 2x + 5y &= 9 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ \times(-2) &\rightarrow -4x - 10y = -18 \end{aligned} \\ &\hline -8y &= -13 \Rightarrow y = \frac{13}{8} \Rightarrow 2x + 5\frac{13}{8} = 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x = 9 - \frac{65}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow x = \frac{7}{16} \Rightarrow A\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right) \end{aligned}$$

Los vértices de la región factible son $A\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(1.25, 0)$.

b) Con abscisa $x=1$ tenemos el punto $Q(1, 0.5)$ que pertenece a la recta $4x + 2y = 5$.

$$\left. \begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow Q(1, 0.5)$$

c) Valoramos la función $f(x, y) = 2x + y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right) \rightarrow f\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right) = 2 \cdot \frac{7}{16} + \frac{13}{8} = \frac{20}{8} = 2.5 \text{ Mínimo}$$

$$B(2, 1) \rightarrow f(2, 1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$C(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 2 \cdot 3 + 0 = 6 \text{ Máximo}$$

$$D(1.25, 0) \rightarrow f(1.25, 0) = 2 \cdot 1.25 + 0 = 2.5 \text{ Mínimo}$$

El valor mínimo de la función es 2.5 y se alcanza en los vértices $A\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right)$ y $D(1.25, 0)$.

El valor mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AD: $A\left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right)$, $(0.75, 1)$,

$Q(1, 0.5)$, ..., $D(1.25, 0)$.

El valor máximo de la función es 6 y se alcanza en el vértice $C(3, 0)$, es decir, para $x=3$ e $y=0$.

EJERCICIO 2

El peso en kilogramos (kg) de una persona que inicia un determinado régimen alimenticio viene dado por la función:

$$P(t) = 75 - \frac{15t}{t+120}; \quad t \geq 0$$

Siendo t el tiempo, en días, que lleva haciendo la dieta.

a) **(1 punto)** Compruebe que, si la persona sigue de manera continuada el régimen alimenticio, irá reduciendo peso paulatinamente. ¿Cuál es el peso mínimo que podría llegar a alcanzar si pudiera seguir la dieta indefinidamente?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos días debe hacer de régimen para llegar a un peso de 64 kg?

c) **(1.25 puntos)** El índice de masa corporal viene dado por la función $i(t) = \frac{P(t)}{h^2}$, siendo h la estatura, en metros, de la persona. Se considera que la persona tiene sobrepeso si el índice de masa corporal es superior a 25 kg/m^2 . Si la persona mide 1.68 m , determine si ha tenido sobrepeso durante la dieta, y en caso afirmativo, calcule los días que han de transcurrir para dejar de tenerlo.

a) Obtenemos la derivada de la función.

$$P(t) = 75 - \frac{15t}{t+120} \Rightarrow P'(t) = -\frac{15(t+120) - 15t \cdot 1}{(t+120)^2} = -\frac{15t + 1800 - 15t}{(t+120)^2} = \frac{-1800}{(t+120)^2}$$

En esta expresión el numerador es una constante negativa y el denominador es positivo. La derivada siempre es negativa y el peso disminuye de forma continuada.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 75 - \frac{15t}{t+120} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 75 - \frac{\frac{15t}{t}}{\frac{t}{t} + \frac{120}{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 75 - \frac{15}{1 + \frac{120}{t}} = 75 - \frac{15}{1 + \frac{120}{+\infty}} = 75 - \frac{15}{1+0} = \boxed{60} \end{aligned}$$

Si pudiera seguir la dieta indefinidamente alcanzaría un peso de 60 kg.

b) Averiguamos el valor de t para el que $P(t) = 64$.

$$\begin{aligned} P(t) = 64 &\Rightarrow 75 - \frac{15t}{t+120} = 64 \Rightarrow 11 - \frac{15t}{t+120} = 0 \Rightarrow 11t + 1320 - 15t = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1320 - 4t = 0 \Rightarrow 4t = 1320 \Rightarrow t = \frac{1320}{4} = 330 \end{aligned}$$

Debe seguir la dieta durante 330 días para alcanzar un peso de 64 kg.

c) Si la persona mide 1.68 m el índice de masa corporal es $i(t) = \frac{P(t)}{1.68^2} = \frac{1}{1.68^2} \left(75 - \frac{15t}{t+120} \right)$.

Averiguamos cuando el índice es mayor de 25.

$$i(t) \geq 25 \Rightarrow \frac{1}{1.68^2} \left(75 - \frac{15t}{t+120} \right) \geq 25 \Rightarrow 75 - \frac{15t}{t+120} \geq 70.56 \Rightarrow 4.44 \geq \frac{15t}{t+120} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{t \geq 0 \rightarrow t+120 > 0\} \Rightarrow 4.44(t+120) \geq 15t \Rightarrow 4.44t + 532.8 \geq 15t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 532.8 \geq 10.56t \Rightarrow \frac{532.8}{10.56} \geq t \Rightarrow \boxed{t \leq 50.4545}$$

La persona tuvo sobrepeso durante los primeros 50 días del régimen. A partir del día 51 desde el inicio del régimen su índice corporal está por debajo de 25 kg/m^2 .

EJERCICIO 3

A) De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

- La probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 0.82.
- La probabilidad de que ocurran simultáneamente es 0.38.
- La probabilidad de que no ocurra A es 0.35.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que no ocurre A .

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

c) **(0.75 puntos)** Si repetimos el experimento en 10 ocasiones, halle la probabilidad de que el suceso A ocurra al menos 2 veces.

a) Nos dan los siguientes datos: $P(A \cup B) = 0.82$, $P(A \cap B) = 0.38$ y $P(\bar{A}) = 0.35$.

Podemos deducir la probabilidad de que ocurra A : $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.35 = 0.65$.

Podemos deducir la probabilidad de que ocurra B .

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.82 \\ P(A) = 0.65 \\ P(A \cap B) = 0.38 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.82 = 0.65 + P(B) - 0.38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.82 - 0.65 + 0.38 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.55}$$

Debemos calcular $P(B/\bar{A})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(\bar{A})} = \frac{0.55 - 0.38}{0.35} = \boxed{\frac{17}{35} \approx 0.4857}$$

b) Calculamos $P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$.

$$\begin{aligned} P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) &= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0.65 - 0.38 + 0.55 - 0.38 = \boxed{0.44} \end{aligned}$$

c) Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de ocasiones que ocurre A en 10 repeticiones del experimento. Esta es una variable binomial con parámetros n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que ocurra A = 0.65. $X = B(10, 0.65)$.

Nos piden calcular el valor de $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.65^0 \cdot 0.35^{10} + \binom{10}{1} 0.65^1 \cdot 0.35^9 \right] = 1 - [0.35^{10} + 10 \cdot 0.65 \cdot 0.35^9] = \boxed{0.9995} \end{aligned}$$

EJERCICIO 3

B) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 16 y varianza 4. Se pide:

- a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2.
- b) **(0.5 puntos)** Halle el valor de a para el que $P(X \geq a) = 0.25$.
- c) **(0.75 puntos)** Se consideran muestras de tamaño 64, ¿qué distribución sigue la variable media muestral? ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3?

a) La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{4} = 2$. $X = N(16, 2)$

Debemos calcular $P(14.5 \leq X \leq 16.2)$.

$$P(14.5 \leq X \leq 16.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 16}{2} \end{array} \right\} = P\left(\frac{14.5 - 16}{2} \leq Z \leq \frac{16.2 - 16}{2}\right) =$$

$$= P(-0.75 \leq Z \leq 0.1) = P(Z \leq 0.1) - P(Z \leq -0.75) = P(Z \leq 0.1) - P(Z \geq 0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.1) - [1 - P(Z \leq 0.75)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5398 - 1 + 0.7734 = \boxed{0.3132}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734

La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2 es de 0.3132.

b)

$$P(X \geq a) = 0.25 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 16}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 16}{2}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 16}{2}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 16}{2}\right) = 0.75 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a - 16}{2} = \frac{0.67 + 0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow a - 16 = 1.35 \Rightarrow \boxed{a = 17.35}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7421	0,7454	0,7486	0,7517

- c) La variable media muestral de muestras de tamaño 64: $\overline{X}_{64}$ sigue una distribución normal con la misma media 16 y con desviación típica $\sigma = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.25$. $\overline{X}_{64} = N(16, 0.25)$
- Debemos calcular $P(\overline{X}_{64} > 16.3)$.

$$P(\overline{X}_{64} > 16.3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{64} - 16}{0.25} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{16.3 - 16}{0.25}\right) = P(Z > 1.2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$

z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849

La probabilidad de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3 es de 0.1151.

EJERCICIO 4

Una comunidad autónoma está analizando el rendimiento de sus estudiantes en la última convocatoria de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) en una determinada materia. De los 20000 estudiantes presentados, 12000 cursaron bachillerato en un centro público, 6000 lo hicieron en un centro concertado y el resto en un centro privado no concertado. Para estimar la proporción de estudiantes que suspenden la materia en la PAU, se extrae una muestra aleatoria de 500 estudiantes que han realizado el examen.

- a) **(0.4 puntos)** Determine el tamaño de la muestra que se debe de tomar de cada tipo de centro para realizar un muestreo con afijación proporcional.
- b) Tras realizar el muestreo se obtuvo que 200 de los 500 estudiantes seleccionados suspendieron la asignatura.
- i) **(1 punto)** Calcule un intervalo de confianza al 99%, para determinar la proporción de estudiantes que suspenden la materia entre todos los presentados. Basándonos en este intervalo, ¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?
- ii) **(0.6 puntos)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos estudiantes, como mínimo, habría que seleccionar de forma aleatoria para que el error de estimación fuese inferior al 4%?

a) La proporción de alumnos a elegir en el total es $\frac{500}{20000} = \frac{1}{40}$.

De los 12000 alumnos que cursaron bachillerato en un centro público hay que elegir

$$12000 \cdot \frac{1}{40} = 300 \text{ alumnos.}$$

De los 6000 que lo hicieron en un centro concertado hay que elegir $6000 \cdot \frac{1}{40} = 150$

alumnos.

De los alumnos que estudiaron en un centro privado no concertado hay que elegir a los restantes $500 - 300 - 150 = 50$ alumnos.

- b) i) La proporción muestral de suspensos es $p = \frac{200}{500} = 0.4$. El tamaño de la muestra es $n = 500$.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99 %

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}} \approx 0.0564$$

El intervalo de confianza para la proporción real de los alumnos que suspenden es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0564, 0.4 + 0.0564) = (0.3436, 0.4564)$$

¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?

El porcentaje del 43% se corresponde con una proporción de 0.43, que pertenece al intervalo de confianza obtenido. No podemos afirmar que el porcentaje no pueda ser el 43%.

ii) Tenemos que la proporción muestral es $p = 0.4$. El valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$.

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de n

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow 0.04\sqrt{n} = 2.575 \cdot \sqrt{0.24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot \sqrt{0.24}}{0.04} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot \sqrt{0.24}}{0.04} \right)^2 \approx 994.594$$

Para que el error sea menor del 4% el tamaño de la muestra debe ser superior a 995 alumnos.