



Universidad de Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026

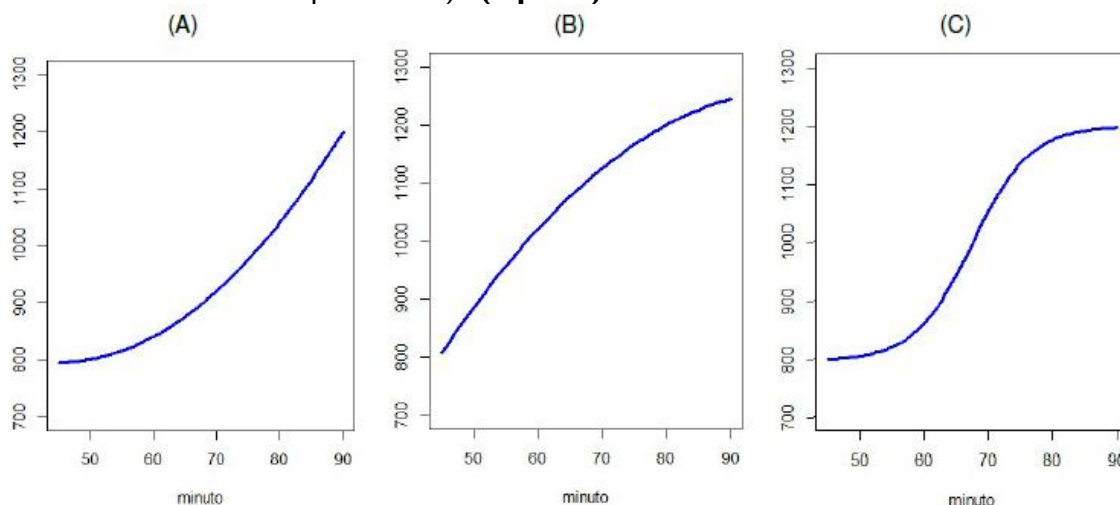
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. La audiencia (en miles de espectadores) que se registró durante un partido de fútbol se puede modelar mediante la función f , donde x representa el minuto de juego (cada partido de fútbol se divide en dos partes, cada una de ellas dura 45 minutos):

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + 10x + 570 & \text{si } 0 \leq x \leq 45 \\ \frac{1}{5}x^2 - 18x + 1200 & \text{si } 45 < x \leq 90 \end{cases}$$

- ¿En qué minutos de la primera parte del partido aumentó la audiencia? **(0.5 puntos)**
- ¿Disminuyó la audiencia en algún momento a lo largo de los 90 minutos de partido? **(1 punto)**
- Argumenta si alguna o varias de las gráficas siguientes se corresponde con la audiencia de los últimos 45 minutos de partido (en las tres gráficas x representa el tiempo en minutos e y la audiencia en miles de espectadores)? **(1 punto)**

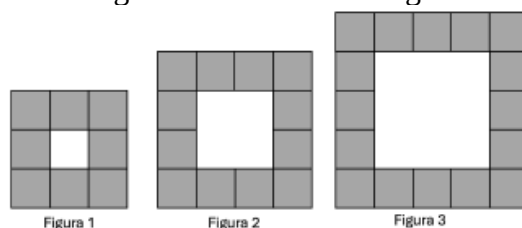


Pregunta 1. Opción B. Una empresa olivarera considera que la cantidad (medida en kg/ha) de aceituna recolectada en un año se puede expresar como una función (f) que depende los litros de lluvia caídos durante ese año (x). La expresión de f es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(-x^2 + 730x - 96000) & \text{si } 250 \leq x \leq 450 \\ \frac{2x^2}{5} - 390x + a & \text{si } 450 < x \leq 480 \end{cases} :$$

- Determina el valor de la constante a para que la función f sea continua en todo su dominio. **(1 punto)**
- Utilizando el valor de a obtenido en el apartado anterior, ¿con qué cantidad de lluvia se recogería la máxima cantidad de aceituna? ¿Cuántos kg/ha se recogen en ese caso? ¿Con qué cantidad de lluvia se recogería la mínima cantidad de aceituna? **(1.5 puntos)**

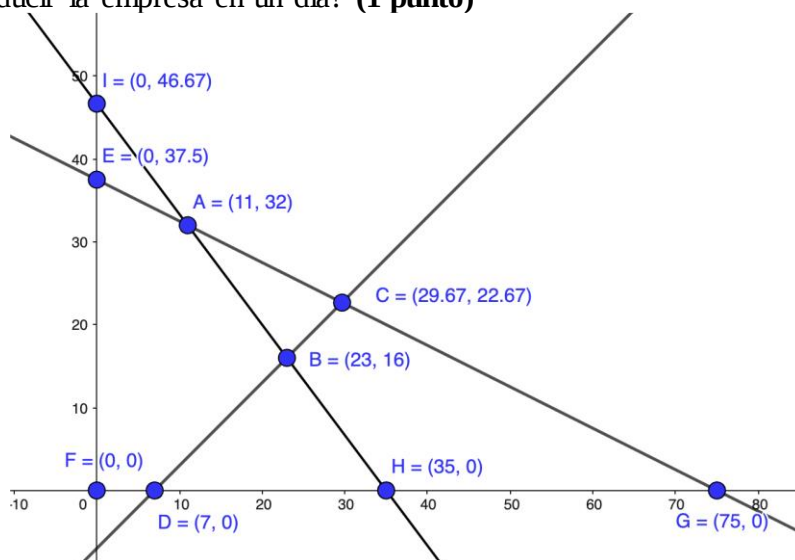
Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras:



- Determina cuántos cuadrados grises habrá en la figura número 17. Encuentra una fórmula general que relacione el número de cuadrados grises y el número de figura. **(2 puntos)**
- Considera la figura número n y la figura número m , ¿es posible que la diferencia entre el número de cuadrados grises de ambas figuras sea 9? En caso afirmativo, ¿cuáles serían n y m ? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Una empresa produce bicicletas (x) y patinetes (y). La empresa dispone diariamente de 700 kg de aluminio y 750 minutos en la línea de montaje. Para producir una bicicleta se necesitan procesar 20 kg de aluminio y se consumen 10 min en la línea de montaje; mientras que para un patinete se procesan 15 kg de aluminio y se consumen 20 min en la cadena de montaje. La empresa tiene que satisfacer un contrato que la obliga a entregar al menos 7 bicicletas más que patinetes.

- Señala cuáles son los vértices que, en la figura que se muestra a continuación, definen la región factible para el problema que consiste en resolver ¿Cuántas bicicletas y patinetes puede producir la empresa en un día? **(1 punto)**



- ¿Cambiaría el conjunto de posibles soluciones si cada patinete consumiera 10 minutos de montaje, en lugar de 20? Explica tu respuesta. **(0.5 puntos)**
- Si por cada bicicleta la empresa tiene una ganancia marginal de 4 € y por cada patinete gana 3 €, ¿cuántas bicicletas y patinetes debe producir al día para maximizar la ganancia? **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción A. Las variables x e y representan los fondos (en millones de euros) que un ayuntamiento va a dedicar, respectivamente, a créditos para autónomos y a ayudas a polígonos industriales. Las normas de gasto imponen algunas restricciones, que se pueden modelar con el siguiente sistema de ecuaciones (k es un parámetro que depende del crecimiento económico):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 5x - ky = 12 \end{cases}$$

- ¿Es posible que, para algún valor de k el ayuntamiento no encuentre solución en x e y ? Si es posible, halla ese valor k . **(1 punto)**

- b) Si $k = -3$, ¿cuántas soluciones existen para este sistema? Calcúlalas y explica si tienen sentido en el contexto del problema. **(1.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción B. Dado el parámetro m y las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & m \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & m \\ 2 & m+6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) A partir de $(A \cdot B - C) \cdot D = E$ plantea un sistema de dos ecuaciones, con incógnitas x e y . **(1 punto)**
- b) El sistema planteado, ¿tiene solución para cualquier valor de m ? En caso afirmativo, ¿es siempre única? En caso negativo, ¿para qué valores de m no tiene solución? Explica tus respuestas y calcula una solución para un valor de m , a tu elección, de los que hacen que el sistema tenga solución única. **(1.5 puntos)**

Pregunta 4. Opción A. En una asignatura que cursan conjuntamente estudiantes de las especialidades A y B de cierta carrera, el 60% del alumnado es de la especialidad A y el resto de la B. El porcentaje de suspensos sobre el conjunto del alumnado es del 30 %, mientras que si consideramos solo el alumnado de la especialidad A, este porcentaje sube al 40 %.

- a) Determina la probabilidad de que una persona elegida al azar de entre todo el alumnado sea de especialidad A y suspenda la asignatura. **(0.5 puntos)**
- b) Si se elige al azar un o una estudiante que haya aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo B? **(1.5 puntos)**
- c) ¿Es independiente, en términos de sucesos, suspender del grupo al que se pertenece? **(0.5 puntos)**

Pregunta 4. Opción B. En una encuesta sobre hábitos de vida saludables en Asturias, se observa que el 60% de la población practica senderismo. De este grupo, el 20% utiliza aplicaciones digitales de salud, mientras que solo el 5% de quienes no practican senderismo usa estas aplicaciones.

- a) Representa mediante un diagrama de árbol o una tabla los sucesos (y sus probabilidades) relacionados con seleccionar al azar una persona de Asturias para comprobar estos hábitos. **(0.5 puntos)**
- b) Calcula la probabilidad de que una persona de Asturias elegida al azar use aplicaciones digitales de salud. **(1 punto)**
- c) Si sabemos que una persona asturiana usa una aplicación digital de salud, ¿cuál es la probabilidad de que sea senderista? ¿Hay relación entre usar aplicaciones de salud y practicar senderismo? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción A.* Se desea estimar el gasto medio por turista en las zonas rurales de Asturias durante el verano, para lo que se selecciona una muestra aleatoria de 200 turistas. Se puede suponer que el gasto por turista sigue una distribución normal, con desviación típica de 15 €. Los siguientes son tres intervalos con diferentes niveles de confianza obtenidos a partir de la información de la muestra:

$$(A) (82.921, 87.079) \quad (B) (83.642, 86.358) \quad (C) (82.529, 87.471)$$

- a) ¿Qué gasto medio por turista se obtuvo en la muestra? **(0.5 puntos)**
- b) ¿Cuál de los tres es el intervalo al 95% de confianza para el gasto medio poblacional? **(1 punto)**
- c) Explica qué significa que el intervalo sea más o menos ancho según el nivel de confianza elegido. De entre los tres anteriores justifica cuál es el intervalo que correspondería a un nivel de confianza del 80 %. **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción B.* Para valorar una nueva propuesta de movilidad sostenible en el área central de Asturias, se encarga un sondeo de opinión realizado sobre 500 personas seleccionadas al azar. A partir del sondeo, se estima la proporción de población a favor de la propuesta mediante un intervalo al 95 %: (0.52, 0.60).

- Determina la proporción muestral de población a favor de la propuesta y el error máximo de estimación que se comete con este intervalo. **(1 punto)**
- A partir del intervalo de confianza, ¿crees que los responsables políticos pueden estar seguros de que la mayoría de la población apoya la propuesta? Explica tu respuesta. **(0.5 puntos)**
- Si los responsables políticos quieren que el error sea inferior al 1 %, ¿cómo debería variar el tamaño de la muestra? Justifica la respuesta basándote en la relación entre el error y el tamaño muestral. Si se mantuviera el nivel de confianza al 95% y la proporción muestral siguiera siendo la misma, ¿cuál debería ser el nuevo tamaño de la muestra para que el error máximo no supere el 1%? **(1 punto)**

*Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 \text{ y } F(2.58) = 0.995.$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ con } F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

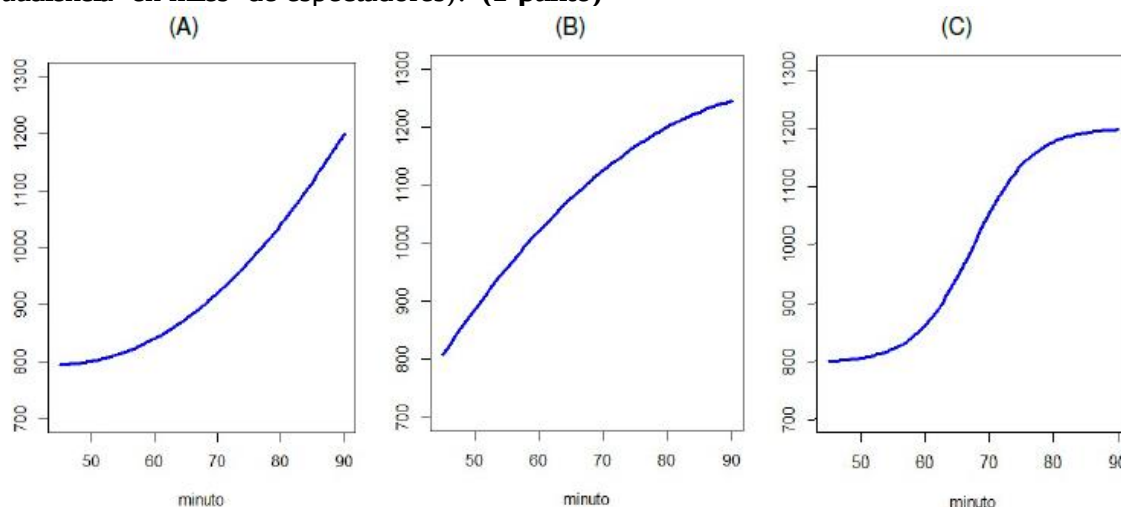
$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \text{ con } F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. La audiencia (en miles de espectadores) que se registró durante un partido de fútbol se puede modelar mediante la función f , donde x representa el minuto de juego (cada partido de fútbol se divide en dos partes, cada una de ellas dura 45 minutos):

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + 10x + 570 & \text{si } 0 \leq x \leq 45 \\ \frac{1}{5}x^2 - 18x + 1200 & \text{si } 45 < x \leq 90 \end{cases}$$

- a) ¿En qué minutos de la primera parte del partido aumentó la audiencia? **(0.5 puntos)**
 b) ¿Disminuyó la audiencia en algún momento a lo largo de los 90 minutos de partido? **(1 punto)**
 c) Argumenta si alguna o varias de las gráficas siguientes se corresponde con la audiencia de los últimos 45 minutos de partido (en las tres gráficas x representa el tiempo en minutos e y la audiencia en miles de espectadores)? **(1 punto)**



- a) Averiguamos cuando se anula la derivada en el intervalo $[0, 45]$.

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 10x + 570 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{9}x + 10$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{9}x + 10 = 0 \Rightarrow -2x + 90 = 0 \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow \boxed{x = \frac{90}{2} = 45}$$

La función presenta un punto crítico en el extremo del intervalo. En el intervalo la derivada no cambia de signo. Comprobamos el signo de la derivada en el intervalo.

$$10 \in (0, 45) \Rightarrow f'(10) = -\frac{2}{9}10 + 10 = \frac{70}{9} > 0$$

La función es creciente en el intervalo $(0, 45)$. La audiencia aumenta durante los primeros 45 minutos alcanzando el máximo valor en el minuto 45.

Como $f(45) = -\frac{1}{9}45^2 + 10 \cdot 45 + 570 = 795$ la audiencia máxima en los primeros 45 minutos del partido es de 795000 espectadores.

- b) Comprobamos si la función es continua en $x = 45$.

$$\left. \begin{aligned} f(45) &= 795 \\ \lim_{x \rightarrow 45^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 45^-} -\frac{1}{9}x^2 + 10x + 570 = 795 \\ \lim_{x \rightarrow 45^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 45^+} \frac{1}{5}x^2 - 18x + 1200 = \frac{1}{5}45^2 - 18 \cdot 45 + 1200 = 795 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 45^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 45^+} f(x) = f(45) = 795$$

La función es continua en $x = 45$ y por tanto, es continua en todo su dominio $[0, 90]$. Hemos visto que la audiencia crece durante los primeros 45 minutos. Estudiamos lo que ocurre en la segunda parte del partido.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 18x + 1200 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{5}x^2 - 18$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 90 = 0 \Rightarrow x^2 - 45 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{45} \notin [45, 90]$$

La función no presenta puntos críticos en el intervalo $[45, 90]$. Vemos cual es el signo de la derivada en este intervalo.

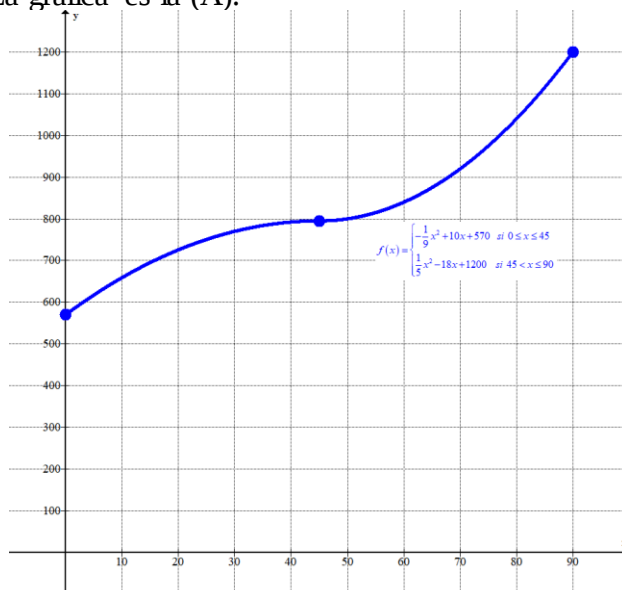
$$\left. \begin{aligned} 50 &\in (45, 90) \\ f'(x) &= \frac{2}{5}x - 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(50) = \frac{2}{5}50 - 18 = 2 > 0$$

La función crece en todo el intervalo $[45, 90]$. La audiencia crece durante todo el partido.

- c) Durante la segunda parte sabemos que la función crece y podría ser cualquiera de las tres gráficas. Obtenemos la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{2}{5}x - 18 \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{5} > 0$$

La segunda derivada es positiva en todo el intervalo, por lo que la función es convexa (U) en el intervalo $[45, 90]$. La gráfica es la (A).



Pregunta 1. Opción B. Una empresa olivarera considera que la cantidad (medida en kg/ha) de aceituna recolectada en un año se puede expresar como una función (f) que depende los litros de lluvia caídos durante ese año (x). La expresión de f es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(-x^2 + 730x - 96000) & \text{si } 250 \leq x \leq 450 \\ \frac{2x^2}{5} - 390x + a & \text{si } 450 < x \leq 480 \end{cases} :$$

- a) Determina el valor de la constante a para que la función f sea continua en todo su dominio. (1 punto)
- b) Utilizando el valor de a obtenido en el apartado anterior, ¿con qué cantidad de lluvia se recogería la máxima cantidad de aceituna? ¿Cuántos kg/ha se recogen en ese caso? ¿Con qué cantidad de lluvia se recogería la mínima cantidad de aceituna? (1.5 puntos)

- a) La función tiene una expresión polinómica en los intervalos $[250, 450)$ y $(450, 480]$, por lo tanto, es continua en $[250, 450) \cup (450, 480]$. La función debe ser continua en $x = 450$.

$$\left. \begin{aligned} f(450) &= \frac{1}{6}(-450^2 + 730 \cdot 450 - 96000) = 5000 \\ \lim_{x \rightarrow 450^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 450^-} \frac{1}{6}(-450^2 + 730 \cdot 450 - 96000) = 5000 \\ \lim_{x \rightarrow 450^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 450^+} \frac{2x^2}{5} - 390x + a = \frac{2 \cdot 450^2}{5} - 390 \cdot 450 + a = a - 94500 \\ \lim_{x \rightarrow 450^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 450^+} f(x) = f(450) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5000 = a - 94500 \Rightarrow \boxed{a = 99500}$$

Para $a = 99500$ la función es continua en todo su dominio.

- b) Para $a = 99500$ la función es continua y tiene la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(-x^2 + 730x - 96000) & \text{si } 250 \leq x \leq 450 \\ \frac{2x^2}{5} - 390x + 99500 & \text{si } 450 < x \leq 480 \end{cases} .$$

$$\text{Su derivada es } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(-2x + 730) & \text{si } 250 \leq x < 450 \\ \frac{4x}{5} - 390 & \text{si } 450 < x \leq 480 \end{cases} .$$

Buscamos los valores que anulan la derivada (puntos críticos).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}(-2x + 730) = 0 \rightarrow -2x + 730 = 0 \Rightarrow x = \frac{730}{2} = 365 \in [250, 450) \\ \frac{4x}{5} - 390 = 0 \rightarrow 4x - 1950 = 0 \rightarrow x = \frac{1950}{4} = 487.5 \notin (450, 480] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x = 365$ y del punto donde la función cambia de definición $x = 450$.

- En el intervalo $[250, 365)$ tomamos $x = 300$ y la derivada vale

$$f'(300) = \frac{1}{6}(-2 \cdot 300 + 730) = \frac{65}{3} > 0. \text{ La función crece en } [250, 365).$$

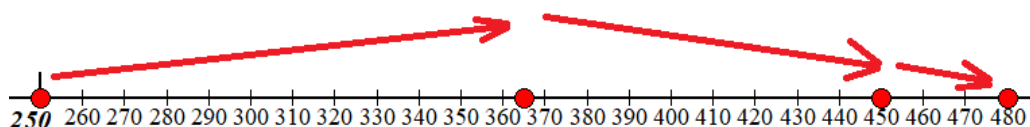
- En el intervalo $[365, 450)$ tomamos $x = 400$ y la derivada vale

$$f'(400) = \frac{1}{6}(-2 \cdot 400 + 730) = \frac{-70}{6} < 0. \text{ La función decrece en } [365, 450).$$

- En el intervalo $(450, 480]$ tomamos $x = 460$ y la derivada vale

$$f'(460) = \frac{4 \cdot 460}{5} - 390 = -22 < 0. \text{ La función decrece en } (450, 480].$$

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



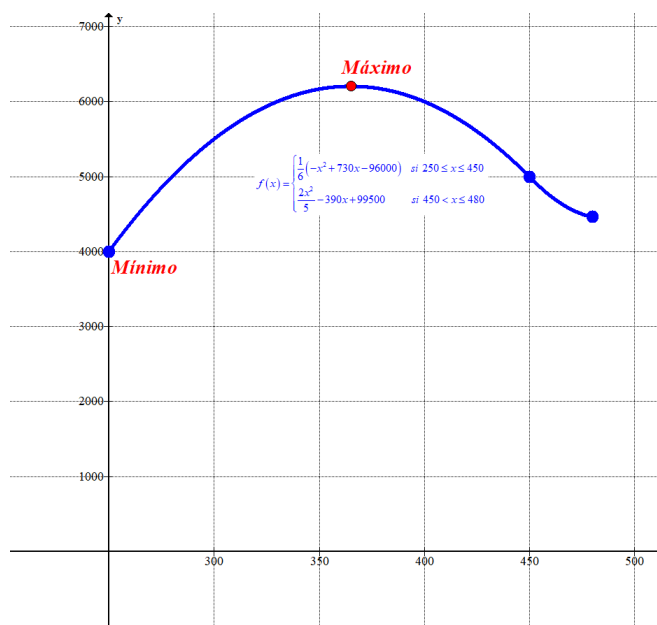
La máxima cantidad de aceituna se recoge con 365 litros de lluvia.

Como $f(365) = \frac{1}{6}(-365^2 + 730 \cdot 365 - 96000) = 6204.17$ la cantidad máxima de aceituna que se recogerían son 6204.17 kg/ha.

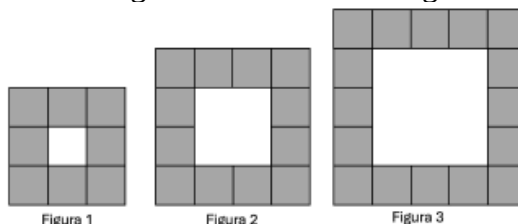
Para saber la cantidad mínima de aceituna que se puede recoger valoramos la función en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned} f(250) &= \frac{1}{6}(-250^2 + 730 \cdot 250 - 96000) = 4000 \text{ Mínimo} \\ f(480) &= \frac{2 \cdot 480^2}{5} - 390 \cdot 480 + 99500 = 4460 \end{aligned} \right\}$$

La cantidad mínima de aceituna que se puede recoger es de 4000 kg/ha cuando lloven 250 litros.



Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras:



- a) Determina cuántos cuadrados grises habrá en la figura número 17. Encuentra una fórmula general que relacione el número de cuadrados grises y el número de figura. **(2 puntos)**
- b) Considera la figura número n y la figura número m , ¿es posible que la diferencia entre el número de cuadrados grises de ambas figuras sea 9? En caso afirmativo, ¿cuáles serían n y m ? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

- a) En cada figura hay 4 cuadrados grises más que en la anterior. La secuencia de cuadrados grises en cada figura es:

$$\text{Figura 1} \rightarrow 8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 + 1)$$

$$\text{Figura 2} \rightarrow 12 = 8 + 4 = 4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 + 1)$$

$$\text{Figura 3} \rightarrow 16 = 12 + 4 = 8 + 2 \cdot 4 = 4 \cdot (3 + 1), \dots$$

$$\text{En la figura 4 habrán } 4 \cdot (4 + 1) = 20$$

$$\text{En la figura 5 habrán } 4 \cdot (5 + 1) = 24.$$

$$\text{En la figura 16 habrán } 4 \cdot (16 + 1) = 68 \text{ cuadrados grises.}$$

$$\text{En la figura 17 habrán } 4 \cdot (17 + 1) = 72 \text{ cuadrados grises.}$$

$$\text{En la figura } n \text{ habrán } 4 \cdot (n + 1) = 4n + 4 \text{ cuadrados grises.}$$

- b) Averiguamos si es posible lo pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Figura } n \rightarrow 4n + 4 \\ \text{Figura } m \rightarrow 4m + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (4m + 4) - (4n + 4) = 4m - 4n = 4(m - n)$$

Esta diferencia nunca puede ser 9.

$$4(m - n) = 9 \Rightarrow m - n = \frac{9}{4} = 2.25$$

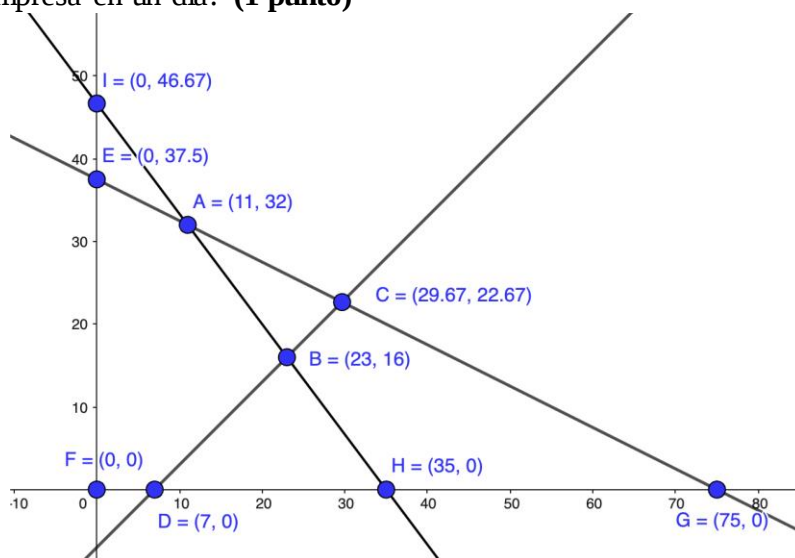
La diferencia entre dos números enteros no puede dar como resultado un número decimal. No es posible que la diferencia entre el número de cuadrados grises de ambas figuras sea 9.

Otra forma de razonar que no es posible:

La diferencia entre el número de cuadrados grises de dos figuras consecutivas es 4. Si las figuras no son consecutivas siempre es un múltiplo de 4 y evidentemente 9 no es múltiplo de 4.

Pregunta 2. Opción B. Una empresa produce bicicletas (x) y patinetes (y). La empresa dispone diariamente de 700 kg de aluminio y 750 minutos en la línea de montaje. Para producir una bicicleta se necesitan procesar 20 kg de aluminio y se consumen 10 min en la línea de montaje; mientras que para un patinete se procesan 15 kg de aluminio y se consumen 20 min en la cadena de montaje. La empresa tiene que satisfacer un contrato que la obliga a entregar al menos 7 bicicletas más que patinetes.

- a) Señala cuáles son los vértices que, en la figura que se muestra a continuación, definen la región factible para el problema que consiste en resolver ¿Cuántas bicicletas y patinetes puede producir la empresa en un día? **(1 punto)**



- b) ¿Cambiaría el conjunto de posibles soluciones si cada patinete consumiera 10 minutos de montaje, en lugar de 20? Explica tu respuesta. **(0.5 puntos)**
- c) Si por cada bicicleta la empresa tiene una ganancia marginal de 4 € y por cada patinete gana 3 €, ¿cuántas bicicletas y patinetes debe producir al día para maximizar la ganancia? **(1 punto)**

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Aluminio	Montaje (m)
Número de bicicletas (x)	$20x$	$10x$
Número de patinetes (y)	$15y$	$20y$
TOTAL	$20x + 15y$	$10x + 20y$

“La empresa dispone diariamente de 700 kg de aluminio y 750 minutos en la línea de montaje” $\rightarrow 20x + 15y \leq 700$; $10x + 20y \leq 750$

“La empresa tiene que satisfacer un contrato que la obliga a entregar al menos 7 bicicletas más que patinetes” $\rightarrow x \geq y + 7$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 15y \leq 700 \\ 10x + 20y \leq 750 \\ x \geq y + 7 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 140 \\ x + 2y \leq 75 \\ y \leq x - 7 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Hacemos una tabla de valores con cada recta que delimita la región factible.

$$y = x - 7$$

x	y = x - 7
7	0
23	16

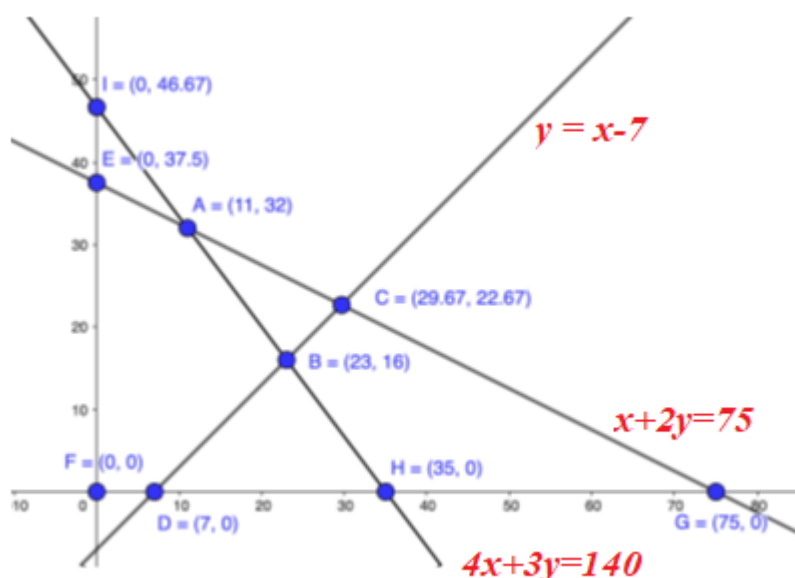
$$x + 2y = 75$$

x	y = $\frac{75-x}{2}$
0	37.5
75	0

$$4x + 3y = 140$$

x	y = $\frac{140-4x}{3}$
11	32
35	0

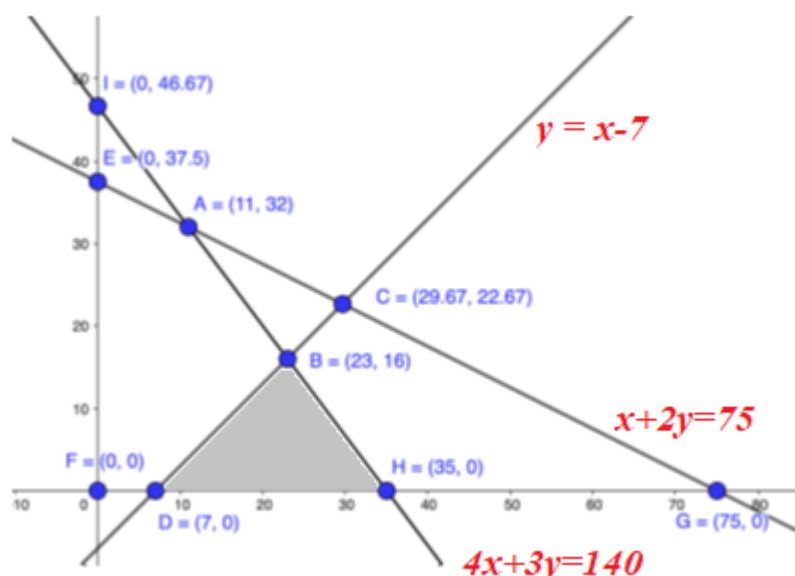
Identificamos las rectas.



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 140 \\ x + 2y \leq 75 \\ y \leq x - 7 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

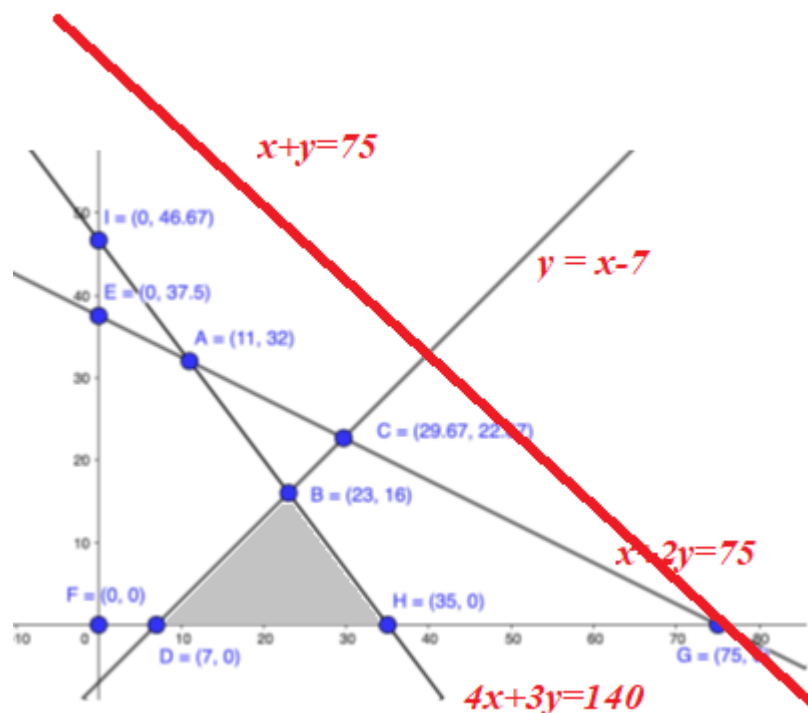
situada por debajo de las tres rectas. Coloreamos de gris la región del plano que cumple todas las restricciones.



Los vértices que delimitan la región factible son B(23, 16), D(7, 0) y H(35, 0).

La empresa entre bicicletas y patinetes puede producir en un día un máximo de $23 + 16 = 39$ aparatos.

- b) Si cada patinete consumiera 10 minutos de montaje, en lugar de 20 cambiaría una de las restricciones que ahora es $10x + 20y \leq 750$ y que con las nuevas condiciones sería $10x + 10y \leq 750$. La recta $x + 2y = 75$ no influía en la región factible que solo la delimitaban las otras dos rectas. La nueva recta seguiría sin influir en la región factible. No cambiaría la región factible con el cambio introducido.



- c) La función ganancia viene dada por la expresión $G(x, y) = 4x + 3y$. Los vértices de la región factible son $B(23, 16)$, $D(7, 0)$ y $H(35, 0)$. Valoramos la función ganancia $G(x, y) = 4x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo.

$$B(23, 16) \rightarrow G(23, 16) = 4 \cdot 23 + 3 \cdot 16 = 140 \text{ Máximo}$$

$$D(7, 0) \rightarrow G(7, 0) = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 0 = 28$$

$$H(35, 0) \rightarrow G(35, 0) = 4 \cdot 35 + 3 \cdot 0 = 140 \text{ Máximo}$$

Todos los puntos que maximizan la ganancia están situados en el segmento BH. Estos puntos deben tener coordenadas enteras. Estos puntos son: $(23, 16)$, $(26, 12)$, $(29, 8)$, $(32, 4)$, $(35, 0)$. La ganancia máxima que se puede conseguir es de 140 € con la fabricación de 35 bicicletas y ningún patinete, o bien con la fabricación de 23 bicicletas y 16 patinetes, o bien con la fabricación de 26 bicicletas y 12 patinetes, o bien con la fabricación de 29 bicicletas y 8 patinetes, o bien con la fabricación de 32 bicicletas y 4 patinetes.

Pregunta 3. Opción A. Las variables x e y representan los fondos (en millones de euros) que un ayuntamiento va a dedicar, respectivamente, a créditos para autónomos y a ayudas a polígonos industriales. Las normas de gasto imponen algunas restricciones, que se pueden modelar con el siguiente sistema de ecuaciones (k es un parámetro que depende del crecimiento económico):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 5x - ky = 12 \end{cases}$$

- a) ¿Es posible que, para algún valor de k el ayuntamiento no encuentre solución en x e y ? Si es posible, halla ese valor k . **(1 punto)**
 b) Si $k = -3$, ¿cuántas soluciones existen para este sistema? Calcúlalas y explica si tienen sentido en el contexto del problema. **(1.5 puntos)**

a) Obtenemos un sistema triangular equivalente al dado.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 5x - ky = 12 \end{cases} \xrightarrow{(-5) \times \rightarrow} \begin{cases} -15x - 20y = -120 \\ 5x - ky = 12 \end{cases} \xrightarrow{3 \times \rightarrow} \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 15x - 3ky = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ (20 + 3k)y = 84 \end{cases}$$

$$\underline{-(20 + 3k)y = -84}$$

Para que el sistema no tenga solución debe ser $20 + 3k = 0 \rightarrow k = -\frac{20}{3}$.

Para $k = -\frac{20}{3}$ el sistema queda $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 5x + \frac{20}{3}y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 24 \quad \times 5 \rightarrow 15x + 20y = 120 \\ 15x + 20y = 36 \end{cases}$

Quedaría un sistema con dos ecuaciones con el primer miembro igual pero el segundo distinto. Un sistema sin solución posible.

Para $k = -\frac{20}{3}$ el sistema no tiene solución.

- b) Si $k = -3$ el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior queda $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ (20 - 9)y = 84 \end{cases}$
 . Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 11y = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ y = \frac{84}{11} \end{cases} \Rightarrow 3x + 4 \frac{84}{11} = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33x + 336 = 264 \Rightarrow 33x = -72 \Rightarrow x = \frac{-72}{33} = \frac{-24}{11}$$

Si $k = -3$ el sistema solo tiene una solución: $x = \frac{-24}{11}$, $y = \frac{84}{11}$.

La solución no tiene sentido en el contexto del problema pues el ayuntamiento invertiría $\frac{-24}{11} \simeq -2.181818$ millones de euros en créditos a autónomos. Es una cantidad negativa y no tiene sentido.

Pregunta 3. Opción B. Dado el parámetro m y las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & m \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & m \\ 2 & m+6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) A partir de $(A \cdot B - C) \cdot D = E$ plantea un sistema de dos ecuaciones, con incógnitas x e y . (1 punto)
- b) El sistema planteado, ¿tiene solución para cualquier valor de m ? En caso afirmativo, ¿es siempre única? En caso negativo, ¿para qué valores de m no tiene solución? Explica tus respuestas y calcula una solución para un valor de m , a tu elección, de los que hacen que el sistema tenga solución única. (1.5 puntos)

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & m \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2m & -3+m \\ 4+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-2 & m-3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 2m-2 & m-3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & m \\ 2 & m+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & -3 \\ 4 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B - C) \cdot D = E \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m & -3 \\ 4 & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2mx - 3y = -1 \\ 4x + (1-m)y = 1 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} 2mx - 3y = -1 \\ 4x + (1-m)y = 1 \end{cases}$.

- b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes. Vemos cuando se anula su determinante.

$$\begin{vmatrix} 2m & -3 \\ 4 & 1-m \end{vmatrix} = 2m(1-m) + 12 = 2m - 2m^2 + 12 = -2m^2 + 2m + 12$$

$$\text{Deter min ante} = 0 \Rightarrow -2m^2 + 2m + 12 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = m \\ \frac{1-5}{2} = -2 = m \end{cases}$$

Analizamos las tres situaciones diferentes que se plantean.

- Si $m \neq 3$ y $m \neq -2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = 3$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.

El sistema queda $\begin{cases} 6x - 3y = -1 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 el sistema equivalente nos queda $\begin{cases} 12x - 6y = -2 \\ 12x - 6y = 3 \end{cases}$. Las dos igualdades no pueden ocurrir a la vez. El sistema no tiene solución.

- Si $m = -2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.

El sistema queda $\begin{cases} -4x - 3y = -1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$. Las dos igualdades son la misma. El sistema tiene infinitas soluciones.

Respuesta: El sistema no tiene solución para $m = 3$. Tiene solución para cualquier valor de m distinto de 3, teniendo solución única para $m \neq 3$ y $m \neq -2$.

Resolvemos el sistema para $m = 0$. Sabemos que el sistema tiene solución única. La hallamos.

$$\begin{cases} -3y = -1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 4x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 12x + 1 = 3 \Rightarrow 12x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Para $m = 0$ la solución del sistema es $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$.

Pregunta 4. Opción A. En una asignatura que cursan conjuntamente estudiantes de las especialidades A y B de cierta carrera, el 60% del alumnado es de la especialidad A y el resto de la B. El porcentaje de suspensos sobre el conjunto del alumnado es del 30 %, mientras que si consideramos solo el alumnado de la especialidad A, este porcentaje sube al 40 %.

- a) Determina la probabilidad de que una persona elegida al azar de entre todo el alumnado sea de especialidad A y suspenda la asignatura. **(0.5 puntos)**
 b) Si se elige al azar un o una estudiante que haya aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo B? **(1.5 puntos)**
 c) ¿Es independiente, en términos de sucesos, suspender del grupo al que se pertenece? **(0.5 puntos)**

Si denotamos los sucesos como: A = “El o la estudiante cursa la especialidad A”, B = “El o la estudiante cursa la especialidad B” y S = “El o la estudiante suspende”, podemos interpretar la información proporcionada en el enunciado en términos de probabilidad, como:

$P(A) = 0.6$, $P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$, $P(S) = 0.3$ y $P(S/A) = 0.4$. Hallamos $P(S/B)$.

$$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B) = P(A)P(S/A) + P(B)P(S/B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.3 = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot P(S/B) \Rightarrow 0.3 = 0.24 + 0.4 \cdot P(S/B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.06 = 0.4 \cdot P(S/B) \Rightarrow P(S/B) = \frac{0.06}{0.4} = 0.15$$

- a) Nos piden calcular $P(A \cap S)$.

$$P(A \cap S) = P(A)P(S/A) = 0.6 \cdot 0.4 = \boxed{0.24}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/\bar{S})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{S}) = \frac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(B)P(\bar{S}/B)}{1 - P(S)} = \frac{0.4 \cdot (1 - 0.15)}{1 - 0.3} = \boxed{\frac{17}{35} \approx 0.4857}$$

- c) La probabilidad de suspender es 0.3, la de suspender si eres de la especialidad A es 0.4 y de suspender si eres de la especialidad B es 0.15. Los sucesos suspender y el grupo al que perteneces no son independientes.

OTRA FORMA

Hacemos una tabla de contingencia. Para ello suponemos que hay 100 estudiantes.

	Suspende	No suspende	
Especialidad A	$0.4 \cdot 60 = 24$		60
Especialidad B			
TOTALES	30		100

Completamos la tabla.

	Suspende	No suspende	
Especialidad A	24	36	60
Especialidad B	6	34	40
TOTALES	30	70	100

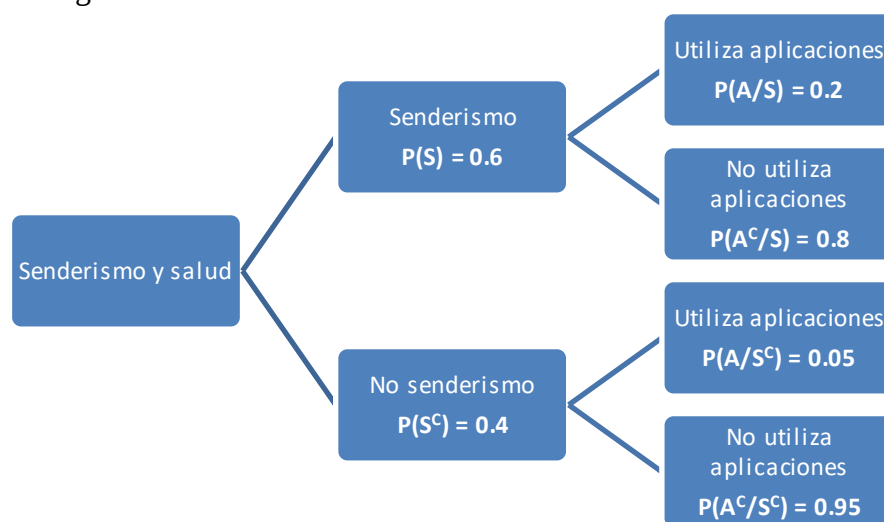
- a) De los 100 estudiantes 24 son de la especialidad A y suspenden. La probabilidad de que una persona elegida al azar de entre todo el alumnado sea de especialidad A y suspenda la asignatura vale $\frac{24}{100} = 0.24$.
- b) Hay 70 alumnos que aprueban y de estos son 34 los que pertenecen al grupo B. La probabilidad de que el alumno que aprueba pertenezca al grupo B vale $\frac{34}{70} = \frac{17}{35} \approx 0.4857$.
- c) Los sucesos son dependientes pues la probabilidad de suspender es distinta dependiendo del grupo en el que estés: $P(S / A) = \frac{24}{60} = 0.4$ y $P(S / B) = \frac{6}{40} = 0.15$.

Pregunta 4. Opción B. En una encuesta sobre hábitos de vida saludables en Asturias, se observa que el 60% de la población practica senderismo. De este grupo, el 20% utiliza aplicaciones digitales de salud, mientras que solo el 5% de quienes no practican senderismo usa estas aplicaciones.

- Representa mediante un diagrama de árbol o una tabla los sucesos (y sus probabilidades) relacionados con seleccionar al azar una persona de Asturias para comprobar estos hábitos. **(0.5 puntos)**
- Calcula la probabilidad de que una persona de Asturias elegida al azar use aplicaciones digitales de salud. **(1 punto)**
- Si sabemos que una persona asturiana usa una aplicación digital de salud, ¿cuál es la probabilidad de que sea senderista? ¿Hay relación entre usar aplicaciones de salud y practicar senderismo? **(1 punto)**

Llamamos S al suceso “practicar senderismo” y A a “utilizar aplicaciones digitales de salud”. Sabemos que $P(S) = 0.60$, $P(A/S) = 0.20$ y $P(A/\bar{S}) = 0.05$.

- Hacemos un diagrama de árbol.



- Debemos calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(S)P(A/S) + P(S^c)P(A/S^c) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.05 = \boxed{0.14}$$

- Debemos calcular $P(S/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S)P(A/S)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.14} = \boxed{\frac{6}{7} \approx 0.8571}$$

¿Hay relación entre usar aplicaciones de salud y practicar senderismo?

$P(A/S) = 0.2$ y $P(A) = 0.14$. Son distintas por lo que son dependientes.

Pregunta 5. Opción A.* Se desea estimar el gasto medio por turista en las zonas rurales de Asturias durante el verano, para lo que se selecciona una muestra aleatoria de 200 turistas. Se puede suponer que el gasto por turista sigue una distribución normal, con desviación típica de 15 €. Los siguientes son tres intervalos con diferentes niveles de confianza obtenidos a partir de la información de la muestra:

(A) (82.921, 87.079) (B) (83.642, 86.358) (C) (82.529, 87.471)

- a) ¿Qué gasto medio por turista se obtuvo en la muestra? (0.5 puntos)
 b) ¿Cuál de los tres es el intervalo al 95% de confianza para el gasto medio poblacional? (1 punto)
 c) Explica qué significa que el intervalo sea más o menos ancho según el nivel de confianza elegido. De entre los tres anteriores justifica cuál es el intervalo que correspondería a un nivel de confianza del 80 %. (1 punto)

a) X = El gasto por turista. $X = N(\mu, 15)$.

El tamaño de la muestra es $n = 200$.

La media muestral es el valor central de los intervalos de confianza:

$$\bar{x} = \frac{82.921 + 87.079}{2} = \frac{83.642 + 86.358}{2} = \frac{82.529 + 87.471}{2} = 85$$

El gasto medio por turista que se obtuvo en la muestra es de 85 euros.

b) Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow \{F(1,96) = 0.975\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{200}} \approx 2.079 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media del gasto por turista en las zonas rurales de Asturias es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (85 - 2.079, 85 + 2.079) = (82.921, 87.079)$$

El intervalo al 95% de confianza para el gasto medio poblacional es el (A).

c) La amplitud del intervalo es el doble del valor del error. El error es directamente proporcional al valor de $z_{\alpha/2}$. El valor de $z_{\alpha/2}$ es proporcional al valor del nivel de confianza.

A mayor nivel de confianza la amplitud del intervalo es mayor. Y de forma análoga a menor nivel de confianza la amplitud del intervalo es menor.

Como 80% es un nivel de confianza menor que 95% el intervalo de confianza al 80% debe tener menor amplitud que el de 95%.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error}(A) = \frac{87.079 - 82.921}{2} = 2.079 \\ \text{Error}(B) = \frac{86.358 - 83.642}{2} = 1.358 \\ \text{Error}(C) = \frac{87.471 - 82.529}{2} = 2.471 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Error}(B) = 1.358 < 2.079 = \text{Error}(A)$$

El intervalo de confianza al 80% es el (B). El (C) es de un nivel de confianza mayor del 95%.

Pregunta 5. Opción B.* Para valorar una nueva propuesta de movilidad sostenible en el área central de Asturias, se encarga un sondeo de opinión realizado sobre 500 personas seleccionadas al azar. A partir del sondeo, se estima la proporción de población a favor de la propuesta mediante un intervalo al 95 %: (0.52, 0.60).

- Determina la proporción muestral de población a favor de la propuesta y el error máximo de estimación que se comete con este intervalo. **(1 punto)**
- A partir del intervalo de confianza, ¿crees que los responsables políticos pueden estar seguros de que la mayoría de la población apoya la propuesta? Explica tu respuesta. **(0.5 puntos)**
- Si los responsables políticos quieren que el error sea inferior al 1 %, ¿cómo debería variar el tamaño de la muestra? Justifica la respuesta basándote en la relación entre el error y el tamaño muestral. Si se mantuviera el nivel de confianza al 95% y la proporción muestral siguiera siendo la misma, ¿cuál debería ser el nuevo tamaño de la muestra para que el error máximo no supere el 1%? **(1 punto)**

- a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.60 + 0.52}{2} = 0.56$$

El error máximo es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{0.60 - 0.52}{2} = 0.04$$

- b) Si se puede decir que sea la mayoría, pues la proporción muestral es del 56%, ligeramente superior a la mitad de la población. Aunque esa mayoría es muy justa. Todo esto con un nivel de confianza del 95%

- c) Si queremos que el error sea menor que el de antes ($0.01 < 0.04$) debemos aumentar el tamaño muestral. La fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$. El error es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño de la muestra n . A mayor valor de n menor el valor del Error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.01 = 1.96 \sqrt{\frac{0.56 \cdot 0.44}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2464}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{1.96} \right)^2 = \frac{0.2464}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2464}{\left(\frac{0.01}{1.96} \right)^2} \approx 9465.7$$

Para que el error máximo sea del 1% el tamaño muestral debe aumentar hasta 9466 personas.