



PAU
Convocatoria extraordinaria 2026
MATEMÁTICAS APLICADAS
A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CÓDIGO 40

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: las preguntas 1 y 2 sin apartados optativos y las preguntas 3 y 4 con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

El peso relativo de la población de Galicia en el conjunto de España ha disminuido en los últimos años y, al mismo tiempo, la comunidad se encuentra inmersa en un proceso de envejecimiento demográfico que afecta al conjunto de Europa. En este contexto, aproximadamente el 26 % de la población residente en la provincia de A Coruña tiene 65 años o más; en Lugo, este porcentaje asciende al 30 %; en Ourense, alcanza el 32 %; y en Pontevedra, se sitúa en el 24 %.

En enero de 2025, la población total de Galicia se situaba en torno a los 2.700.000 habitantes. De este total, la provincia de A Coruña concentraba aproximadamente el 41,5 % de la población residente. Por su parte, la provincia de Lugo representaba cerca del 12 % del conjunto de la población gallega, mientras que la provincia de Ourense agrupaba alrededor del 11,5 %. Finalmente, la provincia de Pontevedra reunía el 35 % restante de la población total de la comunidad autónoma.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

1.1. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más.

1.2. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Determine los valores de c y d para que $A \cdot B = B \cdot A$.

2.2. Para $c = 2$ y $d = 0$, despeje la matriz X en la ecuación matricial $B \cdot X - A^t = X$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . A continuación, calcule X .

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (3 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1.

CONTEXTO

Todos los años, en las semanas previas a la Navidad, arranca la temporada de la captura de la centolla en Galicia. La apertura de la veda de este crustáceo genera mucha expectación. En una lonja de un municipio costero de Galicia se estima que los datos referentes a las capturas diarias de centolla (en cientos de kilogramos) durante los cinco primeros días de la última campaña vienen dadas por la función

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t, \quad 0 \leq t \leq 5$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en días.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. Determine los períodos de aumento y disminución de las capturas diarias de centolla.

Contextualice las respuestas.

3.1.2. ¿A cuánto ascienden las capturas diarias máximas? ¿En qué momento o momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.1.3. Teniendo en cuenta el modelo anterior, calcule la cantidad total de capturas que se han producido durante los cinco primeros días de la campaña $\left(\int_0^5 C(t) dt\right)$

3.2

CONTEXTO

Para ayudar a los inversores, se utilizan diversos modelos matemáticos que estiman el valor de las acciones de las empresas que cotizan en bolsa según el tiempo transcurrido. Si bien no pueden predecir exactamente el futuro, constituyen una herramienta para tomar decisiones y para interpretar datos reales.

El valor de una acción (en euros) de una empresa tecnológica que cotiza en bolsa se estima que viene dado por la función

$$V(t) = \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30, \quad t \geq 0$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde el momento en el que la acción ha salido a la venta.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos en los que el valor de la acción ha crecido y en los que ha decrecido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuál es el valor máximo que ha alcanzado la acción? ¿Y cuál es el valor mínimo? ¿En qué momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Teniendo en cuenta la función utilizada, ¿qué ocurrirá con el valor de la acción con el paso del tiempo? Justifique su respuesta.

PREGUNTA 4. ESTADÍSTICA Y ÁLGEBRA. (3 puntos)

Responda uno de los siguientes dos apartados de Estadística: 4.1. o 4.2. (1,5 puntos)

4.1. El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal con desviación típica igual a 2 euros. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio mensual en fotocopias de dichos estudiantes teniendo en cuenta que en una muestra de 36 estudiantes resultó un gasto medio de 13,5 euros.

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$$P(Z < 0,90) = 0,816 ; P(Z < 1,28) = 0,90 ; P(Z > 1,645) = 0,05 ; P(Z > 1,96) = 0,025.$$

4.2. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.60, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.24 \text{ y } P(B/A) = 0.90.$$

Calcule $P(B)$

Responda uno de los siguientes dos apartados de Álgebra: 4.3. o 4.4. (1,5 puntos)

4.3. Una bodega cuenta con una planta de embotellado en la que embotellan 1300 botellas por hora utilizando tres máquinas: M1, M2 y M3. Se sabe que la máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas. También se sabe que ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas.

Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema y expréselo en forma matricial.

4.4. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \leq 2(y+1) \qquad y \leq 2(x+1) \qquad x+y \leq 5$$

Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

El peso relativo de la población de Galicia en el conjunto de España ha disminuido en los últimos años y, al mismo tiempo, la comunidad se encuentra inmersa en un proceso de envejecimiento demográfico que afecta al conjunto de Europa. En este contexto, aproximadamente el 26 % de la población residente en la provincia de A Coruña tiene 65 años o más; en Lugo, este porcentaje asciende al 30 %; en Ourense, alcanza el 32 %; y en Pontevedra, se sitúa en el 24 %.

En enero de 2025, la población total de Galicia se situaba en torno a los 2.700.000 habitantes. De este total, la provincia de A Coruña concentraba aproximadamente el 41,5 % de la población residente. Por su parte, la provincia de Lugo representaba cerca del 12 % del conjunto de la población gallega, mientras que la provincia de Ourense agrupaba alrededor del 11,5 %. Finalmente, la provincia de Pontevedra reunía el 35 % restante de la población total de la comunidad autónoma.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

1.1. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más.

1.2. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense.

Llamamos A al suceso "la persona elegida es residente en A Coruña", B a "la persona elegida es residente en Lugo", C a "la persona elegida es residente en Ourense", D a "la persona elegida es residente en Pontevedra" y V a "la persona elegida tiene 65 años o más".

Con los datos proporcionados establecemos las siguientes probabilidades.

$$P(A) = 0.415, P(B) = 0.12, P(C) = 0.115, P(D) = 0.35,$$

$$P(V/A) = 0.26, P(V/B) = 0.3, P(V/C) = 0.32, P(V/D) = 0.24$$

1.1. Debemos calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap A) + P(V \cap B) + P(V \cap C) + P(V \cap D) = \\ &= P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) + P(D)P(V/D) = \\ &= 0.415 \cdot 0.26 + 0.12 \cdot 0.3 + 0.115 \cdot 0.32 + 0.35 \cdot 0.24 = \boxed{0.2647} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más es de 0.2647.

1.2. Debemos calcular $P(C/\bar{D})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \{C \cap \bar{D} = C\} = \frac{P(C)}{1 - P(D)} = \frac{0.115}{1 - 0.35} = \boxed{\frac{23}{130} \approx 0.177}$$

La probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense vale $\frac{23}{130} \approx 0.177$.

Hemos utilizado que

$$C \cap \bar{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La persona reside en Ourense} \\ \text{y no reside en Pontevedra} \end{array} \right\} = \{ \text{La persona reside en Ourense} \} = C$$

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**2.1.** Determine los valores de c y d para que $A \cdot B = B \cdot A$.**2.2.** Para $c = 2$ y $d = 0$, despeje la matriz X en la ecuación matricial $B \cdot X - A^t = X$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . A continuación, calcule X .**2.1.** Resolvemos la igualdad $AB = BA$.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -d & c \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -d = 3 \\ c = 1 \\ -1 = -c \\ 3 = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ c = 1 \\ c = 1 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=1} \\ \boxed{d=-3} \end{cases}$$

Se cumple la igualdad para $c = 1$ y $d = -3$.**2.2.** Para $c = 2$ y $d = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.Despejamos X en la ecuación matricial.

$$B \cdot X - A^t = X \Rightarrow B \cdot X - X = A^t \Rightarrow (B - Id) X = A^t \Rightarrow X = (B - Id)^{-1} A^t$$

Hallamos la inversa de la matriz $B - Id$.

$$B - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B - Id| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$(B - Id)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B - Id)^t)}{|B - Id|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X .

$$X = (B - Id)^{-1} A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -3-1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.**CONTEXTO**

Todos los años, en las semanas previas a la Navidad, arranca la temporada de la captura de la centolla en Galicia. La apertura de la veda de este crustáceo genera mucha expectación. En una lonja de un municipio costero de Galicia se estima que los datos referentes a las capturas diarias de centolla (en cientos de kilogramos) durante los cinco primeros días de la última campaña vienen dadas por la función

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t, \quad 0 \leq t \leq 5$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en días.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. Determine los periodos de aumento y disminución de las capturas diarias de centolla. Contextualice las respuestas.

3.1.2. ¿A cuánto ascienden las capturas diarias máximas? ¿En qué momento o momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.1.3. Teniendo en cuenta el modelo anterior, calcule la cantidad total de capturas que se han producido durante los cinco primeros días de la campaña $\left(\int_0^5 C(t) dt\right)$

3.1.1. Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \Rightarrow C'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \in [0, 5] \\ \frac{6-2}{2} = 2 \in [0, 5] \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos que pertenece al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 2$ y $t = 4$.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 5]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $C'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4, 5]$.

La función crece en $[0, 2) \cup (4, 5]$ y decrece en $(2, 4)$.

Las capturas diarias de centolla crecieron durante los dos primeros días, disminuyeron hasta el cuarto día y volvieron a aumentar hasta el quinto día.

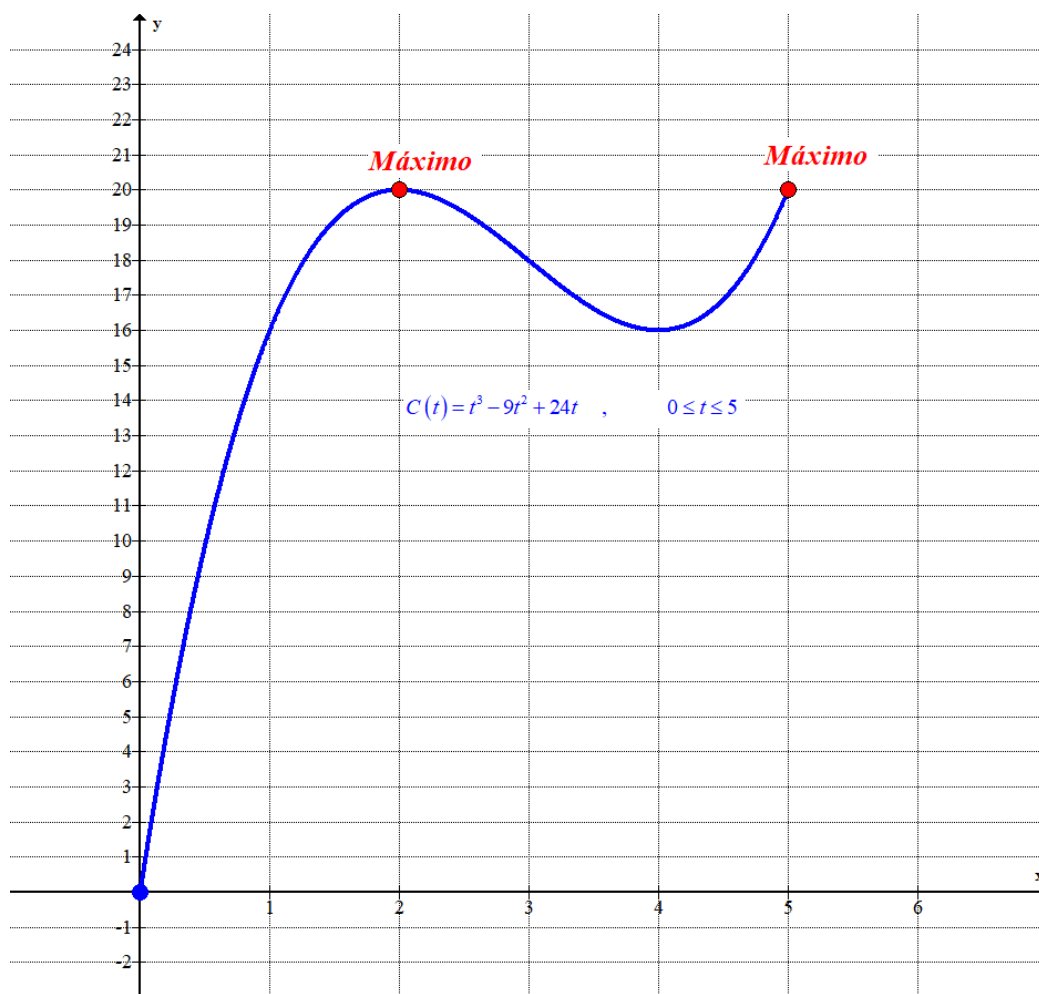
3.1.2. Por lo estudiado en el apartado anterior tenemos que la función presenta un máximo relativo para $t = 2$. Valoramos la función en este punto y en los extremos del intervalo de estudio para decidir donde está el máximo absoluto.

$$C(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0$$

$$C(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$$

$$C(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 = 20$$

Las capturas máximas se obtuvieron el segundo y el quinto día con la captura de 2000 kilos de centolla.



3.1.3. Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^5 C(t) dt &= \int_0^5 t^3 - 9t^2 + 24t dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{9t^3}{3} + \frac{24t^2}{2} \right]_0^5 = \left[\frac{t^4}{4} - 3t^3 + 12t^2 \right]_0^5 = \\ &= \left[\frac{5^4}{4} - 3 \cdot 5^3 + 12 \cdot 5^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 \right] = \frac{625}{4} - 375 + 300 = \boxed{81.25} \end{aligned}$$

La cantidad total de capturas que se han producido durante los cinco primeros días de la campaña es de 8125 kilos.

3.2**CONTEXTO**

Para ayudar a los inversores, se utilizan diversos modelos matemáticos que estiman el valor de las acciones de las empresas que cotizan en bolsa según el tiempo transcurrido. Si bien no pueden predecir exactamente el futuro, constituyen una herramienta para tomar decisiones y para interpretar datos reales.

El valor de una acción (en euros) de una empresa tecnológica que cotiza en bolsa se estima que viene dado por la función

$$V(t) = \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30, \quad t \geq 0$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde el momento en el que la acción ha salido a la venta.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos en los que el valor de la acción ha crecido y en los que ha decrecido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuál es el valor máximo que ha alcanzado la acción? ¿Y cuál es el valor mínimo? ¿En qué momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Teniendo en cuenta la función utilizada, ¿qué ocurrirá con el valor de la acción con el paso del tiempo? Justifique su respuesta.

3.2.1. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

El dominio de la función son todos los números reales.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función $V(t)$.

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 \Rightarrow V'(t) = \frac{-40(t^2 - 4t + 5) - (2t - 4)(80 - 40t)}{(t^2 - 4t + 5)^2} = \\ &= \frac{-40t^2 + 160t - 200 - (160t - 80t^2 - 320 + 160t)}{(t^2 - 4t + 5)^2} = \frac{40t^2 - 160t + 120}{(t^2 - 4t + 5)^2} \end{aligned}$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow \frac{40t^2 - 160t + 120}{(t^2 - 4t + 5)^2} = 0 \Rightarrow 40t^2 - 160t + 120 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=t} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t=1$ y $t=3$.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$V'(0.5) = \frac{40 \cdot 0.5^2 - 160 \cdot 0.5 + 120}{(0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 5)^2} = \frac{800}{169} > 0. \text{ La función crece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$V'(2) = \frac{40 \cdot 2^2 - 160 \cdot 2 + 120}{(2^2 - 4 \cdot 2 + 5)^2} = -40 < 0. \text{ La función decrece en } (1,3).$$

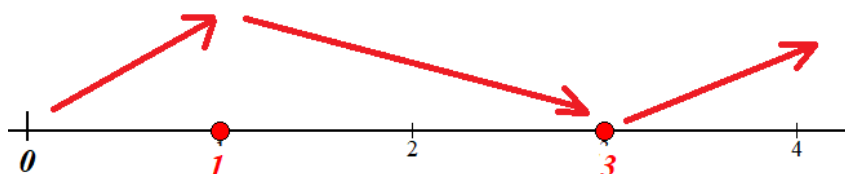
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale

$$V'(4) = \frac{40 \cdot 4^2 - 160 \cdot 4 + 120}{(4^2 - 4 \cdot 4 + 5)^2} = \frac{120}{25} > 0. \text{ La función crece en } (3, +\infty).$$

La función crece en $[0,1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

El valor de la acción ha crecido en el primer mes y a partir del tercer mes. Ha decrecido entre el primer y el tercer mes.

3.2.2. Hemos visto que el valor de la acción sigue el esquema siguiente:



Valoramos la función en $t = 0$, $t = 1$ y en $t = 3$ para decidir el valor mínimo y máximo de la función.

$$\left. \begin{aligned} V(0) &= \frac{80 - 40 \cdot 0}{0^2 - 4 \cdot 0 + 5} + 30 = 46 \\ V(1) &= \frac{80 - 40 \cdot 1}{1^2 - 4 \cdot 1 + 5} + 30 = 50 \text{ Máximo} \\ V(3) &= \frac{80 - 40 \cdot 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 5} + 30 = 10 \text{ Mínimo} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} V(t) &= \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 = 0 + 30 = 30 \end{aligned} \right\}$$

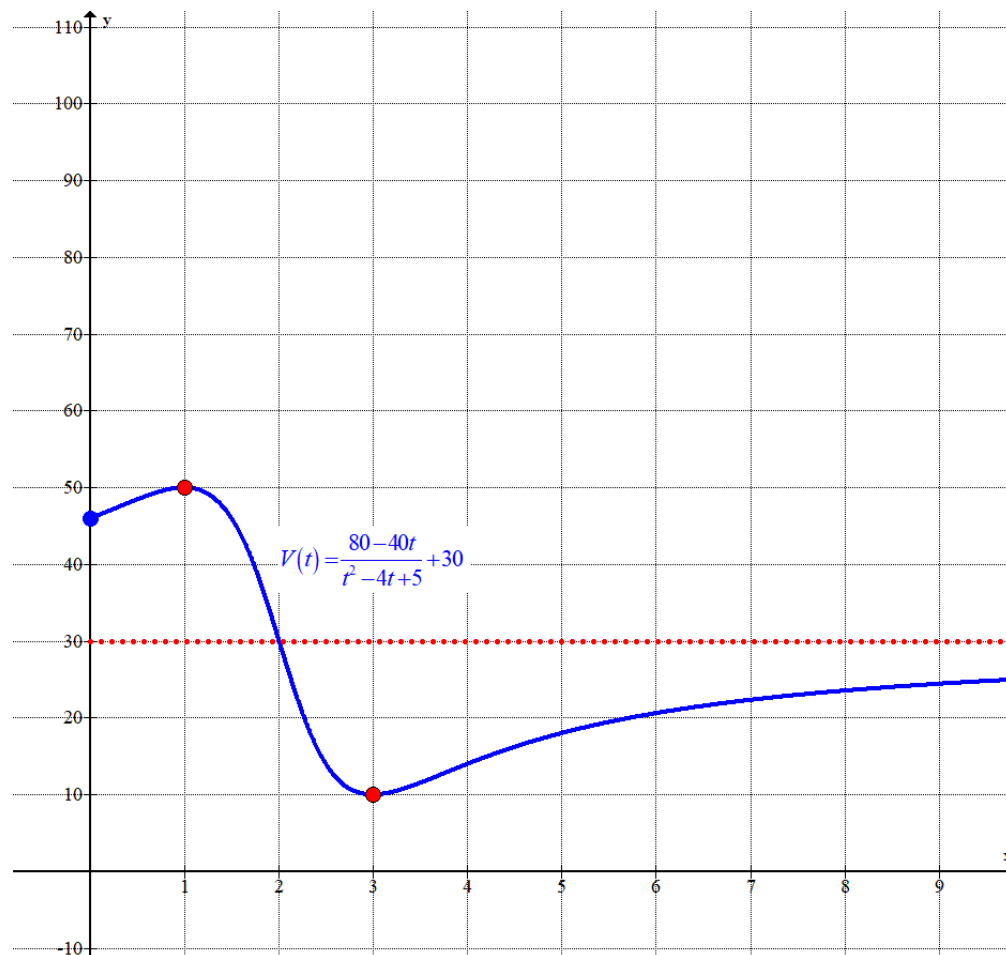
El valor mínimo de acción es de 10 euros y se produce a los tres meses. El valor máximo de la acción es de 50 euros y se produce en el primer mes.

3.2.3. Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{80}{t^2} - \frac{40t}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} - \frac{4t}{t^2} + \frac{5}{t^2}} + 30 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{80}{t^2} - \frac{40}{t}}{1 - \frac{4}{t} + \frac{5}{t^2}} + 30 =$$

$$= \frac{\frac{80}{\infty} - \frac{40}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty} + \frac{5}{\infty}} = \frac{0-0}{1-0+0} + 30 = 0 + 30 = \boxed{30}$$

El valor de la acción con el paso del tiempo tiende a ser de 30 €.



4.1. El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal con desviación típica igual a 2 euros. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio mensual en fotocopias de dichos estudiantes teniendo en cuenta que en una muestra de 36 estudiantes resultó un gasto medio de 13,5 euros.

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

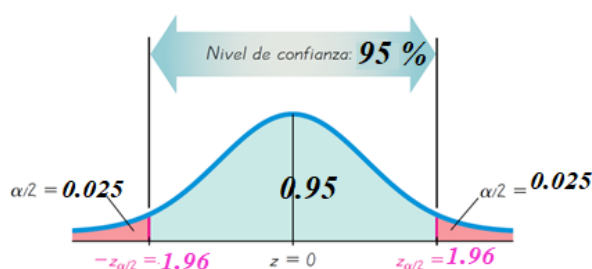
$P(Z < 0,90) = 0,816$; $P(Z < 1,28) = 0,90$; $P(Z > 1,645) = 0,05$; $P(Z > 1,96) = 0,025$.

Sea X = El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto. $X = N(\mu, 2)$.

El tamaño de la muestra es $n = 36$. La media muestral es $\bar{x} = 13.5$ euros.

Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow \{P(Z > 1,96) = 0,025\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}} \approx 0.6533 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media del gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (13.5 - 0.6533, 13.5 + 0.6533) = (12.8467, 14.1533)$$

4.2. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.60, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.24 \text{ y } P(B/A) = 0.90.$$

Calcule $P(B)$

Utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.24 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.24 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.24 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 1 - 0.24 = 0.76}$$

Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = 0.90 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.9 \\ P(A) = 0.60 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.6} = 0.9 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.6 = 0.54}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 0.76 \\ P(A \cap B) = 0.54 \\ P(A) = 0.60 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.76 = 0.6 + P(B) - 0.54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.76 - 0.6 + 0.54 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.7}$$

4.3. Una bodega cuenta con una planta de embotellado en la que embotellan 1300 botellas por hora utilizando tres máquinas: M1, M2 y M3. Se sabe que la máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas. También se sabe que ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas.

Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema y expréselo en forma matricial.

Llamamos “x”, “y”, “z” al número de botellas por hora que embotellan las máquinas M1, M2 y M3, respectivamente.

“Se embotellan 1300 botellas por hora utilizando las tres máquinas: M1, M2 y M3” $\rightarrow$

$$x + y + z = 1300.$$

“La máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas” $\rightarrow$

$$x = 1.25y.$$

“Ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas” $\rightarrow 2x + 3z = 2030.$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x = 1.25y \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x - 1.25y = 0 \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1.25 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 0 \\ 2030 \end{pmatrix}$$

No lo pide, pero lo resolvemos para comprobar que lo hemos planteado bien.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x = 1.25y \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.25y + y + z = 1300 \\ 2 \cdot 1.25y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.25y + z = 1300 \\ 2.5y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1300 - 2.25y \\ 2.5y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.5y + 3(1300 - 2.25y) = 2030 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.5y + 3900 - 6.75y = 2030 \Rightarrow -4.25y = -1870 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1870}{4.25} = 440} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1.25 \cdot 440 = 550} \\ \boxed{z = 1300 - 2.25 \cdot 440 = 310} \end{cases}$$

La máquina M1 embotella 550 botellas por hora, la máquina M2 440 botellas y la M3 310 botellas por hora.

4.4. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \leq 2(y+1) \quad y \leq 2(x+1) \quad x+y \leq 5$$

Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x = 2y + 2$$

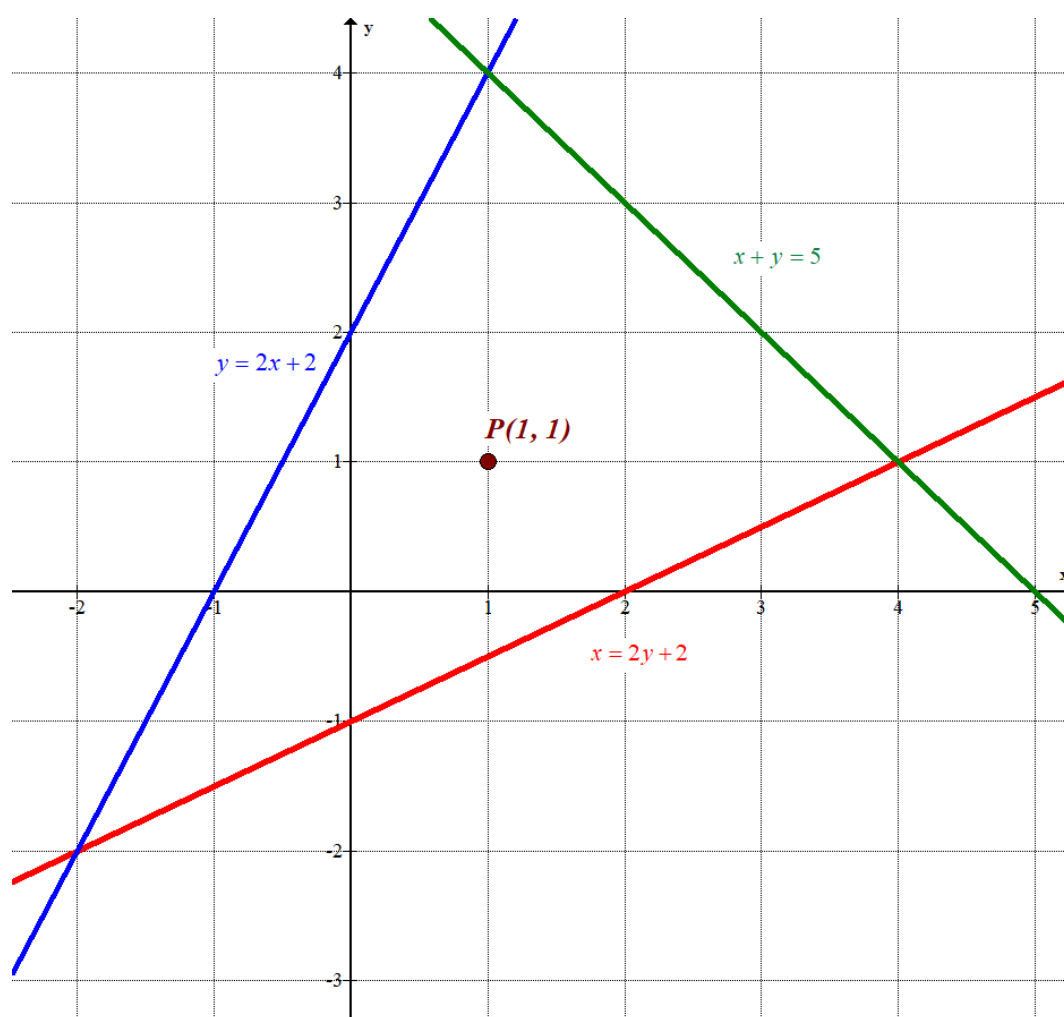
$$y = 2x + 2$$

$$x + y = 5$$

x	y = $\frac{x-2}{2}$
0	-1
2	0
4	1

x	y = 2x + 2
0	2
1	4
2	6

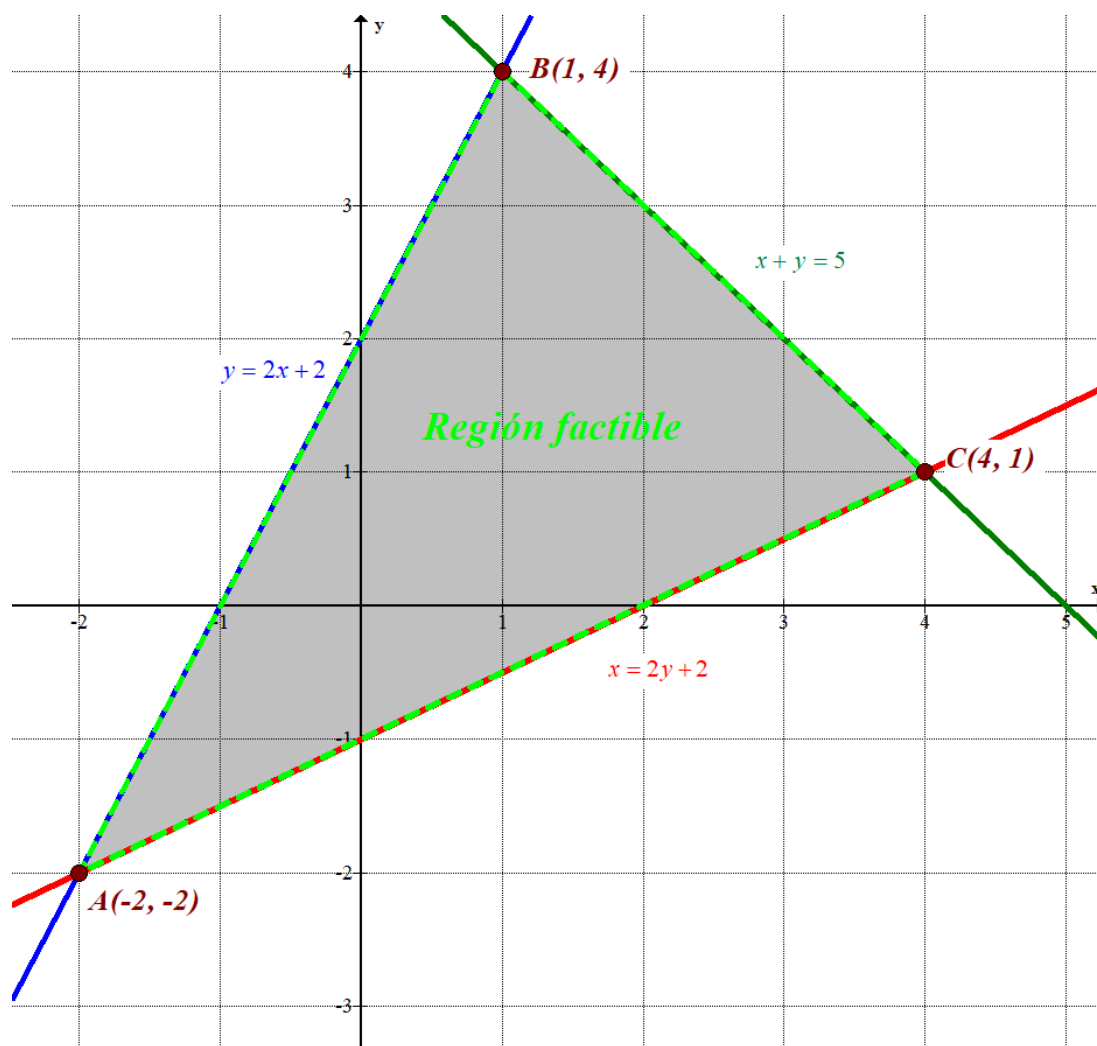
x	y = 5 - x
0	5
3	2
5	0



Como las inecuaciones son $x \leq 2(y+1)$ $y \leq 2(x+1)$ $x+y \leq 5$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas verde y azul, y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$1 \leq 2(1+1) \quad 1 \leq 2(1+1) \quad 1+1 \leq 5 \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Comprobamos que las coordenadas de los vértices son las indicadas en la imagen.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2(y+1) = 2y + 2 \\ y = 2(x+1) = 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2(2y+2) + 2 = 4y + 4 + 2 = 4y + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 = 3y \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2(-2) + 2 = -2 \Rightarrow \boxed{A(-2, -2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x + 2 = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{B(1, 4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2 + y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{C(4, 1)}$$

Los vértices de la región factible son los puntos $A(-2, -2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 1)$.