



UNIBERSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko EZOHIOA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

El examen consta de CUATRO problemas:

En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.

Se podrán usar calculadoras **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes, derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

En el cuaderno del examen deberán figurar las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIBERSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko EZOHIOA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACION

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Un pastelero está experimentando con las recetas de dos tipos de dulces que quiere comercializar. Todavía no tiene pensado el nombre, así que de momento les llama dulce tipo A y dulce tipo B. Para la receta del dulce tipo A, además de otros ingredientes, sabe seguro que va a necesitar 70 g de harina y 20 g de azúcar, mientras que para la del tipo B usará 60 g de harina y 10 g de azúcar. Ahora mismo dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar, cantidades con las que quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B. El precio que espera poner a cada dulce de tipo A es 5 euros, y 4 euros a cada dulce de tipo B. Con todo esto quiere saber cuántos dulces de cada tipo tiene que hacer para obtener un ingreso máximo.

- (0,75 puntos) Define las variables del problema y formula la función objetivo y las restricciones que permiten modelar la situación descrita como un problema de programación lineal.
- (0,75 puntos) Representa la región de soluciones factibles.
- (0,5 puntos) Determina el número de dulces de tipo A y de tipo B que debe hacer para maximizar el ingreso e indica el valor de dicho ingreso máximo.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

En una universidad el alumnado puede cursar una asignatura optativa o bien en modalidad presencial o bien en modalidad virtual. Se sabe que:

- El 60 % del alumnado elige la modalidad presencial.
- Entre quienes eligen modalidad virtual, el 20 % aprueba la asignatura.
- Entre quienes eligen modalidad presencial, el 35 % aprueba la asignatura.

Se elige al azar un estudiante de la asignatura.

- (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura.
- (1 punto) Sabiendo que el estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial.
- (1 punto) ¿Es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial o virtual? Justifica la respuesta.

PROBLEMA 3. (3 puntos) Responde solo a una de las opciones.

(OPCIÓN 3A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos, si existen.
- (1 punto) Estudia la concavidad de la función y determina si tiene puntos de inflexión.
- (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

(OPCIÓN 3B)

Una empresa produce un bien cuyo coste total, en miles de euros, viene dado por la función

$$C(x) = x^2 + 10x + 600$$

donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta por unidad depende de la cantidad producida y viene dado por

$$p(x) = 100 - 2x.$$

- (a) (0,5 puntos) Expresa la función de ingresos en función de x .
- (b) (0,5 puntos) Expresa la función de beneficios en función de x .
- (c) (0,5 puntos) Halla los valores de x para los que el beneficio es positivo.
- (d) (0,5 puntos) Determina el número de unidades que debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

(e) (1 punto) Calcula $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx$

PROBLEMA 4. (2 puntos) Responde solo a una de las opciones.

(OPCIÓN 4A)

Se consideran la matriz dependiente del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a .
- (b) (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.
- (c) (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

- (d) (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^t A$, donde B^t denota la traspuesta de B .

(OPCIÓN 4B)

Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3 \\ x + y + bz = 4 \end{cases}$$

- (a) (0,5 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b .
- (b) (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.
- (c) (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b , indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
- (d) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.

Soluciones

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Un pastelero está experimentando con las recetas de dos tipos de dulces que quiere comercializar. Todavía no tiene pensado el nombre, así que de momento les llama dulce tipo A y dulce tipo B. Para la receta del dulce tipo A, además de otros ingredientes, sabe seguro que va a necesitar 70 g de harina y 20 g de azúcar, mientras que para la del tipo B usará 60 g de harina y 10 g de azúcar. Ahora mismo dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar, cantidades con las que quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B. El precio que espera poner a cada dulce de tipo A es 5 euros, y 4 euros a cada dulce de tipo B. Con todo esto quiere saber cuántos dulces de cada tipo tiene que hacer para obtener un ingreso máximo.

- (a) (0,75 puntos) Define las variables del problema y formula la función objetivo y las restricciones que permiten modelar la situación descrita como un problema de programación lineal.
- (b) (0,75 puntos) Representa la región de soluciones factibles.
- (c) (0,5 puntos) Determina el número de dulces de tipo A y de tipo B que debe hacer para maximizar el ingreso e indica el valor de dicho ingreso máximo.

- (a) Llamamos “x” al número de dulces tipo A e “y” al número de dulces tipo B. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Harina (gramos)	Azúcar (gramos)	Ingresos
Nº dulces tipo A (x)	70x	20x	5x
Nº dulces tipo B (y)	60y	10y	4y
TOTALES	70x + 60y	20x + 10y	5x + 4y

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar” $\rightarrow 70x + 60y \leq 4200$,
 $20x + 10y \leq 800$.

“Quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B” $\rightarrow y \geq 10$; $x \geq \frac{y}{2}$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ 2x \geq y \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ y \leq 2x \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- (b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$y = 10$

$y = 2x$

$7x + 6y = 420$

$2x + y = 80$

$x \geq 0; y \geq 0$

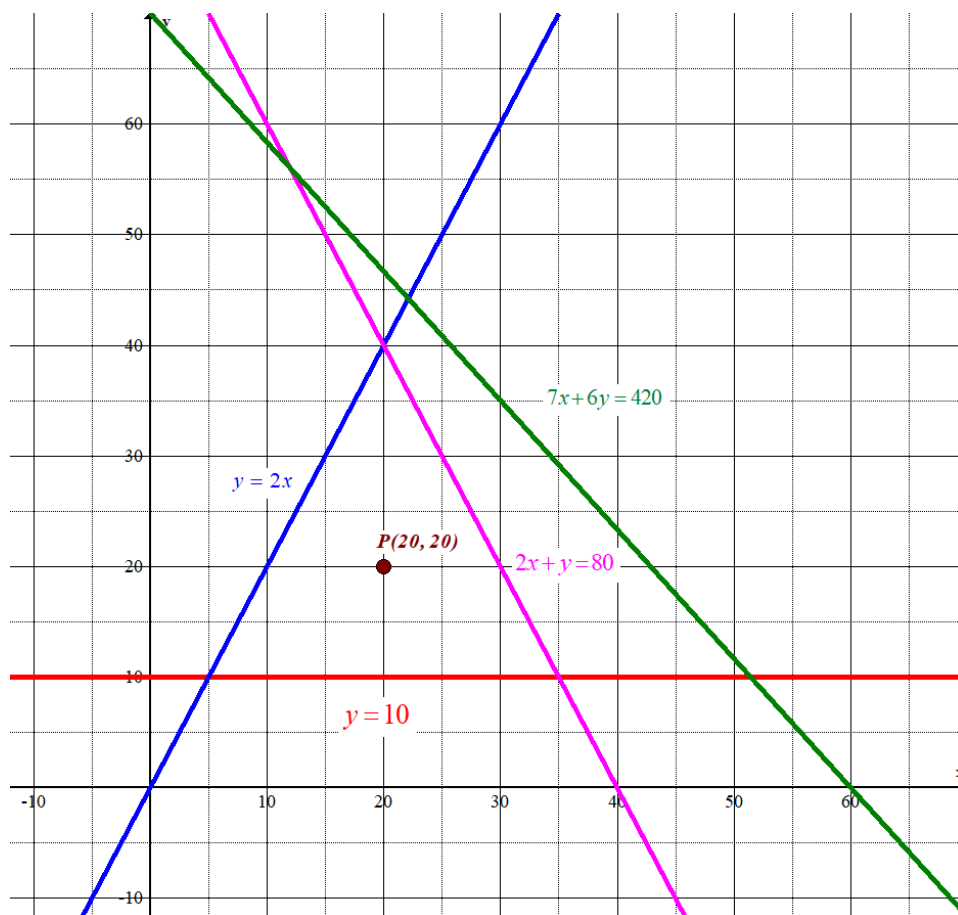
x	y = 10
0	10
5	10
20	10
35	10

x	y = 2x
0	0
5	10
20	40
30	60

x	$y = \frac{420-7x}{6}$
0	70
12	56
30	35
60	0

x	y = 80 - 2x
0	80
20	40
35	10
40	0

Primer
cuadrante



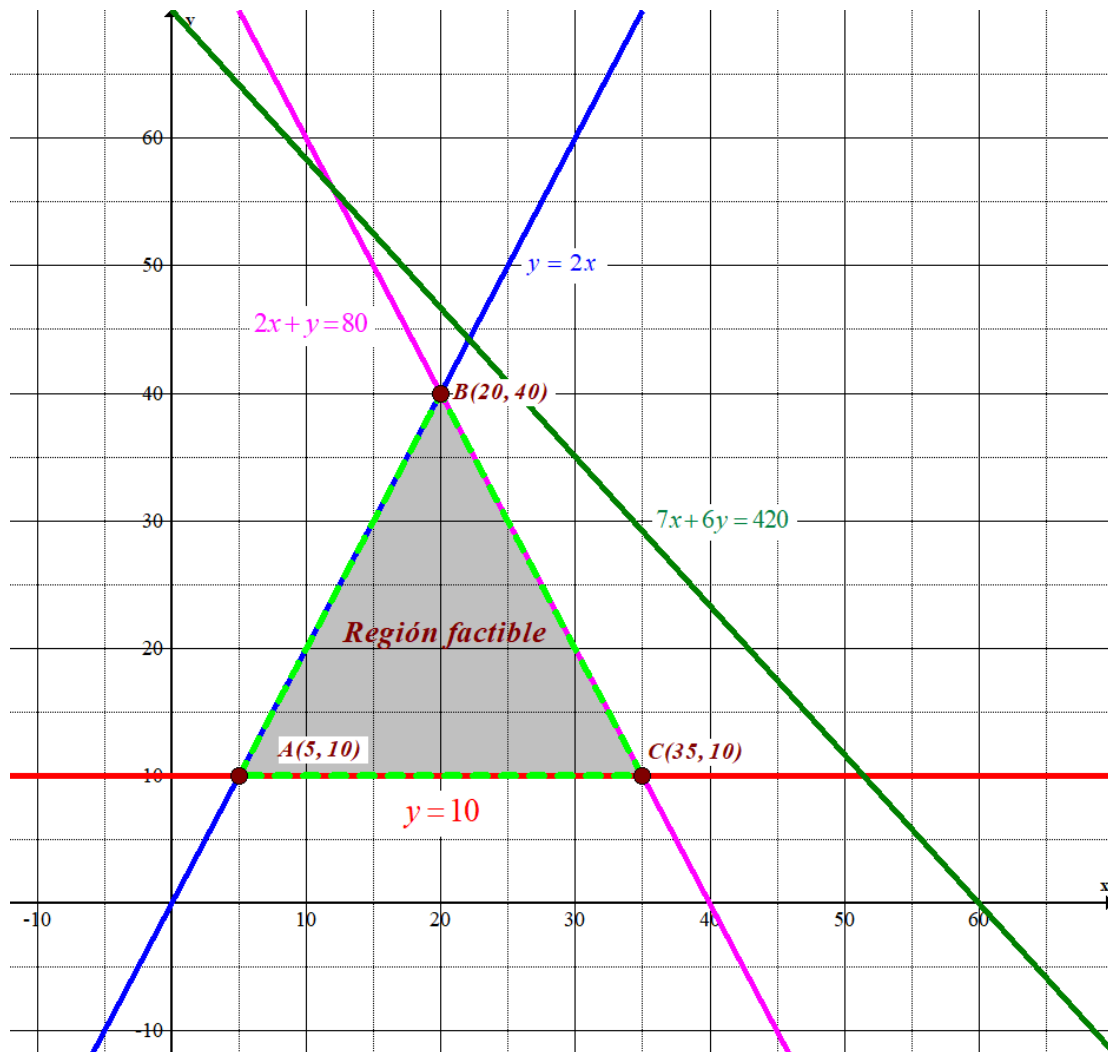
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ y \leq 2x \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer

cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y rosa, y por encima de la recta horizontal roja.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 10 \\ 20 \leq 2 \cdot 20 \\ 7 \cdot 20 + 6 \cdot 20 \leq 420 \\ 2 \cdot 20 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 \geq 10 \\ 20 \leq 40 \\ 140 + 120 \leq 420 \\ 40 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



(c) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(5, 10) \rightarrow I(5, 10) = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 65$$

$$B(20, 40) \rightarrow I(20, 40) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 40 = \mathbf{260 \text{ Máximo}}$$

$$C(35, 10) \rightarrow I(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 215$$

Los máximos ingresos que se puede obtener son de 260 € y se obtienen en el punto $B(20, 40)$.

Los ingresos máximos se obtienen con la preparación y venta de 20 dulces del tipo A y 40 del tipo B. Siendo estos ingresos máximos de 260 euros.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

En una universidad el alumnado puede cursar una asignatura optativa o bien en modalidad presencial o bien en modalidad virtual. Se sabe que:

- El 60 % del alumnado elige la modalidad presencial.
- Entre quienes eligen modalidad virtual, el 20 % aprueba la asignatura.
- Entre quienes eligen modalidad presencial, el 35 % aprueba la asignatura.

Se elige al azar un estudiante de la asignatura.

- (a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura.
 (b) (1 punto) Sabiendo que el estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial.
 (c) (1 punto) ¿Es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial o virtual? Justifica la respuesta.

- (a) Llamamos MP al suceso “el alumno elige la modalidad presencial”, $\overline{MP}$ a “el alumno elige la modalidad virtual” y A a “el alumno aprueba la asignatura”.

Los datos proporcionados en términos de probabilidad son:

$$P(MP) = 0.6; P(A/\overline{MP}) = 0.2 \text{ y } P(A/MP) = 0.35$$

Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(MP)P(A/MP) + P(\overline{MP})P(A/\overline{MP}) = 0.6 \cdot 0.35 + 0.4 \cdot 0.2 = \boxed{0.29}$$

La probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura vale 0.29.

- (b) Debemos calcular $P(MP/A)$. Esta es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(MP/A) = \frac{P(MP \cap A)}{P(A)} = \frac{P(MP)P(A/MP)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.35}{0.29} = \boxed{\frac{21}{29} \approx 0.7241}$$

Sabiendo que el estudiante ha aprobado, la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial vale $\frac{21}{29} \approx 0.7241$.

- (c) Calculamos $P(\overline{MP}/A)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{MP}/A) = \frac{P(\overline{MP} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{MP})P(A/\overline{MP})}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.29} = \boxed{\frac{8}{29} \approx 0.2759}$$

Hemos visto que $P(\overline{MP}/A) = \frac{8}{29} < \frac{21}{29} = P(MP/A)$.

Si el alumno ha aprobado es más probable que haya elegido la modalidad presencial.

PROBLEMA 3. (OPCIÓN 3A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- (a) (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos, si existen.
 (b) (1 punto) Estudia la concavidad de la función y determina si tiene puntos de inflexión.
 (c) (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

(a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

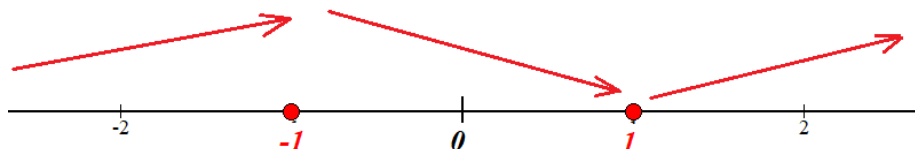
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 3)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -1)$.

(b) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La función presenta un posible punto de inflexión en $x = 0$. Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale

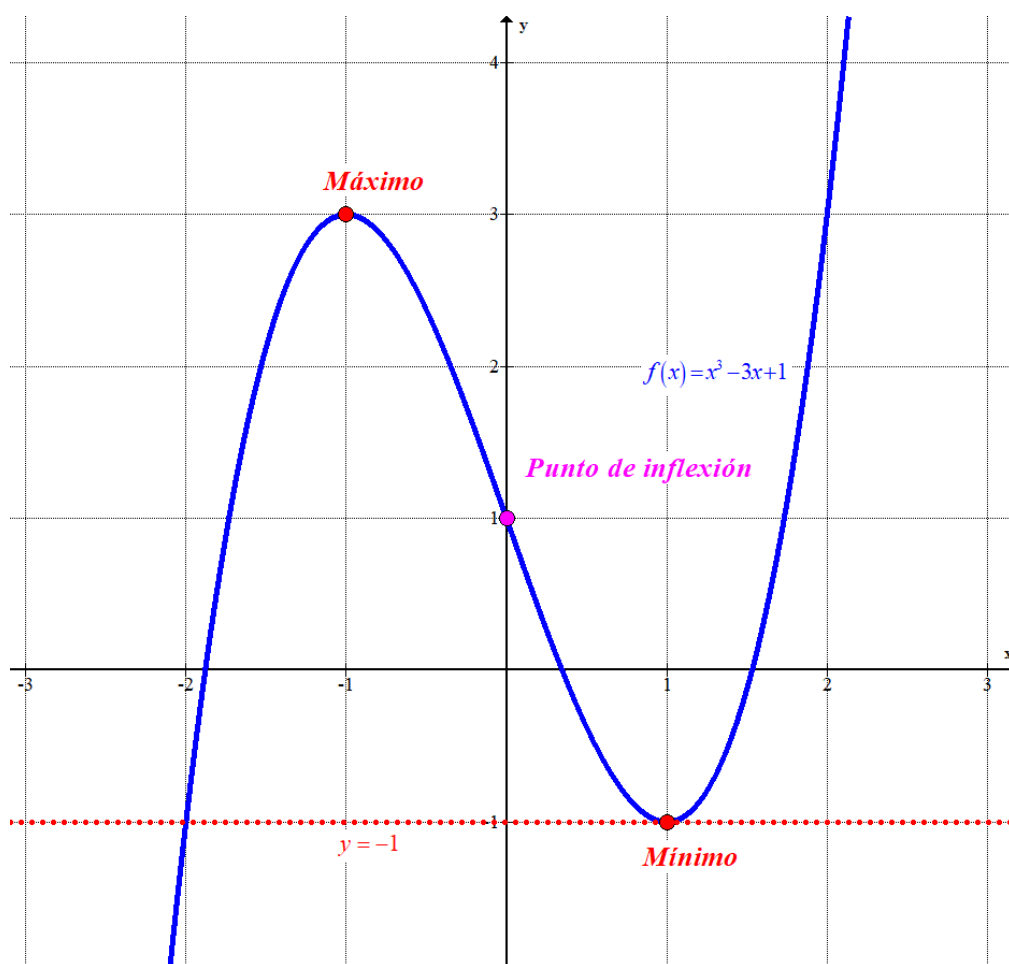
$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$. La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 1)$.

(c) Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 \\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0 \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 0(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = -1$. Es una recta horizontal pues la función en $x = 1$ tiene un mínimo relativo.



PROBLEMA 3. (OPCIÓN 3B)

Una empresa produce un bien cuyo coste total, en miles de euros, viene dado por la función

$$C(x) = x^2 + 10x + 600$$

donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta por unidad depende de la cantidad producida y viene dado por

$$p(x) = 100 - 2x.$$

- (a) (0,5 puntos) Expresa la función de ingresos en función de x .
 (b) (0,5 puntos) Expresa la función de beneficios en función de x .
 (c) (0,5 puntos) Halla los valores de x para los que el beneficio es positivo.
 (d) (0,5 puntos) Determina el número de unidades que debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

(e) (1 punto) Calcula $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx$

- (a) Los ingresos son el producto del número de unidades producidas x por el precio de venta por unidad $p(x)$.

$$I(x) = x \cdot p(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

La función precio $p(x) = 100 - 2x$ solo tiene sentido en el intervalo $[0, 50]$.

- (b) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$B(x) = I(x) - C(x) = I(x) = 100x - 2x^2 - (x^2 + 10x + 600) = -3x^2 + 90x - 600$$

Como el número de unidades producidas x y el precio $p(x)$ deben ser mayores o iguales que 0, consideramos el dominio de esta función el intervalo cerrado $[0, 50]$.

- (c) Hallamos cuando el beneficio es nulo.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 90x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 200}}{2} = \frac{30 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{30+10}{2} = \boxed{20 = x} \\ \frac{30-10}{2} = \boxed{10 = x} \end{cases}$$

La función beneficio es una función parabólica. Averiguamos cuando el beneficio es positivo.

- En el intervalo $[0, 10)$ consideramos $x = 5$ y la función vale

$$B(5) = -3 \cdot 5^2 + 90 \cdot 5 - 600 = -225 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } [0, 10).$$

- En el intervalo $(10, 20)$ consideramos $x = 15$ y la función vale

$$B(15) = -3 \cdot 15^2 + 90 \cdot 15 - 600 = 75 > 0. \text{ El beneficio es positivo en } (10, 20).$$

- En el intervalo $(20, 50]$ consideramos $x = 25$ y la función vale

$$B(25) = -3 \cdot 25^2 + 90 \cdot 25 - 600 = -225 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (20, +\infty].$$

El beneficio es positivo con la producción de más de 10 unidades y menos de 20.

(d) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -3x^2 + 90x - 600 \Rightarrow B'(x) = -6x + 90$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 90 = 0 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{6} = 15$$

La función tiene un punto crítico en $x = 15$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -6x + 90 \Rightarrow B''(x) = -6 \Rightarrow B''(15) = -6 < 0$$

La función beneficio tiene un máximo en $x = 15$. El beneficio es máximo con la producción de 15 unidades.

(e) Hallamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx = \int_{10}^{20} x^2 + 10x + 600 + \frac{1}{100 - 2x} dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 600x - \frac{1}{2} \ln |100 - 2x| \right]_{10}^{20} =$$

$$= \left[\frac{20^3}{3} + 5 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - \frac{1}{2} \ln |100 - 2 \cdot 20| \right] - \left[\frac{10^3}{3} + 5 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - \frac{1}{2} \ln |100 - 2 \cdot 10| \right] =$$

$$= \frac{8000}{3} + 2000 + 12000 - \frac{1}{2} \ln 60 - \frac{1000}{3} - 500 - 6000 + \frac{1}{2} \ln 80 =$$

$$= \frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{80}{60} = \boxed{\frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \simeq 9833.477}$$

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4A)

Se consideran la matriz dependiente del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a .
 (b) (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.
 (c) (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

- (d) (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^t A$, donde B^t denota la traspuesta de B .

- (a) Hallamos la traspuesta de A .

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión del determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

- (b) Para que exista la inversa de la matriz A su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A| = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

La inversa de A existe para cualquier valor de a distinto de 2.

Hallamos la expresión de la inversa de A para $a \neq 2$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{a - 2} = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

- (c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B = I \Rightarrow AX = I - B \Rightarrow \{a \neq 2\} \Rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

La solución existe para $a \neq 2$.

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 2$ la matriz solución de la ecuación matricial es $X = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$.

Si $a = 2$ no existe la inversa de A, pero estudiamos si tiene solución la ecuación matricial $AX + B = I$.

$$AX + B = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c+1 & 2b+d \\ 2a+c+1 & 2b+d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c+1=1 \\ 2a+c+1=0 \\ 2b+d=0 \\ 2b+d+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=0 \\ 2a+c=-1 \\ 2b+d=0 \\ 2b+d=-1 \end{cases}$$

La ecuación matricial no tiene solución pues tenemos igualdades que no se pueden cumplir de forma simultánea.

Para $a = 2$ no existe solución de la ecuación matricial $AX + B = I$.

(d) Para $a = 3$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo visto en el apartado anterior la matriz A

tiene inversa y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Hallamos la expresión de la matriz $C = A^{-1}B^tA$.

$$C = A^{-1}B^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 \\ -2 & -2+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-1 \\ -6+8 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz $C = A^{-1}B^tA$ queda $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4B)

Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3 \\ x + y + bz = 4 \end{cases}$$

- (a) (0,5 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b .
 (b) (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.
 (c) (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b , indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
 (d) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.

- (a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\text{ampliada } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & b & 1 & b+3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{El sistema expresado en forma matricial queda } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ b+3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (b) La matriz de coeficientes es invertible cuando su determinante es distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 1 + 2 - b - 2b - 1 = b^2 - 3b + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=b} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=b} \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es invertible para cualquier valor de b distinto de 1 y de 2.

- (c) Analizamos el sistema para tres situaciones diferentes.

CASO 1 $b \neq 1$ y $b \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $b = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -12 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $b = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -7 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $b \neq 1$ y $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $b = 1$ o $b = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

(b) Para $b = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ z = 3 - 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow x + 4 - x + 3 - 2x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 3 - 2\frac{1}{2} = 2} \\ \boxed{y = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}} \end{cases}$$

Para $b = 0$ la solución del sistema es $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$, $z = 2$.