



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRAORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA 2026 (extra)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II
BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determina BB^t , siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (0,5 puntos)
- Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)
- Halla $(BB^t)^5$. (0,5 puntos)
- Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (2 puntos)

Problema 1. B. Una empresa de suministros tecnológicos vende tres tipos de componentes: procesadores, tarjetas gráficas y módulos de memoria. El departamento de contabilidad ha perdido la información sobre el precio individual de cada componente. No obstante, sabe que la venta de 2 procesadores, 1 tarjeta gráfica y 4 módulos de memoria sumó un total de 1020€ y que un lote de 3 procesadores y 2 tarjetas gráficas al que se aplicó un descuento equivalente al precio de 1 módulo de memoria se vendió al precio de 1280€. Si el precio de una tarjeta gráfica es igual a la suma del precio de un procesador más el doble del precio de un módulo de memoria, determina el precio de cada componente.

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Apartado 2. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. En una carretera se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 110 km/h o inferior a 80 km/h. Si el radar detecta un vehículo con velocidad inferior a 80 km/h, el conductor debe pagar 100 euros, sea cual sea su velocidad; si la velocidad detectada es superior a 110 km/h, el conductor debe pagar 50 euros más la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 110 km/h, en euros; si la velocidad detectada está entre 80 y 110 km/h, ambos incluidos, no debe pagar nada.

- Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. (1,25 puntos)
- Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 120$ y la recta de ecuación $x = 125$. (1 punto)
- En otra carretera solo se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 120 km/h. Si la velocidad detectada por el radar no es superior a 120 km/h, el conductor no debe pagar nada; en caso contrario, debe pagar el triple de la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 120 km/h, en euros. ¿A qué velocidades un conductor tendrá que pagar lo mismo en esta carretera que en la anterior? (1,25 puntos)

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. En la fase final del campeonato de Europa de baloncesto juegan Alemania, Francia, Croacia y España. Las semifinales son: España-Alemania y Francia-Croacia. La probabilidad de que España gane a Alemania es 0,7, la de que gane a Francia es 0,25 y la de que gane a Croacia es 0,55. La probabilidad de que Francia pierda contra Croacia es 0,4. Se supone independencia entre los resultados de unos partidos y otros.

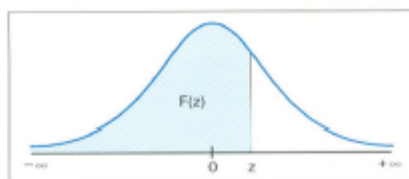
- Calcula probabilidad de que la final sea Alemania-Croacia. (0,5 puntos)
- Calcula la probabilidad de que España sea campeona. (1 punto)
- Si España ha sido campeona, ¿cuál es la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia? (0,5 puntos)
- El mes siguiente al campeonato, España y Croacia jugarán siete partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que Croacia gane al menos cinco de esos partidos? (1 punto)

Taula de distribució Normal

Tabla de distribución Normal

$$N(0,1)$$

$$F(z) = P(Z \leq z)$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina BB^t , siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (0,5 puntos)
 b) Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)
 c) Halla $(BB^t)^5$. (0,5 puntos)
 d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (2 puntos)

a) Determinamos la expresión de BB^t .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+4 & 2-4+2 \\ 2-4+2 & 4+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$

b) Sabemos que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 9I$.

$$B \cdot B^t = 9I \Rightarrow \frac{1}{9} B \cdot B^t = I \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}B\right)\left(\frac{1}{3}B^t\right) = I \\ \left(\frac{-1}{3}B\right)\left(\frac{-1}{3}B^t\right) = I \end{cases}$$

Los valores de λ que cumplen lo pedido son $\lambda = \frac{1}{3}$ y $\lambda = \frac{-1}{3}$.

c) Sabemos que $B \cdot B^t = 9I$.

$$(BB^t)^5 = (9I)^5 = 9^5 I^5 = 59049I = \begin{pmatrix} 59049 & 0 \\ 0 & 59049 \end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$5XA - BCB^t = I \Rightarrow 5XA = I + BCB^t \Rightarrow 5X = (I + BCB^t)A^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{5}(I + BCB^t)A^{-1}$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa, la determinamos y terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$BCB^t = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 4/3 + 4 & 2/3 - 4/3 + 2 \\ 2/3 - 4/3 + 2 & 4/3 + 4/3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$I + BCB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5} (I + BCB^t) A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20/3 & -100/3 + 4/3 \\ 4/3 & -20/3 + 14/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20/3 & -32 \\ 4/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}$.

Problema 1. B. Una empresa de suministros tecnológicos vende tres tipos de componentes: procesadores, tarjetas gráficas y módulos de memoria. El departamento de contabilidad ha perdido la información sobre el precio individual de cada componente. No obstante, sabe que la venta de 2 procesadores, 1 tarjeta gráfica y 4 módulos de memoria sumó un total de 1020€ y que un lote de 3 procesadores y 2 tarjetas gráficas al que se aplicó un descuento equivalente al precio de 1 módulo de memoria se vendió al precio de 1280€. Si el precio de una tarjeta gráfica es igual a la suma del precio de un procesador más el doble del precio de un módulo de memoria, determina el precio de cada componente.

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Llamamos “x” al precio de 1 procesador, “y” al precio de 1 tarjeta gráfica y “z” al precio de 1 módulo de memoria.

“La venta de 2 procesadores, 1 tarjeta gráfica y 4 módulos de memoria sumó un total de 1020€” $\rightarrow 2x + y + 4z = 1020$.

“Un lote de 3 procesadores y 2 tarjetas gráficas al que se aplicó un descuento equivalente al precio de 1 módulo de memoria se vendió al precio de 1280€” $\rightarrow 3x + 2y - z = 1280$

“El precio de una tarjeta gráfica es igual a la suma del precio de un procesador más el doble del precio de un módulo de memoria” $\rightarrow y = x + 2z$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 4z = 1020 \\ 3x + 2y - z = 1280 \\ y = x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + x + 2z + 4z = 1020 \\ 3x + 2(x + 2z) - z = 1280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 6z = 1020 \\ 3x + 2x + 4z - z = 1280 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 340 \\ 5x + 3z = 1280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 340 - 2z \\ 5x + 3z = 1280 \end{array} \right\} \Rightarrow 5(340 - 2z) + 3z = 1280 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1700 - 10z + 3z = 1280 \Rightarrow -7z = -420 \Rightarrow \boxed{z = \frac{420}{7} = 60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 340 - 2 \cdot 60 = 220} \Rightarrow \boxed{y = 220 + 2 \cdot 60 = 340}$$

El precio de 1 procesador es de 220 €, el de 1 tarjeta gráfica es 340 € y el de un módulo de memoria es 60 €.

Problema 2. A. En una carretera se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 110 km/h o inferior a 80 km/h. Si el radar detecta un vehículo con velocidad inferior a 80 km/h, el conductor debe pagar 100 euros, sea cual sea su velocidad; si la velocidad detectada es superior a 110 km/h, el conductor debe pagar 50 euros más la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 110 km/h, en euros; si la velocidad detectada está entre 80 y 110 km/h, ambos incluidos, no debe pagar nada.

- a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. (1,25 puntos)
- b) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 120$ y la recta de ecuación $x = 125$. (1 punto)
- c) En otra carretera solo se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 120 km/h. Si la velocidad detectada por el radar no es superior a 120 km/h, el conductor no debe pagar nada; en caso contrario, debe pagar el triple de la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 120 km/h, en euros. ¿A qué velocidades un conductor tendrá que pagar lo mismo en esta carretera que en la anterior? (1,25 puntos)

- a) La función es a trozos. Paga 0 € si la velocidad está entre 80 y 110 km/h: $f(x) = 0$ si $80 \leq x \leq 110$, paga 100 € si la velocidad es inferior a 80 km/h: $f(x) = 100$ si $x < 80$ y si la velocidad supera los 110 km/h paga $f(x) = 50 + x - 110 = x - 60$ si $x > 110$.

$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 \leq x < 80 \\ 0 & \text{si } 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60 & \text{si } x > 110 \end{cases}$$

La función en cada intervalo tiene una expresión polinómica y es continua. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

$$\left. \begin{array}{l} f(80) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 100 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow f(80) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq 100 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(110) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 110^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 110^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 110^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 110^+} x - 60 = -60 \end{array} \right\} \Rightarrow f(110) = \lim_{x \rightarrow 110^-} f(x) = 0 \neq -60 = \lim_{x \rightarrow 110^+} f(x)$$

La función no es continua ni en $x = 80$, ni en $x = 110$.

La función es continua en $[0, 80) \cup (80, 110) \cup (110, +\infty)$.

- b) En el intervalo $[120, 125]$ la función tiene la expresión $f(x) = x - 60$.

El área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 120$ y la recta de ecuación $x = 125$ es el valor de la integral definida de 120 a 125 de la función.

$$\text{Área} = \int_{120}^{125} x - 60 dx = \left[\frac{x^2}{2} - 60x \right]_{120}^{125} = \left[\frac{125^2}{2} - 60 \cdot 125 \right] - \left[\frac{120^2}{2} - 60 \cdot 120 \right] = \boxed{312.5 \text{ u}^2}$$

- c) En la otra carretera si la velocidad es inferior a 120 km/h la función de pago es $g(x) = 0$ si $x \leq 120$ y si la velocidad supera los 120 km/h es $g(x) = 3(x - 120)$ si $x > 120$.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 120 \\ 3(x - 120) & \text{si } x > 120 \end{cases}$$

Las dos funciones de pago no coinciden en el intervalo $[0, 80)$ pues en una se paga 50 € y en otra no se paga.

Las dos funciones de pago coinciden en el intervalo $[80, 110]$, pues en dicho intervalo de velocidades no se paga multa en ninguna de las dos carreteras.

En el intervalo $(110, 120]$ vemos si coinciden las funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x - 60 \\ g(x) = 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x - 60 = 0 \Rightarrow x = 60 \notin (110, 120)$$

En el intervalo $(110, 120]$ no coinciden las funciones.

En el intervalo $(120, +\infty)$ buscamos las posibles coincidencias.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x - 60 \\ g(x) = 3(x - 120) \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x - 60 = 3(x - 120) \Rightarrow x - 60 = 3x - 360 \Rightarrow 300 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 150}$$

A una velocidad de 150 km/h se paga lo mismo en cada carretera 90 €.

Conclusión: Se paga lo mismo en ambas carreteras a una velocidad entre 80 y 110 km/h (no se paga) y a una velocidad de 150 km/h donde se paga 90 € en ambas carreteras.

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

El dominio de la función son todos los números reales.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 0}{1 + 0^2} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{x^2 - x}{1 + x^2} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x = 1 \rightarrow \boxed{B(1,0)} \end{cases}$$

La función corta a los ejes de coordenadas en dos puntos: A(0, 0) y B(1, 0).

b) **Asíntotas verticales.** $x = a$

Al ser el dominio de la función todos los números reales no existen asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + 1} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función.

c) Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 1)(1 + x^2) - 2x(x^2 - x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + \cancel{2x^3} - 1 - x^2 - \cancel{2x^3} + 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \approx -2.41 \\ x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los dos puntos críticos obtenidos $x = -1 - \sqrt{2}$ y $x = -1 + \sqrt{2}$.

- En el intervalo $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 + 2(-3) - 1}{(1 + (-3)^2)^2} = \frac{2}{100} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1 - \sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{(1 + 0^2)^2} = -1 < 0. \text{ La función decrece en } (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{(1 + 1^2)^2} = \frac{2}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-1 + \sqrt{2}, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ y decrece en $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1 - \sqrt{2}$.

Como $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{(-1 - \sqrt{2})^2 - (-1 - \sqrt{2})}{1 + (-1 - \sqrt{2})^2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ el máximo relativo tiene coordenadas

$$\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$$

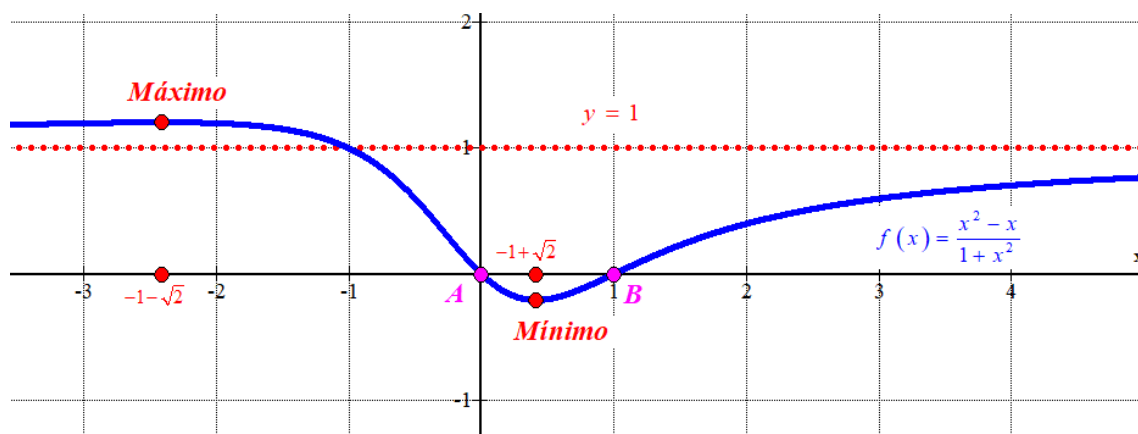
La función tiene un mínimo relativo en $x = -1 + \sqrt{2}$.

Como $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{(-1 + \sqrt{2})^2 - (-1 + \sqrt{2})}{1 + (-1 + \sqrt{2})^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ el máximo relativo tiene coordenadas

$$\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right).$$

c) Dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$
-3	1.2
-1	1
0	0
1	0
2	0.4



Problema 3. En la fase final del campeonato de Europa de baloncesto juegan Alemania, Francia, Croacia y España. Las semifinales son: España-Alemania y Francia-Croacia. La probabilidad de que España gane a Alemania es 0,7, la de que gane a Francia es 0,25 y la de que gane a Croacia es 0,55. La probabilidad de que Francia pierda contra Croacia es 0,4. Se supone independencia entre los resultados de unos partidos y otros.

- a) Calcula probabilidad de que la final sea Alemania-Croacia. (0,5 puntos)
 b) Calcula la probabilidad de que España sea campeona. (1 punto)
 c) Si España ha sido campeona, ¿cuál es la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia? (0,5 puntos)
 d) El mes siguiente al campeonato, España y Croacia jugarán siete partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que Croacia gane al menos cinco de esos partidos? (1 punto)

- a) Para que la final sea Alemania-Croacia en las semifinales debe ganar Alemania a España y Croacia a Francia. La probabilidad de que Alemania gane a España es de $1 - 0.7 = 0.3$ y la de que Croacia gane a Francia es de 0.4.

La probabilidad de que se den los dos resultados es el producto de las probabilidades de cada uno de los resultados en semifinales: $0.3 \cdot 0.4 = 0.12$.

- b) Para que España sea campeona debe ganar en semifinales a Alemania y en la final debe volver a ganar a Francia o a Croacia, depende del ganador del otro partido de semifinales.

$$\begin{aligned} &P(\text{España gana a Alemania})P(\text{Croacia gana a Francia})P(\text{España gana a Croacia}) + \\ &+ P(\text{España gana a Alemania})P(\text{Francia gana a Croacia})P(\text{España gana a Francia}) = \\ &= 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.55 + 0.7 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.25 = \boxed{0.259} \end{aligned}$$

- c) La probabilidad de que España sea campeona la hemos calculado y vale 0.259.
 La probabilidad de que España sea campeona jugando la final con Francia es:

$$\begin{aligned} &P(\text{España gana a Alemania})P(\text{Francia gana a Croacia})P(\text{España gana a Francia}) = \\ &= 0.7 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.25 = 0.105 \end{aligned}$$

Si España ha sido campeona la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia

$$\text{vale } \frac{0.105}{0.259} = \frac{15}{37} \approx 0.405.$$

- d) Consideramos X la variable aleatoria que nos da el número de partidos que gana Croacia en sus 7 enfrentamientos con España. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 7 y p = probabilidad de que Croacia le gane un partido a España = $1 - 0.55 = 0.45$. $X = B(7, 0.45)$.

Debemos calcular $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$

Miramos en la tabla de la binomial y esta probabilidad vale $0.1172 + 0.032 + 0.0037 = 0.1529$.

n	x	p										
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3125
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4500
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2225
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4184
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3441
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2985
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3775
5	0	0,9500	0,8005	0,6036	0,4115	0,2556	0,1469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005
	1	0,0500	0,1995	0,3964	0,5885	0,7444	0,8531	0,9244	0,9012	0,8885	0,8464	0,7995
	2	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1159
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780
7	0	0,9332	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0772
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140
8	0	0,9250	0,6600	0,4290	0,2700	0,1600	0,0900	0,0500	0,0300	0,0200	0,0100	0,0050
	1	0,0750	0,2400	0,3710	0,3900	0,3400	0,2700	0,2100	0,1700	0,1500	0,1100	0,0700
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
9	0	0,9169	0,6300	0,3900	0,2300	0,1200	0,0600	0,0300	0,0150	0,0100	0,0050	0,0025
	1	0,0831	0,2700	0,3900	0,3700	0,3000	0,2400	0,1900	0,1500	0,1300	0,0900	0,0500
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
10	0	0,9089	0,6000	0,3600	0,2100	0,1000	0,0500	0,0250	0,0125	0,0075	0,0037	0,0019
	1	0,0911	0,2600	0,3600	0,3500	0,2800	0,2200	0,1700	0,1400	0,1200	0,0800	0,0400
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
11	0	0,9009	0,5900	0,3500	0,2000	0,0900	0,0450	0,0225	0,0112	0,0062	0,0031	0,0015
	1	0,0991	0,2500	0,3500	0,3400	0,2700	0,2100	0,1600	0,1300	0,1100	0,0700	0,0300
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
12	0	0,8929	0,5800	0,3400	0,1900	0,0800	0,0400	0,0200	0,0100	0,0050	0,0025	0,0012
	1	0,1071	0,2400	0,3400	0,3300	0,2600	0,2000	0,1500	0,1200	0,1000	0,0600	0,0200
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
13	0	0,8849	0,5700	0,3300	0,1800	0,0700	0,0350	0,0175	0,0087	0,0044	0,0022	0,0011
	1	0,1151	0,2300	0,3300	0,3200	0,2500	0,1900	0,1400	0,1100	0,0900	0,0500	0,0100
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
14	0	0,8769	0,5600	0,3200	0,1700	0,0600	0,0300	0,0150	0,0075	0,0037	0,0019	0,0009
	1	0,1231	0,2200	0,3200	0,3100	0,2400	0,1800	0,1300	0,1000	0,0800	0,0400	0,0100
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
15	0	0,8689	0,5500	0,3100	0,1600	0,0500	0,0250	0,0125	0,0062	0,0031	0,0015	0,0007
	1	0,1311	0,2100	0,3100	0,3000	0,2300	0,1700	0,1200	0,0900	0,0700	0,0300	0,0050
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
16	0	0,8609	0,5400	0,3000	0,1500	0,0400	0,0200	0,0100	0,0050	0,0025	0,0012	0,0006
	1	0,1391	0,2000	0,3000	0,2900	0,2200	0,1600	0,1100	0,0800	0,0600	0,0200	0,0025
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
17	0	0,8529	0,5300	0,2900	0,1400	0,0300	0,0150	0,0075	0,0037	0,0019	0,0009	0,0004
	1	0,1471	0,1900	0,2900	0,2800	0,2100	0,1500	0,1000	0,0700	0,0500	0,0100	0,0012
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
18	0	0,8449	0,5200	0,2800	0,1300	0,0200	0,0100	0,0050	0,0025	0,0012	0,0006	0,0003
	1	0,1551	0,1800	0,2800	0,2700	0,2000	0,1400	0,0900	0,0600	0,0400	0,0100	0,0006
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
19	0	0,8369	0,5100	0,2700	0,1200	0,0100	0,0050	0,0025	0,0012	0,0006	0,0003	0,0001
	1	0,1631	0,1700	0,2700	0,2600	0,1900	0,1300	0,0800	0,0500	0,0300	0,0050	0,0003
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800
20	0	0,8289	0,5000	0,2600	0,1100	0,0050	0,0025	0,0012	0,0006	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,1711	0,1600	0,2600	0,2500	0,1800	0,1200	0,0700	0,0400	0,0200	0,0025	0,0001
	2	0,0050	0,0300	0,0900	0,1600	0,2400	0,2700	0,2700	0,2600	0,2500	0,2200	0,1800