

**PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026 (extra)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Una empresa dedicada al desarrollo de videojuegos dispone de tres equipos de trabajo: uno formado por 8 personas encargadas del diseño de los personajes, otro compuesto por 15 personas responsables de la creación de las pantallas del juego, y un tercero de 14 personas dedicado al sonido y la ambientación. La empresa desarrolla juegos de consola y juegos de ordenador. Cada juego de consola genera un beneficio diario de 100 euros, mientras que cada juego de ordenador produce un beneficio diario de 90 euros. Para la elaboración de ambos tipos de juegos se requiere una persona del equipo de diseño de personajes. Además, para el diseño de las pantallas de un juego de consola se necesitan dos personas y para el de un juego de ordenador se necesita solo una. Para el sonido y la ambientación de un juego de ordenador se necesitan dos personas y para un juego de consola solo una. Se pide:

- a) ¿Cuántos juegos de consola y cuántos de ordenador se tienen que hacer para que el beneficio diario sea máximo? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es el beneficio diario máximo? (0,5 puntos)

Problema 1. B. Una empresa estudia los precios de la subscripción a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing. En el año 2023 con 1850€ se pudieron contratar 40 subscripciones a Metfilm, 50 a Lamparx y 20 a Tuing. En 2024, Metfilm y Lamparx subieron la cuota 1€ mientras que Tuing mantuvo el precio y, con el mismo presupuesto, se tuvieron que reducir 2 subscripciones de Metfilm y 3 de Lamparx, pero se pudo mantener el número de subscripciones a Tuing. Teniendo en cuenta que Metfilm era 5€ más cara que Lamparx en el año 2023, calcula el coste de subscripción de cada compañía en cada año.

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Apartado 2. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x+1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto. (0,75 puntos)
- Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$. (2 puntos)
- Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$. (0,75 puntos)

Problema 2. B. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. Una consultoría realiza una prueba de calidad a nuevas empresas para detectar si tienen una gestión adecuada. Tras años de estudios, se ha llegado a la conclusión de que el 70% de las empresas estudiadas están bien gestionadas y de que, en este caso, la prueba indica que está bien gestionada en el 90% de los casos. Se sabe que la probabilidad de que la prueba detecte como bien gestionada una empresa que está mal gestionada es del 5%.

- Calcula la probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada. (1 punto)
- Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada? (1 punto)
- Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea incorrecto. (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. Una empresa dedicada al desarrollo de videojuegos dispone de tres equipos de trabajo: uno formado por 8 personas encargadas del diseño de los personajes, otro compuesto por 15 personas responsables de la creación de las pantallas del juego, y un tercero de 14 personas dedicado al sonido y la ambientación. La empresa desarrolla juegos de consola y juegos de ordenador. Cada juego de consola genera un beneficio diario de 100 euros, mientras que cada juego de ordenador produce un beneficio diario de 90 euros. Para la elaboración de ambos tipos de juegos se requiere una persona del equipo de diseño de personajes. Además, para el diseño de las pantallas de un juego de consola se necesitan dos personas y para el de un juego de ordenador se necesita solo una. Para el sonido y la ambientación de un juego de ordenador se necesitan dos personas y para un juego de consola solo una. Se pide:

- a) ¿Cuántos juegos de consola y cuántos de ordenador se tienen que hacer para que el beneficio diario sea máximo? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es el beneficio diario máximo? (0,5 puntos)

a) Llamamos x = número de juegos de consola que deben hacer e y = número de juegos de ordenador.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Personajes	Pantallas	Sonido	Beneficio
Juegos de consola (x)	x	$2x$	x	$100x$
Juegos de ordenador (y)	y	y	$2y$	$90y$
TOTALES	$x + y$	$2x + y$	$x + 2y$	$100x + 90y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio $B(x, y) = 100x + 90y$.

Las restricciones son:

“Una empresa dedicada al desarrollo de videojuegos dispone de tres equipos de trabajo: uno formado por 8 personas encargadas del diseño de los personajes, otro compuesto por 15 personas responsables de la creación de las pantallas del juego, y un tercero de 14 personas dedicado al sonido y la ambientación” $\rightarrow x + y \leq 8$; $2x + y \leq 15$; $x + 2y \leq 14$
 Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 8$$

$$2x + y = 15$$

$$x + 2y = 14$$

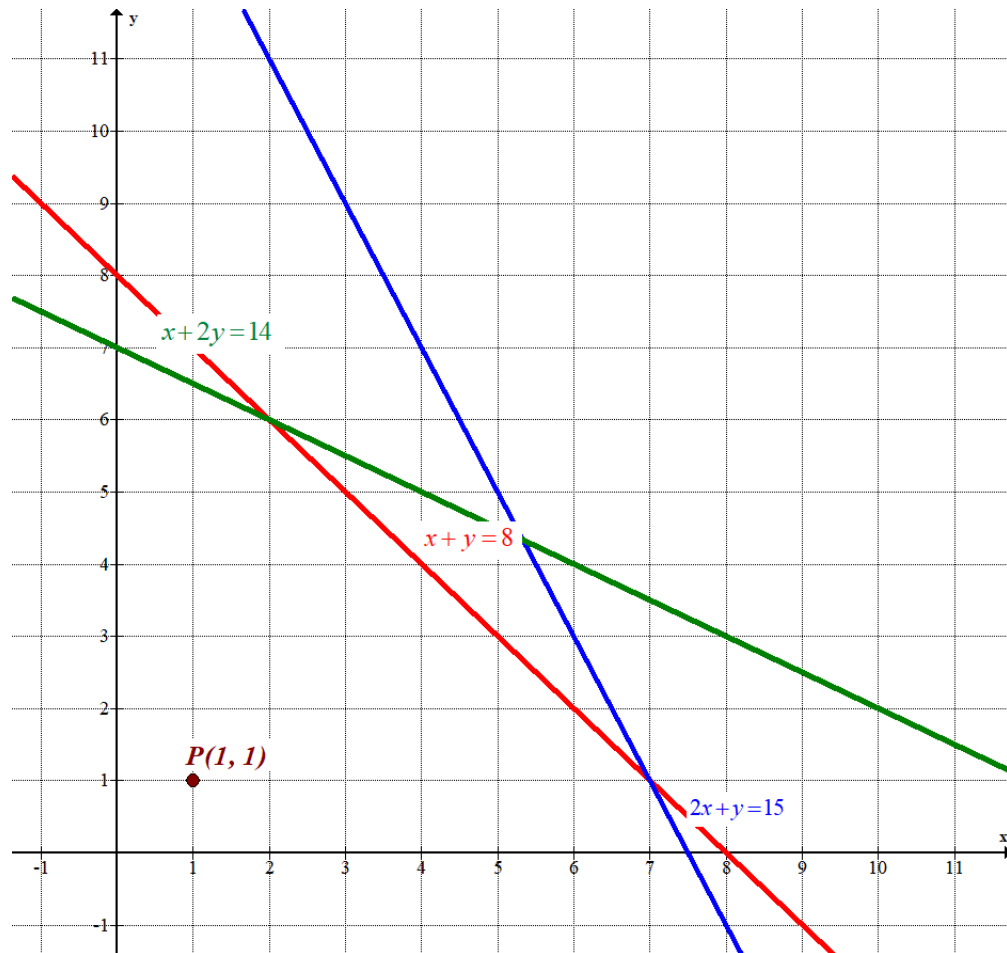
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 8 - x$
0	8
2	6
7	1

x	$y = 15 - 2x$
0	15
7	1
7.5	0

x	$y = \frac{14 - x}{2}$
0	7
2	6
14	0

Primer
cuadrante



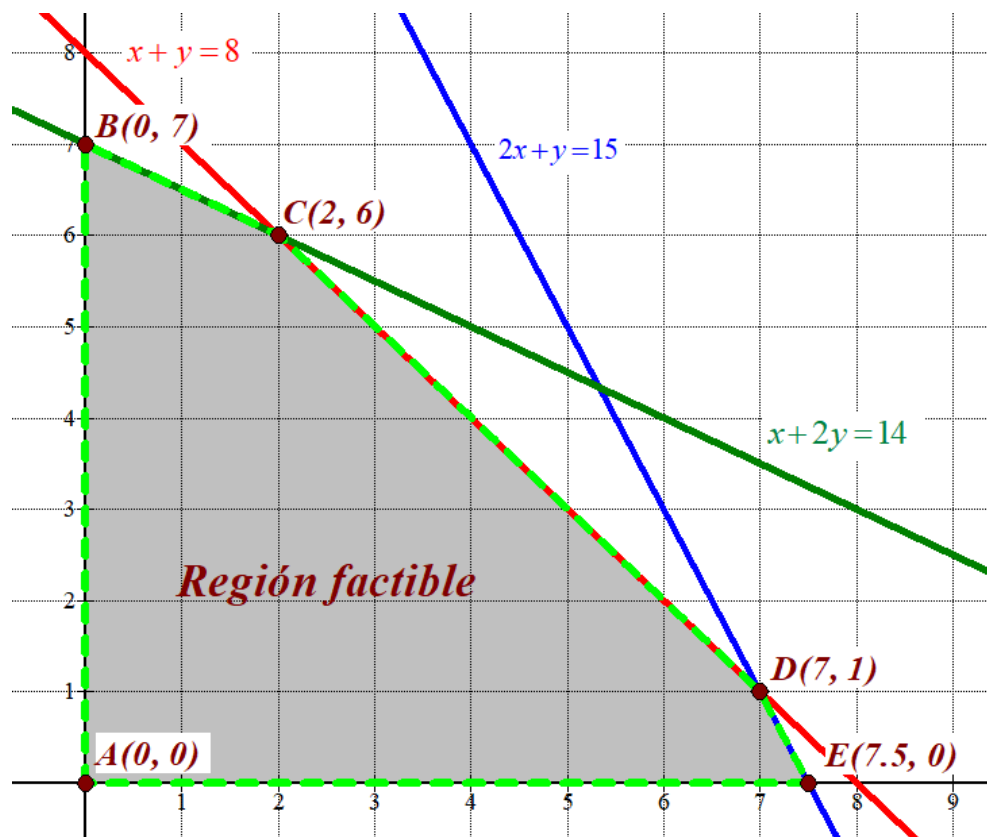
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de las rectas azul, roja y verde. Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 0)$, $B(0, 7)$, $C(2, 6)$, $D(7, 1)$ y $E(7.5, 0)$.

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 100x + 90y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 7) \rightarrow B(0, 7) = 100 \cdot 0 + 90 \cdot 7 = 630$$

$$C(2, 6) \rightarrow B(2, 6) = 100 \cdot 2 + 90 \cdot 6 = 740$$

$$D(7, 1) \rightarrow B(7, 1) = 100 \cdot 7 + 90 \cdot 1 = 790 \text{ Máximo}$$

$$E(7.5, 0) \rightarrow B(7.5, 0) = 100 \cdot 7.5 + 90 \cdot 0 = 750$$

El valor máximo de la función beneficio se obtiene en el vértice $D(7, 1)$. Se han de producir 7 juegos de consola y 1 de ordenador para obtener un beneficio máximo.

- b) El beneficio máximo que se puede conseguir cumpliendo con las restricciones del problema es de 790 €.

Problema 1. B. Una empresa estudia los precios de la suscripción a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing. En el año 2023 con 1850€ se pudieron contratar 40 suscripciones a Metfilm, 50 a Lamparx y 20 a Tuing. En 2024, Metfilm y Lamparx subieron la cuota 1€ mientras que Tuing mantuvo el precio y, con el mismo presupuesto, se tuvieron que reducir 2 suscripciones de Metfilm y 3 de Lamparx, pero se pudo mantener el número de suscripciones a Tuing. Teniendo en cuenta que Metfilm era 5 € más cara que Lamparx en el año 2023, calcula el coste de suscripción de cada compañía en cada año.

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Llamamos x , y , z al precio de la suscripción en el año 2023 a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing, respectivamente.

“En el año 2023 con 1850€ se pudieron contratar 40 suscripciones a Metfilm, 50 a Lamparx y 20 a Tuing” $\rightarrow 40x + 50y + 20z = 1850$.

“En 2024, Metfilm y Lamparx subieron la cuota 1€ mientras que Tuing mantuvo el precio y, con el mismo presupuesto, se tuvieron que reducir 2 suscripciones de Metfilm (de 40 a 38 suscripciones) y 3 de Lamparx (de 50 a 47 suscripciones), pero se pudo mantener el número de suscripciones a Tuing (20 suscripciones)” $\rightarrow 38(x+1) + 47(y+1) + 20z = 1850$.

“Metfilm era 5 € más cara que Lamparx en el año 2023” $\rightarrow x = y + 5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 40x + 50y + 20z = 1850 \\ 38(x+1) + 47(y+1) + 20z = 1850 \\ x = y + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 5y + 2z = 185 \\ 38x + 38 + 47y + 47 + 20z = 1850 \\ x = y + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 5y + 2z = 185 \\ \Rightarrow 38x + 47y + 20z = 1765 \\ x = y + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(y+5) + 5y + 2z = 185 \\ 38(y+5) + 47y + 20z = 1765 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 20 + 5y + 2z = 185 \\ 38y + 190 + 47y + 20z = 1765 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9y + 2z = 165 \\ 85y + 20z = 1575 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9y + 2z = 165 \\ 17y + 4z = 315 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -18y - 4z = -330 \\ 17y + 4z = 315 \end{array} \right\}$$

$$\overline{-y} = -15 \Rightarrow \boxed{y = 15} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 15 + 5 = 20} \\ 9 \cdot 15 + 2z = 165 \rightarrow 2z = 30 \rightarrow \boxed{z = 15} \end{array} \right.$$

Los precios de la suscripción en el año 2023 a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing son 20 €, 15 € y 15 €, respectivamente.

Los precios de la suscripción en el año 2024 a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing son 21 €, 16 € y 15 €, respectivamente.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x+1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto. (0,75 puntos)
- b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$. (2 puntos)
- c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$. (0,75 puntos)

- a) La función en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = \ln(x^2 + a)$. Como $x^2 + 4$ es siempre positivo el logaritmo neperiano existe y la función es continua en el intervalo $(-\infty, 1)$. La función en el intervalo $(1, 4)$ tiene la expresión $f(x) = (x+1)^2$. Esta expresión es polinómica y la función es continua en el intervalo $(1, 4)$.

La función en el intervalo $(4, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = 5x + \frac{b}{x+1}$. Es una expresión racional que se anula para $x = -1$ que no pertenece al intervalo de definición. La función es continua en el intervalo $(4, +\infty)$.

La función debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \ln(1^2 + a) = \ln(a+1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln(x^2 + a)) = \ln(a+1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln(a+1) = 4 \Rightarrow a+1 = e^4 \Rightarrow \boxed{a = e^4 - 1}$$

La función debe ser continua en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= (4+1)^2 = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x+1)^2 = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 5x + \frac{b}{x+1} = 5 \cdot 4 + \frac{b}{4+1} = 20 + \frac{b}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20 + \frac{b}{5} = 25 \Rightarrow \frac{b}{5} = 5 \Rightarrow \boxed{b = 25}$$

Para que la función sea continua en todo su dominio deben ser $a = e^4 - 1$ y $b = 25$.

- b) Para $a = 54$ y $b = 25$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54) & \text{si } x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{25}{x+1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$. Esta función no

es continua en $x = 1$.

La derivada en $\mathbb{R} - \{1, 4\}$ es $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54} & \text{si } x < 1 \\ 2(x+1) & \text{si } 1 < x < 4. \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

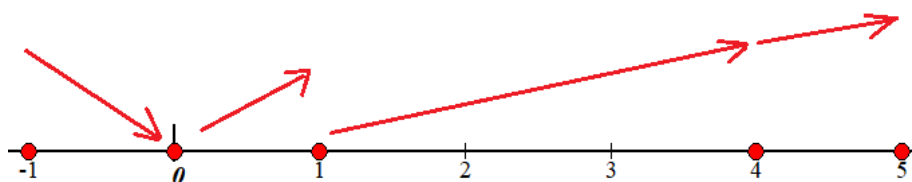
Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ 2(x+1) = 0 \rightarrow x = -1 \notin (1, 4) \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \frac{25}{(x+1)^2} = 5 \rightarrow 25 = 5(x+1)^2 \rightarrow 5 = (x+1)^2 \rightarrow \\ \rightarrow x+1 = \pm\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} - 1 \approx 1.24 \notin (4, +\infty) \\ x = -\sqrt{5} - 1 \notin (4, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[-1, 5]$ antes, entre y después de $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$.

- En $[-1, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 54} = \frac{-2}{55} < 0$. La función decrece en $[-1, 0)$.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2 \cdot 0.5}{0.5^2 + 54} = \frac{1}{54.25} > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En $(1, 4)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2(2+1) = 6 > 0$. La función crece en $(1, 4)$.
- En $(4, 5]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 5 - \frac{25}{(5+1)^2} = 5 - \frac{25}{36} = \frac{155}{36} > 0$. La función crece en $(4, 5]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Valoramos la función en los extremos del intervalo, en los cambios de definición de la función y en $x = 0$.

$$f(-1) = \ln((-1)^2 + 54) = \ln 55 \approx 4.007$$

$$f(0) = \ln(0^2 + 54) = \ln 54 \approx 3.99 \text{ Mínimo absoluto}$$

$$f(1) = \ln(1^2 + 54) = \ln 55 \approx 4.007$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4$$

$$f(4) = (4+1)^2 = 25$$

$$f(5) = 5 \cdot 5 + \frac{25}{5+1} = \frac{175}{6} \approx 29.167 \text{ Máximo absoluto}$$

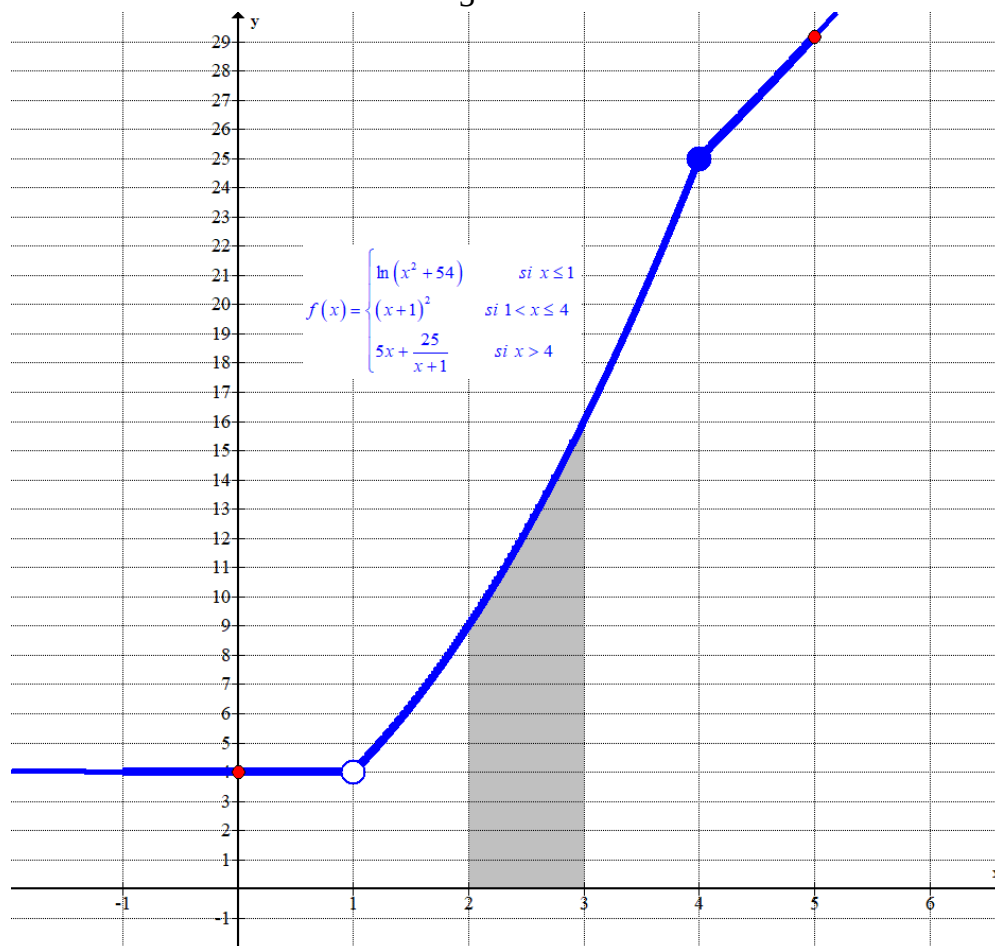
El máximo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$ es $\frac{175}{6}$.

El mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$ es $\ln 54$.

- c) En el intervalo $[2, 3]$ la función tiene la expresión $f(x) = (x+1)^2$. Esta función corta el eje OX en $x = -1$ que no pertenece al intervalo $[2, 3]$. El área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$ es el valor de la integral definida de 2 a 3 de la función.

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_2^3 = \frac{(3+1)^3}{3} - \frac{(2+1)^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{27}{3} = \frac{37}{3} \approx 12.33$$

El área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$ tiene un valor de $\frac{37}{3} \approx 12.33$ unidades cuadradas.



Problema 2. B. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 4}{0^2 - 4} = -1 \Rightarrow \boxed{A(0, -1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \text{No existe}$$

El único punto de corte con los ejes de coordenadas es A(0, -1).

b) **Asíntotas verticales.** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 4}{(-2)^2 - 4} = \frac{12}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 4}{2^2 - 4} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$$

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$, y una asíntota horizontal $y = 1$.

c) Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 - 4) - 2x \cdot (x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 8x - 2x^2 + 8 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - 8x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 8}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2(x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 8x + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54 \\ 4 + 2\sqrt{3} \approx 7.46 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos y los puntos excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{2((-3)^2 - 8(-3) + 4)}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{74}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 4 - 2\sqrt{3})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{2(0^2 - 8 \cdot 0 + 4)}{(0^2 - 4)^2} = \frac{8}{16} > 0. \text{ La función crece en } (-2, 4 - 2\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(4 - 2\sqrt{3}, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = \frac{2(1^2 - 8 \cdot 1 + 4)}{(1^2 - 4)^2} = \frac{-6}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (4 - 2\sqrt{3}, 2).$$

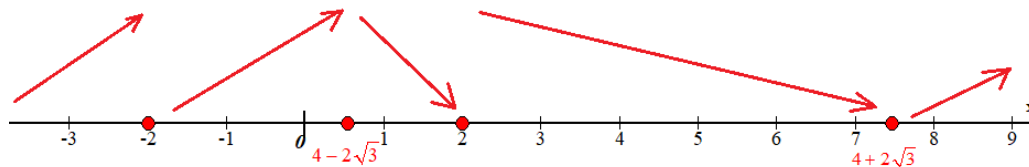
- En el intervalo $(2, 4 + 2\sqrt{3})$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{2(3^2 - 8 \cdot 3 + 4)}{(3^2 - 4)^2} = \frac{-22}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (2, 4 + 2\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(4+2\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{2(10^2 - 8 \cdot 10 + 4)}{(10^2 - 4)^2} = \frac{48}{96^2} > 0. \text{ La función crece en } (4+2\sqrt{3}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(4-2\sqrt{3}, 2) \cup (2, 4+2\sqrt{3})$ y crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 4-2\sqrt{3}) \cup (4+2\sqrt{3}, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 4-2\sqrt{3}$ y un mínimo relativo en $x = 4+2\sqrt{3}$.

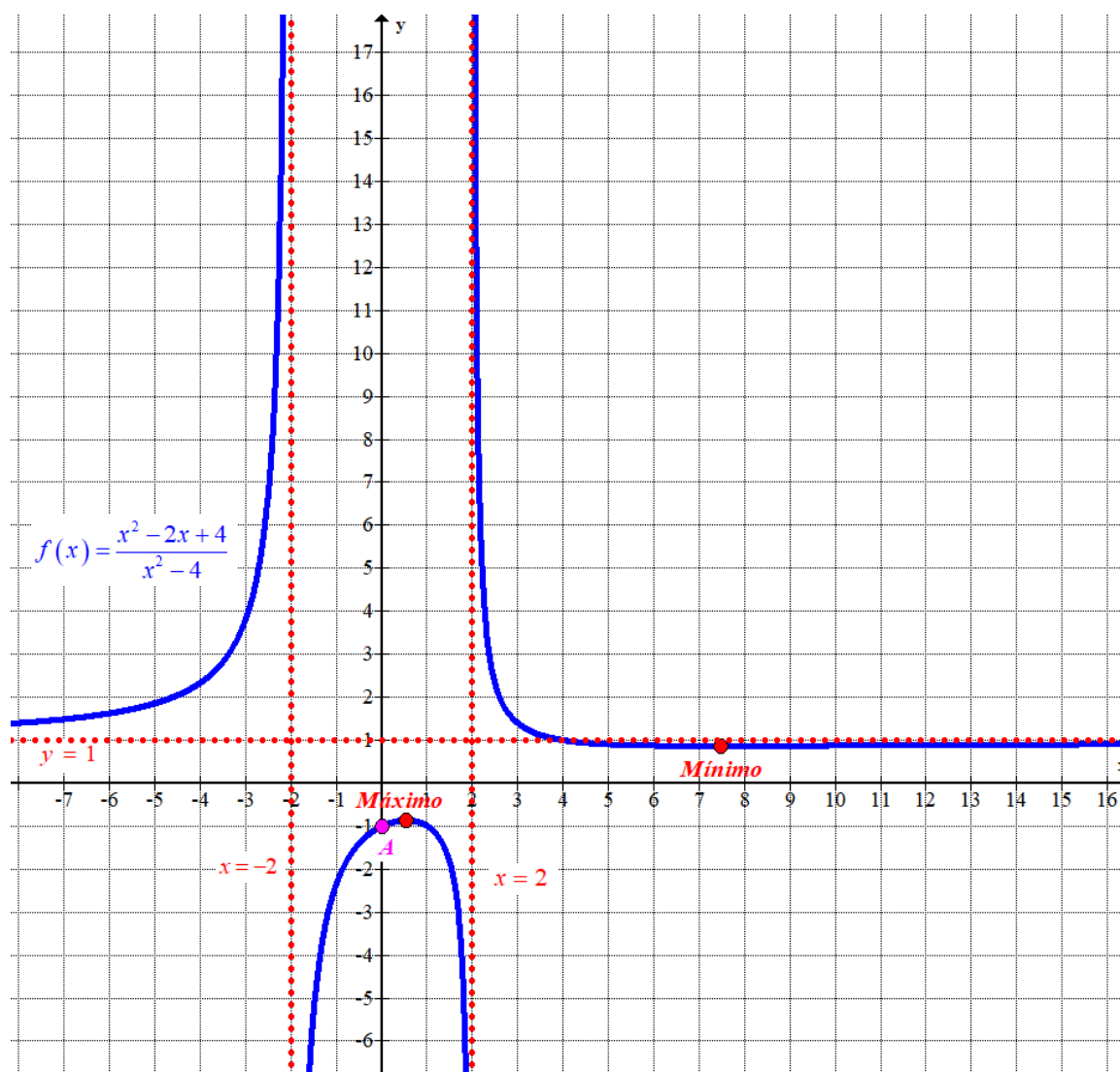
$$\text{Como } f(4-2\sqrt{3}) = \frac{(4-2\sqrt{3})^2 - 2(4-2\sqrt{3}) + 4}{(4-2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ y}$$

$$f(4+2\sqrt{3}) = \frac{(4+2\sqrt{3})^2 - 2(4+2\sqrt{3}) + 4}{(4+2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ las coordenadas del máximo relativo son}$$

$$\left(4-2\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y las del mínimo relativo son } \left(4+2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

d) Obtenemos una tabla de valores y con los datos obtenidos dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$
-3	3.8
-1	-7/3
0	-1
1	-1
3	1.4
6	0.875
10	0.875



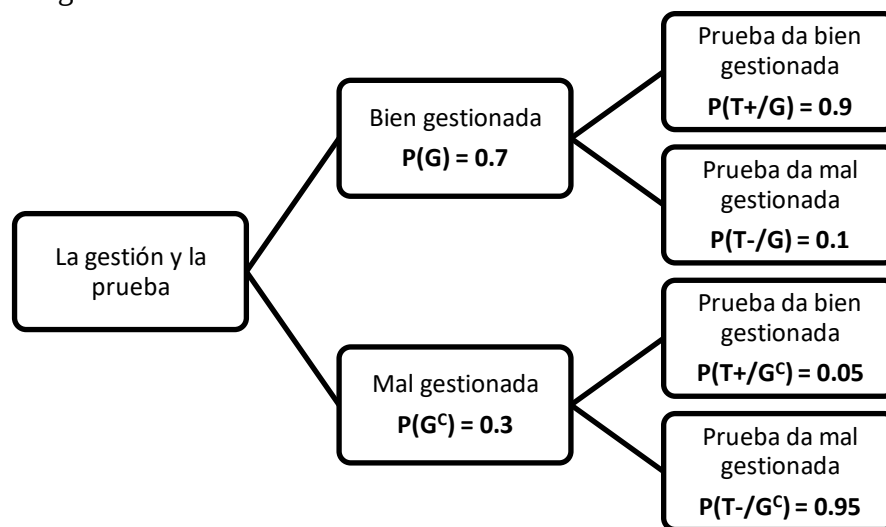
Problema 3. Una consultoría realiza una prueba de calidad a nuevas empresas para detectar si tienen una gestión adecuada. Tras años de estudios, se ha llegado a la conclusión de que el 70% de las empresas estudiadas están bien gestionadas y de que, en este caso, la prueba indica que está bien gestionada en el 90% de los casos. Se sabe que la probabilidad de que la prueba detecte como bien gestionada una empresa que está mal gestionada es del 5%.

- a) Calcula la probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada. (1 punto)
- b) Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada? (1 punto)
- c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea incorrecto. (1 punto)

Llamamos G a “la empresa está bien gestionada”, $T+$ a “La prueba detecta que la empresa está bien gestionada” y $T-$ a “La prueba detecta que la empresa está mal gestionada”.

Sabemos que: $P(G) = 0.70$, $P(T+/G) = 0.90$ y $P(T+/G^c) = 0.05$

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Debemos calcular $P(T- \cap \bar{G})$.

$$P(T- \cap \bar{G}) = P(\bar{G})P(T-/\bar{G}) = (1 - P(G))(1 - P(T+/G)) = (1 - 0.7)(1 - 0.05) = \boxed{0.285}$$

La probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada tiene un valor de 0.285.

- b) Debemos calcular $P(G/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(G/T+) &= \frac{P(G \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(G)P(T+/G)}{P(G)P(T+/G) + P(\bar{G})P(T+/G^c)} = \\
 &= \frac{0.7 \cdot 0.9}{0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.05} = \boxed{\frac{42}{43} \approx 0.9767}
 \end{aligned}$$

Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada tiene un valor de $\frac{42}{43} \approx 0.9767$.

- c) El resultado de la prueba es incorrecto cuando la empresa está mal gestionada y la prueba detecta que la empresa está bien gestionada ($\bar{G} \cap T +$) o bien cuando la empresa está bien gestionada y la prueba detecta que la empresa está mal gestionada ($G \cap T -$). La probabilidad de obtener un resultado incorrecto es la suma de las probabilidades de los dos sucesos anteriores.

$$P(G \cap T -) + P(\bar{G} \cap T +) = P(G)P(T -/G) + P(\bar{G})P(T +/\bar{G}) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.05 = \boxed{0.085}$$

La probabilidad de obtener un resultado incorrecto en la prueba de detección de mala gestión de una empresa es de 0.085.