

2º de bachillerato Matemáticas II

Bloque 4 - Estadística y probabilidad



www.ebaumatematicas.com

TEMA 10. Probabilidad	6
1.Experimentos aleatorios. Espacio muestral.	6
2.Sucesos. Operaciones con sucesos.	8
3.Definición de Probabilidad. Propiedades.	13
3.1. Definición de Laplace	13
3.2. Propiedades	13
4.Regla de la suma	16
Sucesos incompatibles	16
Sucesos compatibles.....	16
5.Regla del producto. Probabilidad en experimentos compuestos.	18
6.Probabilidad condicionada	18
Probabilidad de sucesos independientes y dependientes	21
7.Teorema de la probabilidad total. Diagrama de árbol.	25
8.Tablas de contingencia.	30
9.Teorema de Bayes	32
Formulario de probabilidad.....	35



Ejercicios	37
Tema 11. Distribuciones de probabilidad.....	44
1.Distribución de probabilidad.....	47
2.Distribuciones de probabilidad discretas	48
2.1. Función de probabilidad.....	48
2.2. Función de distribución.....	48
2.3. Media y varianza de una distribución de probabilidad discreta	50
3.Distribución binomial	56
3.1. Probabilidad de r éxitos en una variable binomial $B(n, p)$	56
3.2. Media y varianza de la binomial $B(n, p)$	61
4.Distribuciones de probabilidad continua	64
4.1. Función de probabilidad.....	64

4.2. Función de distribución.....	65
4.3. Media y varianza	65
5. Distribución de probabilidad normal	66
5.1. Distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $Z = N(0, 1)$. Distribución normal estándar.	68
5.2. ¿Cómo calcular la probabilidad pedida usando la tabla y sus características: simetría y área total = 1?	72
5.3. Cálculo del valor de z a partir de su probabilidad asociada	74
5.4. Tipificación	75
5.5. Aproximación de una binomial a una normal	75
Resumen de Distribuciones Binomial y Normal.....	80
Ejercicios:	82
 Distribución Binomial	82
 Distribución Normal	84
Probabilidad y estadística en pruebas EBAU y PAU de Murcia	88
Tablas de distribución binomial y normal (0, 1)	98

*Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo
ebaumatematicas@gmail.com*

Veo matemáticas por todas partes. Y tú, ¿también la ves?

Monos escribiendo libros



En el episodio *Última salida a Springfield*, de 1993, Homer es elegido presidente del sindicato de la central nuclear de Springfield. El señor Burns, propietario de la planta atómica, le invita a su mansión para ganárselo. En el caserón, Homer ve una habitación con mil monos aporreando mil máquinas de escribir. Burns le explica que los animales escribirán la mejor novela de la historia.

El argumento hace referencia a un problema manejado desde hace un siglo en el cálculo de probabilidades. Claudio Horacio Sánchez recuerda uno de sus enunciados más conocidos: si un millón de monos teclearan al azar en un millón de máquinas de escribir, al cabo de un millón de años habrían escrito todas las obras de Shakespeare. “Este problema fue realmente llevado a la práctica en julio de 2003, con un programa que simulaba la acción de los monos. Más de un año después, el programa produjo un pequeño fragmento, de veinticuatro letras, de *Enrique IV*”, escribía en su artículo en la revista *Números*.

La lotería de Navidad



La probabilidad de que toque 'El Gordo' de Navidad, es la misma que hallar un grano rojo en 2,7 kilos de arroz.

La probabilidad de que un décimo de la Lotería de Navidad sea agraciado con 'El Gordo' es de una entre 100.000, es decir, de 0,00001, la misma que encontrar un grano pintado de rojo en 2,7 kilos de arroz, según el presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Onofre Monzó.

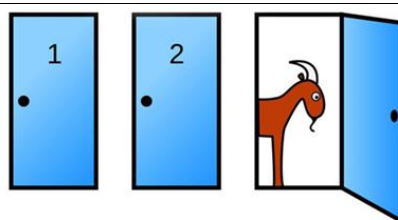
La ley de Murphy



Estas tomando un delicioso desayuno con café y, accidentalmente, la deliciosa tostada de mantequilla cae al suelo, ¿de qué lado llegará al suelo?

De acuerdo con la ley de Murphy, la probabilidad de que el pan caiga del lado de la mantequilla, girado hacia abajo, es proporcional al valor de la alfombra.

El problema de Monty Hall



Estás en un concurso de un show de televisión y el presentador te muestra tres puertas. Detrás de una de estas puertas hay un coche nuevo. Detrás de las otras dos puertas hay dos cabras. Tú tienes que escoger una puerta. Luego, el presentador abrirá una de las puertas que no elegiste y revelará una de las cabras.

¿Qué interesa? ¿Quedarte con la puerta que elegiste o cambiarla por la otra?

Interesa cambiar de puerta.

Digamos que elegiste la puerta 1, estas son las distintas posibilidades que se pueden plantear:

Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Resultado	
			Si cambia	Si no cambia
Coche	Cabra	Cabra	Cabra	Coche
Cabra	Coche	Cabra	Coche	Cabra
Cabra	Cabra	Coche	Coche	Cabra

Si mantienes tu elección ganarás en 1 de las 3 opciones posibles.

Si cambias de puerta ganarás en 2 de las 3 opciones posibles.

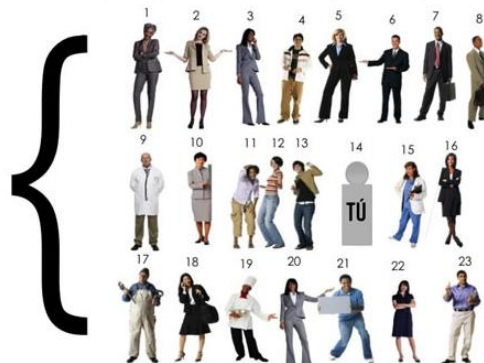
La paradoja del cumpleaños



¿Cómo dirías que es la probabilidad de que en un grupo de 23 personas dos de ellas celebren su cumpleaños el mismo día del año?

¿Coincide tu intuición con lo que dicen las matemáticas?

Tu oficina de
23 personas



La **paradoja del cumpleaños** establece que si hay 23 personas reunidas hay una probabilidad del 50,7% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día.

Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99%.

Lo comprobaremos cuando tengamos un mayor dominio de combinatoria y probabilidad.

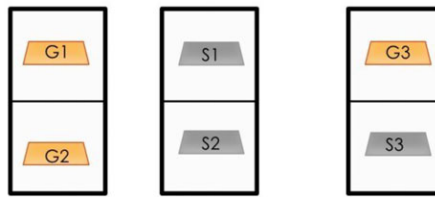
La paradoja de la caja de Bertrand

Te ponen delante 3 cajas: una tiene dos barras de plata, otra dos de oro y la tercera una de cada. Sacas la primera y es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que la otra también lo sea? ¿Del 50%? ERROR.



Este es un ejemplo de cómo el razonamiento intuitivo puede engañarnos.

Para comprender mejor la situación y calcular la probabilidad de que la segunda barra sea también de oro, etiquetemos las barras:



Sacas la primera barra y es de oro. Ahora debes calcular la probabilidad de que la siguiente sea de oro.

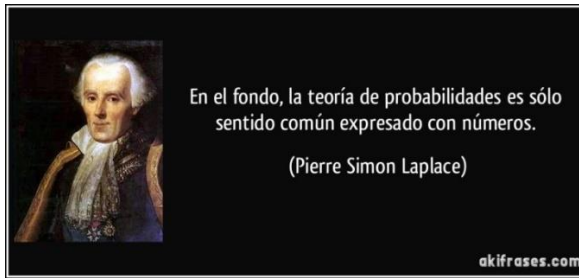
En la tabla se aprecian las distintas posibilidades:

Primera elección	Segunda elección
G1	G2
G2	G1
S1	S2
S2	S1
G3	S3
S3	G3

Observamos que hay 3 formas posibles de sacar primero una barra de oro. De los cuales en 2 sacamos barra de oro en segunda elección y en 1 sacamos barra de plata.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es de $\frac{2}{3}$.

TEMA 10. Probabilidad



La probabilidad, en su definición más básica, es una medida de la **certidumbre asociada a un suceso futuro**.

1. Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una **experiencia determinista**.

Si lanzamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una **experiencia aleatoria**.

Un **experimento aleatorio** es aquel que no podemos predecir el resultado, es decir, que depende de la suerte o del azar.

Cuando conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo, decimos que se trata de un **experimento determinista**.

Ejercicio:

De los siguientes experimentos, indica los que son deterministas y los que son aleatorios:

- Elegir un libro de la biblioteca con los ojos cerrados.
- Medir la temperatura de agua destilada.
- Lanzar una moneda al aire.
- Marcar un número de teléfono.
- Extraer una bola de una urna de bolas rojas.
- Medir la longitud de una mesa.

Indica además, dos ejemplos de experimento aleatorio y dos ejemplos de experimento determinista.

Solución: a), b) y f) son experimentos aleatorios. c), d) y e) son experimentos deterministas.

- Experimento determinista: medir el peso de un litro de agua, calcular el área de un cuadrado de lado 2, etc.
- Experimento aleatorio: anotar la matrícula del primer coche que pase por delante de ti, lanzar un dado y mirar que sale, extraer una carta de la baraja, etc.

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio está formado por todos los posibles resultados que podemos obtener al realizar el experimento, se denota **E** .

Suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Decimos que **un suceso se ha verificado**, si al realizar el experimento aleatorio correspondiente, el resultado es uno de los que contempla dicho experimento.

Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 5, se ha verificado, entre otros, los sucesos $\{5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{\text{Sacar impar}\}$, $\{\text{Sacar más de 3}\}$, E . Y no se ha verificado $\{\text{Sacar par}\}$

Demos nombre a algunos tipos de sucesos:

- Un **suceso elemental** es aquel que solo contempla un posible resultado.
- **Suceso seguro o total, E** : un suceso que ocurre siempre. El espacio muestral también se designa como suceso seguro.
- **Suceso imposible o vacío, $\emptyset$** : un suceso que no ocurre nunca.
- Un **suceso compuesto** es el formado por dos o más sucesos elementales.

Cualquier suceso se puede describir con una expresión en texto o bien detallando cada resultado que favorece que ocurra dicho suceso.

En el experimento “lanzar un dado y mirar que sale” un suceso posible es $A = \text{“salga número par”}$, este mismo suceso lo podemos describir como $A = \text{“sacar múltiplo de 2”}$ o $A = \text{“Sacar 2 o 4 o 6”}$. Esta última descripción es más precisa y se suele escribir como $A = \{2, 4, 6\}$.

Ejemplo:

En el experimento aleatorio "lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos", describimos su espacio muestral o conjunto de posibles resultados y algunos de los posibles sucesos a estudiar en este experimento:

Espacio muestral: $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Son **sucesos elementales**:

- Cada uno de los posibles resultados:
 $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}$
- Obtener por ejemplo múltiplo de 7: $\{7\}$
- Obtener más de 11 puntos: $\{12\}$

Son **sucesos compuestos**:

- $A = \{\text{Obtener múltiplo de 3}\} = \{3, 6, 9, 12\}$
- $B = \{\text{Obtener múltiplo de 2}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Es un **suceso seguro**: $E = \{\text{Obtener suma menor o igual a 12}\} = \{\text{Obtener suma entre 1 y 13}\}$

Es un **suceso imposible**: $\emptyset = \{\text{Obtener suma 215}\} = \{\text{Obtener suma 1}\} = \{\text{Obtener suma mayor de 13}\}$

Para empezar, vamos a prestar atención a experiencias aleatorias sencillas como lanzar dados o monedas, extraer cartas de una baraja, sacar bolas de urnas,



Ejercicio:

Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

- Sacar dos cartas de una baraja y mirar si es pareja o no.
- Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.

Solución:

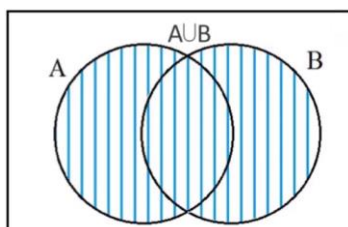
a) $E = \{\text{Pareja}, \text{No pareja}\}$

b) $E = \{\text{Dos bolas blancas}, \text{Dos bolas negras}, \text{Una bola negra y otra blanca}\}$

2. Sucesos. Operaciones con sucesos.

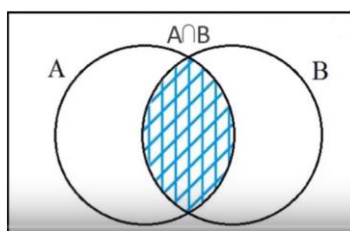
Llamamos **unión** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cup B$ (lo leemos como "A unión B") al suceso formado por todos los elementos de A y todos los de B.

El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A o B o ambos.



Llamamos **intersección** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cap B$ (lo leemos como "A intersección B") al suceso formado por los elementos que pertenecen **simultáneamente** a A y a B.

El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen A y B a la vez.



Dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando $A \cap B = \emptyset$. Si $A \cap B \neq \emptyset$ se dicen **compatibles**.

Ejemplo:

En el experimento aleatorio "lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos", dados los sucesos $A = \{1, 2, 3, 6\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ la unión y la intersección son:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 6\}$$

Los sucesos A y B son compatibles, ya que tienen sucesos elementales en común: $A \cap B \neq \emptyset$.

Dados los sucesos $C = \text{"Sacar suma par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y $D = \text{"Sacar suma impar"} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ la unión y la intersección son:

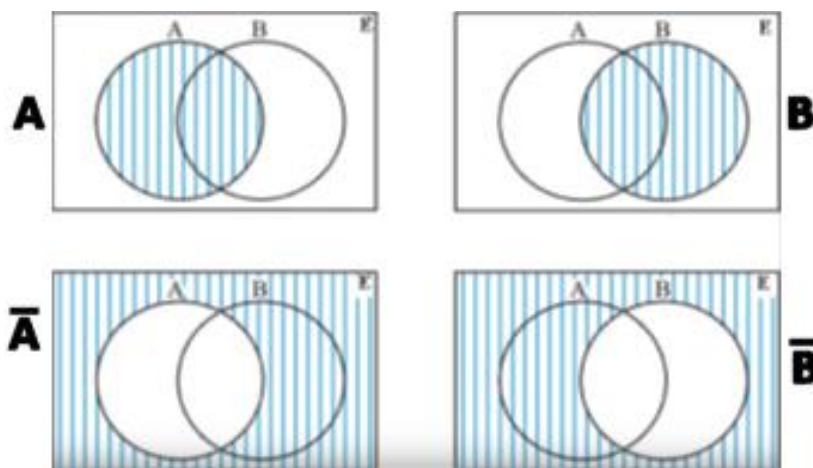
$$C \cup D = \text{"Sacar suma par o impar"} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$C \cap D = \text{"Sacar suma par e impar"} = \emptyset$$

Los sucesos C y D son incompatibles, pues no tienen sucesos elementales en común: $A \cap B = \emptyset$.

El suceso **contrario o complementario** de un suceso A se escribe $\bar{A}$ o A^C . Entre ambos (A y A^C) se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca los dos simultáneamente.

El **contrario del contrario** coincide con el suceso de partida: $(A^C)^C = A$

**Ejemplo:**

En el experimento aleatorio "lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos", dados los sucesos $C = \text{"Sacar suma par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y $D = \text{"Sacar suma impar"} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ se cumple que $D^C = C$ y $C^C = D$. Es decir, el suceso contrario de "Sacar suma par" es "Sacar suma impar" y viceversa.

Leyes de Morgan

El **contrario de la unión** es la intersección de los contrarios (1ª ley de Morgan).

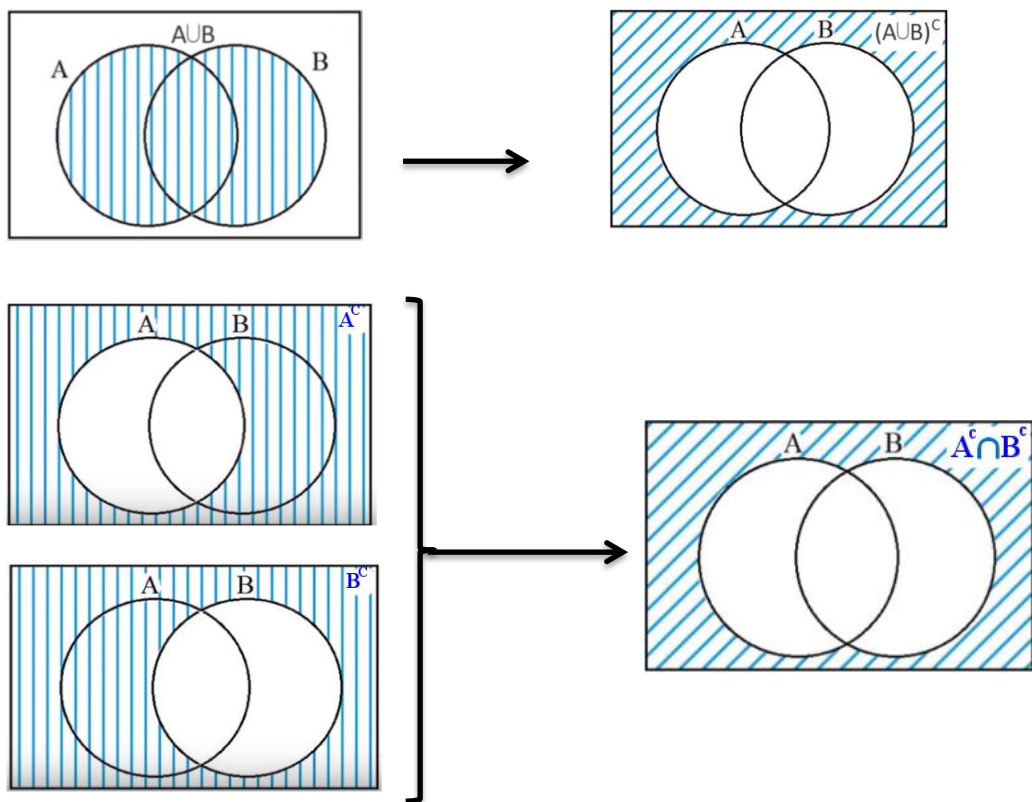
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

El **contrario de la intersección** es la unión de los contrarios (2ª ley de Morgan)..

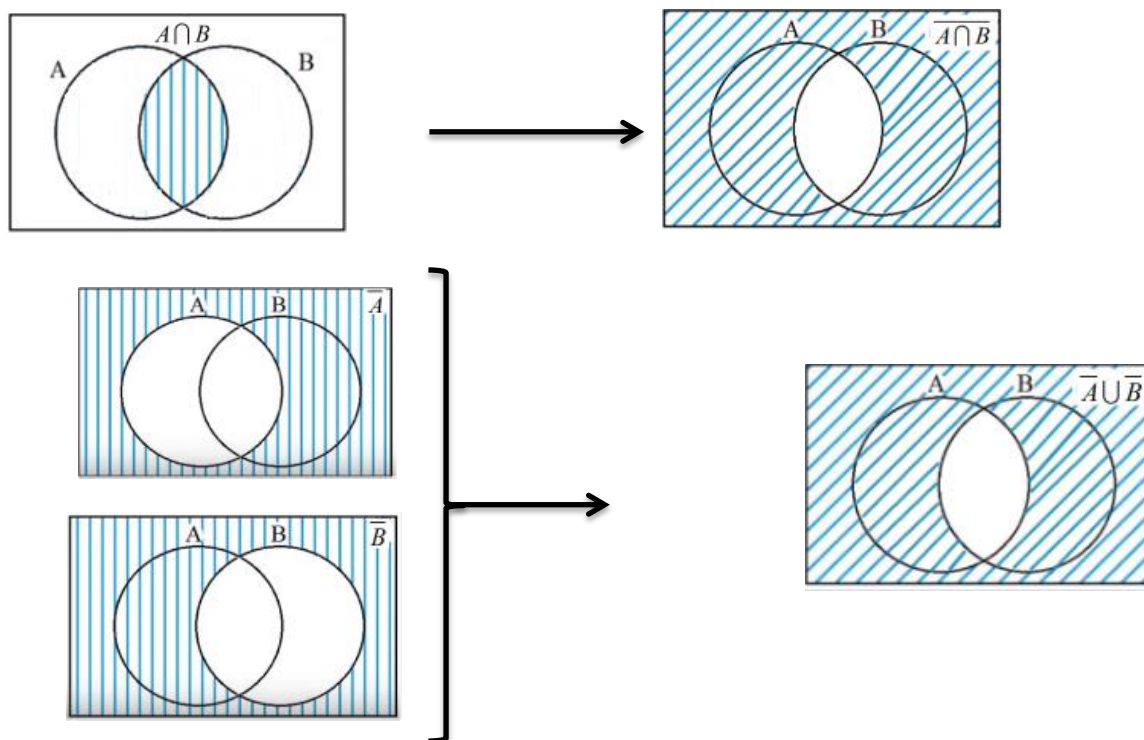
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

La demostración de estas leyes la tenemos en las siguientes representaciones gráficas.

1ª Ley de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

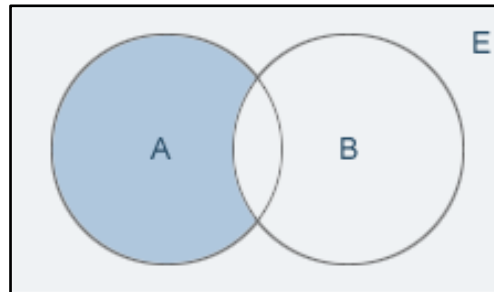


2ª Ley de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



La **diferencia de sucesos**, $A - B$, está formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir, la intersección del suceso A con el contrario del suceso B.

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

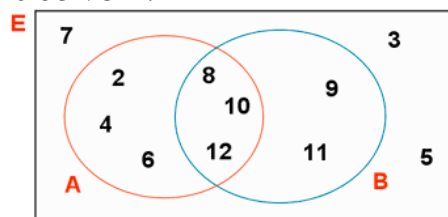


Ejemplos:

1. Sea E el espacio muestral del experimento consistente en “lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores”.

Sean los sucesos $A = \{\text{ser par}\}$ y $B = \{\text{ser mayor que 7}\}$.

Podemos obtener un diagrama de Venn:



- **Unión de sucesos:**

$A \cup B = \{\text{obtener un número par o mayor que 7}\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- **Intersección de sucesos:**

$A \cap B = \{\text{obtener un número par mayor que 7}\} = \{8, 10, 12\}$

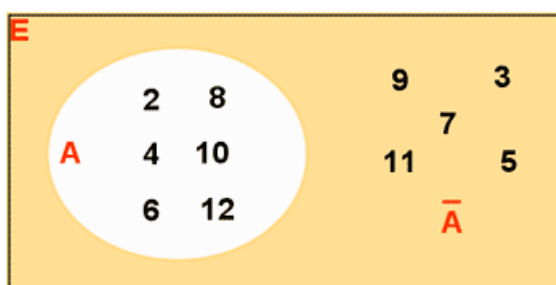
- **Diferencia de sucesos:**

$A - B = \{\text{obtener un número par menor o igual que 7}\} = \{2, 4, 6\}$

- **Suceso contrario:**

$\bar{A} = \{\text{No obtener número par}\} = \{\text{obtener un número impar}\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$\bar{B} = \{\text{Ser menor o igual que 7}\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



2. De una urna con 50 bolas numeradas de 1 a 50 se extrae una. Se consideran los sucesos:

$A = \{\text{sacar un número múltiplo de 2}\}$

$B = \{\text{sacar un número múltiplo de 3}\}$

$C = \{\text{sacar un número múltiplo de 5}\}$

Determina los elementos de los siguientes conjuntos:

- a) $A \cup B = \{\text{sacar múltiplo de 2 o 3}\}$
- b) $A \cup C = \{\text{sacar múltiplo de 2 o 5}\}$
- c) $B \cup C = \{\text{sacar múltiplo de 3 o 5}\}$
- d) $A \cap B = \{\text{sacar múltiplo de 2 y 3}\} = \{\text{sacar múltiplo de 6}\}$
- e) $A \cap C = \{\text{sacar múltiplo de 2 y 5}\} = \{\text{sacar múltiplo de 10}\}$
- f) $B \cap C = \{\text{sacar múltiplo de 3 y 5}\} = \{\text{sacar múltiplo de 15}\}$
- g) $\overline{A} \cap B = \{\text{sacar número que no sea múltiplo de 2 y si de 3}\} = \{\text{sacar múltiplo de 3 e impar}\}$
- h) $B \cap \overline{C} = \{\text{sacar múltiplo de 3 y no de 5}\} = \{\text{sacar múltiplo de 3 que no acabe en 5 ni en 0}\}$
- i) $C \cap \overline{C} = \emptyset$
- j) $B \cup \overline{B} = E$
- k) $\overline{A \cup B} = \{\text{sacar número que no sea múltiplo de 2 ni de 3}\}$
- l) $\overline{A \cap B} = \{\text{sacar número que no sea múltiplo de 6}\}$

Ejercicios

- Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: $A = \text{"salir un número primo"}$ y $B = \text{"salir un número cuadrado perfecto"}$. Responde a las cuestiones siguientes:
 - Calcula los sucesos $A \cap B$ y $A \cup B$
 - Los sucesos A y B , ¿son compatibles o incompatibles?
 - Encuentra los sucesos contrarios de A y B .
- Se lanza un dado de seis caras. Considera los sucesos:

$A = \text{"obtener un número mayor que 2"}$ $B = \text{"obtener un número par"}$
 $C = \text{"obtener un número primo"}$

 Describe los sucesos elementales asociados a cada suceso y calcula los sucesos siguientes:
 - $\overline{A}; \overline{B}; \overline{C}$
 - $A \cap B; A \cup B$
 - $\overline{A \cup B}; \overline{A \cap B}; B \cap C$
 - $A \cup \overline{B}; B \cap \overline{C}$
- En el experimento "Lanzar un dado con 6 caras" consideramos los sucesos $A = \text{"sacar par"}$, $B = \text{"sacar impar"}$, $C = \text{"sacar primo"}$. Describe estos sucesos A , B y C , también los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ y $B \cap C$. Describe los sucesos contrarios $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

Soluciones:

- $1.a. A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 4, 9\} = \emptyset; A \cup B = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 4, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
 - $1.b. \text{Son incompatibles}$ $1.c. \overline{A} = \text{No sacar número primo} = \{1, 4, 6, 8, 9\};$
 $\overline{B} = \text{No sacar cuadrado perfecto} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

$$2. A = \{3,4,5,6\}; B = \{2,4,6\}; C = \{2,3,5\}$$

2.a. $\bar{A}$ = Obtener número menor o igual que 2 ; $\bar{B}$ = Obtener número impar ;

$\bar{C}$ = Obtener n° no primo.

2.b. $A \cap B$ = Sacar número par mayor que 2 = $\{4,6\}$; $A \cup B$ = Sacar número par o mayor que 2 = $\{2,3,4,5,6\}$

2.c. $\overline{A \cup B} = \{1\}$; $\overline{A \cap B} = \{1,2,3,5\}$; $B \cap C$ = Sacar primo y par = $\{2\}$

2.d. $A \cup \bar{B}$ = Sacar mayor que 2 o impar = $\{1,3,4,5,6\}$;

$B \cap \bar{C}$ = Sacar par y no sea primo = $\{2,4,6\} \cap \{1,4,6\} = \{4,6\}$

3. $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C = \{2,3,5\}$. $\bar{A} = \{\text{sacar impar}\} = B$, $\bar{B} = \{\text{sacar par}\} = A$,

$\bar{C} = \{\text{sacar no primo}\} = \{1,4,6\}$. $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup C = \{2,3,4,5,6\}$,

$A \cap C = \{2\}$, $B \cup C = \{1,2,3,5\}$ y $B \cap C = \{3,5\}$.

3. Definición de Probabilidad. Propiedades.

3.1. Definición de Laplace

Si el espacio muestral de un experimento aleatorio está formado por n sucesos elementales $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ y todos ellos tienen la misma probabilidad de que ocurran en la realización del experimento (son **equiprobables**), entonces:

Probabilidad de que se verifique un suceso $A = P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$

3.2. Propiedades

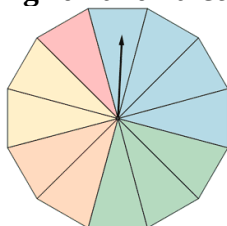
1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(E) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

¡¡ IMPORTANTÍSIMO !!

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ejemplos:

1. Al girar una ruleta como la de la figura, ¿cuál es la probabilidad de cada color?



1 parte es roja, 4 azules, 3 verdes, 2 naranjas y 2 amarillas.

Al encontrarnos en una situación de equiprobabilidad, aplicamos la Regla de Laplace para poder calcular la probabilidad de cada color, teniendo en cuenta que la ruleta se encuentra dividida en 12 partes. Los sucesos elementales presentan la misma probabilidad.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(\text{rojo}) = \frac{1}{12} \quad P(\text{azul}) = \frac{4}{12} \quad P(\text{verde}) = \frac{3}{12} \quad P(\text{naranja}) = P(\text{amarillo}) = \frac{2}{12}$$

- 2. Si extraemos una bola al azar de una urna que contiene 3 bolas verdes, 5 bolas blancas y 2 bolas azules, calcula la probabilidad de los sucesos:**

A = {obtener una bola verde} , B = {obtener una bola blanca} y C = {obtener una bola azul}.

Como en total hay 10 bolas, los casos posibles son 10 y los casos favorables para el suceso A son 3, 5 para B y 2 para C.

Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{3}{10} \quad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- 3. Si lanzamos un dado al aire, calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos:**

- a) Sacar un 3.
- b) Sacar un número par.
- c) Sacar un número primo.
- d) Sacar un número menos que 5.

Definimos en primer lugar el espacio muestral del experimento.

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Aplicando la regla de Laplace, calculamos ahora las probabilidades de cada uno de los sucesos.

$$\text{a) } P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{b) } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{c) } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{d) } P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- 4. De la baraja de cartas española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:**

- a) Sacar el as de espadas.
- b) Sacar un rey.
- c) Sacar un oro.
- d) Sacar una figura
- e) Sacar una carta que no sea figura.
- f) Sacar as o un 2.

Aplicando la regla de Laplace, calculamos las probabilidades de cada uno de los sucesos.

$$P(\text{As de espadas}) = \frac{1}{40} \quad P(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad P(\text{Oro}) = \frac{10}{40}$$

$$P(\text{Figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \quad P(\text{No figura}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \quad P(\text{As o 2}) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

5. En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el “gordo”.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos: A = “Menor que 5”; B = “Par”.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A^c , B^c , $A^c \cap B^c$.

a) El espacio muestral es: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) A = “Menor que 5” = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ B = “Par” = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ $A \cap B = \{0, 2, 4\}$ $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $A^c \cap B^c = \{5, 7, 9\}$

6. Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

b) Escribe el suceso “obtener vocal” y calcula su probabilidad.

a) Los sucesos elementales son: $\{P\}$, $\{R\}$, $\{E\}$, $\{M\}$, $\{I\}$, $\{O\}$.

Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = “obtener vocal” = $\{E, I, O\}$

$$P(V) = 3/6 = 1/2 = 0,5$$

7. Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Describe los siguientes sucesos:

A : la suma de puntos es 6; $A = \{(5, 1), (4, 2), \dots\}$

B : En uno de los dados ha salido 4; $B = \{(4, 1), \dots\}$

C : En los dados salió el mismo resultado.

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) Calcula la probabilidad de los sucesos de los apartados b) y c).

e) Calcula la probabilidad de A^c , B^c y C^c .

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) $A \cup B \rightarrow$ En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B \rightarrow$ Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, $\{(4, 2), (2, 4)\}$.

$A \cap C \rightarrow$ Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, $\{(3, 3)\}$.

d) $P[A] = 5/36$ $P[B] = 11/36$ $P[C] = 6/36 = 1/6$

$$P[A \cup B] = 14/36$$

$$P[A \cap B] = 2/36 = 1/18$$

$$P[A \cap C] = 1/36$$

$$e) P[A^c] = 1 - P[A] = 31/36$$

$$P[B^c] = 1 - P[B] = 25/36$$

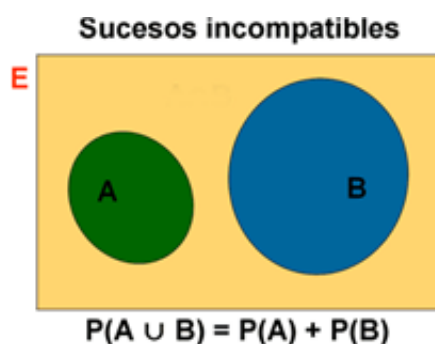
$$P[C^c] = 1 - P[C] = 5/6$$

4. Regla de la suma

Sucesos incompatibles

Si dos **sucesos** A y B de un experimento son **incompatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Ejemplo:

Una urna contiene 5 bolas rojas, 2 bolas azules y 3 bolas verdes. Se considera el experimento sacar una bola al azar. Sean los sucesos A = "Sacar bola roja", B = "Sacar bola azul" y C = "Sacar bola que no sea verde". Calcula la probabilidad de sacar una bola que no sea verde.

A y B son sucesos incompatibles. Además $A \cup B = C$. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{5}{10} \quad P(B) = \frac{2}{10} \quad P(C) = \frac{7}{10}$$

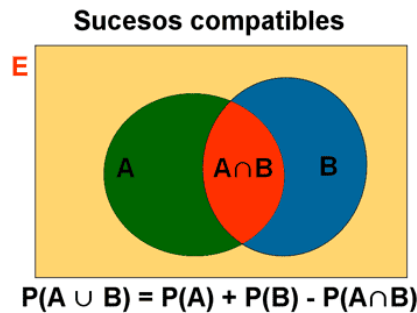
Se puede calcular la probabilidad de C, utilizando la fórmula anterior:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

Sucesos compatibles

Si dos **sucesos** A y B son **compatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso menos la probabilidad del suceso intersección de A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Ejemplo:**

1. Realizamos el experimento aleatorio de extraer una carta de una baraja española de 40 cartas y se definen los siguientes sucesos:

$A = \{\text{obtener un rey}\}$, $B = \{\text{obtener una copa}\}$ y $C = \{\text{obtener un rey o una copa}\}$.

¿Cómo calcularías las probabilidades de esos sucesos?

Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{4}{40} \quad P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Para obtener la probabilidad de que salga rey o una carta de copas, tenemos 10 cartas de copas y los 3 reyes restantes (de oros, espadas y bastos) pues en las 10 cartas de copas ya está incluido el rey de copas

$$P(C) = \frac{13}{40}$$

Sin embargo, si nos fijamos en el suceso C, obtener un rey o una copa, vemos que este suceso se puede identificar con la unión de los sucesos A y B, pero teniendo cuidado porque A y B tienen un elemento en común y son compatibles. Por tanto:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

2. Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 20, de manera que todas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola, el número no sea divisible por 3?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 o por 5?

c) ¿Y la probabilidad de que no sea divisible por 3 ni por 5?

Consideramos los sucesos:

$A = \{\text{Ser divisible por 3}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$B = \{\text{Ser divisible por 5}\} = \{5, 10, 15, 20\}$

$A \cap B = \{\text{Ser divisible por 3 y ser divisible por 5}\} = \{15\}$

Calculamos sus probabilidades:

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0'3 ; P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0'2 ; P(A \cap B) = \frac{1}{20} = 0'05$$

a) $\{\text{No ser divisible por 3}\} = \bar{A}$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0'3 = 0'7$$

b) $\{\text{Ser divisible por 3 o 5}\} = A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'3 + 0'2 - 0'05 = 0'45$$

$$c) \{ \text{No ser divisible por 3 ni por 5} \} = \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'45 = 0'55$$

5. Regla del producto. Probabilidad en experimentos compuestos.

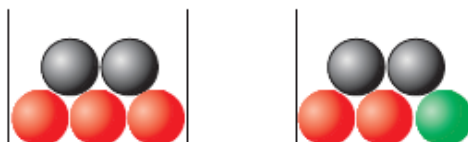
Un **Experimento aleatorio simple** es aquel en el que sólo se realiza una acción.
 Por ejemplo: “sacar una carta”, “lanzar un dado”, “elegir una bola de una urna”, “apuntar el número de matrícula de un coche que pasa por la calle”, etc..

Un **experimento compuesto** está formado por dos o más experimentos aleatorios simples realizados de manera consecutiva.

La probabilidad de un suceso elemental en un experimento compuesto puede obtenerse **multiplicando** las probabilidades indicadas en las **ramas** del diagrama de árbol que llevan a realizarse el suceso.

Ejemplo:

1. Sacamos una bola de cada urna. Calcula:



- La probabilidad de que ambas sean rojas.
- La probabilidad de que ambas sean negras.

$$a) P(\text{Roja y roja}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$b) P(\text{Negra y negra}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

6. Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos tal que $P(A) \neq 0$, se llama **probabilidad de B condicionada al suceso A** , $P(B/A)$, a la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha sucedido A , es decir, probabilidad de B tomando como espacio muestral A .

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De esta igualdad se deduce:

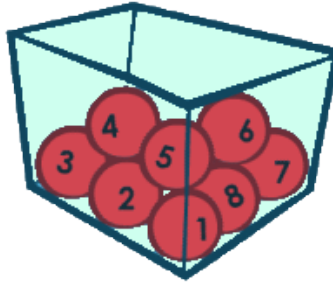
$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Nos pueden surgir dos tipos de situaciones donde usar la probabilidad condicionada.

- En **experimentos simples** la probabilidad condicionada reduce el espacio muestral.

Por ejemplo:

- En el experimento “sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8”, consideramos los sucesos A = “sacar par” y B = “sacar 4 o más”.



- Calcula la probabilidad de A.
- Calcula la probabilidad de A, sabiendo que ha pasado B.

Solución:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \text{"sacar par"} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \text{"sacar 4 o más"} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Utilizando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables (2, 4, 6, 8)}}{\text{nº casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Como sabemos que ha sucedido B el espacio muestral ya no son los 8 resultados posibles, sino los 5 que contempla el suceso B. También cambia el número de casos favorables.

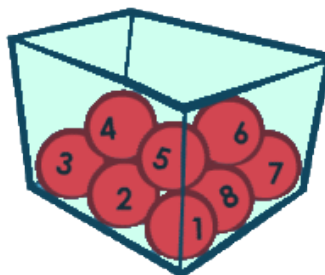
$$P(A / B) = \frac{\text{nº casos favorables (4, 6, 8)}}{\text{nº casos posibles (4, 5, 6, 7, 8)}} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$$

- En **experimentos compuestos** lo que sucede en una acción puede condicionar la probabilidad de la siguiente acción.

Por ejemplo:

- En el experimento “sacar dos bolas de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8”, consideramos los sucesos A = “sacar una 1ª bola par” y B = “sacar una 2ª bola par”.

- Calcula la probabilidad de A.
- Calcula la probabilidad de A, sabiendo que ha pasado B.



Solución:

Para calcular la probabilidad de A el experimento es sacar una bola de la urna, por lo que aplicamos la regla de Laplace:

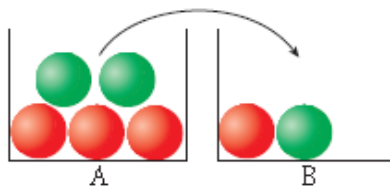
$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Sin embargo, para calcular la probabilidad de B condicionado a que ha sucedido A, debemos de considerar el experimento compuesto “sacar una 1ª bola, dejarla fuera y después sacar una 2ª bola”

$$P(B/A) = \frac{\text{nº casos favorables (he sacado una par y quedan 3 pares)}}{\text{nº casos posibles (solo 7 bolas)}} = \frac{3}{7} = 0,428 = 42,8\%$$

Ejemplos:

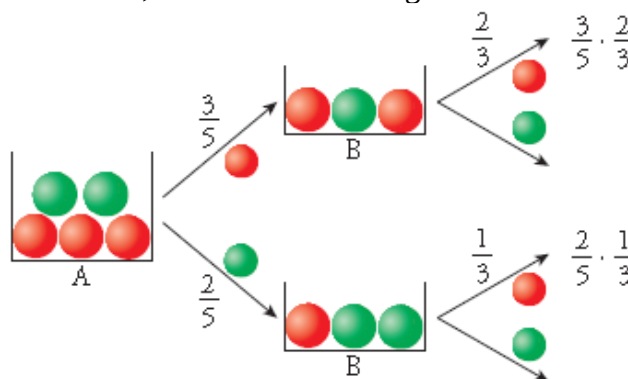
1. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:



a) $P(1^{\text{a}} \text{ roja y } 2^{\text{a}} \text{ roja})$

b) $P(1^{\text{a}} \text{ roja y } 2^{\text{a}} \text{ verde})$

Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama de árbol.



$$\text{a) } P(1^{\text{a}} \text{ roja y } 2^{\text{a}} \text{ roja}) = P(1^{\text{a}} \text{ roja}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ roja} / 1^{\text{a}} \text{ roja}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) } P(1^{\text{a}} \text{ roja y } 2^{\text{a}} \text{ verde}) = P(1^{\text{a}} \text{ roja}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ verde} / 1^{\text{a}} \text{ roja}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

2. En una clase de 25 alumnos, 14 son aficionados al fútbol, 9 al baloncesto y 5 a ambos deportes. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que es aficionado al baloncesto.

b) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto.

c) No practique ningún deporte.

En este experimento todos los sucesos elementales son equiprobables, puesto que todos los alumnos de la clase tienen la misma probabilidad de ser escogidos. Por tanto, podemos aplicar la regla de Laplace.

Consideramos los siguientes sucesos:

$A = \{\text{Ser aficionado al fútbol}\}$

$B = \{\text{Ser aficionado al baloncesto}\}$

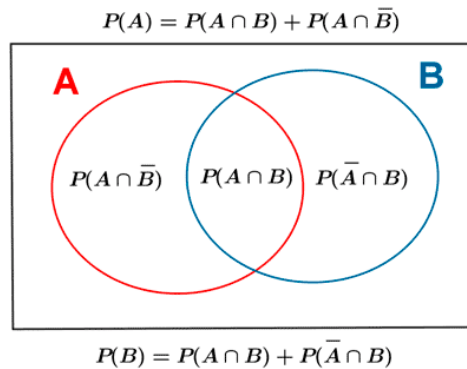
$A \cap B = \{\text{Ser aficionado a los dos deportes}\}$

a) $\{\text{Ser aficionado al fútbol condicionado a ser aficionado al baloncesto}\} = A/B$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/25}{9/25} = \frac{5}{9}$$

b) {Ser aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto} = $A/\bar{B}$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{14/25 - 5/25}{1 - 9/25} = \frac{9/25}{16/25} = \frac{9}{16}$$



c) Partiendo del esquema anterior, podemos calcular fácilmente cuántos alumnos practican fútbol, baloncesto o ambos.

Probabilidad de que un alumno sólo sea aficionado al fútbol:

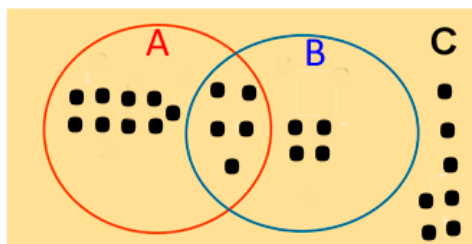
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{14}{25} - \frac{5}{25} = \frac{9}{25}$$

Probabilidad de que un alumno sólo sea aficionado al baloncesto:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{25} - \frac{5}{25} = \frac{4}{25}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no sea aficionado a ningún deporte es:

$$P(C) = 1 - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B) = 1 - \frac{5}{25} - \frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$



Probabilidad de sucesos independientes y dependientes

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son **independientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos no influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{ó} \quad P(A/B) = P(A)$$

Una forma de comprobar si dos sucesos A y B son independientes es:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sucesos dependientes

Dos **sucesos** son **dependientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

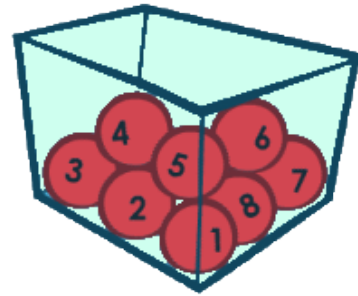
Ejemplos:

1. En el experimento “sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8”, consideramos los sucesos A = “sacar par” y B = “sacar 4 o más”. ¿Son A y B independientes?

Por lógica se intuye que no lo son, pues si uno de ellos se da por realizado la probabilidad del otro cambia.

Aplicemos la teoría:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{5}{8}$$



$$P(A \cap B) = P(\text{Sacar par mayor o igual que 4}) = \frac{\text{nº casos favorables (4,6,8)}}{\text{nº casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)}} = \frac{3}{8}$$

Evidentemente:

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3}{8} = 0,375 \\ P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos son dependientes

2. Tenemos una urna con 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 2 bolas azules. Vamos a extraer 2 bolas al azar. Calcula la probabilidad de sacar dos bolas rojas.

El experimento “Extraer 2 bolas de una urna” vamos a contemplarlo como “extraer una primera bola y después una segunda bola”.

Definimos los sucesos:

$R_1 = \{\text{obtener una bola roja en la primera extracción}\}$

$R_2 = \{\text{obtener una bola roja en la segunda extracción}\}$

- Si la extracción es **con reemplazamiento**, los sucesos R_1 y R_2 son **independientes**.

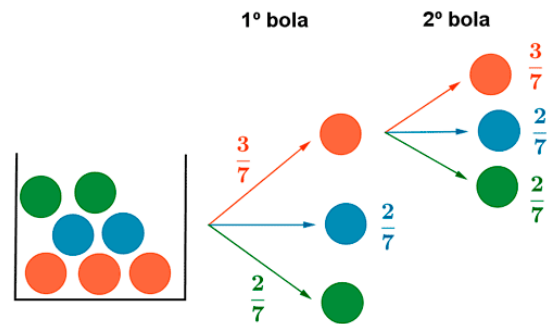
La probabilidad pedida es:

$$P(\text{Una bola roja en primera extracción}) = P(R_1) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{3}{7}$$

Con reemplazamiento significa que se devuelve a la urna la bola extraída y volvemos a tener 7 bolas en la urna. La segunda extracción vuelve a tener la misma probabilidad que la primera.

$$P(\text{Una bola roja en segunda extracción}) = P(R_2) = P(R_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(\text{Sacar dos bolas rojas}) = P(R_1, R_2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$



Extracción con reemplazamiento

- Si la extracción es **sin reemplazamiento** los sucesos R_1 y R_2 son **dependientes**.

La probabilidad pedida es:

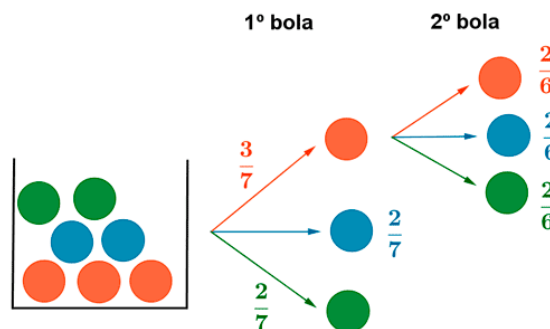
$$P(\text{Una bola roja en primera extracción}) = P(R_1) = \frac{N^\circ \text{ casos favorables}}{N^\circ \text{ casos posibles}} = \frac{3}{7}$$

En la segunda extracción, al no haber reemplazamiento, la probabilidad de obtener la segunda roja depende de si se ha verificado o no el primer suceso (Sacar 1ª bola roja).

En este caso se dice que la probabilidad del suceso R_2 (obtener la segunda bola roja) está condicionada por el que se haya producido el suceso R_1 o no, y se escribe R_2/R_1

$$P(\text{sacar una 2ª bola roja, sabiendo que hemos sacado una bola roja en la 1ª extracción}) = \frac{N^\circ \text{ casos favorables}(3-1)}{N^\circ \text{ casos posibles}(7-1)} = \frac{2}{6}$$

$$P(\text{Sacar dos bolas rojas}) = P(R_1, R_2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$



Extracción sin reemplazamiento

3. En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se extrae una, se anota su número y se deja encima de la mesa. Se extrae otra y se hace lo mismo.

- a) Determina el número de elementos del espacio muestral de este experimento.
- b) Calcula la probabilidad de extraer dos bolas con numeración impar.

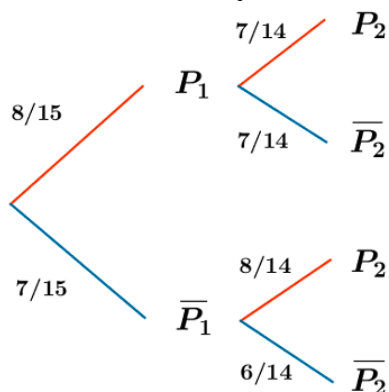
a) Como las extracciones son sin devolución, el número de elementos del espacio muestral es: (nº de bolas que puedo extraer en la 1ª extracción) · (nº de bolas que puedo extraer en la 2ª extracción) = $15 \cdot 14 = 210$.

b) Sean los sucesos:

$P_1 = \{\text{El primer número es impar}\}.$

$P_2 = \{\text{El segundo número es impar}\}.$

Observando el diagrama de árbol se tiene que :



$$P((P_1 \cap P_2)_2) = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{56}{210} = \frac{4}{15}$$

4. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halle la probabilidad de que:

a) Ambos acierten.

b) Uno acierte y el otro no.

c) Ninguno de los dos acierte.

d) Alguno acierte.

Definimos los dos sucesos siguientes:

$T_1 = \{\text{El primer tirador acierta}\}$

$T_2 = \{\text{El segundo tirador acierta}\}$

Estos dos sucesos son independientes, ya que lo que haga uno de los tiradores no influye en el otro. Aplicamos la probabilidad de la intersección de sucesos independientes:

$$\text{a) } P(\text{Ambos acierten}) = P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } P(\text{Uno acierte y otro no}) =$$

$$= P(\text{Acierta el primero y falla el segundo o Falla el primero y acierta el segundo}) =$$

$$= P(T_1 \cap \bar{T}_2) + P(\bar{T}_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(\bar{T}_2) + P(\bar{T}_1) \cdot P(T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\text{c) } P(\text{Ninguno acierte}) = P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = P(\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$d) P(\text{Alguno acierto}) = 1 - P(\text{Ninguno acierto}) = 1 - P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

5. Sean A y B dos sucesos de un experimento dado, tales que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,2$. Calcula $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

7. Teorema de la probabilidad total. Diagrama de árbol.

Llamamos **sistema completo de sucesos** a una familia de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que cumplen:

1. Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$

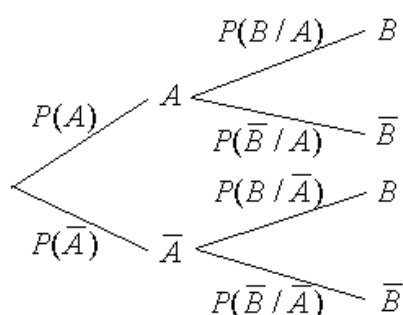
Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Para facilitar el uso de este teorema, se construyen diagramas de árbol que nos permiten ver más claros los distintos resultados posibles de un experimento compuesto.

Cada rama nueva del diagrama es la realización de un nuevo experimento simple que lleva a completar el experimento compuesto.



En los diagramas de árbol, la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, puede depender de cómo haya sido el primero. Cuando utilicemos este método, no es necesario, que utilicemos la nomenclatura matemática, pero no olvidéis que es el caso más sencillo y común de probabilidad condicionada.

Es muy fácil, aunque no lo parezca, fijaos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

1. Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:

- a) Los cuatro huevos en un buen estado.
b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

Llamemos $H = \{\text{Extraer huevo en buen estado}\}$, así H_1, H_2, H_3 y H_4 será sacarlo en primer lugar, segundo, tercero o cuarto.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Sacar cuatro huevos buenos}) &= P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) = \\ &= P(H_1) \cdot P(H_2 / H_1) \cdot P(H_3 / H_1 \cap H_2) \cdot P(H_4 / H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \\ &= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{5040}{11880} = \frac{14}{33} \end{aligned}$$

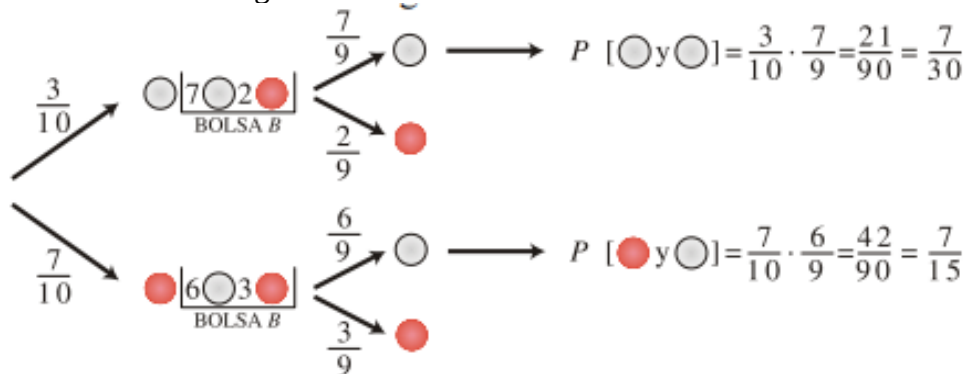
b) El huevo roto lo podemos sacar en cualquiera de las 4 extracciones, así:

$$\begin{aligned} P(\text{Sacar tres huevos buenos y uno malo}) &= \\ &= P(\overline{H_1} \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) + P(H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap H_4) + \\ &+ P(H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap H_4) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \overline{H_4}) = \\ &= \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \\ &= 4 \cdot \frac{1440}{11880} = \frac{5760}{11880} = \frac{16}{33} \end{aligned}$$

2. Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



a) Esto solo ocurre en la rama o camino superior.

$$P(\text{bola extraída de A es blanca y la bola extraída de B es blanca}) = \frac{7}{30} = 0'23$$

b) Esto sucede de dos formas distintas y la probabilidad sería:

$$P(\text{bola extraída de B es blanca}) = \frac{7}{30} + \frac{7}{15} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7$$

3. Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene dado en la siguiente tabla:

	F ₁	F ₂	F ₃
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Halla la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa.

Consideramos los sucesos:

F₁ = {Elegir pieza fabricada en la factoría 1}

F₂ = {Elegir pieza fabricada en la factoría 2}

F₃ = {Elegir pieza fabricada en la factoría 3}

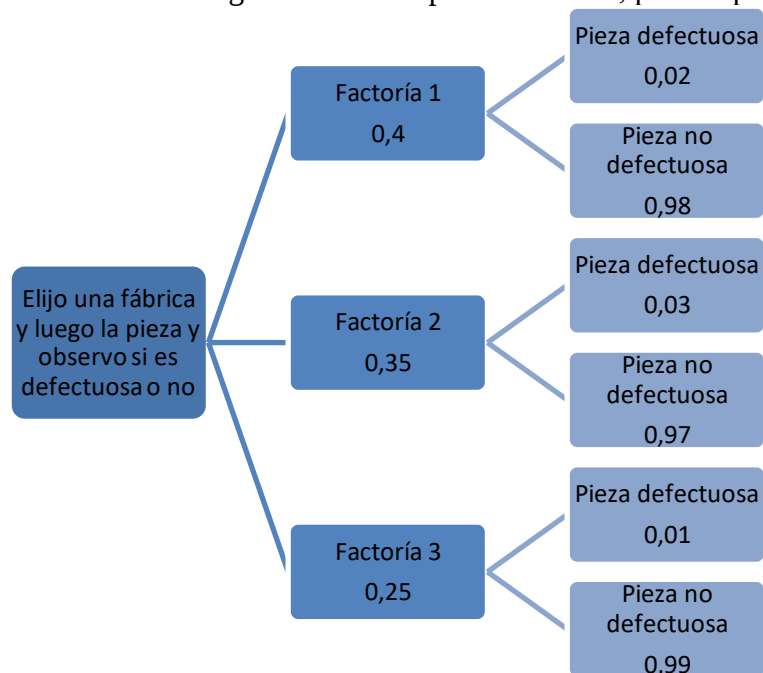
D = {Elegir pieza defectuosa}

Lo podemos calcular directamente si sabemos detallar en que consiste el suceso “La pieza es defectuosa” y las distintas maneras en que se puede producir esta situación.

$$P(\text{Elegir pieza defectuosa}) = P(F_1) \cdot P(D / F_1) + P(F_2) \cdot P(D / F_2) + P(F_3) \cdot P(D / F_3) =$$

$$= \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{100} = 0,01875 = 1,8 \%$$

No hemos necesitado un diagrama de árbol para resolverlo, pero lo podemos usar.

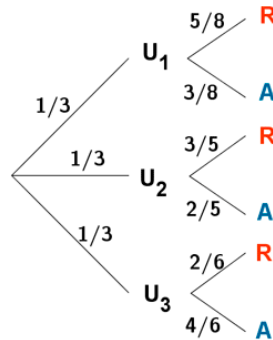


$$P(\text{Elegir pieza defectuosa}) = 0,4 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,01 = 0,01875 = 1,8 \%$$

4. Tenemos tres urnas distintas: U_1 con 5 bolas rojas y 3 azules, U_2 con 3 bolas rojas y 2 azules y U_3 con 2 bolas rojas y 4 azules. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

Sean los sucesos $R = \{\text{Sacar bola roja}\}$ y $A = \{\text{Sacar bola azul}\}$.

Los experimentos “elegir urna” y “sacar una bola” son dependientes entre sí. En el diagrama de árbol podemos ver las distintas probabilidades de que ocurran **R** o **A** para cada una de las 3 urnas.

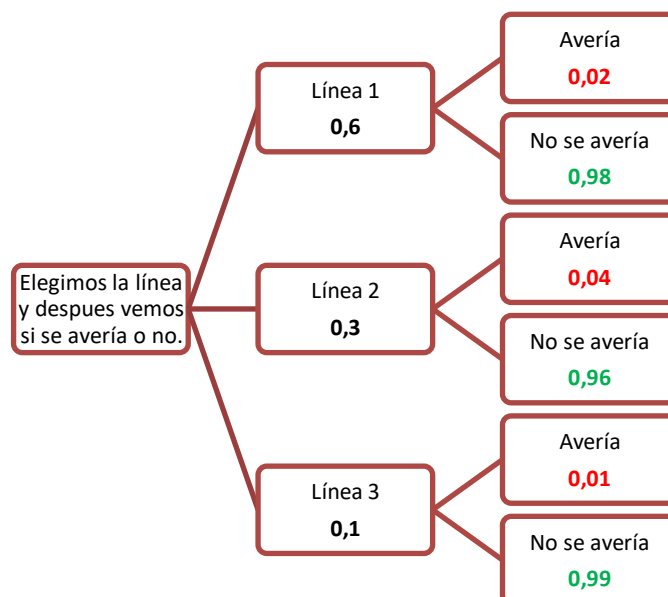


$$P(R) = P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{24} + \frac{3}{15} + \frac{2}{18} = \frac{187}{360}$$

5. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

El suceso "sufrir una avería" (Av) puede producirse en las tres líneas, (L_1 , L_2 , L_3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

$$P(Av) = P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3)$$



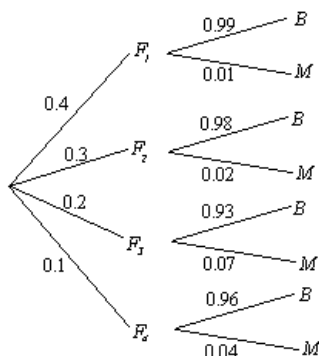
(El Sistema completo de sucesos aparece en las primeras ramas: L_1 , L_2 y L_3)

También se puede expresar como

$$P(A_v) = P(L_1 \cap A_v) + P(L_2 \cap A_v) + P(L_3 \cap A_v) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,025$$

6. Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1 , F_2 , F_3 y F_4 . El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Llamando M = "el producto está defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:



$$P(M) = P(F_1) \cdot P(M / F_1) + P(F_2) \cdot P(M / F_2) + P(F_3) \cdot P(M / F_3) + P(F_4) \cdot P(M / F_4) = \\ = 0,4 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,07 + 0,1 \cdot 0,04 = \mathbf{0,028}$$

Ejercicios:

- 1) En una baraja de 40 cartas, ¿cuáles la probabilidad de as? ¿y deoros?
- 2) Se lanzan dos dados equilibrados con seis caras marcadas con los números del 1 al 6. Se pide:
 - a. Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga igual número en los 2 dados (pareja)?
- 3) Si escogemos al azar dos números de teléfono y observamos la última cifra de cada uno, determina las probabilidades siguientes:
 - a. Que las dos cifras sean iguales.
 - b. Que su suma sea 11.
 - c. Que su suma sea mayor que 7 y menor que 14.

Soluciones:

1. $P(\text{As}) = 1/10$ $P(\text{Oros}) = 1/4$
2. $P(\text{múltiplo de 3}) = 1/3$ $P(\text{difieren más de 2}) = 1/3$ $P(\text{pareja}) = 1/6$
3. a. $P(2 \text{ cifras iguales}) = 1/10$
 b. $P(\text{sumen 11}) = P(\text{sean } 5+6 \text{ o } 7+4 \text{ o } 8+3 \text{ o } 9+2) = 8/100 = 2/25$
 c. $P(\text{suma sea } 8, 9, 10, 11, 12 \text{ o } 13) = 1 - P(\text{suma sea } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16, 17, 18) = 79/100$

8. Tablas de contingencia.

En los problemas de probabilidad y en especial en los de probabilidad condicionada, a veces resulta interesante y práctico organizar la información en una tabla de contingencia.

Siempre que utilicemos este método, tenemos que asignarle un significado a los sucesos A y B, así como sus contrarios e indicar las probabilidades del suceso correspondiente a cada celda.

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Ejemplo:

1. En 4º de secundaria hay 22 chicos y 18 chicas. Llevan gafas 8 chicos y 6 chicas. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que sea chico y no lleve gafas.

En primer lugar recogemos los datos de un problema en una tabla de doble entrada.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	8	6	
Sin gafas			
Total	22	18	

En segundo lugar completamos la tabla.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	8	6	14
Sin gafas	14	12	26
Total	22	18	40

En último lugar, se extraen los datos necesarios de la tabla para calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{Chico sin gafas}) = \frac{\text{Numero de chicos sin gafas}}{\text{Número total de alumnos}} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

2. Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.

- a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
b) Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

Solución.

Se tienen dos variables, la primera el género (Hombres o Mujeres) y la segunda recoge el estado civil, en este caso, si el individuo es soltero o casado.

El problema nos pregunta por la probabilidad de que el ganador sea un hombre soltero. En principio no sabemos cuántos hombres solteros hay, no contamos con ese dato, por lo que nos ayudará realizar una tabla de contingencia.

Paso 1. Realizamos la tabla y la llenamos con los datos dados

De los datos explícitos que tenemos, nuestra tabla queda así:

	Hombres	Mujeres	Total
Casados/Casadas		45	80
Solteros/Solteras			
Total		65	120

Paso 2. Analizamos los datos

Aquí lo que sigue es manipular los datos que tenemos para poder obtener el resto. Este proceso se puede hacer de varias formas distintas.

Sabemos que 80 clientes son casados, y de esos 45 son mujeres por lo que 35 tienen que ser hombres.

Si hay 65 mujeres y 45 son casadas entonces debe haber 20 solteras.

De los 120 clientes, 80 son casados por lo que 40 deben ser solteros.

Además de los 120 clientes, 65 son mujeres, entonces hay 55 hombres.

Hay 40 solteros, y 20 de ellos son mujeres, entonces los otros 20 son hombres

Paso 3. Completamos la tabla

	Hombres	Mujeres	Total
Casados/Casadas	35	45	80
Solteros/Solteras	20	20	40
Total	55	65	120

Paso 4. Obtenemos las probabilidades

De aquí, para responder a la preguntas se debe considerar la Ley de Laplace.

¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

$$P(\text{Hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

$$P(\text{Mujer / casado}) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

3. (EBAU 2012 Andalucía). En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 mujeres no emplean esa vía.

Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) No contrate sus viajes por internet.

- b) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
 c) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

Planteamos la tabla de contingencia con los datos que se presentan en el enunciado del ejercicio:

	Usa internet	No usa internet	TOTAL
Hombres	84		120
Mujeres		24	
TOTAL			200

Completamos la tabla.

	Usa internet	No usa internet	TOTAL
Hombres	84	36	120
Mujeres	56	24	80
TOTAL	140	60	200

A partir de la tabla, determinamos las probabilidades pedidas:

- a) Solo nos fijamos en la fila inferior.

$$P(\text{No contrate sus viajes por internet}) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

- b) Solo utilizamos los datos de la fila de Mujeres.

$$P(\text{Use internet, sabiendo que es mujer}) = \frac{56}{80} = \frac{7}{10} = 0,7$$

- c) Solo utilizamos los datos de la columna "Usa internet".

$$P(\text{Sea hombre, sabiendo que usa internet}) = \frac{84}{140} = \frac{3}{5} = 0,6$$

9. Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados (*Probabilidades a posteriori*). El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de **teorema de Bayes**.

Si tenemos n sucesos, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, tales que:

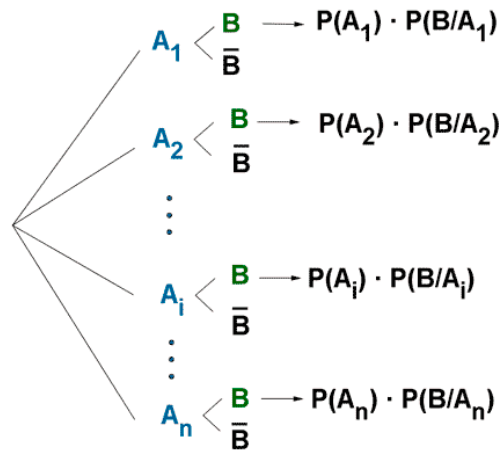
- Son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$

Sea un suceso B cualquiera asociado al experimento aleatorio del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, se cumple :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

Las probabilidades $P(A_i)$: **probabilidades a priori**.

Las probabilidades $P(A_i/B)$: **probabilidades a posteriori**.

TEOREMA DE BAYES

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_1) \cdot P(B/A_n)}$$

Ejemplos:

1. Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene expresado en la siguiente tabla:

	F ₁	F ₂	F ₃
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la factoría 3?

Consideramos los sucesos:

$F_1 = \{\text{Elegir pieza fabricada en la factoría 1}\}$

$F_2 = \{\text{Elegir pieza fabricada en la factoría 2}\}$

$F_3 = \{\text{Elegir pieza fabricada en la factoría 3}\}$

$D = \{\text{Elegir pieza defectuosa}\}$

$$P(\text{Elegir pieza defectuosa}) = P(F_1) \cdot P(D/F_1) + P(F_2) \cdot P(D/F_2) + P(F_3) \cdot P(D/F_3) =$$

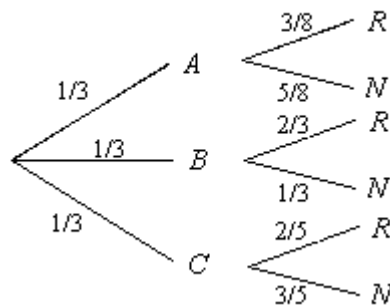
$$= \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{100} = 0,01875$$

$$P(F_3/D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(F_3) \cdot P(D/F_3)}{0,01875} = \frac{0,0025}{0,01875} = 0,119$$

La probabilidad de que al encontrar una pieza defectuosa esta provenga de la factoría 3 es del 11,9 %.

2. Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Llamamos R = "sacar bola roja" y N = "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es $P(A/R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\begin{aligned}
 P(A/R) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173} = 0,26 = 26 \%
 \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Sol: 15/37

2. Supongamos que el 5% de la población padece la enfermedad de apendicitis (2% en estado agudo A y 3% en estado crónico C) y el 95% no la padece. Uno de los síntomas es dolor de estómago. Las probabilidades de tener dolor de estómago padeciendo el estado A, el estado C o no teniendo la enfermedad son del 90%, el 70% y el 10% respectivamente. Hallar la probabilidad de que una persona con dolor de estómago sufra realmente el estado A de apendicitis.

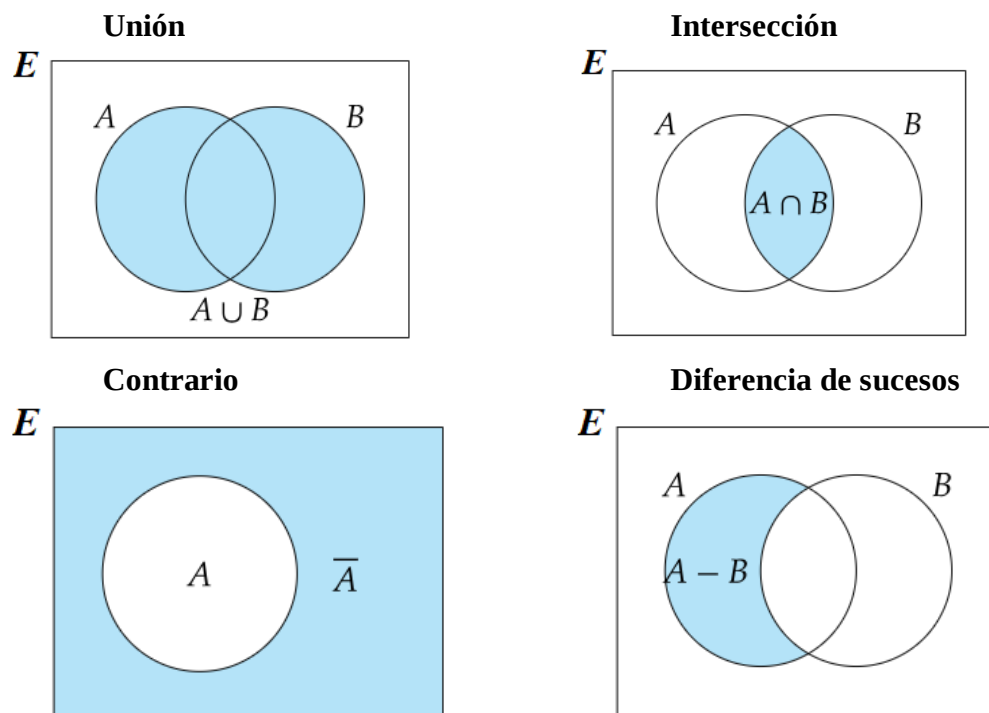
Sol: 9/67

3. Una fábrica elabora rotuladores azules y rojos en la misma proporción. Por defectos en el proceso de fabricación, algunos rotuladores salen con la tinta de otro color. Sabemos que el porcentaje de rotuladores azules que llevan tinta azul es 82% y que el porcentaje de rotuladores rojos que llevan tinta roja es 92%.
 - a. Calcular la probabilidad de que un rotulador tomado al azar tenga la tinta del color que le corresponde.
 - b. Si sabemos que un rotulador tomado al azar es defectuoso, calcular la probabilidad de que escriba en color rojo.

Sol: 0,87; 0,69

Formulario de probabilidad

Operaciones con sucesos



Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Regla de Laplace:

Para calcular probabilidades en experimentos con sucesos elementales **equiprobables**:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables a A}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Probabilidad:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

Sucesos dependientes e independientes

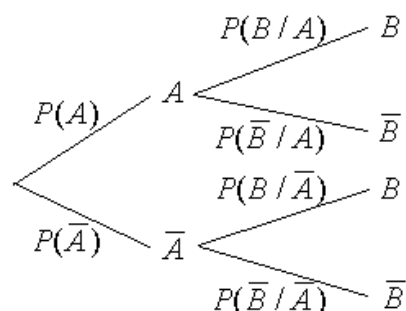
A y B son **independientes** cuando el que suceda uno de ellos no influye en que suceda el otro.

A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A y B son **incompatibles** cuando no tienen nada en común ($A \cap B = \emptyset$). No pueden suceder de forma simultánea.

Método 1 para resolver ejercicios de probabilidad. Tablas de contingencia.

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Método 2 para resolver ejercicios de probabilidad. Diagrama de árbol**Sistema completo de sucesos**

Es una familia de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de sucesos que cumplen:

- Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset$
- La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$

Teorema de la probabilidad total

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$$

Teorema de Bayes (probabilidad a posteriori)

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$



Ejercicios

Experimentos aleatorios. Probabilidad: regla de Laplace

- 1) Al lanzar dos monedas al aire, anotamos el número de caras obtenidas. Escribe el espacio muestral y completa la tabla:

TIPO DE SUCESO	SUCESO
Suceso Seguro	Obtener una cara o una cruz.
Suceso posible	
Suceso imposible	
Suceso muy probable	
Suceso poco probable	

- 2) Aplica la Ley de Laplace y calcula las siguientes probabilidades:
- En una bolsa hay 30 bolas, todas del mismo tamaño, de las cuales 15 son rojas, 10 son amarillas y 5 son verdes. ¿Cuál es la probabilidad de cada color al sacar una bola?
 - En un avión viajan 35 pasajeros franceses, 15 españoles, 10 británicos y 50 italianos. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pasajero que salga del avión no sea español?
- 3) En un cajón tengo 3 pares de calcetines: unos rojos, otros negros y otros marrones. Si saco dos calcetines sin mirar (de forma aleatoria), construye el diagrama de árbol asociado a este experimento y calcula las probabilidades siguientes:
- sacar dos calcetines rojos
 - sacar dos calcetines negros
 - sacar dos calcetines marrones
 - sacar dos calcetines verdes
 - Sacar dos calcetines del mismo color
 - Sacar dos calcetines de distinto color.
- 4) En una clase de 20 alumnos, 14 aprueban matemáticas, 9 aprueban lengua y 5 aprueban las dos materias. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
- Apruebe matemáticas, sabiendo que ha aprobado lengua.
 - Apruebe matemáticas, sabiendo que ha suspendido lengua.
 - Haya suspendido todo.
- 5) En una clase de 20 alumnos, 14 aprueban matemáticas, 9 aprueban lengua y 5 aprueban las dos materias. Determina cuantos alumnos aprueban mates y aprueban lengua, cuantos aprueban mates y suspenden lengua, cuantos suspenden mates y aprueban lengua y cuantos suspenden mates y lengua.
- Haz un esquema que represente de forma visual estos datos obtenidos.
- A partir de los datos anteriores vuelve a resolver el ejercicio aplicando la regla de Laplace.
- Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
- Apruebe matemáticas, sabiendo que ha aprobado lengua.
 - Apruebe matemáticas, sabiendo que ha suspendido lengua.
 - Haya suspendido todo.

- 6) En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
- Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso “la primera bola extraída ha sido un 5”.
 - ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
 - ¿Y la probabilidad de que termine en 3?
- 7) En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
- Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
 - Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
 - Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.
- 8) Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.
- Si se tira al aire calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
 - Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
 - Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.
- 9) Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate.
¿Es un juego equitativo?
- 10) Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire. Si salen 3 caras o 3 cruces el jugador gana 7 puntos; en caso contrario el jugador pierde 2 puntos.
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?
 - ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?
 - ¿Es un juego equitativo?
- 11) Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.
- ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
- 12) Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?
- 13) Los estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato de un centro escolar se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla, aunque hay números desconocidos:

	Chicos	Chicas	Total
1º Bachillerato	60	a	130
2º Bachillerato	b	65	c
Total	110	d	245

- Completa los números que faltan.
- Se elige un estudiante al azar y se consideran los siguientes sucesos:

A = “sea una chica”; B = “sea de 1º”; C = “sea una chica de 2º”; D = “sea un chico de 1º”
 F = “sea de 1º si se sabe que es un chico”; G = “sea un chico si se sabe que es de 1º”
 Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

- 14) En un colectivo de 330 personas: 200 hablan inglés, 90 hablan francés y 70 no hablan ni inglés ni francés. Sabiendo que una persona del colectivo habla francés, halla la probabilidad de que también hable inglés.
- 15) En una empresa trabajan 3 mujeres por cada 2 hombres. Se sabe que el 20% de las mujeres y el 26% de los hombres necesitan gafas. Con esos datos construye una tabla de contingencia que distribuya a los trabajadores según su sexo y necesidad de gafas. A partir de los datos de esa tabla, si se elige un empleado al azar halla la probabilidad de los sucesos que se indican:
- Que sea mujer.
 - Que sea una mujer y necesite gafas.
 - Que sea mujer si necesita gafas.
 - Que sea mujer o necesite gafas.

Probabilidad: propiedades

- 16) Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:
- $P(A \cap B)$
 - $P((A \cap B)^c)$
 - La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.
- 17) Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
- $P(A \cap B)$
 - $P(A \cup B)$
 - $P(A/B)$
 - $P(B/A)$
- 18) Sean A y B dos sucesos incompatibles de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
- $P(A \cap B)$
 - $P(A \cup B)$
 - $P(A/B)$
 - $P(B/A)$
- 19) Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B , cuyas probabilidades son $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 2/3$.
- ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?
 - Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$.
 - Suponiendo que $A \cup B = E$, calcula $P(A \cap B)$.
- 20) De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0,3$ y que $P(B^c) = 0,25$. Calcula las siguientes probabilidades:
- $P(A \cup B)$
 - $P(A^c \cap B^c)$
 - $P(A/B^c)$
- 21) Si A y B son dos sucesos independientes, de un cierto experimento aleatorio, tales que $P(A) = 1/3$ y $P(A \cup B) = 1/2$, halla $P(B)$ y $P(A \cap B/A)$.

- 22) Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:
 $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,5$.
a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles?
b) ¿Son sucesos independientes?
- 23) Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:
 $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,7$.
a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.
b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.
- 24) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$;
 $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B/A) = 0,5$. Calcula:
a) $P(A \cap B)$
b) $P(B)$
c) $P(A/B)$
- 25) Se consideran los sucesos A , B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,09$;
 $P(B) = 0,07$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,97$. Además, los sucesos A y C son incompatibles.
a) Estudia si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcula $P(A \cap B/C)$.
- 26) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, de los que se conocen las probabilidades
 $P(A) = 0,65$ y $P(B) = 0,30$. Determina las probabilidades que deben asignarse a los sucesos
 $A \cap B$ y $A \cup B$ en cada uno de los siguientes supuestos:
a) Si A y B fuesen incompatibles.
b) Si A y B fuesen independientes.
c) Si $P(A/B) = 0,40$.
- 27) Los resultados académicos de cierto grupo de Bachillerato muestran que la probabilidad de aprobar Matemáticas es 0,6 y la de aprobar Economía 0,7. Además, la probabilidad de aprobar las dos asignaturas es 0,45. Si en ese grupo se elige un alumno al azar, cuánto vale la probabilidad de que:
a) Apruebe alguna de las dos asignaturas.
b) Apruebe solamente una de las dos asignaturas.
c) No apruebe ninguna de las dos asignaturas.
d) ¿Es independiente aprobar Matemáticas de aprobar Economía?
- 28) Una alarma de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0,95 y de que se active el segundo es 0,90. Halla la probabilidad de que ante una emergencia:
a) Se active solo uno de los indicadores.
b) Se active al menos uno de los dos indicadores.

- 29) Marta y Caty son jugadoras de baloncesto. Marta encesta 2 de cada 5 tiros; Caty, 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
- Ambas han encestado.
 - Ninguna ha encestado.
 - Solo Marta ha encestado.
 - Al menos una ha encestado.
- 30) En un IES hay dos grupos que cursan Matemáticas II. En el primero el 55% de los estudiantes son hombres y en el segundo, son mujeres el 60%. Se elige al azar un estudiante de cada grupo.
- Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
 A = “Ambos son mujeres”; B = “Solo uno es mujer”; C = “Los dos son hombres”
 - Razona si el suceso contrario del suceso A es el B , el C , el $B \cap C$, el $B \cup C$ o algún otro suceso y calcula su probabilidad.
- 31) En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se selecciona una muestra aleatoria de 3 productos:
- ¿Cuál es la probabilidad de que solo el segundo sea defectuoso?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, uno de los tres sea defectuoso?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente uno defectuoso?

Probabilidad condicionada y total: Bayes

- 32) De una muestra de 9 personas, 2 son de nivel socioeconómico bajo, 3 de nivel medio y 4 alto.
- Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de nivel socioeconómico bajo?
 - Si se eligen tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea de nivel alto?
- 33) Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.
- Calcula la probabilidad de que sea de oro.
 - Sabiendo que ha sido de plata, calcula la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.
- 34) A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.
- Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.
 - La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?
 - Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?
- 35) Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad $7/11$ y Adrián con probabilidad $9/13$. Si ambos sucesos son independientes, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) “Ambos dan en el blanco”.
 b) “Sólo Lena da en el blanco”.
 c) “Al menos uno da en el blanco”
- 36) Una urna tiene 25 bolas iguales, que son: 16 negras y 9 rojas. Una segunda urna tiene 30 bolas iguales, que son: 18 blancas y 12 azules. Se lanza un dado; si sale un 1 o un 2, entonces se sacan 2 bolas de la primera urna; si se obtiene 3, 4, 5 o 6, entonces se sacan 2 bolas de la segunda urna. Halla las probabilidades de los sucesos: A = se saca alguna bola negra; B = se saca alguna bola blanca.
- 37) Según la revista *Allmovil*, el 63% de los usuarios de móvil en España tiene un “Smartphone”. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77% lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otros tipos de teléfono móvil solo el 8% lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.
- 38) Sobre una mesa hay dos bolsas iguales opacas. Una de ellas contiene 2 bolas verdes y 3 rojas; la otra, 4 bolas verdes y 1 roja.
 a) Si se elige una bolsa al azar y se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?
 b) Si se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean de distinto color?
- 39) Una caja contiene 7 bolas blancas y 10 negras. Se extrae al azar una bola y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que:
 a) La segunda bola sea blanca.
 b) La segunda bola sea del mismo color que la primera.
- 40) Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna B contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna A; en caso contrario se extrae una bola de la urna B.
 a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
 b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Soluciones

1. Suceso posible = sacar 2 caras, suceso imposible = sacar 3 caras, suceso muy probable = sacar 1 cara, suceso poco probable = sacar 0 caras.

2. a) $P(R) = 1/2$ $P(A) = 1/3$ $P(V) = 1/6$ b) $P(\text{No español}) = 95/110$

3. a) $P(RR) = 1/15$. b) $P(NN) = 1/15$. c) $P(MM) = 1/15$. d) $P(VV) = 0$. e) $P(\text{Mismo color}) = 1/5$. f) $P(\text{Distinto color}) = 4/5$

4.a) $P(M/L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{5/20}{9/20} = \frac{5}{9}$ b) $P(M/\bar{L}) = \frac{P(M \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(M) - P(M \cap L)}{P(\bar{L})} = \frac{14/20 - 5/20}{11/20} = \frac{9}{11}$

c) $P(\bar{L} \cap \bar{M}) = P(\overline{L \cup M}) = 1 - P(L \cup M) = 1 - [P(L) + P(M) - P(L \cap M)] = 1 - [9/20 + 14/20 - 5/20] = 1/10$

5.

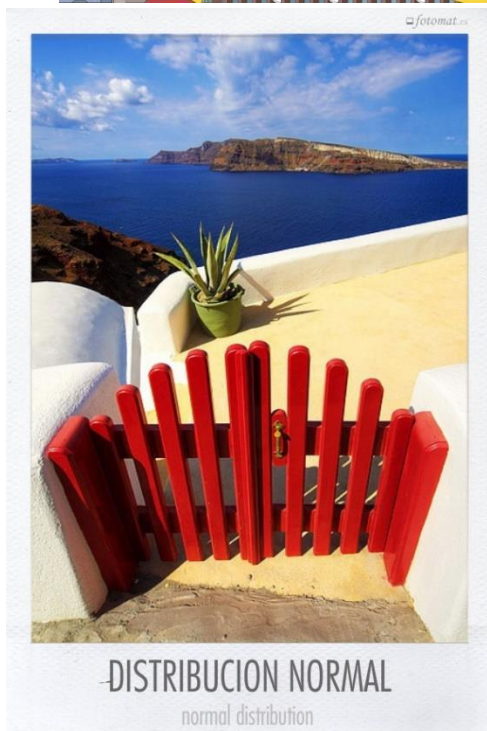
	Aprueba mates	Suspende mates	
Aprueba Lengua	5	4	9
Suspende Lengua	9	2	11

	14	6	20
--	----	---	----

$$P(M/L) = 5/9 \quad P(M/\bar{L}) = 9/11 \quad P(\bar{M} \cap \bar{L}) = 2/20$$

6. a) {50}, {51}, {52}, {53}, {54}, {56}, {57}, {58}, {59} b) 90. c) 2/5. d) 1/10.
7. a) 1/10. b) 1/100. c) 1/10.
8. a) 1/3; 2/3. b) 4/9. c) 2/9.
9. Favorable a Pablo.
10. a) 1/4. b) 9/64. c) Es ventajoso para el jugador.
11. a) 1/5. b) 3/5. c) 2/5.
12. Son equiprobables.
13. a) 135/245; 130/245; 65/245; 60/245; 60/110; 60/130.
14. Con tabla de contingencia se obtienes $P(I/F) = 1/3$
15. a) 0,6. b) 0,12. c) 60/112. d) 0,704.
16. a) 0,45. b) 0,55. c) 0,40.
17. a) 0,2. b) 0,7. c) 0,4. d) 0,5.
18. a) 0. b) 0,9. c) y d) 0
19. a) No b) 5/6 c) 1/6
20. a) 33/40 b) 7/40 c) 3/10
21. $P(B) = 1/4$ $P(A \cap B/A) = 1/4$
22. a) No. b) No.
23. a) No. b) Sí.
24. a) 0,2. b) 0,3. c) 2/7.
25. a) No. b) 0.
26. a) 0,95; 0. b) 0,755; 0,195. c) 0,83; 0,12.
27. a) 0,85. b) 0,40. c) 0,15. d) No.
28. a) 0,14. b) 0,995.
29. a) 6/35. b) 12/35. c) 8/35. d) 23/35.
30. a) 0,27; 0,51; 0,22. b) $B \cap C$; 0,73.
31. a) 0,081. b) 0,271. c) 0,243.
32. a) 1/36 b) 5/42
33. a) 88/135 b) 27/47
34. a) 2/7 b) Falso c) 4/33
35. a) 63/143 b) 28/143 c) 127/143
36. $P(A) = 22/75$ $P(B) = 82/145$
37. 0,5147.
38. a) 2/5. b) 1/2.
39. a) 22/51. b) 22/51.
40. a) 27/40. b) 5/9.

Tema 11. Distribuciones de probabilidad.



Veo matemáticas por todas partes. Y tú, ¿también la ves?

Estadística electoral

El método d'Hondt

Método d'Hondt (o **escrutinio proporcional plurinominal**) es un sistema electoral que se utiliza, generalmente, para repartir los escaños de un parlamento o congreso, de modo no puramente proporcional a los votos obtenidos por las candidaturas. Este método lleva el nombre del político belga Victor d'Hondt.

Entre otros países, se utiliza en Argentina, Austria, Bulgaria, Chile, Croacia, España, Finlandia, Países Bajos, Paraguay, Polonia, Portugal, Venezuela, Guatemala y a partir del 2006 también en Colombia. Aunque algunos países de la Unión Europea que no lo utilizan para sus elecciones internas lo hacen en las elecciones al Parlamento Europeo. Este sistema favorece a los partidos grandes algo más que otro sistema de división llamado Sainte-Laguë.

La atribución de los escaños en función de los resultados del escrutinio se realiza conforme a las siguientes reglas:

- No se tiene en cuenta aquellas candidaturas que no hubieren obtenido, al menos, el 3 por ciento de los votos válidos emitidos en la circunscripción. En España el listón electoral es del 3% para las elecciones al congreso o parlamento y del 5% para las municipales.
- Se ordenan de mayor a menor, en una fila, las cifras de votos obtenidos por las restantes candidaturas.
- Se divide el número de votos obtenidos por cada candidatura por 1, 2, 3, etc. hasta un número igual al de escaños correspondientes a la circunscripción, formándose un cuadro similar al que aparece en el ejemplo práctico. Los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores en el cuadro, atendiendo a un orden decreciente.
- Cuando en la relación de cocientes coincidan dos correspondientes a distintas candidaturas, el escaño se atribuirá a la que mayor número total de votos hubiese obtenido. Si hubiera dos candidaturas con igual número total de votos, el primer empate se resolverá por sorteo y los sucesivos de forma alternativa.
- Los escaños correspondientes a cada candidatura se adjudican a los candidatos incluidos en ella, por el orden de colocación en que aparezcan.

Ejemplo práctico:

480.000 votos válidos emitidos en una circunscripción que elija 11 Diputados.

Votación repartida en seis candidaturas:

A (168.000 votos), **B** (104.000 votos), **C** (72.000 votos), **D** (64.000 votos), **E** (40.000 votos), **F** (32.000 votos).

División	A	B	C	D	E	F
1	168.000[1]	104.000[2]	72.000[4]	64.000 [5]	40.000[9]	32.000
2	84.000[3]	52.000[7]	36.000[10]	32.000	20.000	16.000
3	56.000[6]	34.667[11]	24.000	21.333	13.133	10.667
4	42.000[8]	26.000	18.000	16.000	10.000	8.000
5	33.600	20.800	14.400	12.800	8.000	6.400
6	28.000	17.333	12.000	10.667	6.667	5.333
7	24.000	14.857	10.286	9.143	5.714	4.571
8	21.000	13.000	9.000	8.000	5.000	4.000
9	18.667	11.556	8.000	7.111	4.444	3.556
10	16.800	10.400	7.200	6.400	4.000	3.200
11	15.273	9.455	6.515	5.818	3.636	2.909

Cada columna corresponde a uno de los partidos. Cada fila se corresponde con un divisor. Los corchetes ([]) indican el orden de asignación.

Por consiguiente: la candidatura **A** obtiene **cuatro escaños**, la candidatura **B** **tres escaños**, la candidatura **C** **dos escaños** y las candidaturas **D** y **E** **un escaño** cada una.

Como influyen los votos en blanco, nulos o la abstención

En España, el porcentaje mínimo para tener representabilidad es del **3%** al parlamento. **El voto en blanco** se suma al número total de votos del escrutinio, a partir del cual se calcularán los porcentajes de representación. Así, un elevado voto en blanco significa elevar considerablemente el número de votos necesarios para llegar al 3% del total, lo que dificulta la representabilidad de los partidos minoritarios. **Los votos nulos** no se contabilizan en este cómputo.

Por ejemplo, si en un pueblo votan 10.000 personas, con 300 votos se accede a la representación. Si en ese pueblo votan 10.000 personas a partidos, y 5.000 en blanco, el total del escrutinio sería 15.000, y para salir un representante se necesitarían 450, es decir un 30% más de votos.

Ventajas e inconvenientes:

- Permite que cada partido político obtenga un número de escaños proporcional al número de votos. Por ello puede parecer más justo que el sistema mayoritario, puesto que imposibilita la predominancia de una formación política que no haya recibido el apoyo de una mayoría.
- Al reflejar la diversidad del electorado, el resultado es aceptado mejor por el electorado.
- Un parlamento con muchos partidos promueve la creación de gobiernos de coalición, lo cual es a menudo un factor de estabilidad y moderación. Sin embargo un gobierno de coalición hace más difíciles las grandes reformas.
- La representación de los pequeños partidos puede ser una plataforma para partidos extremistas que pueden llegar a ser claves en gobiernos de coalición.
- La relación entre electores y elegidos es débil, al revés que en sistemas mayoritarios uninominales. El uso de listas cerradas da gran poder a la jerarquía de los partidos, lo cual puede limitar su democracia interna.

En España, a nivel nacional, se reparten de la siguiente manera:

- A cada provincia le corresponde un mínimo de 2 escaños excepto a Ceuta y Melilla que es 1.
- Para los 248 diputados restantes, en primer lugar se obtiene una cuota de reparto, que es el resultado de dividir el total de la población de derecho española entre 248.
- Se adjudica a cada provincia un número de diputados como resulte de dividir (en números enteros) la población de derecho de la provincia entre la cuota calculada anteriormente (más el mínimo de escaños).

Si queda un resto de escaños sin repartir, se adjudican a las provincias que han obtenido un decimal mayor de la división realizada en el paso anterior.

1. Distribución de probabilidad

Una distribución de probabilidad es una representación de todos los resultados posibles de algún experimento (con resultado numérico) y de la probabilidad relacionada con cada uno.

Cada experimento tendrá asociado una variable aleatoria, que es la función que asocia a cada elemento del espacio muestral E un número real (su probabilidad).

Estudiaremos dos tipos de variables:

- Variables discretas: es aquella que sólo puede tomar determinados valores aislados (nº de piezas defectuosas o nº defectos, nº de erratas en una página, nº de reparaciones, ...)
- Variables continuas: pueden tomar cualquier valor de un intervalo (longitud de una pieza, altura de un alumno, resistencia a la rotura de una pieza, ...)

De cada una de ellas estudiaremos su distribución, media o esperanza matemática y su dispersión. Ponemos algún ejemplo de variables aleatorias:

- La suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados es una variable aleatoria discreta.
- El número de veces que hay que lanzar uno de esos dados hasta que salga el número 6 es también discreta.
- El tiempo que una persona tiene que esperar al autobús es una variable continua.
- El peso de un vaso que llenamos de agua hasta donde queremos es una variable continua.

Ejemplo:

En el experimento consistente en lanzar dos dados numerados del 1 al 6 su espacio muestral es:

						
	(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
	(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
	(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
	(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
	(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
	(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

Si consideramos la variable aleatoria $X = \text{"hallar su suma"}$, puede tomar cualquier valor entero entre 2 y 12.

Las probabilidades de esos valores pueden calcularse mediante la regla de Laplace, teniendo en cuenta que los casos posibles son 36 y que los casos favorables se contabilizan en las diagonales de la tabla de sumas adjunta.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por ello, la distribución de probabilidad de X se resume en la siguiente tabla:

X (suma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = i)$ $2 \leq i \leq 12$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Distribuciones de probabilidad discretas

2.1. Función de probabilidad

Es la que asigna a cada uno de los valores de la variable aleatoria discreta su probabilidad. Puede definirse como sigue:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$$

Al tratarse de una probabilidad debe cumplir que:

- $0 \leq f(x_i) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es igual a 1.
- Si x no es alguno de los valores de la variable aleatoria, $f(x) = 0$.

Ejemplo:

Determinamos la función de probabilidad para el experimento “suma de los resultados al lanzar dos dados”:

La variable aleatoria es X = "Suma de puntos de los 2 dados".

Los resultados posibles del experimento son $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Las probabilidades de cada uno de estos sucesos elementales son:

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}; f(3) = P(X = 3) = \frac{2}{36}; f(4) = P(X = 4) = \frac{3}{36}; \dots$$

$$\dots; f(11) = P(X = 11) = \frac{2}{36}; f(12) = P(X = 12) = \frac{1}{36}$$

puede comprobarse que:

$$f(1) = P(X = 1) = 0; f(15) = P(X = 15) = 0$$

$$\text{Y que } f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(10) + f(11) + f(12) = 1$$

2.2. Función de distribución

A partir de la distribución de probabilidad de la variable X se define la función de distribución, $F(x)$, de dicha variable como sigue:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

A cada valor x , $F(x)$ le asigna la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x .

La función $F(x)$ acumula probabilidades.

Ejemplos:

a) Para la suma de los resultados de dos dados:

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

....

$$F(12) = P(X \leq 12) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 12) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \dots + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

b) Si se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar 4 monedas y contar el número de caras que se obtienen, se tiene:

→ La variable aleatoria X que da el número de caras obtenido toma los valores:

$$x_i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

→ Las probabilidades de cada suceso (función de probabilidad) son:

Dado que el espacio muestral es:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} CCCC; \\ CCC+; CC+C; C+CC; +CCC; \\ CC++; C++C; C+CC; +CC+; +C+C; ++CC; \\ C+++; +C++; ++C+; +++C; \\ +++++ \end{array} \right\}$$

$$f(0) = P(X = 0) = P(\text{Salga 0 caras}) = \frac{1}{16}$$

$$f(1) = P(X = 1) = P(\text{Salga 1 cara}) = \frac{4}{16}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{6}{16}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{4}{16}$$

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{1}{16}.$$

→ Y la función de distribución es:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1+4+6+4}{16} = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \\ = \frac{1+4+6+4+1}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

c) Considera el experimento "número obtenido" al lanzar un dado. Escribe la función de probabilidad y la función de distribución correspondiente a este experimento.

Solución:

Espacio muestral	x_i	$f(x_i) = p_i$
1	1	1/6
2	1	1/6
3	1	1/6
4	1	1/6
5	1	1/6
6	1	1/6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 & \text{si } x \leq 6 \end{cases}$$

2.3. Media y varianza de una distribución de probabilidad discreta

Los parámetros estadísticos más usuales son la media, la varianza y la desviación típica. Se calculan como sigue.

La **media de una distribución** es un **valor central** que indica la cantidad que correspondería a cada suceso en una repartición igualitaria.

Si una variable aleatoria toma los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$, la media, que suele denotarse por la letra griega μ (mu), se calcula mediante la expresión:

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Es una media ponderada, a cada valor de la variable se le da el peso correspondiente a su probabilidad.

Ejemplos:

a. La media de la variable aleatoria que mide la suma de las puntuaciones de dos dados es:

X (suma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=i)$ $2 \leq i \leq 12$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

- b. La media de la distribución de probabilidad del número de caras que se obtienen al lanzar cuatro monedas es:

X (nº caras)	0	1	2	3	4
$P(X=i)$ $0 \leq i \leq 4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{0+4+12+12+4}{16} = \frac{32}{16} = 2.$$

La **media μ** de una variable aleatoria también se llama valor esperado o **esperanza matemática** de dicha variable y se suele escribir $\mu = E(X)$.

Ejemplo:

En los exámenes de tipo test (con respuesta múltiple) suele penalizarse el error, pues un examinando puede tener un número importante de aciertos por el mero hecho de contestar al azar. Así, en el caso de preguntas con tres respuestas posibles de las que solo una es correcta, cada acierto debe ser contrarrestado por 2 errores. En efecto:

Si un examinando no sabe nada y responde al azar, su puntuación justa (su calificación esperada) debe ser 0.

Como la probabilidad de acierto es $1/3$ y la de fallo $2/3$, si por cada acierto suma 1 punto, por cada error debe restar x , pero ¿cuánto debe ser x ?

La esperanza matemática es:

$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1+2x}{3} = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Por cada error hay que restar 0,5 puntos para que en respuestas al azar se compensen los aciertos con los fallos.

→ La **varianza** es una medida de la **dispersión** (de la desigualdad) de los valores de la variable aleatoria respecto a la media. Se suele designar por σ^2 .

→ La **desviación típica**, σ , es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Sus valores vienen dados por las expresiones (equivalentes):

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

O bien

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = (x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n) - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

La desviación típica se utiliza con mayor frecuencia pues, al estar expresada en las mismas unidades que la variable X, permite establecer más claramente las comparaciones.

$$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$$

Ejemplos:

1. La varianza de la distribución de suma de las puntuaciones de dos dados es:

$$\sigma^2 = \left(2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \cdot \frac{2}{36} + 12^2 \cdot \frac{1}{36} \right) - 7^2 = 5,833$$

Su desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{5,833} = 2,415$$

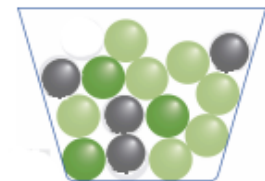
b) La varianza de la distribución de suma del número de caras obtenidas al lanzar 4 monedas es:

$$\sigma^2 = \left(0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} \right) - 2^2 = 1$$

Su desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

2. Tenemos en una bolsa 10 olivas verdes y 4 negras. Saco 1 oliva y apunto su color y la devuelvo a la bolsa. Remuevo y repito el experimento una segunda vez. Y en las mismas condiciones lo repito una tercera vez. Al acabar miro cuantas olivas negras he sacado. Llamamos X a la variable aleatoria que indica el número de olivas negras que he obtenido.



- Indica los resultados posibles que puede obtener esta variable.
- ¿Es una variable discreta o continua?
- Halla la probabilidad de cada uno de estos posibles resultados.
- Determina la media de esta variable.
- ¿Averigua el valor de la variable que tiene la probabilidad más cercana posible a esta media? ¿Qué valor de X tiene una probabilidad más alejada?
- Determina la varianza y la desviación típica.
- ¿Qué sentido tiene el valor “media”? ¿Y la desviación típica? Explícalo con tus palabras.

Llamamos X = “Número de olivas negras conseguidas en 3 extracciones sucesivas de la bolsa”.

- Esta variable X solo puede tomar los valores: 0, 1, 2 o 3.
- Es una variable discreta, pues toma valores aislados.

c) La composición de la bolsa permanece invariable en las 3 extracciones que se van a realizar, por lo que las repeticiones de las extracciones son independientes entre sí. Las probabilidades se pueden calcular con la ayuda de un árbol, realizado en la siguiente página. Nos apoyamos en él para expresar las probabilidades pedidas.

- $P(X = 0) = P(\text{sacar 0 olivas negras}) = P(\text{sacar 3 olivas verdes}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = 10/14 \cdot 10/14 \cdot 10/14 = \boxed{0,364}$
- $P(X = 1) = P(\text{sacar 1 oliva negra}) = P(1^{\text{a}} \text{ negra, } 2^{\text{a}} \text{ verde y } 3^{\text{a}} \text{ verde}) + P(1^{\text{a}} \text{ verde, } 2^{\text{a}} \text{ negra y } 3^{\text{a}} \text{ verde}) + P(1^{\text{a}} \text{ verde, } 2^{\text{a}} \text{ verde y } 3^{\text{a}} \text{ negra}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = 4/14 \cdot 10/14 \cdot 10/14 + 10/14 \cdot 4/14 \cdot 10/14 + 10/14 \cdot 10/14 \cdot 4/14 = \boxed{0,437}$
- $P(X = 2) = P(\text{Sacar 2 olivas negras}) = P(1^{\text{a}} \text{ verde, } 2^{\text{a}} \text{ negra y } 3^{\text{a}} \text{ negra}) + P(1^{\text{a}} \text{ negra, } 2^{\text{a}} \text{ verde y } 3^{\text{a}} \text{ negra}) + P(1^{\text{a}} \text{ negra, } 2^{\text{a}} \text{ negra y } 3^{\text{a}} \text{ verde}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = 10/14 \cdot 4/14 \cdot 4/14 + 4/14 \cdot 10/14 \cdot 4/14 + 4/14 \cdot 4/14 \cdot 10/14 = \boxed{0,175}$
- $P(X = 3) = P(\text{sacar 3 olivas negras}) = P(\text{sacar 3 olivas negras}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = P(1^{\text{a}} \text{ negra}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ negra}) \cdot P(3^{\text{a}} \text{ negra}) = 4/14 \cdot 4/14 \cdot 4/14 = \boxed{0,023}$

d) La media es el promedio de cada valor de la variable multiplicado por su probabilidad.

$$\mu = 0 \cdot 0,364 + 1 \cdot 0,437 + 2 \cdot 0,175 + 3 \cdot 0,023 = \boxed{0,856}$$

e) El valor más cercano es 1 (1 oliva negra) y el más alejado es 3 (3 olivas negras).

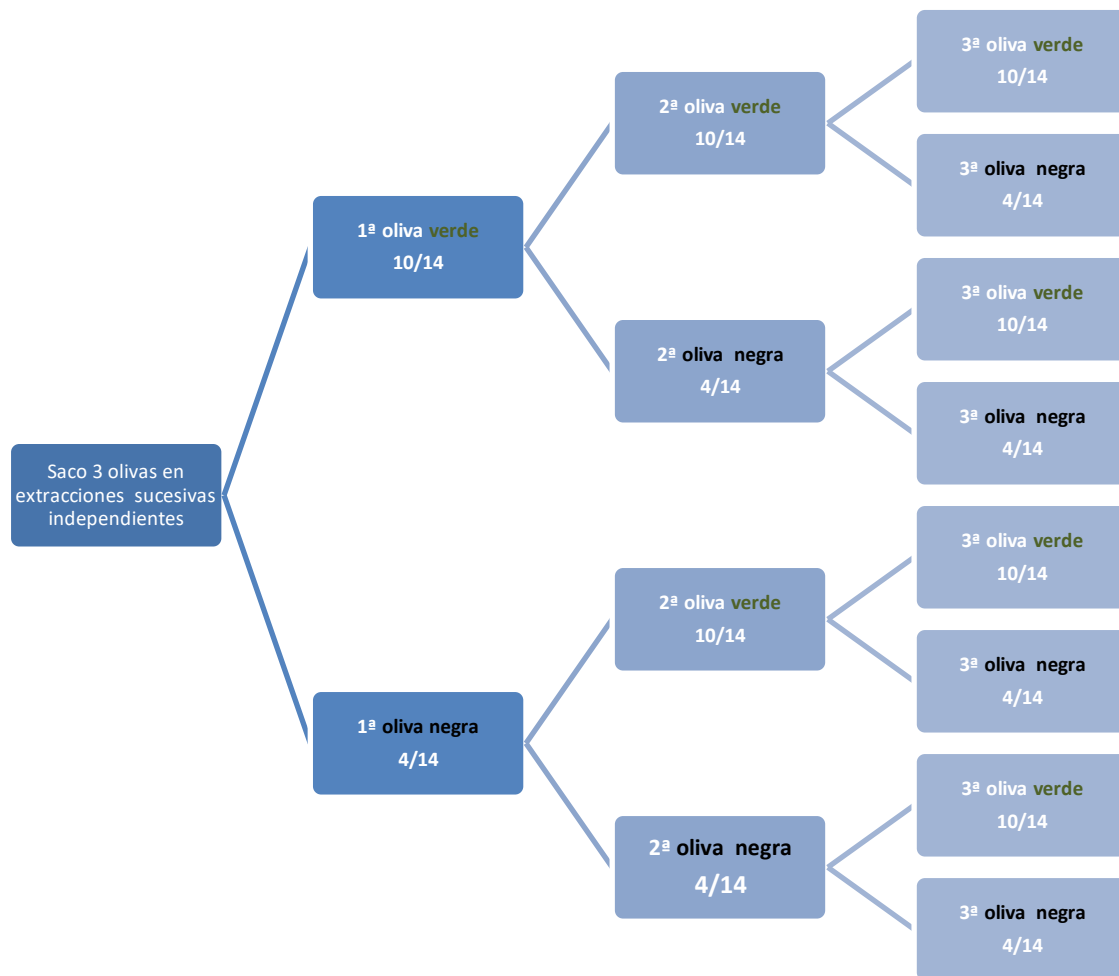
f) La varianza y la desviación típica nos miden cuan de variables son nuestros posibles resultados, evidentemente aquí va de 0 a 3, no pueden ser muy grandes. Si obtenemos 8 en la desviación típica es que nos hemos equivocado en el cálculo.

$$\begin{aligned} \text{Varianza} = \sigma^2 &= [x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + x_4^2 \cdot p_4] - \mu^2 = \\ &= [0^2 \cdot 0,364 + 1^2 \cdot 0,437 + 2^2 \cdot 0,175 + 3^2 \cdot 0,023] - 0,856^2 = \boxed{0,611} = \text{Varianza} \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{0,611} = \boxed{0,781} = \text{Desviación típica}$$

g) La media también se llama esperanza, pues es el valor que es más probable que se obtenga. En este caso si debiese de apostar sería a “Sacar 1 oliva negra”.

La desviación típica nos indica el grado de desviación de este dato central (media) que tendremos en los resultados obtenidos en la realización de este experimento. Se desvía solo 0,781, o sea, que la mayor parte de las realizaciones del experimento se colocarán entre $0,856 - 0,781 = 0,075$ y $0,856 + 0,781 = 1,637$ olivas negras. Simplificando entre 0 y 2 olivas negras. Es altamente improbable sacar 3 olivas negras.



3. Gumersindo, conserje del IES Vicente Medina abre la puerta del centro para que entren los alumnos que vienen en autobús de una excursión. Decide contar cuantos hombres entran entre los 3 primeros que pasan por la puerta. Él sabe que en el autobús van 50 alumnos y de ellos 30 son mujeres. Suponemos que el acceso al centro se produce de forma totalmente aleatoria.

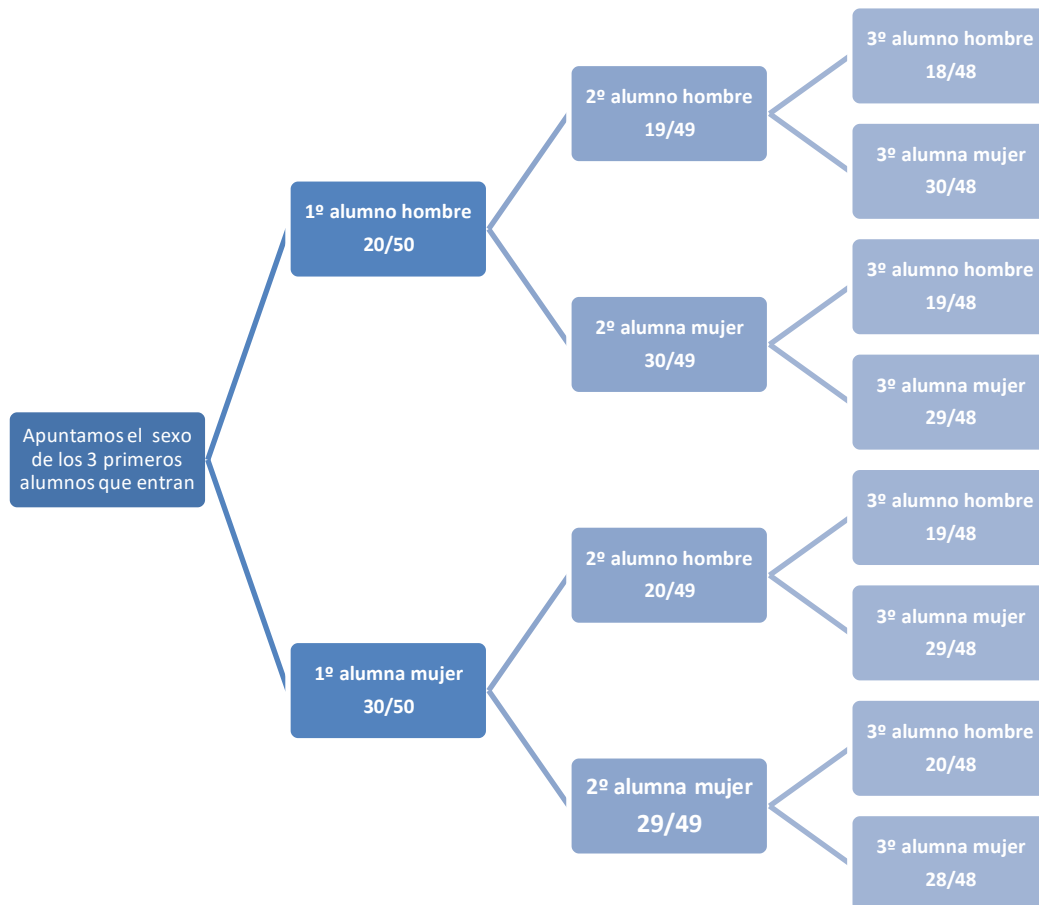


Llamamos X a la variable aleatoria que indica el número de hombres que entran entre los 3 puestos.

- Indica los resultados posibles que puede obtener esta variable.
- ¿Es una variable discreta o continua?
- Halla la probabilidad de cada uno de estos posibles resultados.
- Determina la media de esta variable.
- Determina la varianza y la desviación típica.

X = “Número de hombres que entran por la puerta en los 3 primeros puestos”

- Es una variable aleatoria, que puede tomar como valores 0, 1, 2 o 3.
- Es una variable discreta, solo toma cuatro valores aislados.
- Es como el ejercicio anterior y se haría un diagrama de árbol semejante, aunque aquí si son cada una de las entradas dependientes una de otra. Quien entre el 1º influye en la probabilidad de lo que ocurre en la 2ª entrada. Aunque esta influencia sea mínima.



Nos apoyamos en él para calcular las probabilidades pedidas.

- $P(X = 0) = P(\text{entren 0 hombres}) = P(\text{entren 3 mujeres}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = P(1^\circ \text{ mujer, } 2^\circ \text{ mujer y } 3^\circ \text{ mujer}) = 30/50 \cdot 29/49 \cdot 28/48 = \boxed{0,207}$
- $P(X = 1) = P(\text{entren 1 hombre}) = P(1^\circ \text{ hombre, } 2^\circ \text{ mujer y } 3^\circ \text{ mujer}) + P(1^\circ \text{ hombre, } 2^\circ \text{ hombre y } 3^\circ \text{ mujer}) + P(1^\circ \text{ mujer, } 2^\circ \text{ mujer y } 3^\circ \text{ hombre}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = 20/50 \cdot 30/49 \cdot 29/48 + 20/50 \cdot 20/49 \cdot 29/48 + 30/50 \cdot 29/49 \cdot 20/48 = \boxed{0,444}$
- $P(X = 2) = P(\text{entren 2 hombres}) = P(1^\circ \text{ hombre, } 2^\circ \text{ hombre y } 3^\circ \text{ mujer}) + P(1^\circ \text{ hombre, } 2^\circ \text{ mujer y } 3^\circ \text{ hombre}) + P(1^\circ \text{ mujer, } 2^\circ \text{ hombre y } 3^\circ \text{ hombre}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = 20/50 \cdot 19/49 \cdot 30/48 + 20/50 \cdot 30/49 \cdot 19/48 + 30/50 \cdot 20/49 \cdot 19/48 = \boxed{0,291}$
- $P(X = 3) = P(\text{entren 3 hombres}) = \{\text{Mirando el diagrama de árbol}\} = P(1^\circ \text{ hombre, } 2^\circ \text{ hombre y } 3^\circ \text{ hombre}) = 20/50 \cdot 19/49 \cdot 18/48 = \boxed{0,058}$

Una comprobación mínima es ver que todas estas probabilidades obtenidas suman 1 (el 100%). ¡Es cierto!

d) $\mu = 0 \cdot 0,207 + 1 \cdot 0,444 + 2 \cdot 0,291 + 3 \cdot 0,058 = \boxed{1,2}$

e)

$$\begin{aligned} \text{Varianza} = \sigma^2 &= [x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + x_4^2 \cdot p_4] - \mu^2 = \\ &= [0^2 \cdot 0,207 + 1^2 \cdot 0,444 + 2^2 \cdot 0,291 + 3^2 \cdot 0,058] - 1,2^2 = \boxed{0,69} = \text{Varianza} \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{0,69} = \boxed{0,83} = \text{Desviación típica}$$

3. Distribución binomial

Es una de las distribuciones de probabilidad más utilizadas en la práctica estadística.

Se emplea cuando el fenómeno de estudio queda determinado por dos sucesos complementarios: si/no; hombre/mujer; nacional/extranjero; trabajador en activo/parado;...

En general, esas dos situaciones pueden considerarse resultados de un experimento aleatorio y a los sucesos contrarios, sin que indique valoración alguna, suelen llamárseles éxito y fracaso.

Las características básicas de una **distribución binomial** son:

- Cada prueba del experimento aleatorio presenta dos únicos resultados, que puede designarse como **éxito** y **fracaso**.
- Se realizan **n** ensayos del experimento, independientes unos de otros e idénticos.
- La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las **n** pruebas: $P(\text{Éxito}) = p$.
- La probabilidad de fracaso también es constante:

$$P(\text{Fracaso}) = 1 - P(\text{Éxito}) = 1 - p = q$$

La variable aleatoria X , cuenta el número r de éxitos en las n pruebas. Por tanto, los valores que puede tomar X son: 0, 1, 2, ..., n .

La distribución binomial queda determinada por los parámetros n y p (número de veces que se realiza el experimento y probabilidad de éxito en cada prueba).

Se indica simbólicamente por **$B(n, p)$** y se lee **Binomial de parámetros n y p** .

Ejemplos:

- La variable que cuenta el número de caras obtenidas al lanzar 8 monedas es una binomial ya que las repeticiones son independientes entre sí y solo hay dos posibilidades: Cara o Cruz. El éxito es "Sacar cara al lanzar el dado". El número de repeticiones es 8 y la probabilidad de éxito en cada repetición es la misma y vale $P(\text{Sacar cara}) = 1/2 = 0'5$. Así $n = 8$; $p = 0'5$. Esta variable aleatoria es una binomial **$B(8, 0'5)$** .
- Si en una determinada región, la tasa de paro entre su población activa es del 12%, si se pregunta a 10 personas de esa población, elegidos al azar, por su situación laboral, el número de parados viene descrito por la binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0'12$. Se denota **$B(10, 0'12)$** .

3.1. Probabilidad de r éxitos en una variable binomial $B(n, p)$

La función de probabilidad que mide el número r de éxitos cuando una prueba de carácter binomial se realiza n veces y la probabilidad de éxito es p , $B(n, p)$, viene dada por:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Damos por conocido el concepto de combinaciones de n elementos tomados de r en r . Por ejemplo, calculamos las combinaciones de 6 elementos tomados de 2 en 2.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{30}{2} = 15$$

¿Para qué se utiliza y que significa este número?

Si tengo 6 personas y debo elegir a 2 de ellas, ¿de cuántas formas distintas puedo hacerlo?

La respuesta es que esto son “**Combinaciones** de 6 elementos disponibles tomados de 2 en 2”.

Se escribe $\binom{6}{2}$.

¿Y cómo se calcula?

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{30}{2} = 15$$

Aquí aparece el concepto de **factorial** de un número: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ $1! = 0! = 1$

Otro ejemplo:

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{6! \cdot (6-6)!} = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} = \frac{\cancel{6!}}{0! \cdot \cancel{6!}} = 1$$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5! \cdot (6-5)!} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1} \cdot 1} = 6 \quad \binom{6}{1} = \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}}{1 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}} = 6$$

Ejemplos:

1. Para la $B(8, 0'5)$, que cuenta el número de caras obtenidas al lanzar 8 monedas, se tiene:

$$P(\text{obtener 3 caras}) = P(X = 3) = \left\{ \begin{array}{l} X \text{ es } B(8, 0'5) \\ n = 8 \\ r = 3 \\ p = 0'5 \\ q = 0'5 \end{array} \right\} = \binom{8}{3} 0'5^3 \cdot 0'5^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 0'5^8 = 0'218 .$$

Análogamente:

$$P(\text{obtener 6 caras}) = P(X = 6) = \binom{8}{6} 0'5^6 \cdot 0'5^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} 0'5^8 = 0'109 .$$

$$P(\text{obtener 8 caras}) = P(X = 8) = \binom{8}{8} 0'5^8 \cdot 0'5^0 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0'5^8 = 0'0039$$

Para este mismo ejemplo, si se plantea la probabilidad de que al menos salgan 2 caras, habrá que calcular:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 8) = \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = \\ &= 1 - \binom{8}{1} 0'5^1 \cdot 0'5^7 - \binom{8}{0} 0'5^0 \cdot 0'5^8 = \\ &= 1 - 8 \cdot 0'5^8 - 1 \cdot 0'5^8 = 1 - \frac{8}{256} - \frac{1}{256} = \frac{247}{256} = 0'964 \end{aligned}$$

2. Para la binomial $B(10, 0'12)$ que estudia el número de parados entre 10 personas elegidas al azar cuando la tasa de paro es del 12%, se tendrá:

$$P(2 \text{ parados}) = P(X = 2) = \binom{10}{2} 0'12^2 \cdot 0'88^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0'12^2 \cdot 0'88^8 = \mathbf{0'233}$$

Para este mismo ejemplo, la probabilidad de que haya menos de 3 parados es:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \binom{10}{0} 0'12^0 \cdot 0'88^{10} + \binom{10}{1} 0'12^1 \cdot 0'88^9 + \binom{10}{2} 0'12^2 \cdot 0'88^8 = \\ &= 1 \cdot 0'88^{10} + 10 \cdot 0'12 \cdot 0'88^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} 0'12^2 \cdot 0'88^8 = \mathbf{0'89131} \end{aligned}$$

Con esto, la probabilidad de que haya 3 o más parados, $P(X \geq 3)$, será:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + \dots + P(X = 12) = \\ &= 1 - P(X < 3) = 1 - 0'89131 = \mathbf{0'1087} \end{aligned}$$

(En todos los casos es suficiente el redondeo a diezmilésimas).

3. Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda 5 veces se obtengan 3 caras.

No lo resolvemos con árbol, dado que son muchas repeticiones y el árbol sería muy grande.

Se trata de una distribución binomial:

Solo tenemos dos resultados posibles: Cara o Cruz.

La probabilidad de salir cara es $p = 1/2$

La probabilidad de salir cruz es $q = 1/2$

Número de repeticiones $\rightarrow n = 5$

X = número de caras al lanzar 5 veces una moneda

$X = B(5, 0'5)$

$$P(\text{Obtener 3 caras}) = P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 0'5^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

4. En el instituto VM utilizan gafas 200 de los 1000 alumnos del centro.

En una comisión de 9 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 lleven gafas?

Aquí hay muchas repeticiones (9) no podemos hacer un diagrama de árbol, sería enorme, por lo que intentamos resolver siguiendo la modelización de la binomial. Para ello debo de comprobar si cumple los requisitos para aplicarla y encontrar sus parámetros (n, p).

X = Número de alumnos que llevan gafas en un grupo de 9.

p = Probabilidad de que un alumno lleve gafas = $200/1000 = 0,2$

n = número de repeticiones = 9.

Las repeticiones son independientes entre si y la probabilidad de “llevar gafas” es la misma en cada repetición.

Es una variable aleatoria binomial, de 9 repeticiones y probabilidad de éxito $p = 0,2$

$X = B(9, 0'2)$

$$P(X = 5) = \binom{9}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^4 = 0,0165. \text{ La probabilidad de que 5 alumnos de un grupo de 9}$$

lleven gafas es de 0,0165, de un 1,65%. Muy baja.

5. En el instituto VM utilizan gafas 200 de los 1000 alumnos del centro.**En una comisión de 9 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que todos lleven gafas?**

En este caso no sería necesario utilizar la binomial, pero la usamos para practicar.

Estamos en el mismo experimento que el ejercicio anterior, por lo que:

X = Número de alumnos que llevan gafas en un grupo de 9.

p = Probabilidad de que un alumno lleve gafas = $200/1000 = 0,2$

n = número de repeticiones = 9.

Las repeticiones son independientes entre si y la probabilidad de “llevar gafas” es la misma en cada repetición.

Es una variable aleatoria binomial, de 9 repeticiones y probabilidad de éxito $p = 0,2$

$$X = B(9, 0,2)$$

$$P(X = 9) = \binom{9}{9} \cdot 0,2^9 \cdot 0,8^0 = 0,2^9 = 0,000000512.$$

La probabilidad de que los 9 alumnos de un grupo de 9 lleven gafas es prácticamente nula. Es casi imposible.

6. En el instituto VM utilizan gafas 200 de los 1000 alumnos del centro.**En una comisión de 9 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno lleve gafas?**

En este caso no sería necesario utilizar la binomial, pero la usamos para practicar.

Estamos en el mismo experimento que el ejercicio anterior, por lo que:

X = Número de alumnos que llevan gafas en un grupo de 9.

p = Probabilidad de que un alumno lleve gafas = $200/1000 = 0,2$

n = número de repeticiones = 9.

Las repeticiones son independientes entre si y la probabilidad de “llevar gafas” es la misma en cada repetición.

Es una variable aleatoria binomial, de 9 repeticiones y probabilidad de éxito $p = 0,2$

$$X = B(9, 0,2)$$

$$P(X = 0) = \binom{9}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 = 0,8^9 = 0,134.$$

La probabilidad de que ninguno de los 9 alumnos lleve gafas es 0,134. Es de un 12,4%.

7. La probabilidad de que un huevo se rompa desde el lugar de compra hasta tu casa es de 0,1. Si compramos una docena de huevos, calcula la probabilidad de que hayan 2 o más huevos rotos al meterlos en el frigorífico.

Es una binomial, pues hay que pensar en comprobar 12 veces si el huevo está roto o no. Es inviable hacerlo con un diagrama de árbol.



X = Número de huevos rotos de un paquete de 12.

n = número de repeticiones = 12

p = probabilidad de que se rompa un huevo = 0,1

q = probabilidad de que no se rompa un huevo = 0,9

La probabilidad de romperse es igual para todos los huevos. La probabilidad de que un huevo esté roto no depende del otro huevo.

Es una binomial de parámetros 12 y 0'1.

$X = B(12, 0'1)$

$$P(\text{hay 2 o más huevos rotos}) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + \dots + P(X = 12) =$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[\binom{12}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{11} \right] = 1 - 0,659 = \boxed{0,341}$$

9. La última novela de Jerónimo Tristante ha tenido un importante éxito, hasta el punto de que el 80 % de los lectores ya la han leído. Un grupo de cuatro amigos son aficionados a la lectura:

i) Describir la variable que indica el número de individuos del grupo que han leído dicha novela.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la obra dos personas? ¿Y al menos dos?

i) Siendo X = “Número de amigos que han leído la novela”.

Tenemos una distribución binomial en la que $n = 4$; $p = 0'8$; $q = 0'2$.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0'8^0 \cdot 0'2^4 = 0'0016$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0'8^1 \cdot 0'2^3 = 4 \cdot 0'8 \cdot 0'008 = 0'0256$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0'8^2 \cdot 0'2^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 0'64 \cdot 0'04 = 0'1536$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0'8^3 \cdot 0'2^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} \cdot 0'512 \cdot 0'2 = 0'4096$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0'8^4 \cdot 0'2^0 = 0'4096$$

La función de probabilidad queda:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } P(\text{Lo hayan leído 2 personas}) &= P(X = 2) = 0'1536 \\
 P(\text{Lo hayan leído, al menos, 2 personas}) &= P(X \geq 2) = \\
 &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \\
 &= 0'1536 + 0'4096 + 0'4096 = 0'9728
 \end{aligned}$$

¡Observación sobre la tabla binomial!

Hasta hace poco tiempo era “obligado” incluir en los libros de texto una tabla binomial que facilitaba el cálculo de esas probabilidades. En dicha tabla se dan los resultados para algunos valores de n y p .

La generalización de calculadoras y ordenadores hace innecesario el empleo de la tabla binomial.

Por ejemplo, en Excel:

Si se teclea =DISTR.BINOM(2;10;0,12;0) se obtiene 0,23304317, que es el valor correspondiente a los 2 parados del ejemplo visto anteriormente.

Si se teclea =DISTR.BINOM(2;10;0,12;2) da la probabilidad acumulada correspondiente a 0, 1 o 2 parados, que es 0,891318206.

En la calculadora también se pueden obtener estos valores. Consulta el manual de tu calculadora.

3.2. Media y varianza de la binomial $B(n, p)$

La media y varianza de la distribución $B(n, p)$ se obtiene a partir de sus parámetros:

$$\text{Media: } \mu = n \cdot p$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

En consecuencia, la **desviación típica** vale $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejemplos:

a) La probabilidad de que un televisor sea defectuoso es del 3%. Hallar:

- i) El valor esperado de televisores defectuosos en un lote de 500 televisores.
- ii) La varianza y la desviación típica.

Se trata de una distribución binomial donde $n = 500$; $p = 0'03$; $q = 0'97$.

i) El valor esperado es la media o esperanza: $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0'03 = 15 \text{ televisores}$

ii) La varianza es $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 500 \cdot 0'03 \cdot 0'97 = 14'55$

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{14'55} = 3,81 \text{ televisores}$

b) Determina la media y desviación típica de la variable que cuenta el número de caras obtenidas al lanzar 8 monedas.

Se trata de una binomial $B(8, 0'5)$, su media y desviación típica es:

$$\text{Media: } \mu = n \cdot p = 8 \cdot 0'5 = 4 \text{ caras}$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0'5 \cdot 0'5} = \sqrt{2} = 1,4 \text{ caras}$$

Por tanto, cuando se tiran 8 monedas cabe esperar 4 caras.

c) Se considera la variable X = “número de parados en muestras de 50 individuos”. Calcula su media y su desviación típica.

Se trata de una binomial $B(50, 0'12)$, que puede servir para determinar el número de parados en muestras de tamaño $n = 50$.

$$\text{Media: } \mu = 50 \cdot 0,12 = 6 \text{ parados}$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0'12 \cdot 0'88} = 2'3 \text{ parados}$$

Para valores grandes de n , la probabilidad de cada uno de los posibles sucesos (de un número r de éxitos) es muy pequeña, sobre todo para valores de X alejados de la media. Así, por ejemplo, para la binomial $B(50, 0'12)$, se dan las siguientes probabilidades:

$$P(X = 2) = 0,03816514$$

$$P(X = 8) = 0,10754701$$

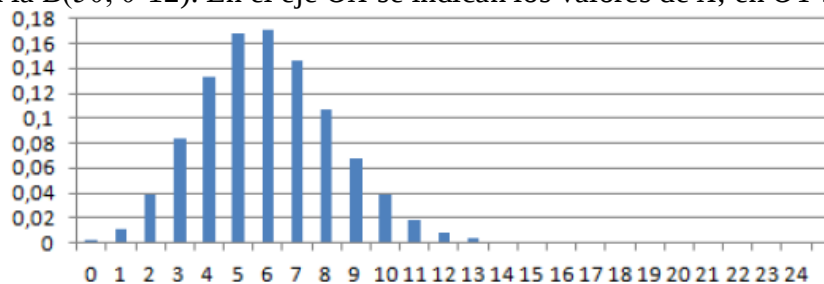
$$P(X = 12) = 0,0084088$$

$$P(X = 15) = 0,00039533.$$

La probabilidad de que haya 6 parados (que sería el número esperado, la media) es:

$$P(X = 6) = 0'1711.$$

En el gráfico de barras que sigue se dan las probabilidades de cada uno de los sucesos asociados a la $B(50, 0'12)$. En el eje OX se indican los valores de X ; en OY sus probabilidades.



La **media** es el valor esperado o con más probabilidad de que ocurra y la **desviación típica** nos informa de lo dispersos que están los posibles resultados.

Por ejemplo, en la variable X = “número de parados en muestras de 50 individuos” la media es de 6 parados y la desviación típica es de 2'3 parados. Significa que lo más frecuente es que surjan 6 parados en cada grupo de 50 y que esta cifra no suele estar por debajo de $6 - 2'3 = 3'7$ parados ni por encima de $6 + 2'3 = 8'3$ parados.

Ejercicios:

- 1) El director de marketing de un equipo de baloncesto ha calculado que el porcentaje de seguidores en una ciudad es del 35%. Se escoge al azar una muestra formada por 10 personas y se considera la variable que expresa el número de seguidores en la muestra.
 - a) Estudia si la variable sigue una distribución binomial.
 - b) En caso afirmativo, señala los parámetros de la distribución.

- 2) Un estudio sobre la población activa de una ciudad revela que 4 de cada 15 trabajadores utiliza el metro. Se escoge al azar una muestra formada por 30 trabajadores y se considera la variable que expresa el número de usuarios de metro en la muestra.
 - a) Determina si la variable sigue una distribución binomial.
 - b) En caso afirmativo, halla los parámetros de la distribución.
- 3) En una ciudad se sabe que la probabilidad de padecer la gripe en el mes de enero es de $1/5$. Se escoge una muestra al azar formada por 30 personas. Se pide:
 - a) Esperanza matemática y su interpretación.
 - b) Varianza
- 4) En la especie ovina, el color de lana blanco domina sobre el negro. Por ello, al cruzar una oveja de lana blanca con un carnero de lana negra, la probabilidad de que la descendencia sea blanca es de 0,75. Si se realizan 8 cruzamientos de este tipo, ¿cuál es el número medio de corderos blancos esperado?
- 5) Un examen consta de 10 preguntas a las que hay que contestar: si o no. Suponiendo que no se saben las respuestas y se contesta al azar, halla:
 - a) probabilidad de obtener 5 aciertos.
 - b) probabilidad de obtener algún acierto.
 - c) probabilidad de obtener más de 7 aciertos
- 6) El 53% de los trabajadores de una determinada empresa son mujeres. Si elegimos 8 personas de esa empresa al azar, calcula la probabilidad de que haya:
 - a) Alguna mujer.
 - b) Más de 6 mujeres.
 - c) Halla la media y la desviación típica.
- 7) La probabilidad de que un determinado juguete salga defectuoso es de 0,03. Calcula la probabilidad de que en un lote de 60 de estos juguetes haya:
 - a) Alguno defectuoso.
 - b) Menos de dos defectuosos.
 - c) Halla la media y la desviación típica.
- 8) Una determinada película de la cartelera ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que ya la ha ido a ver el 10% de la población. Si se reúnen cuatro amigos, hallar:
 - a) Probabilidad de que la hayan visto dos de ellos.
 - b) Probabilidad de que la hayan visto dos o tres de ellos.
 - c) Probabilidad de que nadie la haya ido a ver.
 - d) Probabilidad de que la haya visto al menos uno de ellos.
 - e) Probabilidad de que la hayan visto todos.
- 9) El 5% de los clientes de una entidad bancaria son morosos. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos un moroso entre 10 clientes que han entrado en la oficina?

Soluciones. 1) $B(10; 0,35)$ 2) $B(30; 4/15)$ 3) $B(30; 0,2)$. $\mu = 6$ personas. $\sigma^2 = 4,8$
 4) $B(8; 0,75)$. $\mu = 6$ corderos blancos.
 5) a) $P(X = 5) = 0,244$ b) $P(X \geq 1) = 0,999$ c) $P(X > 7) = 0,054$
 6) a) $P(X \neq 0) = 0,997$ b) $P(X > 6) = 0,05$ c) $\mu = 4,24$; $\sigma = 1,41$
 7) a) $P(X \geq 1) = 0,839$ b) $P(X < 2) = 0,459$ c) $\mu = 1,8$; $\sigma = 1,32$
 8) a) 0,0486 b) 0,0522 c) 0,6561 d) 0,3439 e) 0,0001
 9) $X = B(10, 0,05)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,4013$.

4. Distribuciones de probabilidad continua

Una variable estadística se llama continua cuando puede tomar todos los valores de un intervalo.

Así, por ejemplo, son variables estadísticas continuas, las estaturas y pesos de los individuos, los tiempos de espera de un autobús, el tamaño de una determinada variedad de manzanas, etc.

Para estas distribuciones, la probabilidad de un valor concreto es 0, pues el número de casos posibles es infinito. Por ejemplo, la probabilidad de que una persona mida exactamente 172,12345678910... cm es 0; altura tan improbable como que mida exactamente 172,000... cm. En cambio, la probabilidad de que una persona mida entre 171,5 cm y 172,5 cm sí podrá calcularse. Esto es, si X es la variable que mide la estatura de una persona, se tendrá:

$$P(X = 172,12345\dots) = 0 ; P(X = 172,000\dots) = 0 .$$

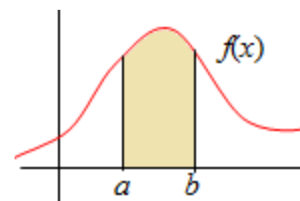
En cambio, $P(171,5 \leq X \leq 172,5) = ?$ desconocido?, valor que dependerá de la población de estudio.

4.1. Función de probabilidad

Esta función, que también se llama función de densidad, es la que permite el cálculo de probabilidad para distribuciones continuas. La probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo, $P(a \leq X \leq b)$, será el área del recinto plano limitado por la función de densidad y el eje OX cuando $X \in (a, b)$.

Esto es, si la función de densidad es $f(x)$,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$



En general, para que $f(x)$ sea una función de densidad debe cumplir:

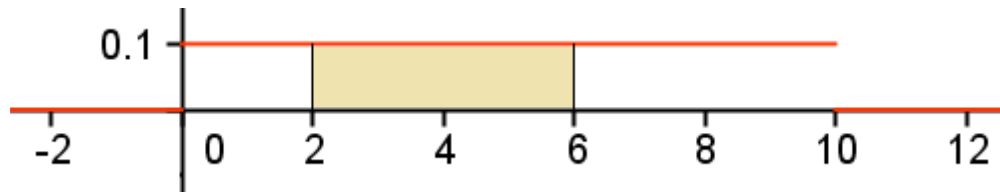
- 1) $f(x) \geq 0$ para todo valor x de su dominio: para todos los valores que pueda tomar la variable aleatoria.
- 2) El área limitada por la curva de $f(x)$ y el eje de abscisas, vale 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- 3) La probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo $[a, b]$, es:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Observación:

La probabilidad de que X tome el valor a , $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, que se corresponde con el área de un rectángulo de base 0. Por tanto, son iguales las probabilidades:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

Ejemplo:

La función $f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, que puede describir el tiempo de espera, en minutos,

hasta que llega un tren de cercanías, es una función de densidad.

La probabilidad de que haya que esperar entre 2 y 6 minutos es el área del rectángulo sombreado en la figura adjunta, que vale $4 \cdot 0,1 = 0,4$.

Naturalmente coincide con el valor:

$$\int_2^6 0,1 dx = [0,1x]_2^6 = 0,1 \cdot 6 - 0,1 \cdot 2 = 0,4$$

4.2. Función de distribución

La función de distribución, $F(x)$, asigna a cada valor x la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales que x . Se define como sigue:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$F(x)$ es una función acumulativa y creciente; toma valores comprendidos entre 0 y 1.

Ejemplo:

La función de distribución asociada a la función $f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ es:

$$F(x) = \int_0^x 0,1 dt = [0,1t]_0^x = 0,1x; \quad \text{siendo } x \in [0, 10]$$

Con esto, por ejemplo:

$$F(4) = P(X \leq 4) = 0,4$$

$$F(6) = P(X \leq 6) = 0,6$$

$$P(4 \leq X \leq 6) = F(6) - F(4) = 0,6 - 0,4 = 0,2$$

$$F(10) = P(X \leq 10) = 1$$

4.3. Media y varianza

Si una distribución de variable continua X tiene función de densidad $f(x)$, su media y varianza se determinan como sigue:

Media:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx. \quad \text{Si el dominio de } f(x) \text{ es } [a, b]: \mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2. \text{ Si el dominio de } f(x) \text{ es } [a, b]:$$

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2$$

La **desviación típica** es σ , la raíz cuadrada de la varianza.

Ejemplo:

Para la distribución continua definida por la función $f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, se tiene:

La media es: $\mu = \int_0^{10} x \cdot 0,1 dx = \left[0,1 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 0,1 \cdot \frac{10^2}{2} - 0,1 \cdot \frac{0^2}{2} = 5$. Como era lógico pensar.

La varianza es: $\sigma^2 = \int_0^{10} x^2 \cdot 0,1 dx - 5^2 = \left[0,1 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 25 = 0,1 \cdot \frac{10^3}{3} - 0,1 \cdot \frac{0^3}{3} - 25 = \frac{100}{3} - 25 = \frac{25}{3}$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2,89$

5. Distribución de probabilidad normal

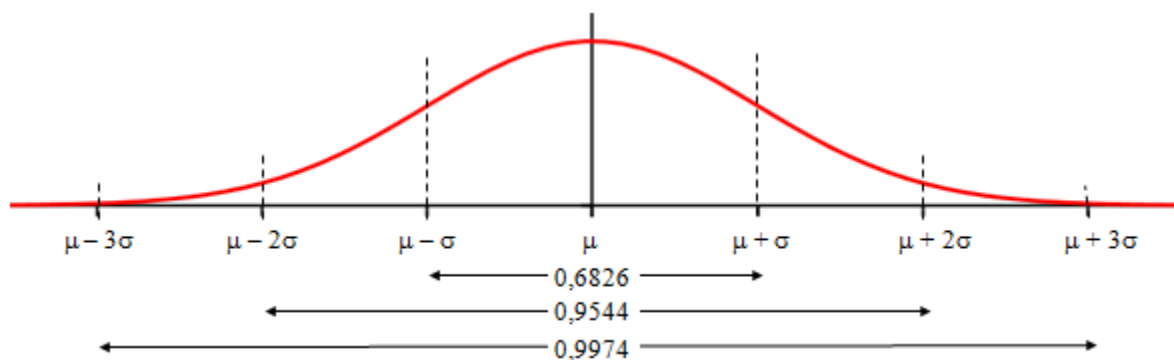
Es una distribución de probabilidad continua asociada (teóricamente) a multitud de fenómenos naturales y cotidianos (cociente intelectual, talla o peso de las personas; tamaño de los frutos de cualquier tipo de árbol...), que se caracteriza porque la mayoría de los resultados tienden a agruparse en torno a su media.

Una variable con **distribución normal** queda totalmente definida por su media μ y por su desviación típica σ . Se denota como $N(\mu, \sigma)$.

→ La expresión analítica de la función de densidad de la distribución normal es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Su gráfica es la conocida “**campana de Gauss**”.



Esta función cumple las siguientes propiedades:

→ Está definida para todo número real, es decir, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$: la variable puede tomar cualquier valor; siendo $f(x) > 0$ para todo x .

→ El área por debajo de la curva vale 1. Esto es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

→ Es simétrica respecto a su media μ .

→ El eje de abscisas es una asíntota de la curva.

Aunque la variable puede tomar cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$, la probabilidad de que tome valores alejados de la media es prácticamente nula, pues se cumple que: El área delimitada por la curva y el eje OX entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es 0,6826; entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ es de 0,9544 y entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ es de 0,9974. De hecho, a los valores que están a una distancia superior a $3,5\sigma$ de la media se les asigna una probabilidad 0.

Ejemplo:

Supongamos que la estatura de los jóvenes de 20 años de una determinada región es una variable estadística X , que se distribuye de acuerdo con la normal de media $\mu = 175$ cm y desviación típica $\sigma = 9$ cm. $X = N(175, 9)$.

Entonces, puede asegurarse, con las probabilidades que se indican, que:

$$P(\text{de que un joven mida menos de } 175 \text{ cm}) = P(X < 175) = 0,5$$

La mitad de los jóvenes tiene una estatura por debajo de la media; la otra mitad medirá más de 175 cm.

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,6826$$

$$P(175 - 9 < X < 175 + 9) = 0,6826$$

$$P(166 < X < 184) = 0,6826$$

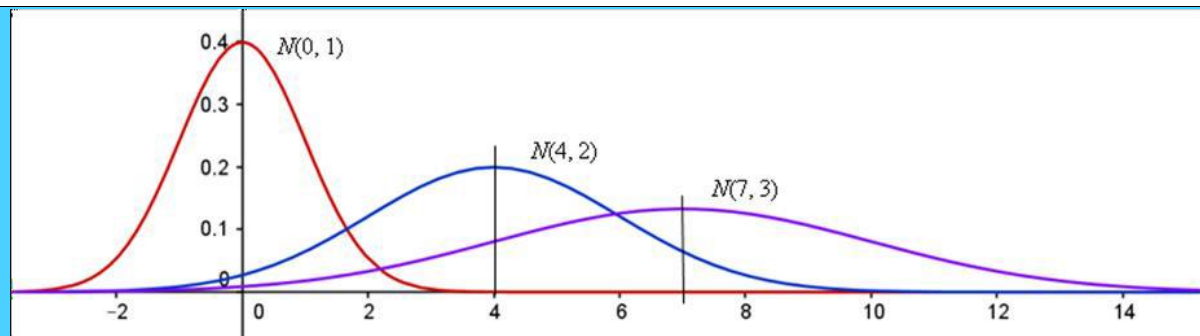
(El 68,26% de los jóvenes de esa región tiene una estatura comprendida entre 166 y 184 cm).

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,9544$$

$$P(175 - 18 < X < 175 + 18) = 0,9544$$

$$P(157 < X < 193) = 0,9544$$

(El 95,44% de los jóvenes de esa región tiene una estatura comprendida entre 157 y 193 cm).



→ La variación de la media y de la desviación típica originan cambios en la curva, desplazándose a izquierda o derecha o haciéndose más esbelta o más baja, como puede verse en la figura.

Recuérdese que la **desviación típica** es una medida de la dispersión de los elementos de una población.

Una desviación típica más grande significa que los datos son más heterogéneos; por eso las curvas normales con mayor desviación típica son más planas, que es un indicador de que los datos pueden estar más alejados de la media.

Cuando la igualdad entre los datos es grande, la desviación típica es pequeña; y al revés.

Ejemplo:

Si en una clase de 2º de bachillerato la variable edad tiene una media de 17 años y una desviación típica de 0,5 años y puede admitirse que se distribuya como una normal de parámetros $N(17, 0,5)$.

Y en esa misma clase, la variable estatura se distribuye con media 171 cm y desviación típica 11 cm: $N(171, 11)$.

Se puede concluir que los valores de estatura son más heterogéneos que los de edad.

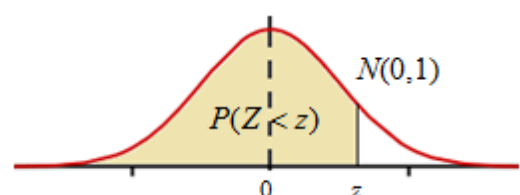
5.1. Distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $Z = N(0, 1)$. Distribución normal estándar.

El comportamiento estadístico normal hace que puedan asignarse valores de probabilidad a cualquier suceso de la variable estudiada. Esto es, se puede saber (pues está tabulado) la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre los extremos de un intervalo dado.

Lo que está tabulado es la función de distribución en el caso de la curva normal de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, la normal $N(0, 1)$.

La función de distribución, $F(x)$, da la superficie del recinto limitado por la función de densidad, $y = f(x)$ definida más arriba, y el eje OX , desde $-\infty$ hasta un valor determinado z , esto es

$$P(Z < z) = F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



Este valor del área da la probabilidad de que la variable Z , tome valores menores que z .

(Cuando se trata de la $N(0, 1)$, la variable aleatoria suele designarse por la letra Z).

Tabla normal estándar: $N(0, 1)$

La tabla normal $N(0, 1)$ puede encontrarse fácilmente en internet.

Habitualmente los valores de la tabla indican la probabilidad de que la variable Z , $N(0, 1)$, tome valores entre $-\infty$ y z , es decir, $P(Z < z)$.

Los demás valores se obtienen teniendo en cuenta la simetría de la curva y que el área total por debajo de la curva vale 1.

Así, a partir del valor $P(Z < z)$, pueden obtenerse los valores de $P(Z > z)$, $P(Z < -z)$, $P(Z > -z)$, $P(0 < Z < z)$ y $P(-z < Z < z)$.

En esta tabla, la cifra de las unidades y de las décimas se muestran en la columna de la izquierda, la de las centésimas en la fila superior.

Por ejemplo la $P(Z < 1,67)$ lo localizo en la tabla y obtengo su valor **0,9525**.

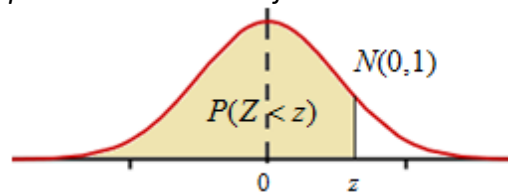
Si busco el valor de “a”, tal que $P(Z < a) = 0,7357$, lo hago al contrario localizo el **0,7357** y de ahí obtengo el valor de “a”, siendo **a = 0,63**.

En la tabla solo aparecen valores positivos de Z entre 0 y 4.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7255	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo z .



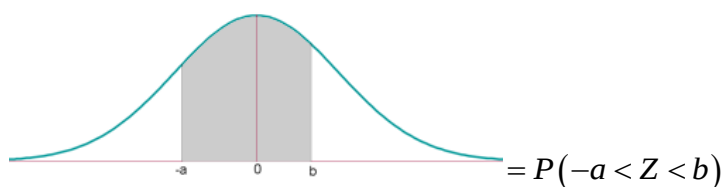
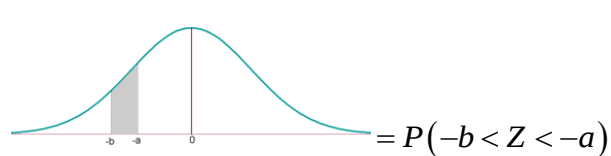
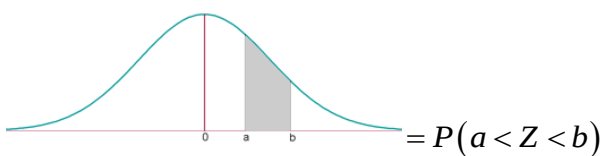
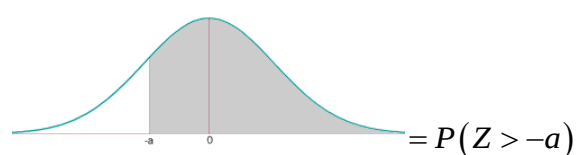
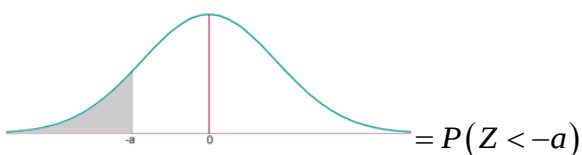
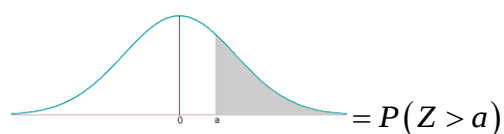
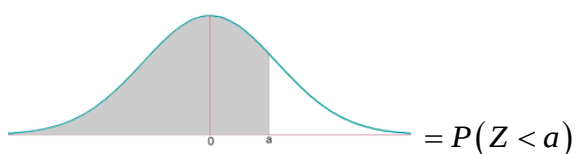
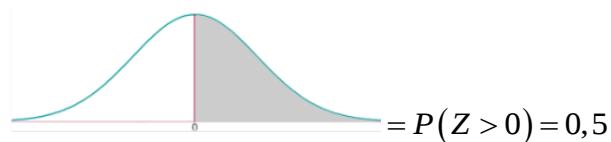
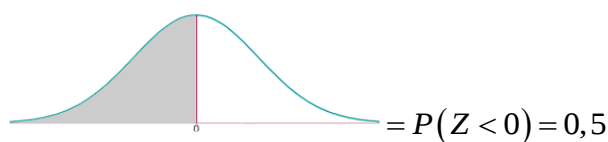
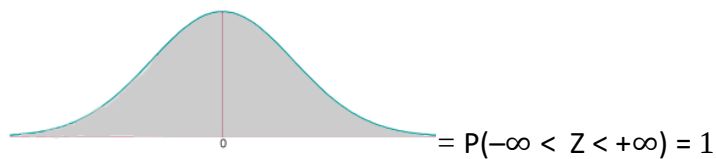
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Los valores de $P(Z < z)$ lo buscamos en la tabla, pero tenemos que visualizar la probabilidad como un área bajo la campana de Gauss.

Hacemos un repaso de los valores que nos pueden surgir en un problema. Teniendo en cuenta que es $Z = N(0, 1)$.

Las características de la “campana de Gauss” son:

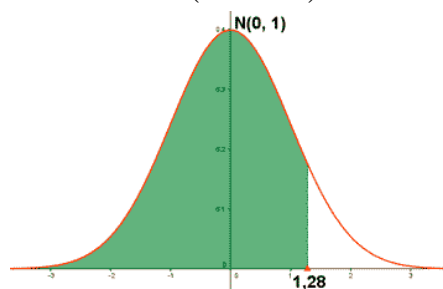
El valor central es el 0, la gráfica es simétrica y el área que hay debajo de toda la curva es 1.



5.2. ¿Cómo calcular la probabilidad pedida usando la tabla y sus características: simetría y área total = 1?

Ejemplos:

a. Calcular $P(Z \leq 1,28)$

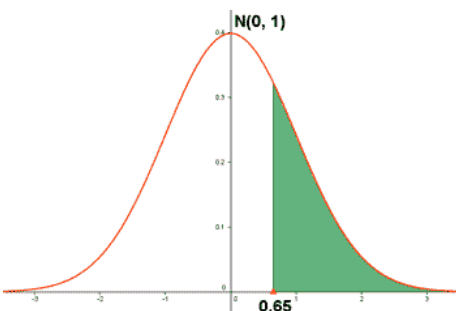


Esta probabilidad se puede encontrar directamente en la tabla.

Buscamos en la tabla la intersección de la fila que comienza por 1,2 y la columna correspondiente a 0,08.

Y obtenemos $P(Z \leq 1,28) = 0,8997$. Puede decirse que aproximadamente el 89,97% de los valores de la variable están distribuidos entre $-\infty$ y 1,28.

b. Calcular $P(Z \geq 0,65)$



Esta probabilidad no se puede encontrar directamente en la tabla. Utilizamos la probabilidad del suceso contrario.

$$P(Z \geq 0,65) = 1 - P(Z \leq 0,65) = 1 - 0,7422 = 0,2578$$

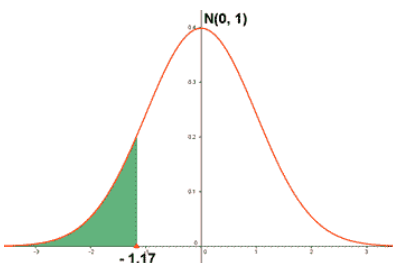
Buscamos en la tabla la intersección de la fila 0,6 y la columna correspondiente a 0,05.

Y obtenemos $P(Z \leq 0,65) = 0,7422$.

Puede decirse que el 25,78% de los valores de la variable están distribuidos por encima de 0,65.

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$$

c. Calcular $P(Z \leq -1,17)$

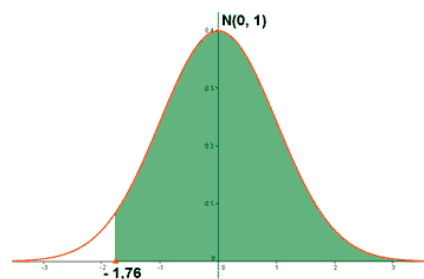


La tabla sólo ofrece probabilidades para valores positivos de la variable Z . Teniendo en cuenta la simetría de la función densidad, y que el área bajo toda la curva es 1, se obtiene:

$$P(Z \leq -1,17) = P(Z \geq 1,17) = 1 - P(Z \leq 1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$$

$$P(Z \leq -a) = P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$$

d. Calcular $P(Z \geq -1,76)$

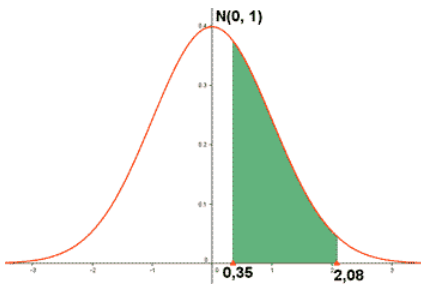


Teniendo en cuenta la simetría de la función densidad, y que el área bajo toda la curva es 1, se obtiene:

$$P(Z \geq -1,76) = P(Z \leq 1,76) = 0,9608$$

$$P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$$

e. Calcular $P(0,35 \leq Z \leq 2,08)$

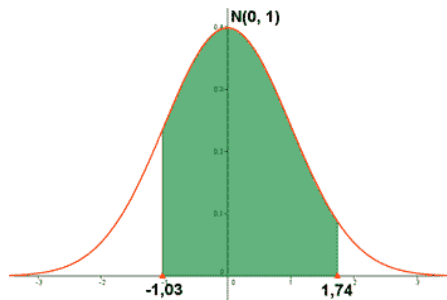


La probabilidad pedida se calcula restando el área mayor menos el área menor.

$$P(0,35 \leq Z \leq 2,08) = P(Z \leq 2,08) - P(Z \leq 0,35) = 0,9812 - 0,6368 = 0,3444$$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$

f. Calcular $P(-1,03 \leq Z \leq 1,74)$

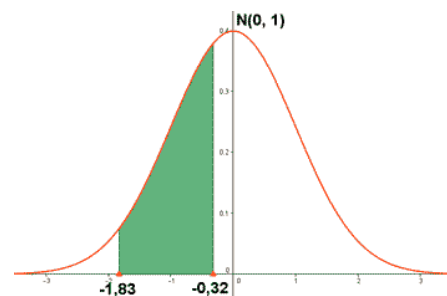


Uno de los valores de la variable Z es positivo y otro negativo, por tanto, se resta el mayor al menor y a su vez, el negativo se pasa a positivo como en el ejemplo d).

$$\begin{aligned} P(-1,03 \leq Z \leq 1,74) &= P(Z \leq 1,74) - P(Z \leq -1,03) = \\ &= P(Z \leq 1,74) - [1 - P(Z \leq 1,03)] = \\ &= 0,9591 - (1 - 0,8485) = 0,8076 \end{aligned}$$

$$P(-a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - (1 - P(Z \leq a))$$

g. Calcular $P(-1,83 \leq Z \leq -0,32)$



Como consecuencia de la simetría de la función densidad: la probabilidad pedida es la misma que positiva. Luego:

$$\begin{aligned} P(-1,83 \leq Z \leq -0,32) &= P(0,32 \leq Z \leq 1,83) = \\ &= P(Z \leq 1,83) - P(Z \leq 0,32) = \\ &= 0,9664 - 0,6255 = 0,3409 \end{aligned}$$

$$P(-a \leq Z \leq -b) = P(b \leq Z \leq a) = P(Z \leq a) - P(Z \leq b)$$

Ejemplos:

Siendo Z una variable normal N(0,1), las probabilidades siguientes son:

a) $P(Z > 0,8) = 1 - P(Z < 0,8) = 1 - 0,7881 = 0,2119$

b) $P(Z < -0,75) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

c) $P(-0,9 < Z < 1,25) =$

$$= P(Z < 1,25) - P(Z < -0,9) =$$

$$= 0,8944 - (1 - P(Z < 0,9)) =$$

$$= 0,8944 - (1 - 0,8159) = 0,7103$$

5.3. Cálculo del valor de z a partir de su probabilidad asociada

La tabla normal se emplea también en sentido contrario, para hallar la abscisa (el valor de Z) correspondiente a una probabilidad determinada.

Esto es, igual que se sabe que $P(Z < 1) = 0,8413$, en sentido contrario la pregunta sería:

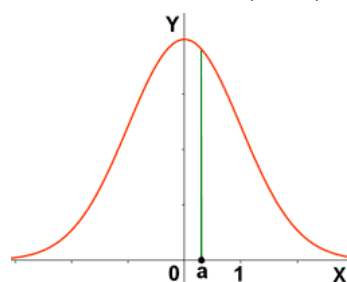
¿Cuánto debe valer z para que $P(Z < z) = 0,8413$?

La respuesta es evidente: el valor de z debe ser 1.

Pero, ¿cómo se averigua el valor de a en cualquier otro caso?

Ejemplos:

1. Calcular " a " si $P(Z < a) = 0,6331$



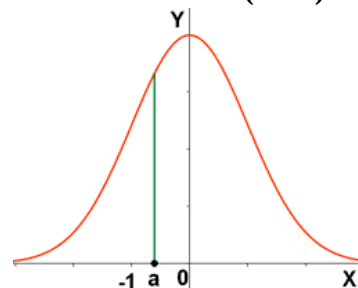
Si $0,6331 > 0,5$ entonces $a > 0$.

El valor 0,6331 corresponde a la fila 0,3 y a la columna 0,04 luego:

$$a = 0,3 + 0,04 = 0,34$$

2. El valor de z tal que $P(Z < z) = 0,9207$ es $z = 1,41$. Para determinarlo basta con buscar en la tabla normal el valor de Z correspondiente a una probabilidad de 0,9207.

3. Calcular " a " si $P(Z < a) = 0,3409$



Si $0,3409 < 0,5$ entonces $a < 0$.

Si $a < 0$ entonces hacemos $a = -b$

$$P(Z < a) = P(Z < -b) = P(Z > b) = 1 - P(Z < b) = 0,3409$$

$$P(Z < b) = 0,6591$$

El valor 0,6591 corresponde a la fila 0,4 y a la columna 0,01 luego:

$$b = 0,4 + 0,01 = 0,41 \rightarrow a = -0,41$$

4. Si la pregunta es: ¿cuánto debe valer Z para $P(-z < Z < z) = 0,8$? Se procede así:

$$\text{Como } P(-z < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z) = P(Z < z) - [1 - P(Z < z)] = 2 \cdot P(Z < z) - 1$$

$$P(-z < Z < z) = 2 \cdot P(Z < z) - 1 = 0,8$$

$$2 \cdot P(Z < z) - 1 = 0,8 \Rightarrow 2 \cdot P(Z < z) = 1,8 \Rightarrow P(Z < z) = 0,9$$

Buscando en la tabla $P(Z < z) = 0,9$, encontramos que $z = 1,28$

5. Un caso que se presenta con frecuencia es encontrar el intervalo $(-z, z)$ que contiene el 95% de los datos de la variable estadística. Esto es, hallar el valor z tal que $P(-z < Z < z) = 0,95$

Repitiendo los pasos realizados en el ejemplo anterior:

$$P(-z < Z < z) = 2 \cdot P(Z < z) - 1 = 0,95 \Rightarrow P(Z < z) = \frac{1,95}{2} = 0,975 \Rightarrow z = 1,96$$

¿Si el valor de probabilidad no figura en la tabla? se tomará el más cercano. Así se acaba de hacer en el ejemplo 5: en la tabla el valor más cercano a 0,9000 es 0,8997.

También puede optarse por la interpolación. Así, para $P(Z < z) = 0,995$ se toma $z = 2,575$, intermedio entre 2,57 y 2,58, cuyos valores de probabilidad respectivos son 0,9949 y 0,9951. El valor de z es el promedio de los dos valores: $\frac{0,9949 + 0,9951}{2} = 0,9950$

5.4. Tipificación

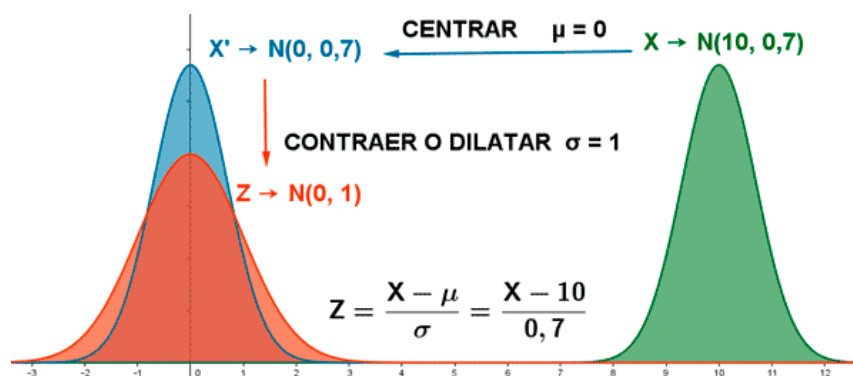
Las distribuciones normales con las que se trabaja en la práctica no son la estándar: la $N(0, 1)$. Son distribuciones con media μ (¡la que sea!) y desviación típica σ (¡la que sea!): $X = N(\mu, \sigma)$.

Tipificar una variable consiste en transformar una distribución normal cualquiera $X = N(\mu, \sigma)$ en otra normal estándar $Z = N(0, 1)$. Esta transformación consiste en:

1. **Trasladar o centrar**, es decir, hacer que la media sea cero ($\mu = 0$).
2. **Reducir (contraer o dilatar)**, es decir, hacer la desviación típica uno ($\sigma = 1$).

Para conseguir todo esto se aplica el cambio de variable:

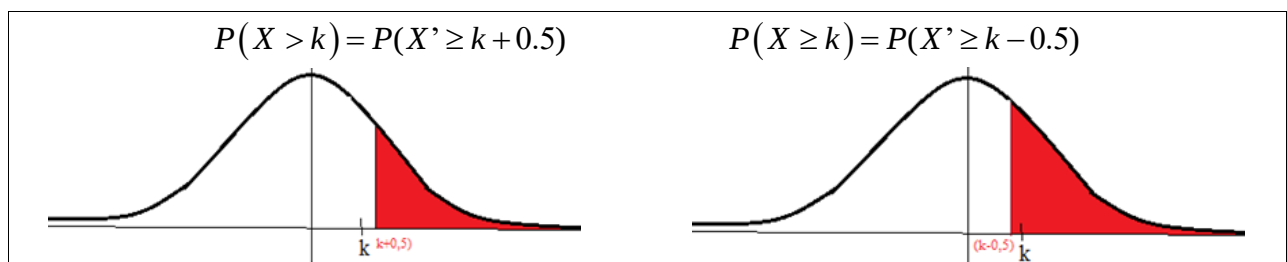
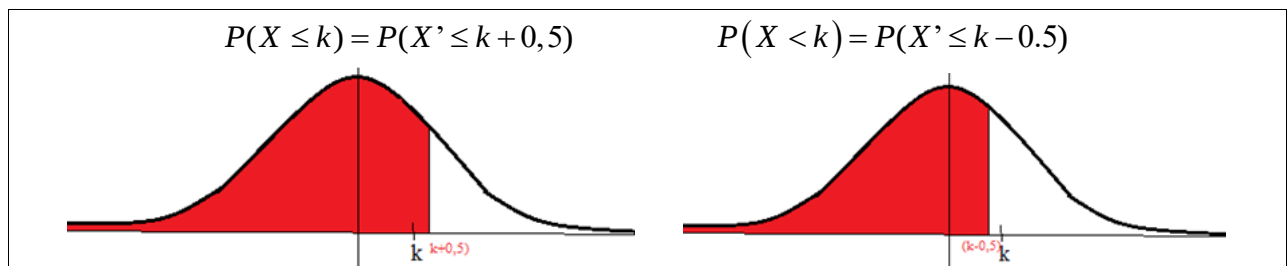
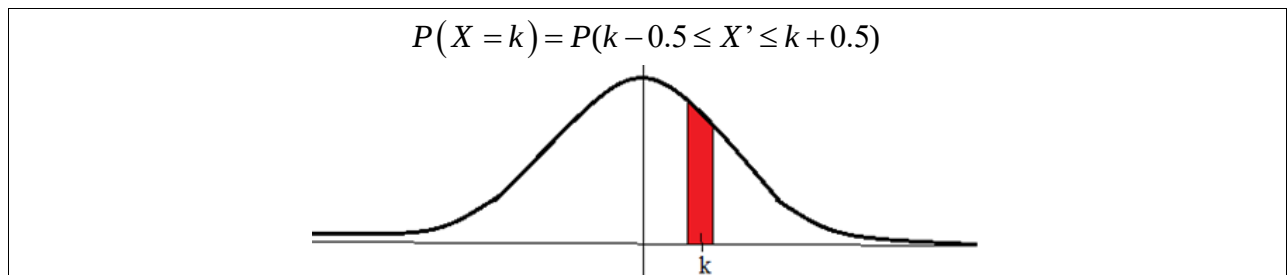
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



5.5. Aproximación de una binomial a una normal

Teorema de Moivre-Laplace: si X es una variable discreta que sigue una distribución binomial de parámetros n y p , $X = B(n, p)$ y se cumple que $n > 10$, $n \cdot p > 5$ y $n \cdot q > 5$ resulta una aproximación bastante buena suponer que la variable X se aproxima a la variable normal X' de media $n \cdot p$ y desviación típica $\sqrt{npq}$, es decir, $X' = N(np, \sqrt{npq})$.

Corrección por continuidad o de Yates. Podemos emplear la normal X' para calcular por aproximación probabilidades en el caso de una distribución binomial X , aunque hemos de tener en cuenta que la binomial es discreta y la normal continua, por lo que es necesario introducir un ajuste en el cálculo llamado *corrección de Yates*. Así tenemos que:



Ejemplos.

- Supongamos que el 90% de los miembros de un club pasan sus vacaciones en la playa. Calcula una aproximación, obtenida utilizando tablas de la normal, de la probabilidad de que, en un grupo de 6000 miembros del club, 5450 o menos vayan a ir a la playa a pasar sus vacaciones.

Solución. Consideramos X = Número de miembros de un club que pasan sus vacaciones en la playa.

n = número de repeticiones = 6000

$p = P(\text{Un miembro vaya a la playa}) = 0.90$ $q = 1 - p = 1 - 0.9 = 0.1$

$X = B(6000, 0.9)$

Como el número de repeticiones es muy grande calcular las probabilidades con la binomial no es práctico.

Como $n \cdot p = 6000 \cdot 0.9 = 5400 > 5$ y también $n \cdot q = 6000 \cdot 0.1 = 600 > 5$ podemos aproximar esta variable a una normal de media $n \cdot p = 5400$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = \sqrt{540} = 23.2379$.

$X = B(6000, 0.9)$ se aproxima con $X' = N(5400, 23.2379)$

Nos piden calcular $P(X \leq 5450)$, utilizando la corrección de Yates esta probabilidad vale aproximadamente lo mismo que $P(X' \leq 5450.5)$. Tipificamos la normal y miramos en la tabla de probabilidades de la $N(0, 1)$ y ya lo tenemos.

$$P(X \leq 5450) = P(X' \leq 5450.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X' - 5400}{23.2379} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{5450.5 - 5400}{23.2379}\right) = P(Z \leq 2.17) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.985$$

La probabilidad de que, en un grupo de 6000 miembros del club, 5450 o menos vayan a ir a la playa a pasar sus vacaciones es del 98.5 %. Es casi seguro.

2. Una fábrica de ordenadores elabora 2500 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de que uno sea defectuoso es del 0.2 %. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sobrepase de 5? ¿Y de que sea exactamente 4?

Solución. Consideramos X = Número de circuitos electrónicos elaborados defectuosos al día.

n = número de repeticiones = 2500

p = P(Un circuito salga defectuoso) = 0.002 $q = 1 - p = 1 - 0.002 = 0.998$

$X = B(2500, 0.002)$

Como el número de repeticiones es muy grande calcular las probabilidades con la binomial no es práctico.

Como $n \cdot p = 2500 \cdot 0.002 = 5 \geq 5$ y también $n \cdot q = 2500 \cdot 0.998 = 2495 \geq 5$ podemos aproximar esta variable a una normal de media $n \cdot p = 5$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.002 \cdot 0.998} = 2.23$.

$X = B(2500, 0.002)$ se aproxima con $X' = N(5, 2.23)$

Nos piden calcular $P(X > 5)$, utilizando la corrección de Yates esta probabilidad vale aproximadamente lo mismo que $P(X' \geq 5.5)$. Tipificamos la normal y miramos en la tabla de probabilidades de la $N(0, 1)$ y ya lo tenemos.

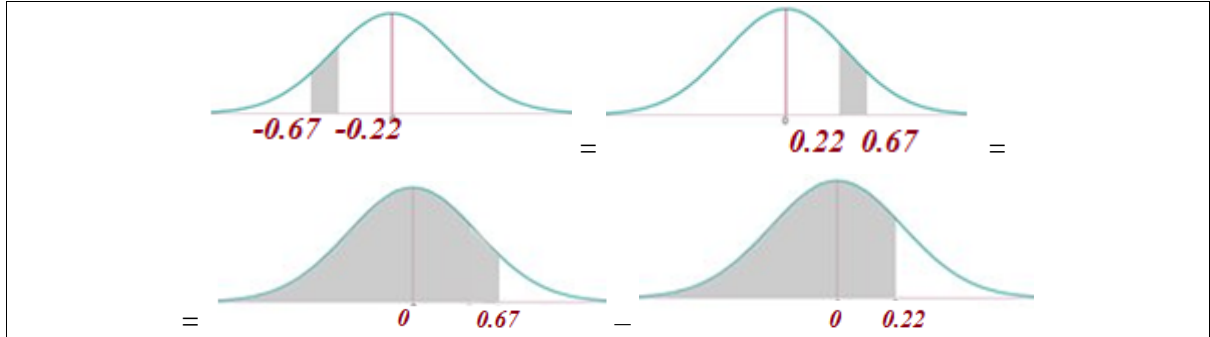
$$P(X > 5) = P(X' \geq 5.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X' - 5}{2.23} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{5.5 - 5}{2.23}\right) = P(Z \geq 0.22) = 1 - P(Z \leq 0.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5871 = \boxed{0.4129}$$

La probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sobrepase de 5 es del 58.71 %.

También nos piden calcular $P(X = 4)$, utilizando la corrección de Yates esta probabilidad vale aproximadamente lo mismo que $P(3.5 \leq X' \leq 4.5)$. Tipificamos la normal y miramos en la tabla de probabilidades de la $N(0, 1)$ y ya lo tenemos.

$$P(X = 4) = P(3.5 \leq X' \leq 4.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X' - 5}{2.23} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(\frac{3.5 - 5}{2.23} \leq Z \leq \frac{4.5 - 5}{2.23}\right) = P(-0.67 \leq Z \leq -0.22) = \dots$$



$$\dots = P(0.22 \leq Z \leq 0.67) = P(Z \leq 0.67) - P(Z \leq 0.22) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.7486 - 0.5871 = \boxed{0.1615}$$

La probabilidad de elaborar exactamente 4 circuitos defectuosos en un día es del 16.15 %.

3. Un banco ha estimado que un 17% de créditos personales que no son devueltos debido a la crisis. En 60 créditos de este tipo que se han concedido:
- ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 15 fallidos exactamente?
 - ¿Y que se produzcan más de 7?

Solución. Consideramos X = Número de créditos devueltos.

n = número de repeticiones = 60

p = P(Un crédito sea devuelto) = $1 - 0.17 = 0.83 \rightarrow q = 0.17$

$X = B(60, 0.83)$

Como el número de repeticiones es muy grande calcular las probabilidades con la binomial no es práctico.

Como $n \cdot p = 60 \cdot 0.83 = 49.8 \geq 5$ y también $n \cdot q = 60 \cdot 0.17 = 10.2 \geq 5$ podemos aproximar esta variable a una normal de media $n \cdot p = 49.8$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.17 \cdot 0.83} = 2.9$.

$X = B(60, 0.83)$ se aproxima con $X' = N(49.8, 2.9)$

- a) Nos piden calcular $P(X = 15)$, utilizando la corrección de Yates esta probabilidad vale aproximadamente lo mismo que $P(14.5 \leq X' \leq 15.5)$. Tipificamos la normal y miramos en la tabla de probabilidades de la $N(0, 1)$ y ya lo tenemos.

$$\begin{aligned}
P(X = 15) &= P(14.5 \leq X' \leq 15.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X' - 49.8}{2.9} \end{array} \right\} = \\
&= P\left(\frac{14.5 - 49.8}{2.9} \leq Z \leq \frac{15.5 - 49.8}{2.9}\right) = P(-12.17 \leq Z \leq -11.83) = \dots \\
&\dots = P(Z \leq -11.83) - P(Z \leq -12.17) = (1 - P(Z \leq 11.83)) - (1 - P(Z \leq 12.17)) = \\
&= P(Z \leq 12.17) - P(Z \leq 11.83) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 1 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

Si calculamos directamente este valor con la binomial sería:

$$P(X = 15) = \binom{60}{15} \cdot 0.83^{15} \cdot 0.17^{45} = 7.6 \cdot 10^{-23} \approx 0$$

La probabilidad de que se produzcan 15 fallidos exactamente es del 3.5 %.

- b) Nos piden calcular $P(X > 7)$, utilizando la corrección de Yates esta probabilidad vale aproximadamente lo mismo que $P(X \geq 7.5)$. Tipificamos la normal y miramos en la tabla de probabilidades de la $N(0, 1)$ y ya lo tenemos.

$$\begin{aligned}
P(X > 7) &= P(X \geq 7.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X' - 49.8}{2.9} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{7.5 - 49.8}{2.9}\right) = P(Z \geq -14.59) = \dots \\
&\dots = P(Z \leq 14.59) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

La probabilidad de que se produzcan más de 7 fallidos es del 0 %.

Resumen de Distribuciones Binomial y Normal

La distribución binomial

Es una distribución de probabilidad discreta asociada a un experimento aleatorio definido por las siguientes características:

- 1) El resultado de una prueba del experimento aleatorio debe concretarse en dos únicas opciones, que podemos llamar: Si o No; éxito (E) o fracaso (F); se cumple o no se cumple.
- 2) Se realizan n ensayos del experimento, independientes unos de otros.
- 3) La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas y suele denotarse por p ; esto es, $P(E) = p$. (La probabilidad de fracaso también es constante: vale $1 - p = q$. Esto es, $P(F) = q$).
- 4) La variable aleatoria X , cuenta el número r de éxitos en las n pruebas: $r = 0, 1, \dots, n$.

Una variable binomial queda determinada por los parámetros n y $p \rightarrow$ se denota por $B(n, p)$.

Probabilidad de r éxitos Para la distribución de la variable binomial $X = B(n, p)$, la probabilidad de r éxitos en los n intentos realizados, $P(X = r)$, $r = 0, 1, \dots, n$, viene dada por:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

Media y varianza: Media: $\mu = n \cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

La distribución Normal

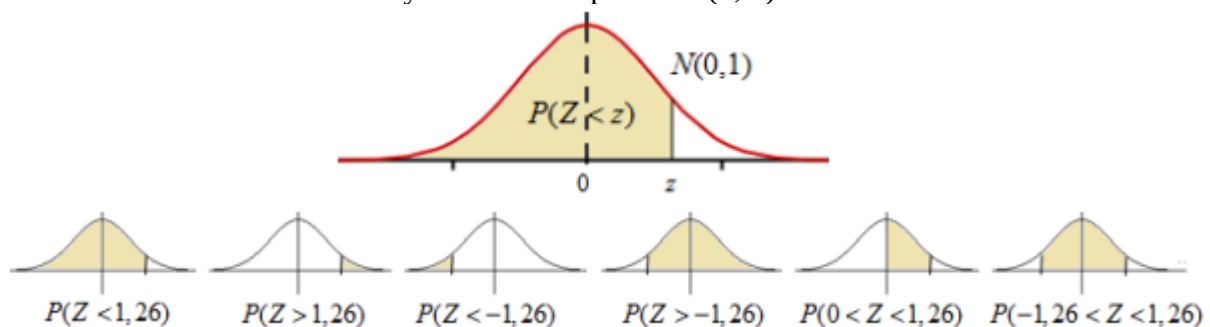
Es una distribución de probabilidad continua asociada (teóricamente) a multitud de fenómenos naturales y cotidianos (cociente intelectual, talla o peso de las personas; tamaño de los frutos de cualquier tipo de árbol...), que se caracterizan porque la mayoría de los resultados tienden a agruparse en torno a su media. Una variable con distribución normal queda totalmente definida por su media μ y por su desviación típica σ . Se denota como $N(\mu, \sigma)$.

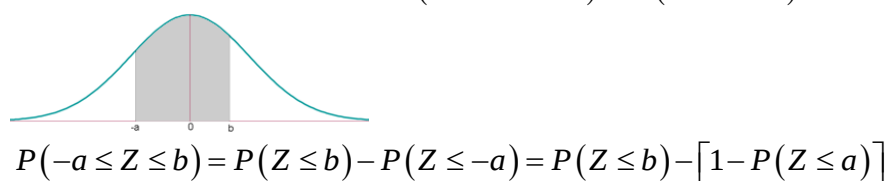
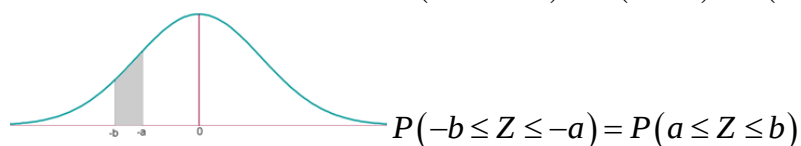
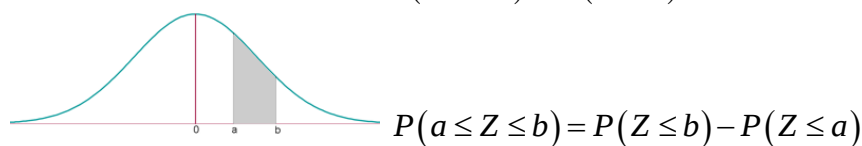
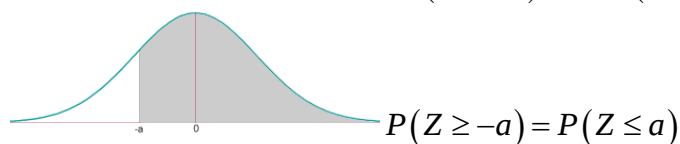
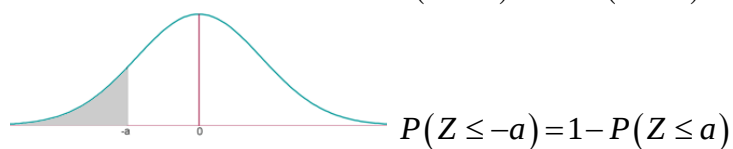
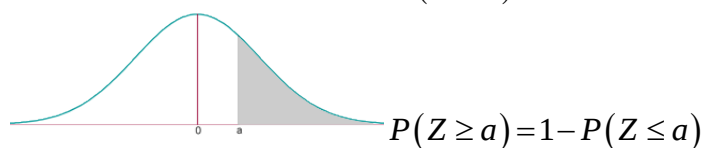
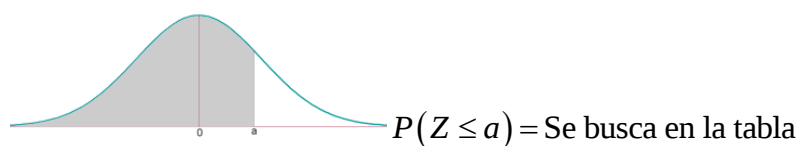


Tipificación

Las distribuciones normales con las que se trabaja en la práctica no son la estándar: la $N(0, 1)$. Son distribuciones con media μ y desviación típica σ : $N(\mu, \sigma)$. Para calcular valores de probabilidad de una variable X , normal $N(\mu, \sigma)$, se hace el cambio de variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, siendo Z la $N(0, 1)$.

Distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $N(0, 1)$

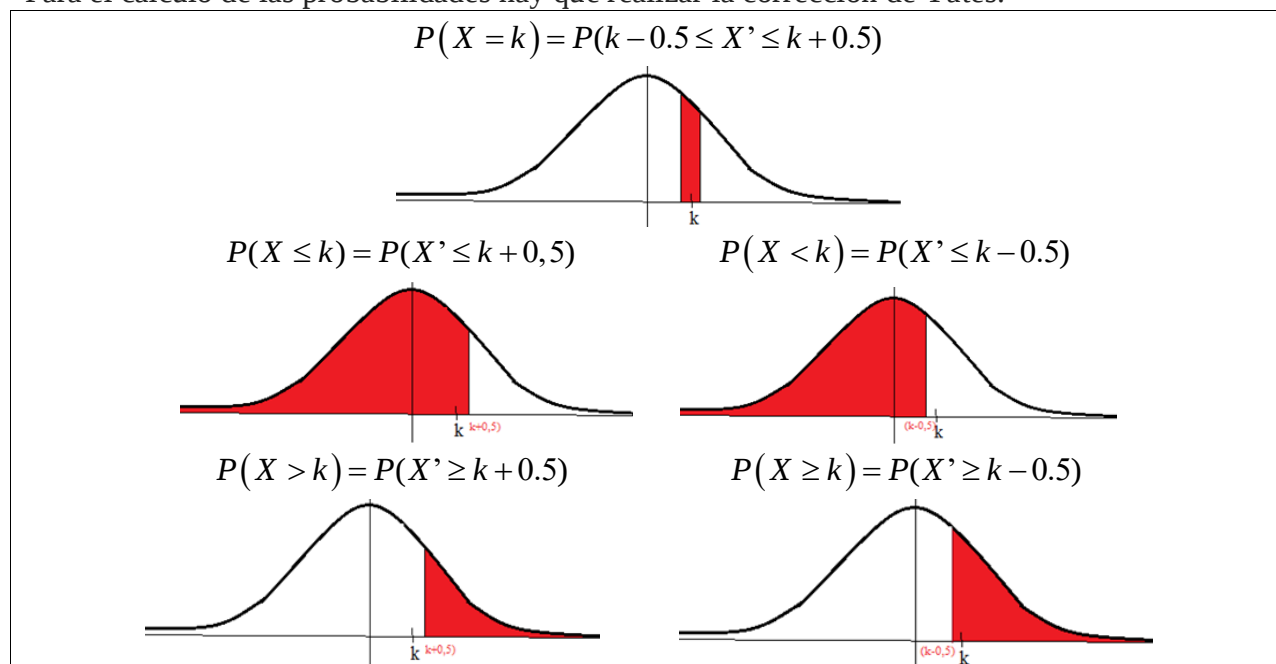




Aproximación de una binomial con una normal

Si $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$ La **distribución binomial** $X = B(n, p)$ se puede aproximar mediante una **distribución normal** $X' = N(np, \sqrt{npq})$.

Para el cálculo de las probabilidades hay que realizar la corrección de Yates.



Ejercicios:**Distribución Binomial**

1. Un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6, se lanza cinco veces. Halla la probabilidad de que el número 3 salga:
a) Exactamente dos veces. b) Una vez a lo sumo. c) Más de una vez.
2. Se lanza una moneda correcta 10 veces y se mide el número de caras obtenidas.
a) ¿Cuántos resultados forman el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 4 caras?
3. En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara es 0,4. Si se lanza 5 veces, calcula la probabilidad de obtener al menos 3 caras.
4. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:
a) No acierte ninguna respuesta correcta.
b) Acierte 6 o más preguntas.
5. Una compañía de seguros estima que la probabilidad de que un asegurado de motocicleta tenga algún tipo de accidente es 0,15. De 10 asegurados, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 accidentados?
6. En un Centro Comercial el 35% de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial:
a) ¿Cuál es la probabilidad de 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?
b) ¿Cuál es la probabilidad de todos hayan ido en coche?
7. En una ciudad, el 15% de sus ciudadanos tocan algún instrumento musical. Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas toquen algún instrumento?
8. Se lanza un dado al aire 5 veces. Halla la probabilidad de:
a. Obtener dos veces un 5.
b. Obtener más de dos veces un 5.
9. El 30 % de los tornillos de una gran partida son defectuosos. Si se cogen tres tornillos al azar, calcula:
a. La probabilidad de que los tres sean defectuosos.
b. La probabilidad de que solamente dos sean defectuosos.
c. La probabilidad de que ninguno de ellos sea defectuoso.
10. Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se le aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide :
a) Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.
b) Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría.
c) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

11. Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40 % de los invitados asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. Calcula:
 - a) La probabilidad de que solo tres acudan al acto.
 - b) La probabilidad de que acudan más de tres.
12. Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya:
 - a) Como mucho tres niñas.
 - b) Al menos una niña.
 - c) Al menos ocho niños.
 - d) Al menos una niña y un niño.
13. Una encuesta revela que el 20 % de la población es favorable a un determinado político. Elegidas seis personas al azar, se desea saber:
 - a) Probabilidad de que las seis personas sean favorables al político.
 - b) Probabilidad de que las seis personas le sean desfavorables.
 - c) Probabilidad de que menos de tres personas le sean favorables.
14. Una prueba de inteligencia está compuesta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar de forma aleatoria. Se pide :
 - a) Probabilidad de no acertar ninguna pregunta.
 - b) Probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas.
 - c) Probabilidad de acertar todas las preguntas.
 - d) Probabilidad de acertar al menos siete preguntas.
 - e) Probabilidad de acertar menos de cuatro preguntas.
15. Se va a construir una planta nuclear en cierta comunidad. Se sabe que el 80 % de la población se opone a la construcción de dicha planta y el 20 % restante está a favor.
 - a) Si se elige al azar una muestra de cinco personas, ¿cuál es la probabilidad de que tres o más estén a favor de la construcción?
 - b) Si se elige al azar una muestra de 20 personas, ¿cuál es la probabilidad de que todas estén en contra de la construcción?
16. Si el 20 % de las tartas elaboradas en una fábrica tienen trazas de nueces, ¿cuál es la probabilidad de que, entre cuatro tartas elegidas al azar, a lo sumo dos contengan trazas de nueces?
17. Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0,55 :
 - a) Calcular la probabilidad de que en una camada dos exactamente sean hembras.
 - b) Calcular la probabilidad de que en una camada al menos dos sean hembras.
18. Si la probabilidad de que ocurra un suceso A es $P(A) = 1/5$, ¿cuál es el mínimo número de veces que hay que repetir el experimento para que la probabilidad de que ocurra al menos una vez el suceso A sea mayor que $1/2$? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos dos veces A al realizar 5 veces el experimento?
19. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es $2/3$. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

- a) Las cinco personas.
- b) Al menos tres personas.
- c) Exactamente dos personas.



Distribución Normal

20. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$ calcula:

- a) $P(Z < 1,2)$
- b) $P(Z < 1,27)$
- c) $P(Z < -1,2)$
- d) $P(Z < -1,27)$

21. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$ calcula interpolando:

- a) $P(Z < 1,325)$
- b) $P(Z < 1,645)$
- c) $P(Z < 0,666)$
- d) $P(Z < 1,863)$
- e) $P(Z > 1,45)$
- f) $P(Z > -1,42)$

22. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

- a) $P(Z < k) = 0,9115$
- b) $P(Z < k) = 0,9452$
- c) $P(Z < k) = 0,1587$
- d) $P(Z < k) = 0,95$

23. Para una distribución normal $N(50, 5)$, halla:

- a) $P(X < 56)$
- b) $P(X > 58)$
- c) $P(X < 48)$
- d) $P(48 < X < 56)$

24. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media $\mu = 166$ cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:

- a) Superior a 175 cm.
- b) Inferior a 155 cm.
- c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

25. Para una distribución normal $N(60, 5)$, determina el valor de k que cumple:

- a) $P(X < k) = 0,90$
- b) $P(X > k) = 0,95$
- c) $P(60 - k < X < 60 + k) = 0,9544$

26. Supongamos que los chicos de 15 años de un determinado país tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 168 cm y desviación típica 12 cm. Si se quieren seleccionar al 5% de los chicos más altos, ¿a partir de qué altura debe hacerse?

27. El diámetro de las ciruelas de una determinada variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

28. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.

- a) ¿Cuál es la desviación típica?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?

29. La duración de una determinada marca de lavadoras se ajusta a una normal de media 8,4 años y desviación típica 6 meses. El fabricante asegura que sus lavadoras duran más de 7 años, comprometiéndose a: “si una lavadora se estropea antes de 7 años le damos otra nueva”. ¿Cuántas lavadoras nuevas tendrá que reponer por cada 10000 vendidas?

30. Los envases de cartón de una determinada marca de leche contienen 1 litro de media, siendo la desviación típica de 5 ml.
- a) ¿Qué porcentaje de envases sobrepasan los 1005 ml.
 - b) Si el control de calidad rechaza los envases que contengan menos de 990 ml y más de 1010 ml, ¿qué porcentaje de envases habrá que rechazar?

**Aproximación de una distribución binomial por una normal**

31. Se lanza un dado 720 veces. Calcula la probabilidad aproximada de que salgan, al menos, 110 seises.
32. Tiramos una moneda perfecta 100 veces. Hacemos la predicción de que saldrá un número de caras comprendido entre 40 y 53. Calcula la probabilidad de acertar.
33. Se ha realizado una encuesta sobre una población en la que solo el 15 % ha leído más de tres libros. Elegida al azar una muestra de 60 personas, calcula la probabilidad de que:
- i. Más de cinco personas hayan leído más de tres libros.
 - ii. Como máximo haya seis personas que han leído más de tres libros.
34. Se sabe que dos de cada ocho habitantes de una ciudad utilizan el transporte público para ir a su trabajo. Se hace una encuesta a 140 de esos ciudadanos. Determinar:
- a. Número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público.
 - b. Probabilidad de que el número de ciudadanos que van al trabajo en transporte público esté entre 30 y 45.
35. En un centro comercial el 35 % de los clientes paga con tarjeta.
- a. Si en una caja han pagado 120 clientes, ¿cuántos de ellos se espera que lo hayan hecho con tarjeta?
 - b. Si en una caja han pagado 200 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayan hecho con tarjeta entre 60 y 85 de ellos?
 - c. Si en una caja han pagado 400 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 260 no lo hayan hecho con tarjeta?
36. El 90 % de los miembros de un club pasan sus vacaciones en la playa. Calcule una aproximación, obtenida utilizando la tabla normal, de la probabilidad de que, en un grupo de 60 miembros, 50 o menos vayan a ir a la playa a pasar sus vacaciones.
37. Tenemos un bombo de lotería con 10 bolas idénticas numeradas del 1 al 10.
- a. Hacemos seis extracciones consecutivas de una bola que se devuelve al bombo después de cada extracción. Calcula la probabilidad de que el número cuatro salga, como máximo, una vez en estas extracciones.
 - b. Si hacemos 150 extracciones como en el apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el número cinco salga como máximo 16 veces?
38. El 25 % de las viviendas de una región tiene conexión a internet. Se eligen 80 viviendas y se pide:
- a. La probabilidad de que al menos 20 de ellas estén conectadas a internet.
 - b. El número esperado de viviendas no conectadas a internet.

- c. La probabilidad de que el número de viviendas con internet esté entre 10 y 30.
39. La probabilidad de que deje de fumar un paciente, que se ha sometido a un régimen médico riguroso, es de 0,8. Se eligen 100 pacientes, que se han sometido a dicho régimen. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan dejado de fumar entre 74 y 85 pacientes, ambos inclusive?
40. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de cara es de $1/3$ y cuya probabilidad de cruz es de $2/3$. Antes de tirar 120 veces la moneda hacemos la predicción de que el número de caras que saldrá estará entre 35 y 45, ambos inclusive. Calcula la probabilidad de no acertar la predicción.
41. Explica en qué casos puedes utilizar la distribución normal para calcular de forma aproximada probabilidades de distribución binomiales.
El 10 % de los artículos fabricados en una empresa de material cerámico tiene algún defecto. Obtén (utilizando la aproximación, si lo consideras conveniente) la probabilidad de que:
- En un lote de 10 artículos se encuentre al menos uno defectuoso.
 - En un lote de 100 artículos hayan al menos 10 defectuosos.

Soluciones

- a) 0,16075. b) 0,80375. c) 0,19625.
- a) 1024. b) 105/5122.
- 0,31744.
- a) 256/6561. b) 129/6561.
- 0,4557.
- a) 0,2679. b) 0,00064.
- Se trata de una binomial $B(8, 0'15)$. $P(X \geq 2) = 0,34282$
- a) 625/3888 b) 3875/3888
- a) 0'027 b) 0,189 c) 0,343
- a) 0,3277 b) 0,05792 c) 4 pacientes
- a) 0,215 b) 0,618
- a) 0,1719 b) 0,9991 c) 0,0547 d) 0,9980
- a) 0,000064 b) 0,2621 c) 0,9011
- a) 0,0563 b) 0,1459 c) 0,0000009 d) 0,0035 e) 0,7759
- a) 0,0579 b) 0,1153
- 0,9728
- a) 0,3675 b) 0,609
- el número mínimo de veces es 4. 0,2627
- a) 0,132 b) 0,791 c) 0,164
- a) 0,8849. b) 0,8980. c) 0,1151. d) 0,1020.
- a) 0,9074. b) 0,95. c) 0,74732. d) 0,96881. e) 0,0735. f) 0,9222.
- a) 1,35. b) 1,6. c) -1. d) 1,645.
- a) 0,8849. b) 0,0548. c) 0,3446. d) 0,5403.
- a) 0,1587. b) 0,1112. c) 0,7301.
- a) 66,4. b) 51,775. c) 10.
- 187,74 cm.
- 4,884 cm.
- a) 10. b) 30,85 %.
- 26.
- a) 15,87% b) 4,56%

- 31.** 0.8531
- 32.** 0.7401
- 33.** a) 0.7852 b) 0.2776
- 34.** a) 105 ciudadanos b) 0.8375
- 35.** a) 8 clientes b) 0.9299 c) 0.5199
- 36.** 0.0655
- 37.** a) 0.8857 b) 0.6591
- 38.** a) 0.5517 b) Se espera que 60 vecinos no tengan internet c) 0.9932
- 39.** 0.8621
- 40.** 0.7154
- 41.** a) No, b) Si

Probabilidad y estadística en pruebas EBAU y PAU de Murcia

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

Extraordinaria 2026

PREGUNTA 5: 5.1) En una urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.

- a) [1 pto.] Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) [1 pto.] Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 .

Solución: a) 0.3125 b) 0.6

PREGUNTA 5: 5.2) [2 ptos.] La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94.52% tiene menos de 32 años, y un 21.19% tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

Solución: La media es de 24 años y la desviación típica es de 5 años.

Ordinaria 2026

PREGUNTA 5: 5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

- a) [0,75 ptos.] Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.
b) [0,75 ptos.] Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.
c) [0,5 ptos.] Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

Solución: a) 0.037 b) 0.3243 c) 0.95

PREGUNTA 5: 5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

- a) [0,75 ptos.] Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.
b) [1,25 ptos.] Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

Solución: a) 0.0077 b) 0.5636

Extraordinaria 2025

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) [1] Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
b) [0,5] Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
c) [1] Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

Solución: a) $\frac{258}{500} = 0.516$. b) 0.9. c) $\frac{72}{258} = \frac{12}{43} \approx 0.28$.

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en

el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

- [0,5]** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
- [0,75]** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
- [0,5]** Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
- [0,75]** Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

Solución: a) $X = B(280, 0.95)$. La media es 266 y la desviación típica es 3.647. b) 0.9345. c) 0.0655. d) 0.028.

Ordinaria 2025

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- [0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- [0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- [0,5]** Salga una bola verde en U_2 .
- [0,5]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

Solución: a) 0.7. b) 0.3. c) 0.36. d) 0.4375.

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

- [1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
- [1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

Solución: a) $X = B(10, 0.98)$. La media es 9.8 y la desviación típica es 0.4427.

$P(X = 9) = 0.16667$. b) 0.9357.

Extraordinaria 2024

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

- [0,5]** ¿Son independientes los sucesos “consumir pan integral” y “consumir pan blanco”?
- [0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?
- [0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.
- [0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Solución: a) No son independientes. b) $\frac{1}{3} \approx 0.333$ c) Un 20 % de los habitantes no consume ninguno de los dos tipos de pan. d) 0.5

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.

Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

- [0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

- b) [0,5] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
 c) [0,75] ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?
 d) [0,75] ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Solución: a) $X = B(2500, 0.02)$ b) La media es 50 microprocesadores defectuosos al día. La desviación típica es 7 microprocesadores. c) 0.8577 d) 0.0558

Ordinaria 2024

- 7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

- a) [0,5] Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
 b) [0,75] Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
 c) [0,5] Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
 d) [0,75] Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución: a) $\frac{2}{3} \approx 0.667$ b) 0.5318 c) $\frac{5}{9} \approx 0.56$ d) $\frac{4}{9} \approx 0.44$

- 8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

- a) [0,5] ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?
 b) [1] Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
 c) [1] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución: a) 33.45 % b) 0.9441 c) La media de la distribución es 100 y la desviación típica es 10.

Extraordinaria 2023

- 7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

- a) [0,25 p.] La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.
 b) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.
 c) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.
 d) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película.

- e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.
Solución: a) 0.4 b) 0.6 c) 0.24 d) 0.6 e) 0.76

- 8:** En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.

El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

- a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?
b) **[1 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

Solución: a) El porcentaje es del 31.5 %. b) La media es de 3.2 kg y la desviación típica es de 0.6 kg. c) El porcentaje de niños que pesan menos de 2.33 kg es de 7.35 %.

Ordinaria 2023

- 7:** Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

- a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Solución: a) 0.5 b) 0.54 c) $5/8 = 0.2778$

- 8:** En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

- a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.
b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[0,5 p.]**Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.
d) **[1 p.]**Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

Solución: a) $X = B(100, 0.5)$ b) Media = 50 y desviación típica = 5 c) 0.01084 d) 0.1841

Extraordinaria 2022

- 7:** Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

- a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos “contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes” y “ser mujer” sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

- b) [1 p.] En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.
- c) [1 p.] Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Solución: a) 0.22275 b) 0.77725 c) 0.5231

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

- a) [0,75 p.] Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.
- b) [0,75 p.] Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.
- c) [1 p.] Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución: a) 0.8944 b) 88.82 % c) 176.76 cm

Ordinaria 2022

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

- a) [0,75 p.] La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.
- b) [0,75 p.] La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
- c) [1 p.] La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución: a) 0.3 b) 0.3 c) 0.44

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

- a) [1,5 p.] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
- b) [1 p.] Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución: a) La media es 100 y la desviación típica es 10. b) 0.0026

Extraordinaria 2021

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

- a) [0,5 p.] La probabilidad de que la bola sea blanca.
- b) [0,5 p.] La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.
- c) [0,5 p.] La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.
- d) [0,5 p.] La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.

- e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Solución: a) 0.583 b) 0.417 c) 0.429 d) 0.25 e) 0.6

- 8:** Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

- a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?
- b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?
- c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

Solución: a) $X = B(9, 0.45)$ b) Media = 4.05; $\sigma = 1.49$ c) 0.1495

Ordinaria 2021

- 7:** Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

- a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.
- b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos “ser una persona daltónica” y “ser mujer”?

Solución: a) 0.05545 b) 0.0893 c) No son independientes.

- 8:** En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

- a) **[0,75 p.]** Calcule la media de la distribución.
- b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?
- c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

Solución: a) $\mu = 125 \text{ km/h}$ b) 30.85 % c) 0.6853

Extraordinaria 2020

- 7:** El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8 \text{ kg}$ y desviación típica σ . Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

- a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?
- b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución: a) 0,7995 b) $\sigma = 0,2381$ c) 0,6628

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución: a) 0,5 b) 0,1 c) 0,8

Ordinaria 2020

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

Solución: a) $X = B(9, 0.4)$ b) $\mu = 3.6$ y la desviación típica es $\sigma = 1.4696$. c) 0.7334

8: En una determinada población, el 40% de los individuos lee diariamente la prensa y el 75% ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25% de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos “leer diariamente la prensa” y “ver diariamente las noticias en la televisión”?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

Solución: a) No son independientes. b) 0,15 c) 0,625

Septiembre 2019

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución: a) Es una binomial. $B(9, 0.4)$. b) Media = 3,6 $\sigma = 1,47$ c) 0,2665

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

- a) **[1 p.]** Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
- b) **[1,5 p.]** Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución: a) 0,9897 b) 0,122

Junio 2019

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

- a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
- b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución: a) 0,139 b) Media = 5000 h desviación típica = 120 h

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- a) **[1 p.]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
- b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que juegue en casa?

Solución: a) 8/15 b) 5/8

Septiembre 2018 (sólo entraba probabilidad)

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

- a) Elegido un estudiante al azar, se pide:
- a.1) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?
- a.2) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?
- b) **[0,5 p.]** Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

Solución: a.1) 0,25 a.2) 0,5 b) 0,66

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

- a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
- b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?

c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

Solución: a) 0,5 b) 0,5 c) 0,1

Junio 2018 (sólo entraba probabilidad)

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0'15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0'05.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) **[0,75 p.]** Si un día tiene un fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

Solución: a) 0,88 b) 0,125

CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70% de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50% prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30% prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

Solución: a) 0,9 b) 0,1 c) 0,2

Septiembre 2017 (sólo entraba probabilidad)

CUESTIÓN A.5: [1 punto] En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65% de los alumnos estudian inglés, el 20% alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30% de los alumnos de inglés, el 50% de los que estudian alemán y el 70% de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

Solución: Al elegir un alumno al azar, el 40 % es la probabilidad de que sea de robótica.

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{5}$,

$P(B) = \frac{7}{10}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{10}$. Calcule: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{B} / A)$. (Donde, si C y D son sucesos $\bar{C}$ denota el suceso complementario de C y $P(C/D)$ denota la probabilidad del suceso C condicionada al suceso D).

Solución: $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ $P(\bar{B} / A) = 1 - P(B / A) = \frac{1}{3}$

Junio 2017 (sólo entraba probabilidad)

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un *smartphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.

- a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.
- b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

Solución: a) $P(\text{No tenga ningún dispositivo}) = 0,1$ b) $P(\text{Tablet} / \text{Smartphone}) = 0,235$

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64%, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70%. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

Solución: 0,43

Tablas de distribución binomial y normal (0, 1)

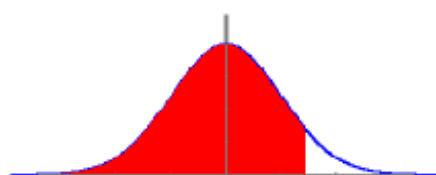
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

		P												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0975	0,1800	0,2775	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4650	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
4	0	0,9606	0,8146	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
5	0	0,9500	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
6	0	0,9400	0,7500	0,5600	0,4100	0,2900	0,2000	0,1300	0,0900	0,0750	0,0400	0,0200	0,0100	0,0069
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2468	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
7	0	0,9301	0,7301	0,5401	0,3901	0,2701	0,1801	0,1101	0,0701	0,0551	0,0251	0,0101	0,0051	0,0039
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2763	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
8	0	0,9203	0,7203	0,5303	0,3803	0,2603	0,1703	0,1003	0,0603	0,0453	0,0153	0,0003	0,0000	0,0000
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3947	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
9	0	0,9106	0,7106	0,5206	0,3706	0,2506	0,1606	0,0906	0,0506	0,0356	0,0056	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
10	0	0,9009	0,7009	0,5109	0,3609	0,2409	0,1509	0,0809	0,0409	0,0259	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0913	0,3030	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
11	0	0,8913	0,6913	0,5013	0,3513	0,2313	0,1413	0,0713	0,0313	0,0163	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1017	0,3134	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
12	0	0,8817	0,6817	0,4917	0,3417	0,2217	0,1317	0,0617	0,0217	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1121	0,3238	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
13	0	0,8721	0,6721	0,4821	0,3321	0,2121	0,1221	0,0521	0,0121	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1225	0,3342	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
14	0	0,8625	0,6625	0,4725	0,3225	0,2025	0,1125	0,0425	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1329	0,3446	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
15	0	0,8529	0,6529	0,4629	0,3129	0,1929	0,1029	0,0329	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1433	0,3550	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
16	0	0,8433	0,6433	0,4533	0,3033	0,1833	0,0933	0,0233	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1537	0,3654	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
17	0	0,8337	0,6337	0,4437	0,2937	0,1737	0,0837	0,0137	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1641	0,3758	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
18	0	0,8241	0,6241	0,4341	0,2841	0,1641	0,0741	0,0041	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1745	0,3862	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
19	0	0,8145	0,6145	0,4245	0,2745	0,1545	0,0645	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1849	0,3966	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
20	0	0,8049	0,6049	0,4149	0,2649	0,1449	0,0549	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1953	0,4070	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998