



**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**  
PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

**MATEMÁTICAS**  
**CURSO 2025/2026**

- Instrucciones:**
- a) Duración: **1 hora y 30 minutos**.
  - b) Tienes que **elegir únicamente tres** de entre los seis ejercicios propuestos.
  - c) Cada ejercicio se puntuará **de 0 a 10 puntos**. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
  - d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.
  - e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

### EJERCICIO 1

- a) [5 puntos] Halla el centro y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(1,0)$  y  $B(0,0)$  y su centro pertenece a la recta  $y = x - 1$ .
- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $4^{-x} - 8^{\frac{-x+1}{3}} = 8$  y comprueba el resultado.

### EJERCICIO 2

- a) [5 puntos] Determina los valores de  $x$  para los que  $0 \leq \frac{3x+5}{x+3} \leq 1$  y representa gráficamente los valores obtenidos sobre la recta real.
- b) [5 puntos] Calcula los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que tiene  $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$  de área y uno de sus ángulos es  $60^\circ$ .

### EJERCICIO 3

- a) [5 puntos] Halla las ecuaciones de las rectas que tienen pendiente  $-1$  y son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .
- b) [5 puntos] Halla el valor de  $m$  y  $n$ , sabiendo que el polinomio  $p(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$  es divisible por  $x - 2$  y que el resto de dividir  $p(x)$  por  $x$  es el mismo que dividirlo por  $x + 1$ .

### EJERCICIO 4

- a) [5 puntos] Halla  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  sea derivable.
- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $\log(15x^2 - 29x + 14) - 2\log(4) = 2\log(x-1)$ , donde  $\log(x)$  representa al logaritmo decimal de  $x$ . Comprueba el resultado.

### EJERCICIO 5 Considera las parábolas de ecuaciones $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2 - 6$ .

- a) [5 puntos] Calcula los puntos de corte de las gráficas de las dos parábolas. Represéntalas gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas.
- b) [5 puntos] Determina el área del recinto limitado por las dos parábolas.

### EJERCICIO 6

Considera la función definida por  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  para  $x \neq \pm 1$ .

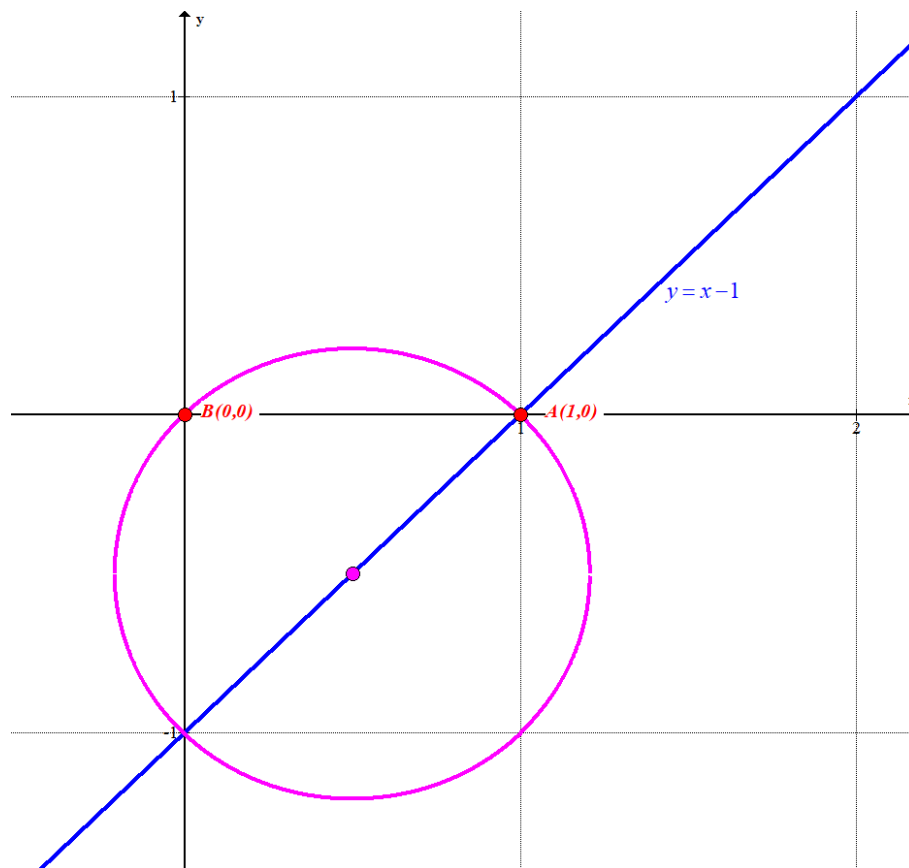
- a) [5 puntos] Estudia y determina todas sus asíntotas.
- b) [5 puntos] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**SOLUCIONES****EJERCICIO 1**

a) [5 puntos] Halla el centro y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(1,0)$  y  $B(0,0)$  y su centro pertenece a la recta  $y = x - 1$ .

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $4^{-x} - 8^{\frac{-x+1}{3}} = 8$  y comprueba el resultado.

a) Dibujamos la situación planteada.



El centro  $C$  de la circunferencia está en la recta  $y = x - 1$ , por lo que tiene coordenadas  $C(x, x - 1)$ . Además, se debe cumplir que la distancia de  $C$  a  $A$  es igual a la distancia de  $C$  a  $B$ , siendo este el valor del radio de la circunferencia.

$$\left. \begin{array}{l} C(x, x-1) \\ A(1,0) \\ B(0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (x, x-1) - (1,0) = (x-1, x-1) \\ \overrightarrow{BC} = (x, x-1) - (0,0) = (x, x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-1)^2} \\ \Rightarrow d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} \\ d(A,C) = d(B,C) \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \cancel{(x-1)^2} = x^2 + \cancel{(x-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=x \rightarrow -1=0 \\ x-1=-x \rightarrow 2x=1 \rightarrow \boxed{x=0.5} \end{cases} \Rightarrow C(0.5, 0.5-1) \Rightarrow \boxed{C(0.5, -0.5)}$$

El centro de la circunferencia tiene coordenadas  $C(0.5, -0.5)$ .

El radio de la circunferencia es la distancia del punto A al punto C.

$$d(A, C) = \sqrt{(0.5-1)^2 + (0.5-1)^2} = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La circunferencia que cumple lo pedido tiene de centro el punto  $C(0.5, -0.5)$  y de radio  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Obtenemos su ecuación.

$$\left. \begin{matrix} C(0.5, -0.5) \\ r = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x-0.5)^2 + (y+0.5)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 0.5^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot x + y^2 + 0.5^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot y = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - x + y = 0}$$

La ecuación de la circunferencia es  $x^2 + y^2 - x + y = 0$ .

b) Resolvemos la ecuación exponencial planteada.

$$4^{-x} - 8^{\frac{-x+1}{3}} = 8 \Rightarrow (2^2)^{-x} - (2^3)^{\frac{-x+1}{3}} = 8 \Rightarrow 2^{-2x} - 2^{\frac{3(-x+1)}{3}} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-2x} - 2^{-x+1} = 8 \Rightarrow (2^{-x})^2 - 2^{-x} \cdot 2^1 - 8 = 0 \Rightarrow \{2^{-x} = t\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 = t \\ \frac{2-6}{2} = -2 = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{-x} = 4 = 2^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow \boxed{x = -2} \\ 2^{-x} = -2 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Como una potencia de base positiva solo puede tomar valores positivos únicamente existe una solución de la ecuación planteada:  $x = -2$ .

**EJERCICIO 2**

- a) **[5 puntos]** Determina los valores de  $x$  para los que  $0 \leq \frac{3x+5}{x+3} \leq 1$  y representa gráficamente los valores obtenidos sobre la recta real.
- b) **[5 puntos]** Calcula los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que tiene  $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$  de área y uno de sus ángulos es  $60^\circ$ .

a) La expresión  $\frac{3x+5}{x+3}$  no existe para  $x = -3$ , dado que para este valor se anula el denominador de la fracción.

Averiguamos cuando  $\frac{3x+5}{x+3} = 0$ .

$$\frac{3x+5}{x+3} = 0 \Rightarrow 3x+5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3} \approx -1.66$$

Averiguamos cuando  $\frac{3x+5}{x+3} = 1$ .

$$\frac{3x+5}{x+3} = 1 \Rightarrow 3x+5 = x+3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Resolvemos la inecuación planteada viendo que ocurre antes, entre y después de estos tres valores obtenidos:  $x = -3$ ,  $x = \frac{-5}{3}$  y  $x = -1$ .

En el intervalo  $(-\infty, -3)$  consideramos  $x = -5$  y comprobamos si se cumplen las dos desigualdades.

$$\frac{3(-5)+5}{-5+3} = \frac{-10}{-2} = 5 > 1$$

No se cumple la desigualdad.

En el intervalo  $\left(-3, -\frac{5}{3}\right)$  consideramos  $x = -2$  y comprobamos si se cumplen las dos desigualdades.

$$\frac{3(-2)+5}{-2+3} = \frac{-1}{1} = -1 < 0$$

No se cumple la desigualdad.

En el intervalo  $\left(-\frac{5}{3}, -1\right)$  consideramos  $x = -1.2$  y comprobamos si se cumplen las dos desigualdades.

$$\frac{3(-1.2)+5}{-1.2+3} = \frac{1.4}{1.8} \approx 0.77$$

Este valor es mayor que cero y menor que 1, por lo que se cumplen las dos desigualdades.

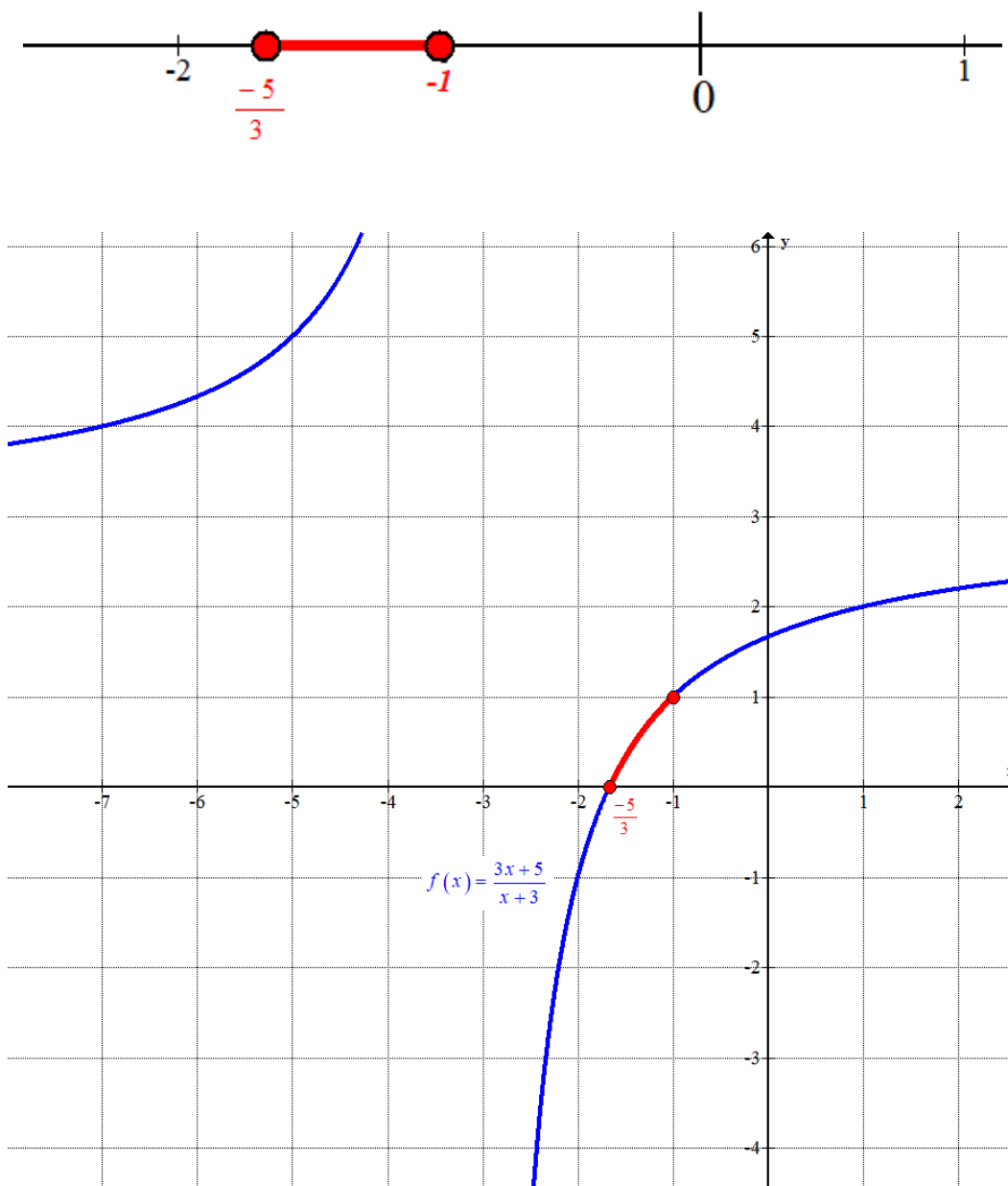
En el intervalo  $(-1, +\infty)$  consideramos  $x = 0$  y comprobamos si se cumplen las dos desigualdades.

$$\frac{3 \cdot 0 + 5}{0 + 3} = \frac{5}{3} \approx 1.66 > 1$$

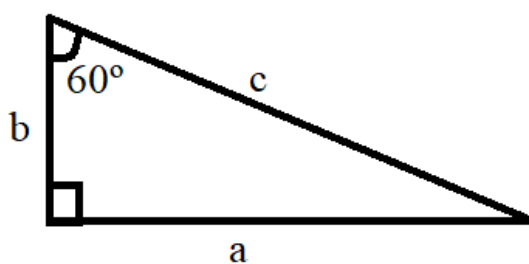
No se cumple la desigualdad.

Los valores que cumplen lo pedido son los pertenecientes al intervalo  $\left[-\frac{5}{3}, -1\right]$ .

Los valores que cumplen lo pedido son los marcados en rojo.



b) Dibujamos la situación planteada.



El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \text{Área} = \frac{a \cdot b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow a \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{4b}}$$

Aplicamos que en un triángulo rectángulo se cumple la igualdad  $\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ .

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{c = 2b}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras y las igualdades obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = c^2 \\ a = \frac{\sqrt{3}}{4b} \\ c = 2b \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{\sqrt{3}}{4b} \right)^2 + b^2 = (2b)^2 \Rightarrow \frac{3}{16b^2} + b^2 = 4b^2 \Rightarrow \frac{3}{16b^2} = 3b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16b^2} = b^2 \Rightarrow 1 = 16b^4 \Rightarrow b^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{4b} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \boxed{c = 2b = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1} \end{array} \right.$$

Los lados del triángulo rectángulo son  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  y  $c = 1$ .

**EJERCICIO 3**

- a) [5 puntos] Halla las ecuaciones de las rectas que tienen pendiente  $-1$  y son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .
- b) [5 puntos] Halla el valor de  $m$  y  $n$ , sabiendo que el polinomio  $p(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$  es divisible por  $x - 2$  y que el resto de dividir  $p(x)$  por  $x$  es el mismo que dividirlo por  $x + 1$ .

- a) Las rectas que tienen pendiente  $-1$  tienen ecuación  $y = -x + n$ . Si las rectas son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  entonces solo existe un punto en común entre la recta y la circunferencia.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + n \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (-x + n)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 + n^2 - 2nx = 1 \Rightarrow$$

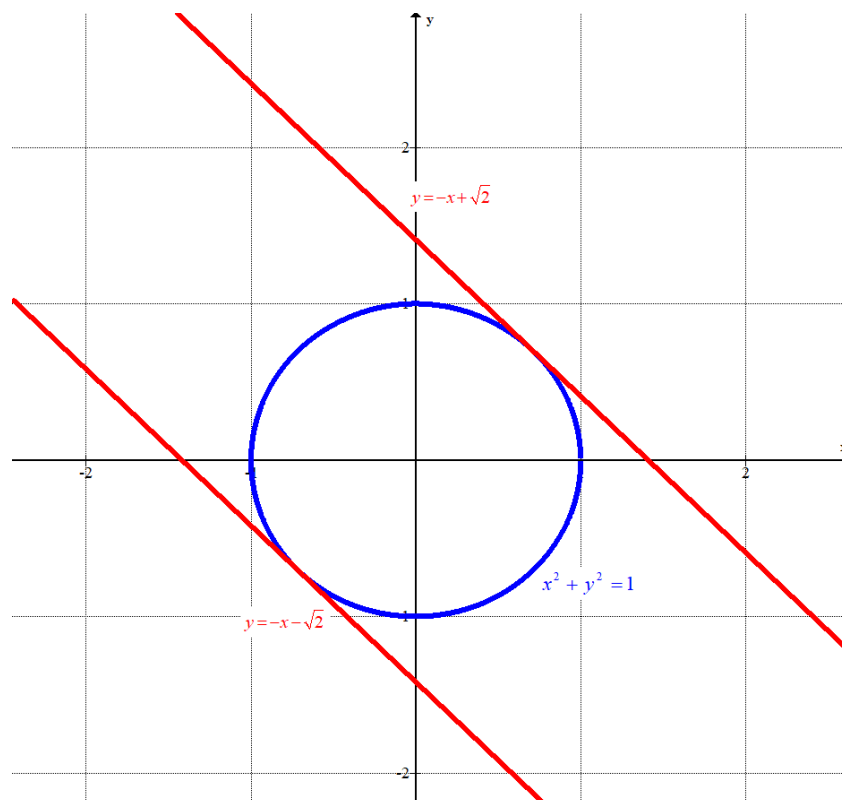
$$\Rightarrow 2x^2 - 2nx + (n^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{2n \pm \sqrt{(-2n)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (n^2 - 1)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 8n^2 + 8}}{4} = \frac{2n \pm \sqrt{-4n^2 + 8}}{4}$$

Para que tenga una única solución el radicando debe ser nulo.

$$-4n^2 + 8 = 0 \Rightarrow n^2 - 2 = 0 \Rightarrow n^2 = 2 \Rightarrow \boxed{n = \pm\sqrt{2}}$$

Existen dos rectas que cumplen lo pedido:  $y = -x + \sqrt{2}$  y  $y = -x - \sqrt{2}$ .



b) Si el polinomio  $p(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$  es divisible por  $x - 2$  entonces  $p(2) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ p(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^3 + m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 4m + 2n + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{4m + 2n + 9 = 0}$$

Si el resto de dividir  $p(x)$  por  $x$  es el mismo que dividirlo por  $x + 1$  entonces se cumple que  $p(0) = p(-1)$ .

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ p(0) = p(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow 0^3 + m \cdot 0^2 + n \cdot 0 + 1 = (-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -1 + m - n + 1 \Rightarrow \boxed{m - n = 1}$$

Unimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} m - n = 1 \\ 4m + 2n + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = n + 1 \\ 4m + 2n + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(n + 1) + 2n + 9 = 0 \Rightarrow 4n + 4 + 2n + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6n + 13 = 0 \Rightarrow 6n = -13 \Rightarrow \boxed{n = \frac{-13}{6}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{-13}{6} + 1 = \frac{-7}{6}}$$

Los valores buscados son  $m = \frac{-7}{6}$  y  $n = \frac{-13}{6}$ .

**EJERCICIO 4**

a) [5 puntos] Halla  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  sea derivable.

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $\log(15x^2 - 29x + 14) - 2\log(4) = 2\log(x-1)$ , donde  $\log(x)$  representa al logaritmo decimal de  $x$ . Comprueba el resultado.

a) Para ser derivable la función debe ser continua.

En el intervalo  $(-\infty, 0)$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$ , que es continua pues el denominador se anula para  $x=1$  que no pertenece al intervalo de definición.

En el intervalo  $(0, +\infty)$  la función tiene la expresión  $f(x) = x-1$ , que es una expresión polinómica que es continua.

La función debe ser continua en  $x=0$ , para lo cual deben coincidir los límites laterales en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax+1}{x-1} = \frac{a \cdot 0 + 1}{0-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = 0-1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

La función es continua en todo su dominio  $\mathbb{R}$ .

La función  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , siendo su derivada

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a(x-1) - 1 \cdot (ax+1)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{ax} - a - \cancel{ax} - 1}{(x-1)^2} = \frac{-a-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} ..$$

Para que la función sea derivable en  $x=0$  deben coincidir los valores de las derivadas laterales en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-a-1}{(x-1)^2} = \frac{-a-1}{(0-1)^2} = -a-1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a-1=1 \Rightarrow \boxed{-2=a}$$

El valor que hace que la función sea derivable es  $a = -2$ .

b) El logaritmo solo existe si es logaritmo de un número positivo.

$$x-1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1}$$

Para que exista  $\log(x-1)$  debe ser  $x > 1$ .

$$15x^2 - 29x + 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 14}}{2 \cdot 15} = \frac{29 \pm 1}{30} = \begin{cases} \frac{29+1}{30} = 1 \\ \frac{29-1}{30} = \frac{28}{30} \end{cases}$$

$$x < \frac{28}{30} \Rightarrow \left\{ x = 0 \in \left( -\infty, \frac{28}{30} \right) \right\} \Rightarrow 15 \cdot 0^2 - 29 \cdot 0 + 14 = 14 > 0$$

$$\frac{28}{30} < x < 1 \Rightarrow \left\{ x = \frac{29}{30} \in \left( \frac{28}{30}, 1 \right) \right\} \Rightarrow 15 \cdot \left( \frac{29}{30} \right)^2 - 29 \cdot \frac{29}{30} + 14 = \frac{-1}{60} < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \left\{ x = 2 \in (1, +\infty) \right\} \Rightarrow 15 \cdot 2^2 - 29 \cdot 2 + 14 = 16 > 0$$

Para que exista  $\log(15x^2 - 29x + 14)$  debe ser  $x < \frac{28}{30}$  o  $x > 1$ .

Para que existan ambos logaritmos debe ser  $x > 1$ .

La expresión planteada solo existe para valores  $x > 1$ . Resolvemos la ecuación planteada.

$$\log(15x^2 - 29x + 14) - 2\log(4) = 2\log(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(15x^2 - 29x + 14) - \log(4^2) = \log(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{15x^2 - 29x + 14}{16}\right) = \log(x-1)^2 \Rightarrow \frac{15x^2 - 29x + 14}{16} = (x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 29x + 14 = 16(x-1)^2 \Rightarrow 15x^2 - 29x + 14 = 16(x^2 + 1 - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 29x + 14 = 16x^2 - 32x + 16 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos soluciones, pero la solución  $x=1$  no es válida, pues debe ser mayor que 1 para que existan los logaritmos de la ecuación planteada.

La ecuación planteada tiene una única solución:  $x=2$ .

Comprobamos que  $x=1$  no es solución válida pues el logaritmo de 0 no existe.

$$\log(15 \cdot 1^2 - 29 \cdot 1 + 14) - 2\log(4) = 2\log(1-1) \Rightarrow \text{log}(0) - 2\log(4) = 2\text{log}(0)$$

Comprobamos que  $x=2$  es solución válida.

$$\text{¿} \log(15 \cdot 2^2 - 29 \cdot 2 + 14) - 2 \log(4) = 2 \log(2 - 1)? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} \log(16) - 2 \log(4) = 2 \log(1)? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} \log(16) - \log(16) = 2 \cdot 0? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} 0 = 2 \cdot 0? \Rightarrow \text{¡Cierto!}$$

**EJERCICIO 5** Considera las parábolas de ecuaciones  $y = -x^2 + 4x$  e  $y = x^2 - 6$ .

a) **[5 puntos]** Calcula los puntos de corte de las gráficas de las dos parábolas. Representálas gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas.

b) **[5 puntos]** Determina el área del recinto limitado por las dos parábolas.

a) Hallamos los puntos de corte de las dos parábolas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 4x \\ y = x^2 - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4x = x^2 - 6 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 4x - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

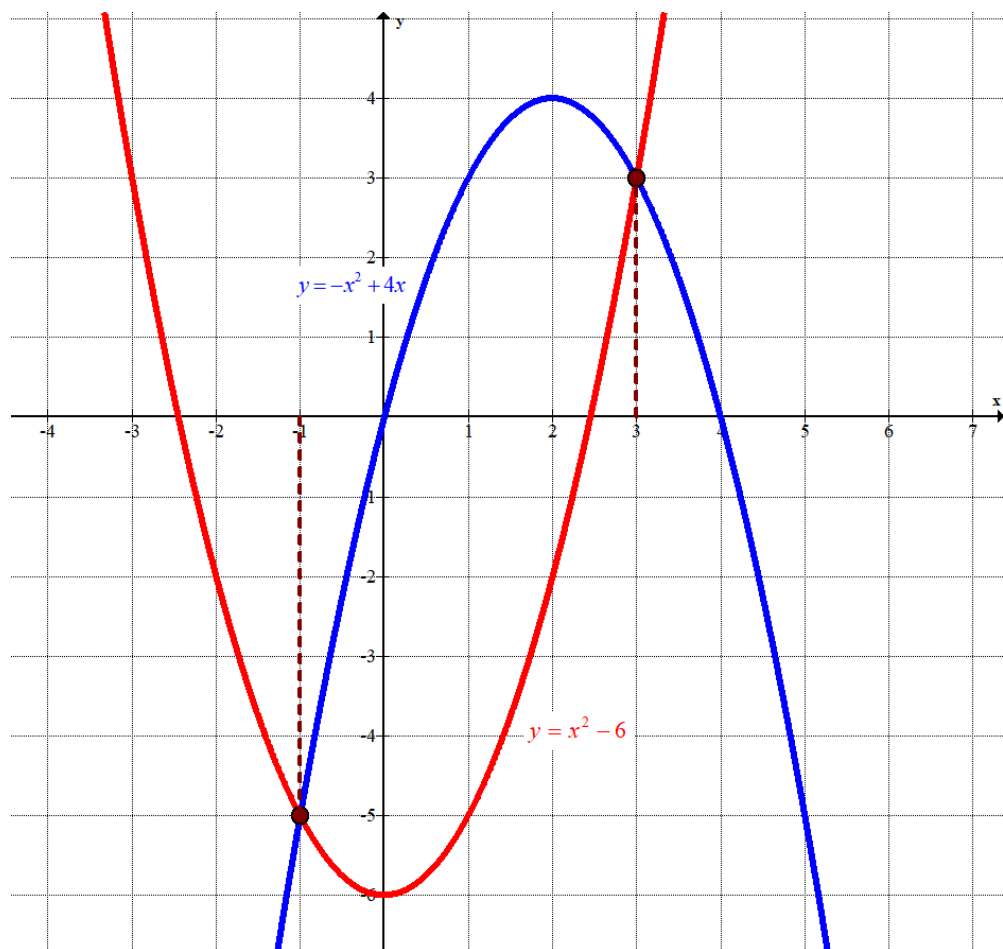
Para  $x = -1$  las dos funciones valen  $(-1)^2 - 6 = -5$ . Un punto de corte es  $(-1, -5)$ .

Para  $x = 3$  las dos funciones valen  $3^2 - 6 = 3$ . El segundo punto de corte es  $(3, 3)$ .

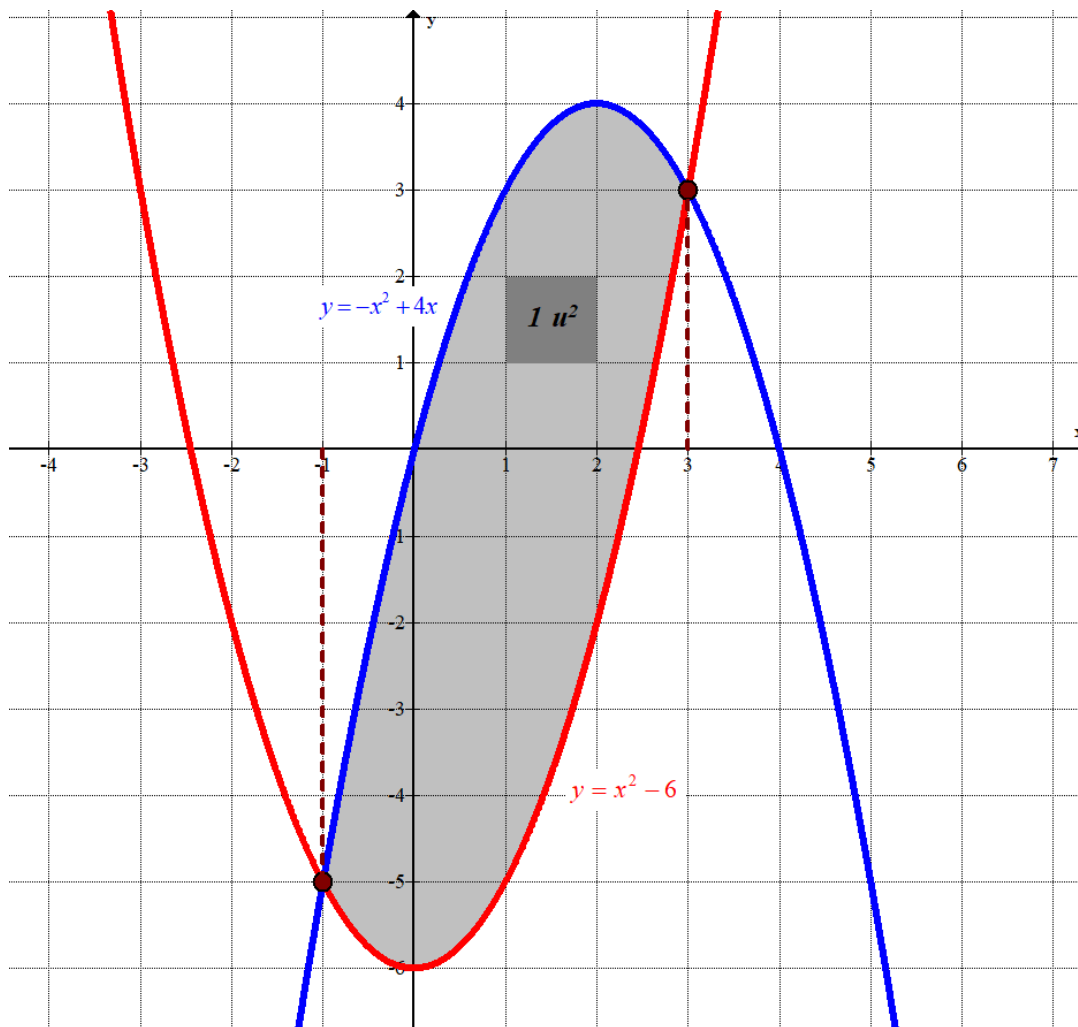
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de ambas parábolas.

| $x$ | $y = -x^2 + 4x$ |
|-----|-----------------|
| 0   | 0               |
| 1   | 3               |
| 2   | 4 vértice       |
| 3   | 3               |
| 4   | 0               |

| $x$ | $y = x^2 - 6$ |
|-----|---------------|
| -3  | 3             |
| -1  | -5            |
| 0   | -6 vértice    |
| 1   | -5            |
| 3   | 3             |



b) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área y hacemos una estimación de su valor contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada.



El valor aproximado está entre 20 y 22 unidades cuadradas. Hallamos el valor exacto del área pedida como la integral definida entre  $-1$  y  $3$  de la diferencia de las dos funciones  $-x^2 + 4x - (x^2 - 6)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{-1}^3 -x^2 + 4x - (x^2 - 6) dx = \int_{-1}^3 -2x^2 + 4x + 6 dx = \\
 &= \left[ \frac{-2x^3}{3} + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 = \left[ \frac{-2 \cdot 3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right] - \left[ \frac{-2 \cdot (-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \right] = \\
 &= -18 + 18 + 18 - \left[ \frac{2}{3} + 2 - 6 \right] = 18 - \frac{2}{3} + 4 = \boxed{\frac{64}{3} \approx 21.333 u^2}
 \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 21.33 unidades cuadradas.

**EJERCICIO 6**

Considera la función definida por  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  para  $x \neq \pm 1$ .

a) [5 puntos] Estudia y determina todas sus asíntotas.

b) [5 puntos] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a) El dominio de la función es  $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ .

**Asíntotas verticales.**  $x = a$

Como el dominio es  $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$  nos planteamos como posibles asíntotas verticales  $x = -1$  y  $x = 1$ .

¿  $x = -1$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -1$  es asíntota vertical.

¿  $x = 1$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{1^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$  es asíntota vertical.

La función tiene dos asíntotas verticales:  $x = -1$  y  $x = 1$ .

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

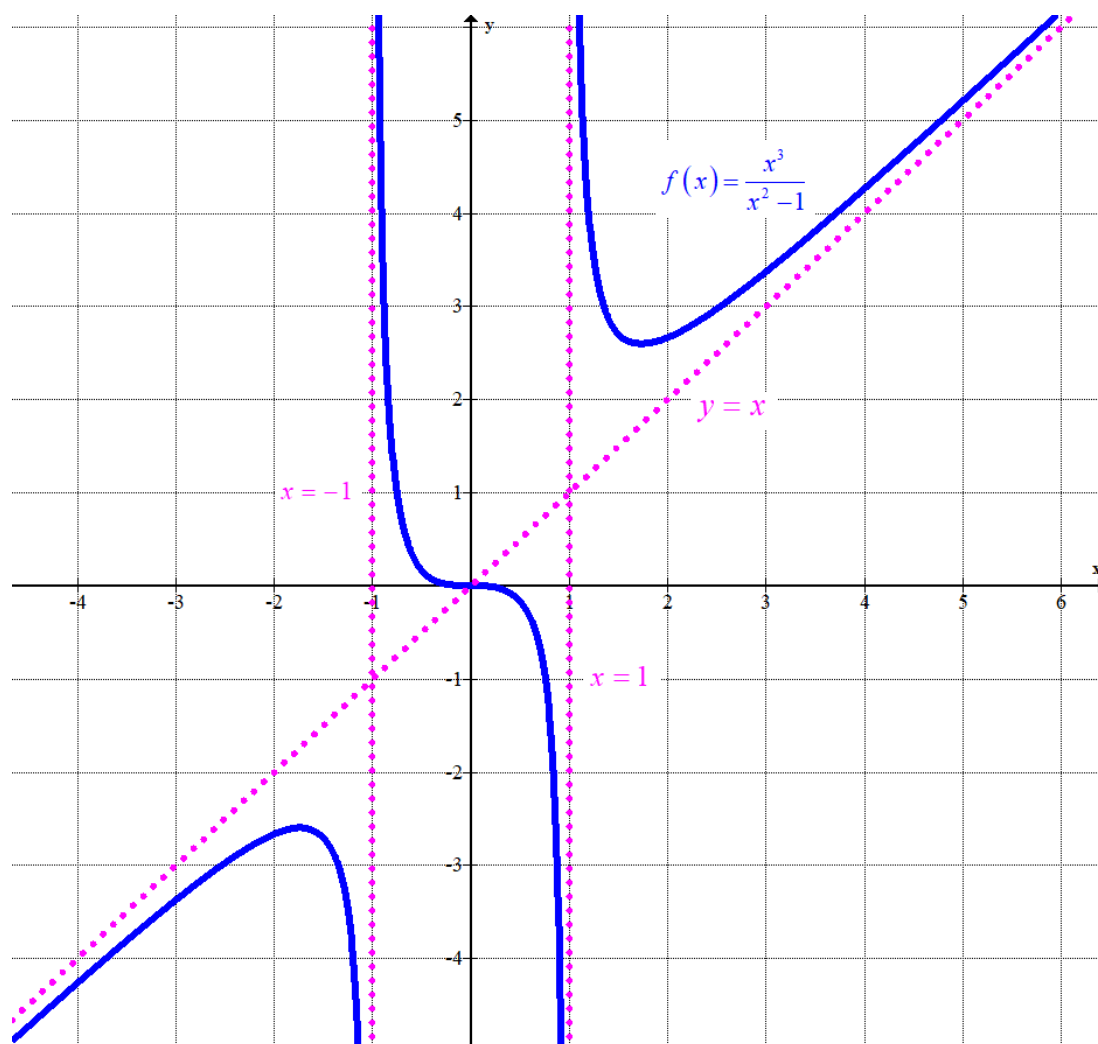
La función no tiene asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta  $y = x$  es asíntota oblicua de la función.



b) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores obtenidos, añadiendo los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo  $(-\infty, -\sqrt{3})$  tomamos  $x = -2$  y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{(-2)^4 - 3(-2)^2}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{4}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo  $(-\sqrt{3}, -1)$  tomamos  $x = -1.1$  y la derivada vale

$$f'(-1.1) = \frac{(-1.1)^4 - 3(-1.1)^2}{((-1.1)^2 - 1)^2} = -49.11 < 0. \text{ La función decrece en } (-\sqrt{3}, -1).$$

- En el intervalo  $(-1, 0)$  tomamos  $x = -0.5$  y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^4 - 3(-0.5)^2}{((-0.5)^2 - 1)^2} = -1.22 < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo  $(0, 1)$  tomamos  $x = 0.5$  y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{0.5^4 - 3 \cdot 0.5^2}{(0.5^2 - 1)^2} = -1.22 < 0. \text{ La función decrece en } (0, 1).$$

- En el intervalo  $(1, \sqrt{3})$  tomamos  $x = 1.1$  y la derivada vale

$$f'(1.1) = \frac{1.1^4 - 3 \cdot 1.1^2}{1.1^2 - 1} = -49.11 < 0. \text{ La función decrece en } (1, \sqrt{3}).$$

- En el intervalo  $(\sqrt{3}, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale  $f'(2) = \frac{2^4 - 3 \cdot 2^2}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} > 0$ . La función crece en  $(\sqrt{3}, +\infty)$ .

La función crece en  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  y decrece en  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ .