



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas.

La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.
- (b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.
- (c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

Pregunta 1. Opción B. Sean las matrices

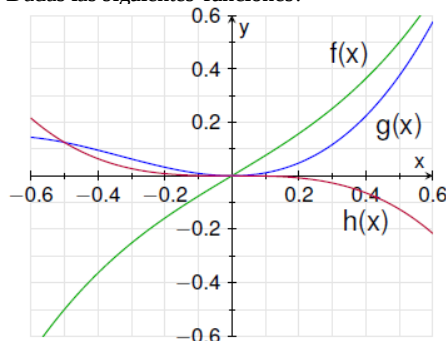
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1} .
- (b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

Pregunta 2. Opción A. Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.
- (b) **(0.75 puntos)** Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.
- (c) **(1 punto)** Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

Pregunta 2. Opción B. Dadas las siguientes funciones:



- (a) (1 punto) Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.
- (b) (1.5 punto) Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

Pregunta 3. Opción A. Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v_0 = 54 \text{ m/s}$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22 \text{ m/s}^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v_0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20,06m.

- (a) (1.25 puntos) Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.
- (b) (1.25 puntos) Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20,06m.

Comentado [U1]:

Pregunta 3. Opción B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$, se pide:

- (a) (1.5 puntos) Calcula todas las primitivas de la función $f(x)$. ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?
- (b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte.

Pregunta 4. Opción A. Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

- (a) (0.75 puntos) Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2. ¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?
- (b) (1 punto) Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.
- (c) (0.75 puntos) Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde $Q(3, 3, 3)$.

Pregunta 4. Opción B. Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

Pregunta 5. Opción A. Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Pregunta 5. Opción B. Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos de la población.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.015) = 0.5060$, $F(0.8413) = 0.7999$, $F(0.985) = 0.8377$, $F(1) = 0.8413$, $F(2.17) = 0.985$. Si los valores obtenidos no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas.

La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.
 (b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.
 (c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

- (a) Llamamos “x”, “y” y “z” al número de camiones pequeños, medianos y grandes que se utilizan.

“Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones” $\rightarrow$
 $x + y + z = 10$.

“Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas. La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas $\rightarrow$
 $x + 2y + 3z = m + 9$.

“El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades” $\rightarrow 2x + 3y + (7 - m)z = 22$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = m + 9 \\ 2x + 3y + (7 - m)z = 22 \end{array} \right\}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

- (b) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 - m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & m + 9 \\ 2 & 3 & 7 - m & 22 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones los rangos de A y de A/B deben ser iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El determinante de A debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 - m \end{vmatrix} = 14 - 2m + 6 + 3 - 4 - 7 + m - 9 = -m + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Para $m = 3$ el determinante de A es 0, por lo que su rango es menor de 3. Para este valor la

matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 22 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y A/B buscando

un sistema triangular equivalente al dado.

$$A/B = A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 12 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -10 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 22 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -20 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

Para $m = 3$ el rango de A y el de A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ y = 2 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 - 2z + z = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - z = 8 \Rightarrow x = 8 + z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Para $m = 3$ el sistema tiene infinitas soluciones que tienen la expresión $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

(c) Para $m=1$ resolvemos el sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 - y - z \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 - y - z + 2y + 3z = 10 \\ 20 - 2y - 2z + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -2z \\ y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2z + 4z = 2 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2 \cdot 1 = -2} \Rightarrow \boxed{x = 10 + 2 - 1 = 11}$$

La solución obtenida significa que son 11 los camiones pequeños, **-2** los medianos y 1 grande. No tiene sentido la solución pues no puede ser negativo el número de camiones de ningún tipo.

Pregunta 1. Opción B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1} .
 (b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

(a) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de A es distinto de cero la matriz es invertible. Hallamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B - C = 0 \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Terminamos de obtener la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+0 & 3-4 & -2-2 \\ -1-6 & 2+0 & -3+6 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &\quad 2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 4 \longrightarrow 2 \times 4 \end{aligned}$$

La matriz solución de la ecuación matricial $AX + B - C = 0$ es $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Pregunta 2. Opción A. Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

(a) (0.75 puntos) Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.

(b) (0.75 puntos) Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.

(c) (1 punto) Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

(a) Calculamos la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3 \Rightarrow h'(x) = -0.8x + 0.09x^2$$

La derivada es la pendiente del tobogán cada x metros en horizontal desde el inicio.

(b) Hallamos los puntos donde la derivada alcanza el valor -2 .

$$h'(x) = -2 \Rightarrow -0.8x + 0.09x^2 = -2 \Rightarrow 0.09x^2 - 0.8x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{0.8 \pm \sqrt{(-0.8)^2 - 4 \cdot 0.09 \cdot 2}}{2 \cdot 0.09} = \frac{0.8 \pm \sqrt{-0.08}}{0.18} = \text{No existe}$$

La pendiente del tobogán no alcanza nunca el valor -2 .

(c) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$h'(x) = 0 \Rightarrow -0.8x + 0.09x^2 = 0 \Rightarrow x(0.09x - 0.8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0.09x - 0.8 = 0 \Rightarrow 0.09x = 0.8 \Rightarrow x = \frac{0.8}{0.09} = \frac{80}{9} \approx 8.8889 \end{cases}$$

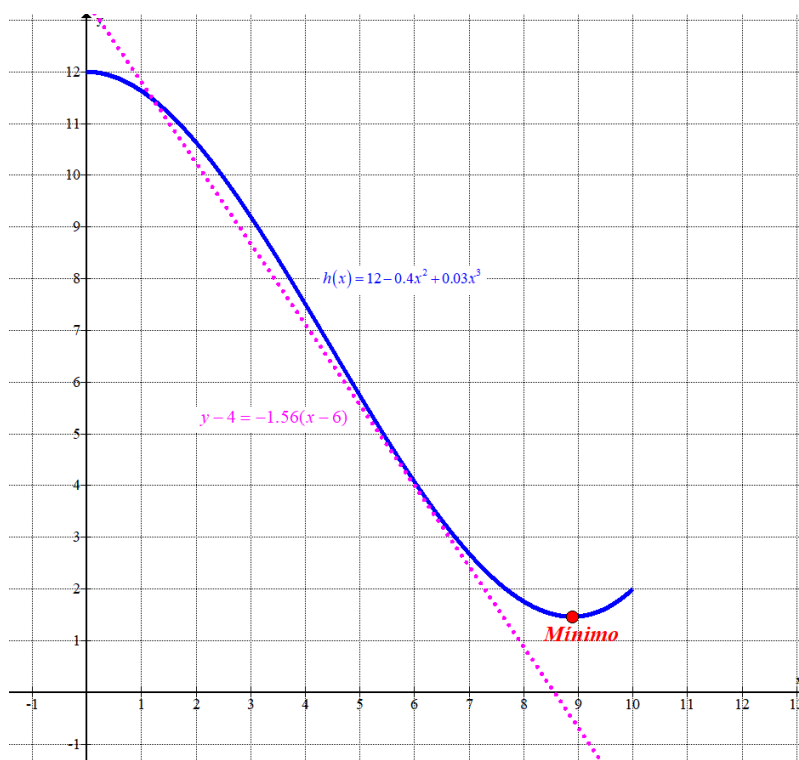
Sustituimos los valores de los dos puntos críticos obtenidos en la segunda derivada.

$$h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 \Rightarrow h''(x) = -0.8 + 0.18x \Rightarrow \begin{cases} h''(0) = -0.8 + 0.18 \cdot 0 = -0.8 < 0 \\ h''\left(\frac{80}{9}\right) = -0.8 + 0.18 \cdot \frac{80}{9} = 0.8 > 0 \end{cases}$$

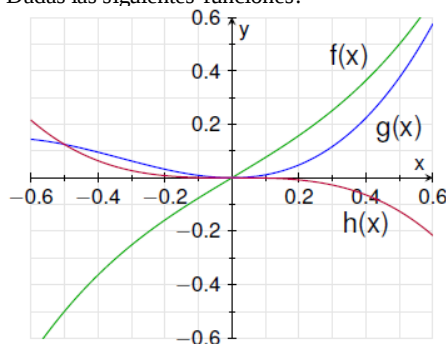
En $x = 0$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

En $x = \frac{80}{9}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{80}{9}$.

Como $h\left(\frac{80}{9}\right) = 12 - 0.4\left(\frac{80}{9}\right)^2 + 0.03\left(\frac{80}{9}\right)^3 = \frac{356}{243} \approx 1.465$, la altura mínima del tobogán es de 1.465 metros y se alcanza a $\frac{80}{9} \approx 8.8889$ metros del inicio del tobogán.



Pregunta 2. Opción B. Dadas las siguientes funciones:



(a) (1 punto) Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.

(b) (1.5 punto) Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

(a) La función $p(x)$ podemos expresarla como $p(x) = x^2 + x^3 = x^2(x+1)$.

$$\left. \begin{array}{l} x > -0.6 \rightarrow x+1 > -0.6+1 = 0.4 > 0 \\ x > -0.6 \rightarrow x^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2(x+1) \geq 0$$

La función $p(x) = x^2 + x^3$ es mayor o igual que cero para valores de x mayores que -0.6 . Esta condición solo la cumple la función $g(x)$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Obtenemos la derivada de la función.

$$p(x) = x^2 + x^3 \Rightarrow p'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$$

Averiguamos cuando la derivada se anula.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow x(2 + 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ 2 + 3x = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{3} = -0.66 \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$p'(-1) = (-1)(2-3) = 1 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ tomamos $x = -0.1$ y la derivada vale
 $p'(-0.1) = (-0.1)(2 + 3(-0.1)) = -0.17 < 0$. La función decrece en $(-0.66, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $p'(1) = 1 \cdot (2 + 3) = 5 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función p decrece en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función $h(x)$ decrece en $(0, +\infty)$. Esta no es la gráfica de la función p .

La función $f(x)$ crece en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Esta no es la gráfica de la función p .

Por eliminación la gráfica de la función p debe ser $g(x)$.

- (b) Sabemos que $f(0) = h(0) = 0$, pues ambas funciones pasan por el origen de coordenadas $(0, 0)$. También si observamos cómo evolucionan las funciones en el origen de coordenadas tenemos que en $x = 0$ la función $f(x)$ crece por lo que $f'(0) > 0$ y la función $h(x)$ en $x = 0$ tiene una recta tangente horizontal, por lo que $h'(0) = 0$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(0)}{f(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{f'(x)} = \frac{h'(0)}{f'(0)} = \frac{0}{f'(0)} = \boxed{0}$$

Pregunta 3. Opción A. Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v_0 = 54\text{m/s}$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22\text{m/s}^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v_0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20,06m.

(a) **(1.25 puntos)** Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.

(b) **(1.25 puntos)** Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20,06m.

Comentado [U2]:

(a) Calculamos la integral definida de 0 a 1 de la función velocidad.

$$\int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 54 - 22t dt = [54t - 11t^2]_0^1 = [54 \cdot 1 - 11 \cdot 1^2] - [54 \cdot 0 - 11 \cdot 0^2] = 43$$

La distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo es de 43 metros.

(b) La distancia que recorre la pelota en el primer segundo es de 43 metros, por lo que debe ser menos de 1 segundo el que tarda en recorrer los 20.06 metros.

Hallamos la expresión de la distancia recorrida por la pelota en x segundos.

$$\int_0^x v(t) dt = \int_0^x 54 - 22t dt = [54t - 11t^2]_0^x = [54x - 11x^2] - [54 \cdot 0 - 11 \cdot 0^2] = 54x - 11x^2$$

Averiguamos cuando esa distancia recorrida es de 20.06 metros.

$$54x - 11x^2 = 20.06 \Rightarrow 11x^2 - 54x + 20.06 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 20.06}}{2 \cdot 11} = \frac{135 \pm 4\sqrt{785}}{55} = \begin{cases} \frac{135 + 4\sqrt{785}}{55} \approx 4.49 \\ \frac{135 - 4\sqrt{785}}{55} \approx 0.42 \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos el valor correcto es 0.42 segundos, pues debe ser menos de 1 segundo.

Pregunta 3. Opción B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$, se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula todas las primitivas de la función $f(x)$. ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?
 (b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-3}{2x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{2x+1} dx - \int \frac{3}{2x+1} dx \right] = \frac{1}{2} \left[\int dx - \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{3}{2} \ln|2x+1| \right] = \boxed{\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1| + K} \end{aligned}$$

Una primitiva que pase por (0, 0) debe cumplir que $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1| + K \\ F(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{0}{2} - \frac{3}{4} \ln|2 \cdot 0 + 1| + K \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4} \ln 1 + K \Rightarrow \boxed{K=0}$$

La primitiva que pasa por el origen de coordenadas es $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1|$.

(b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$.

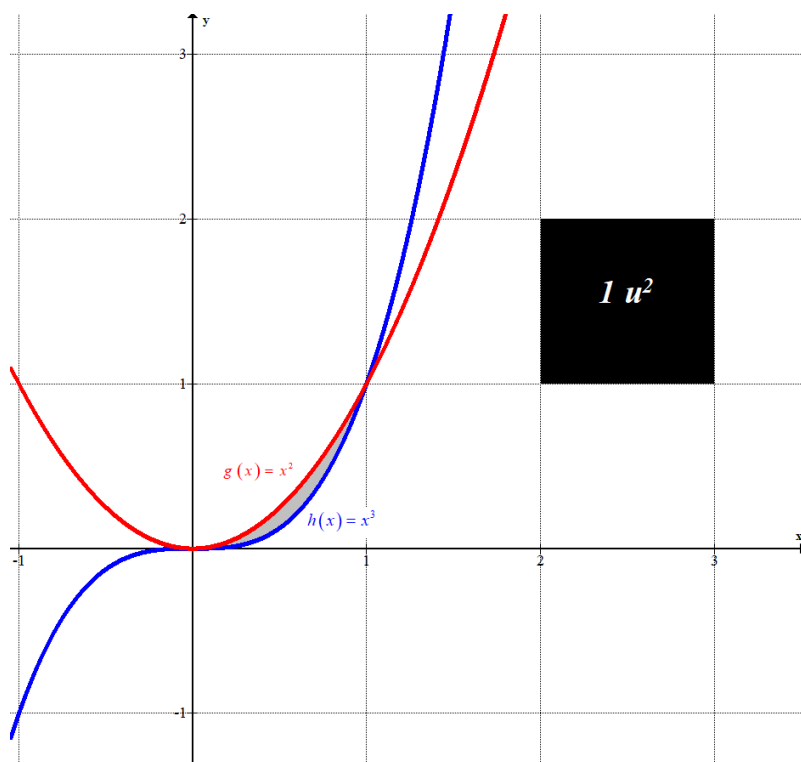
$$\left. \begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ h(x) &= x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \end{cases}$$

El área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte es el valor absoluto de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

Como $g(0.5) = 0.5^2 = 0.25$ y $h(0.5) = 0.5^3 = 0.125$ tomamos la diferencia $g(x) - h(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 g(x) - h(x) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12} \approx 0.0833 \text{ unidades}} \end{aligned}$$

El área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte vale $\frac{1}{12} \approx 0.0833$ unidades de longitud.



Pregunta 4. Opción A. Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2.
¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?
- (b) **(1 punto)** Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.
- (c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde $Q(3, 3, 3)$.

- (a) El plano π' paralelo al plano π tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

Hallamos la expresión de la distancia del origen al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, \pi') = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{3}$$

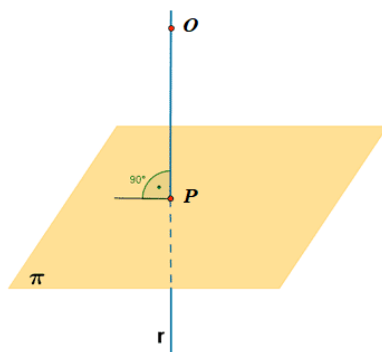
Averiguamos el valor de D para que esta distancia valga 2.

$$d(O, \pi') = 2 \Rightarrow \frac{|D|}{3} = 2 \Rightarrow |D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D = 6 \\ D = -6 \end{cases}$$

Existen dos planos paralelos a π cuya distancia al origen es 2: $\pi' \equiv 2x + 2y + z + 6 = 0$ y

$\pi'' \equiv 2x + 2y + z - 6 = 0$.

- (b) El punto P del plano π que está más próximo al origen O es la proyección ortogonal del punto O en el plano.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que pasa por el origen. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 2y + z = 5 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, 1) \\ O(0, 0, 0) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{n} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 5 \Rightarrow 9\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

El punto P del plano π que está más próximo al origen O tiene coordenadas $P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

- (c) El área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

$$\begin{matrix} O(0,0,0) \\ P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) \\ Q(3,3,3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) - (0,0,0) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) \\ \overrightarrow{OQ} = (3,3,3) - (0,0,0) = (3,3,3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10/9 & 10/9 & 5/9 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\right)i - \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\right)j + \left(\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\right)k = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$$

$$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2.36 \text{ u}^2$$

El área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ tiene un valor de $\frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2.36$ unidades cuadradas.

Pregunta 4. Opción B. Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.
 (b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

(a) Hallamos la ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \in \pi \\ B(3, 0, 2) \in \pi \\ C(2, 3, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 0, 2) - (1, 2, 1) = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 3) - (1, 2, 1) = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) + (y-2) + 2(z-1) + 2(z-1) - 4(y-2) - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(x-1) - 3(y-2) + 4(z-1) = 0 \Rightarrow -5x + 5 - 3y + 6 + 4z - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 3y + 4z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 5x + 3y - 4z - 7 = 0}$$

El plano que pasa por los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi : 5x + 3y - 4z - 7 = 0$.

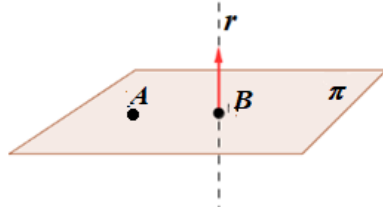
(b) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta e intentamos resolverlo.

$$\begin{aligned} r : (x, y, z) &= (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \\ \pi : 5x + 3y - 4z - 7 &= 0 \\ r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} &\Rightarrow 5t + 3 + 3t - 16 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow 12t - 20 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)} \end{aligned}$$

Plano y recta se cortan en el punto $A\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

(c) Hallamos la distancia del punto A a la recta r .

Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que contiene el punto A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r: (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1) \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$$

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \left\{ \begin{array}{l} \pi: x + y - z + D = 0 \\ A(1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi: x + y - z + D = 0 \\ 1 + 2 - 1 + D = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 1 + 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 2 = 0}$$

Hallamos el punto B de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y - z - 2 = 0 \\ r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow t + 1 + t - 4 + t - 2 = 0 \Rightarrow 3t - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \\ B\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (1, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$d(A, r) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63u$$

La distancia del punto A a la recta r tiene un valor de $\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63$ unidades de longitud.

Pregunta 5. Opción A. Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Llamamos R a “la jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando” y V a “vence el partido”.

“Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones”

$$\rightarrow P(R) = 0.75, P(\bar{R}) = 0.25$$

“Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos” $\rightarrow P(V/R) = 0.80$.

“Cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias” $\rightarrow$

$$P(V/\bar{R}) = 0.65.$$

(a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(R)P(V/R) + P(\bar{R})P(V/\bar{R}) = 0.75 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.65 = \boxed{0.7625}$$

La probabilidad de que la jugadora gane un partido es de 0.7625.

(b) Debemos calcular $P(\bar{R}/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/V) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{P(R)P(V/R)}{P(V)} = \frac{0.75 \cdot 0.8}{0.7625} = \boxed{\frac{48}{61} \approx 0.7869}$$

La probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado es de $\frac{48}{61} \approx 0.7869$.

Pregunta 5. Opción B. Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos de la población.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.015) = 0.5060$, $F(0.8413) = 0.7999$, $F(0.985) = 0.8377$, **$F(1) = 0.8413$** , **$F(2.17) = 0.985$** . Si los valores obtenidos no están entre los expuestos, toma el más cercano.

Consideramos $X =$ “Los niveles de ácido úrico en sangre, en mg/dl, de una población de hombres adultos”. $X = N(5.5, 0.9)$

(a) Nos piden calcular $P(4.3 \leq X \leq 6.1)$.

$$P(4.3 \leq X \leq 6.1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.5}{0.9} \end{array} \right\} = P\left(\frac{4.3 - 5.5}{0.9} \leq Z \leq \frac{6.1 - 5.5}{0.9}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq 0.66) =$$

$$= P(Z \leq 0.66) - P(Z \leq -1.33) = P(Z \leq 0.66) - P(Z \geq 1.33) =$$

$$= P(Z \leq 0.66) - [1 - P(Z \leq 1.33)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Estos valores no estan entre} \\ \text{los datos proporcionados.} \\ \text{En la solución oficial han cambiado} \\ \text{la media por 5.2. Supongo que hubo} \\ \text{un error en la redacción del examen} \end{array} \right\} = \text{Cambiamos la media por 5.2 mg/dl}$$

Volvemos a resolver este apartado considerando $X = N(5.2, 0.9)$

$$P(4.3 \leq X \leq 6.1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.2}{0.9} \end{array} \right\} = P\left(\frac{4.3 - 5.2}{0.9} \leq Z \leq \frac{6.1 - 5.2}{0.9}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \{F(1) = 0.8413\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826}$$

(b) Debemos hallar “n” tal que $P(X > n) = 0.015$.

$$P(X > n) = 0.015 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.2}{0.9} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{n - 5.2}{0.9}\right) = 0.015 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{n-5.2}{0.9}\right) = 1 - 0.015 = 0.985 \Rightarrow \{F(2.17) = 0.985\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n-5.2}{0.9} = 2.17 \Rightarrow n-5.2 = 1.953 \Rightarrow \boxed{n = 7.153}$$

El nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos es de 7.513 mg/dl.