

COMISIÓN
INTERUNIVERSITARIA
DE GALICIAPAU
Convocatoria extraordinaria 2026
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$).

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes

cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A . ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9 \\ x + (m-2)y + 3z = 2 \\ 2y + (2m+2)z = m-5 \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).**Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.**

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f , f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos).**Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

4.1. Considere la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi' : x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π' .

4.2. Considérense el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi : x + 2y + z - 8 = 0$.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$).

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

1.1. Consideramos la variable aleatoria X = “el tiempo, en minutos, que una persona va a pasar en la feria”. Nos dicen que $X = N(50, 19.5)$.

Debemos calcular $P(45 \leq X \leq 70)$.

$$\begin{aligned}
 P(45 \leq X \leq 70) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{19.5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{45 - 50}{19.5} \leq Z \leq \frac{70 - 50}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03) = \\
 &= P(Z \leq 1.03) - P(Z \leq -0.26) = P(Z \leq 1.03) - P(Z \geq 0.26) = \\
 &= P(Z \leq 1.03) - [1 - P(Z \leq 0.26)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 1.03) = 0.8485 \\ P(Z \leq 0.26) = 0.6026 \end{array} \right\} = 0.8485 - 1 + 0.6026 = \boxed{0.4511}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria es de 0.4511.

1.2. Nos piden calcular la probabilidad de que esté menos de 60 minutos si sabemos que ha estado en la feria más de 45 minutos: $P(X \leq 60 / X \geq 45)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 60 / X \geq 45) &= \frac{P((X \leq 60) \cap (X \geq 45))}{P(X \geq 45)} = \frac{P(45 \leq X \leq 60)}{P(X \geq 45)} = \\
 &= \frac{P(X \leq 60) - P(X \leq 45)}{P(X \geq 45)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{19.5} \end{array} \right\} = \frac{P\left(Z \leq \frac{60 - 50}{19.5}\right) - P\left(Z \leq \frac{45 - 50}{19.5}\right)}{P\left(Z \geq \frac{45 - 50}{19.5}\right)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(Z \leq 0.51) - P(Z \leq -0.26)}{P(Z \geq -0.26)} = \frac{P(Z \leq 0.51) - [1 - P(Z \leq 0.26)]}{P(Z \leq 0.26)} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.51) = 0.695 \\ P(Z \leq 0.26) = 0.6026 \end{array} \right\} = \frac{0.695 - 1 + 0.6026}{0.6026} \approx \boxed{0.4939} \end{aligned}$$

Si una persona entró a la feria a las 17:00, la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria tiene un valor aproximado de 0.4939.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes

cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.1.1. Obtenemos las matrices X e Y.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+4 & 0+0 \\ 1+0 & 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si los determinantes son distintos de cero, en cuyo caso las matrices serán invertibles.

$$|X| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Fila } 1^a = \text{Fila } 3^a\} = 0$$

La matriz X tiene inversa y es $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. La matriz Y no es invertible.

2.1.2. Resolvemos la igualdad planteada.

$$BM = M \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=a \\ a+c=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices M que cumplen lo pedido son $M = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, para cualquier valor real b .

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9 \\ x + (m-2)y + 3z = 2 \\ 2y + (2m+2)z = m-5 \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2m-4 \quad 6 \quad 4 \\ -2 \quad -2m+2 \quad -m-6 \quad -9 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -m \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 0 & -2 & -m & -5 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 2m+2 \quad m-5 \\ 0 \quad -2 \quad -m \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m+2 \quad m-10 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 2m-2 \quad m+6}^{A/B} & 9 \\ 0 & -2 & -m & -5 \\ 0 & 0 & \underbrace{m+2}_A & m-10 \end{pmatrix}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -2$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $\begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad -6 \quad 4}^{A/B} & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & \underbrace{0}_A & -12 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz ampliada es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado y si $m = -2$ el sistema es incompatible.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$

Si p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ se cumple que la gráfica de la función pasa por ese punto y $p(1) = -6$, también se cumple que la derivada se anula en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p(1) = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{-6 = a + b + c + d}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b + c}$$

También sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$, por lo que $p'(-1) = 4$ y además recta y función coinciden en $x = -1 \rightarrow p(-1) = 4(-1) + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p(-1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d \Rightarrow \boxed{-2 = -a + b - c + d}$$

$$\left. \begin{array}{l} p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p'(-1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c \Rightarrow \boxed{4 = 3a - 2b + c}$$

Reunimos las cuatro ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = -6 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = -6 \\ c = -3a - 2b \\ -a + b - c + d = -2 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b - 3a - 2b + d = -6 \\ -a + b + 3a + 2b + d = -2 \\ 3a - 2b - 3a - 2b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a - b + d = -6 \\ \Rightarrow 2a + 3b + d = -2 \\ -4b = 4 \rightarrow \boxed{b = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + 1 + d = -6 \\ 2a - 3 + d = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + d = -7 \\ 2a + d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + d = -7 \\ d = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a + 1 - 2a = -7 \Rightarrow -4a = -8 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{d = 1 - 2 \cdot 2 = -3} \\ \boxed{c = -3 \cdot 2 - 2(-1) = -4} \end{array} \right.$$

Los coeficientes son $a = 2$, $b = -1$, $c = -4$ y $d = -3$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

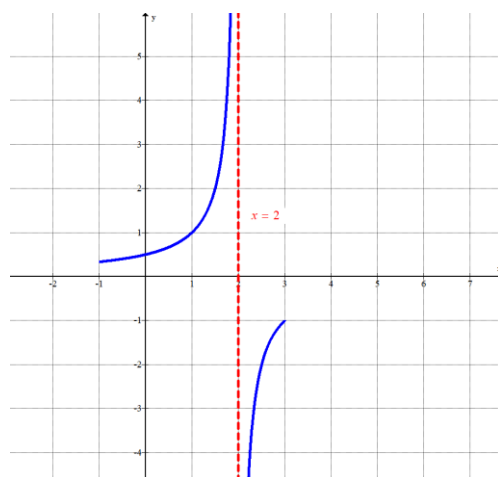
• f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$.

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

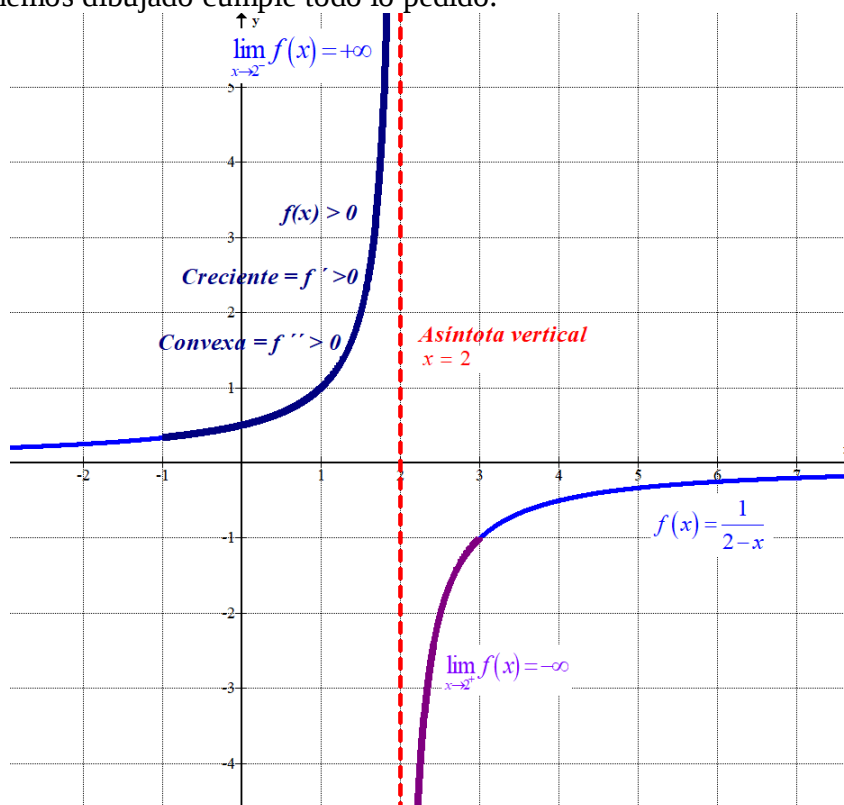
Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$. Si consideramos que la función, su derivada y su derivada segunda son positivas en el intervalo $(-1, 2)$ tendremos que en ese intervalo la gráfica de la función está situada por encima del eje de abscisas, que la función es creciente y que la gráfica es convexa (U). Por eso debe ser $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

Como debe ser $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ tenemos que en la asíntota vertical $x = 2$ la gráfica de la función se comporta como se indica en el dibujo.



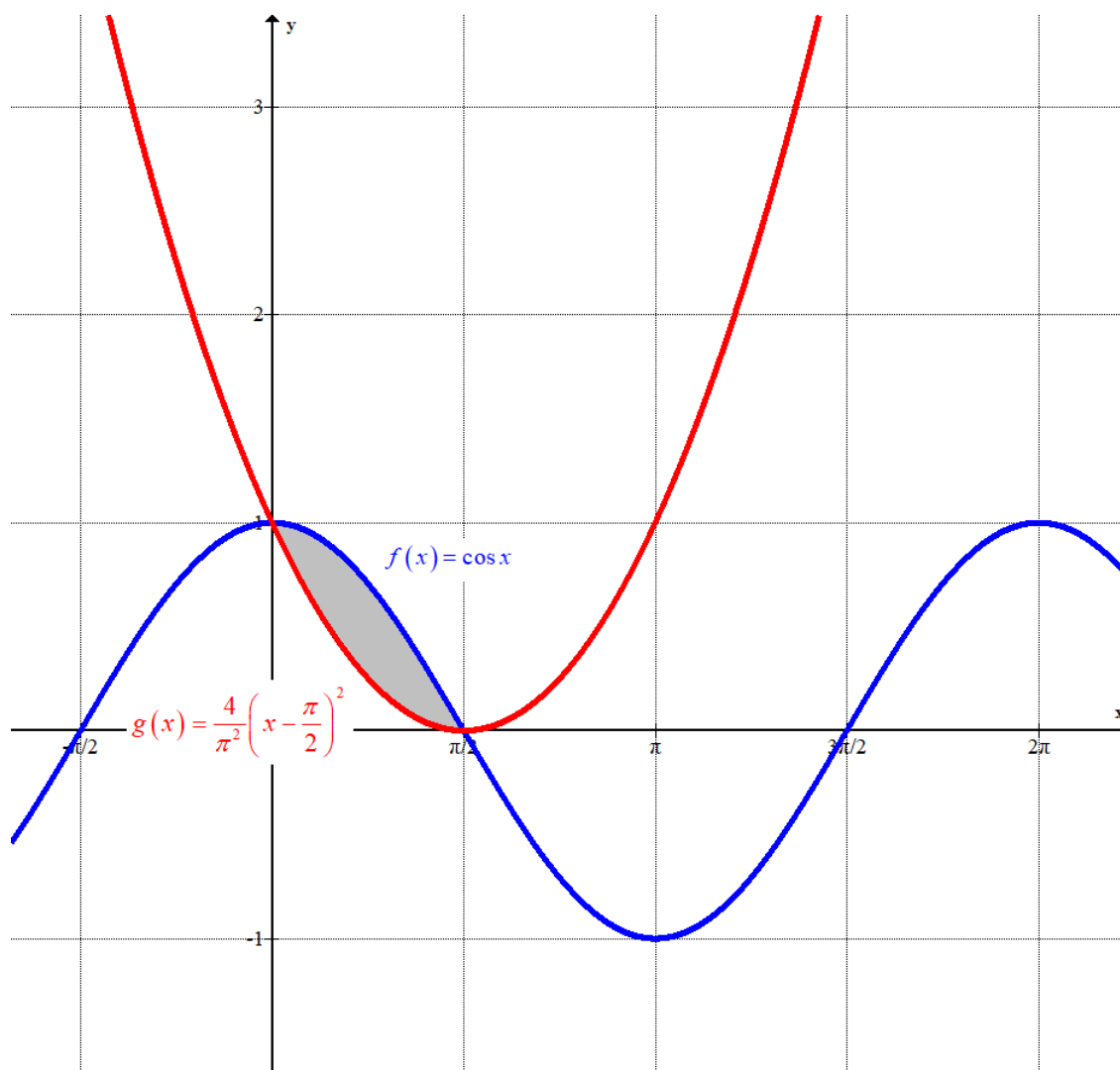
La gráfica que hemos dibujado cumple todo lo pedido.



3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

Determinamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos x \\ g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 \\ \cos 0 = 1 \end{cases} \end{cases}$$



Calculamos el área de la región encerrada por las gráficas de las dos funciones como el valor de la integral definida de 0 a $\frac{\pi}{2}$ de la diferencia $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} f(x) - g(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x - \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 dx = \left[\operatorname{sen} x - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \left[\operatorname{sen} x - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right]_0^{\pi/2} = \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right] - \left[\operatorname{sen} 0 - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right] = \\
 &= 1 - 0 - 0 + \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = 1 - \frac{4\pi^3}{24\pi^2} = 1 - \frac{\pi}{6} \simeq 0.476
 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $1 - \frac{\pi}{6} \simeq 0.476$ unidades cuadradas.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π' .

4.1.1. El plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$ tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$ y el vector que une el punto Q con un punto cualquiera de la recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ Q(2, -1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6(x-2) + 2(y+1) + z-1 + 4(z-1) - 3(y+1) - (x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-2) - (y+1) + 5(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x + 14 - y - 1 + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -7x - y + 5z + 8 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: -7x - y + 5z + 8 = 0$.

4.1.2. El plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$. El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$. Comprobamos si estos vectores son perpendiculares viendo si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

El vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano. La recta es paralela al plano o bien la recta está contenida en el plano. Comprobamos que el punto $P_r(1, 1, 0)$ de la recta no pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(1, 1, 0) \in \pi'? \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 1 - 0 - 1 = 0? \Rightarrow \text{¿} 1 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

La recta no está contenida en el plano. La recta r es paralela al plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$.

Al ser la recta paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

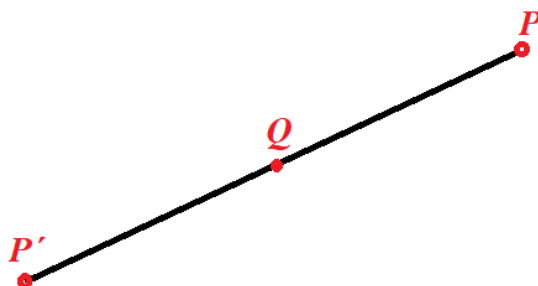
$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,1,0) \in r \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|1+1-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}$$

4.2. Considérense el punto $P(3,0,-1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2,-1,2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi : x + 2y + z - 8 = 0$.

4.2.1. El punto P' es tal que Q es el punto medio del segmento PP' . También podemos hallar el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

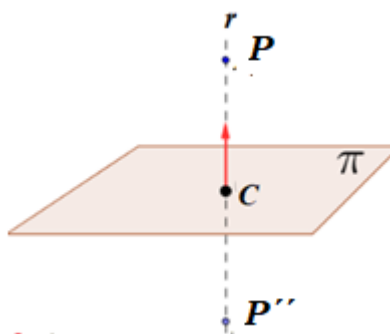


$$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2) - (3, 0, -1) = (-1, -1, 3)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2) + (-1, -1, 3) = (1, -2, 5)$$

El punto P' tiene coordenadas $P'(1, -2, 5)$.

4.2.2. Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P'' simétrico de P respecto del plano π .



Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi : x + 2y + z - 8 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3, 0, -1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + z - 8 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \lambda + 4\lambda - 1 + \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 1 = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4, 2, 0)$$

Las coordenadas del punto simétrico P'' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C(4, 2, 0) \\ P(3, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = (4, 2, 0) - (3, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

$$P'' = C + \overrightarrow{PC} = (4, 2, 0) + (1, 2, 1) = (5, 4, 1)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P''(5, 4, 1)$.