



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko EZOHIOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2 puntos cada uno.

En los ejercicios CUARTO y QUINTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas del examen.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color. Solo se pueden utilizar bolígrafos o rotuladores para hacer gráficos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.

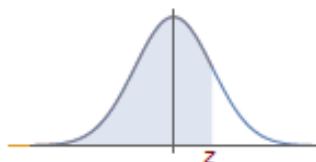


UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko EZOHIOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak
Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.

- (a) (1 punto) Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.
(b) (1 punto) ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

- (a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea la recta $y = 3 - 3x$ y f tenga un extremo relativo en $x = 1$.
(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de f en el punto $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.

- (a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.
(b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + s, \\ z = 0. \end{cases}$$

Calcula el punto P' simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x + y - z = 3$.

(4B) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, 7, 4)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (6, 3, -5)$ y sea $\pi \equiv 2x + y - 3z = -13$.

- (a) (1 punto) Calcula el punto de corte de la recta r y el plano π .
(b) (1 punto) Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.**(5A)** Calcula la integral

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} dx$$

explicando los pasos realizados.

(5B)

- (a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.
- (b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π .

SOLUCIONES

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.

- (a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.
 (b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

- (a) Llamamos a , b y c al número de recipientes de leche que aporta cada uno de los productores A, B y C, respectivamente.

“Se han recogido un total de 612 litros de leche” $\rightarrow 10a + 15b + 12c = 612$.

“Se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes” $\rightarrow a + b + c = 48$.

“Se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos” $\rightarrow 5a + 9b + 4c = 304$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 10a + 15b + 12c = 612 \\ a + b + c = 48 \\ 5a + 9b + 4c = 304 \end{array} \right\}$$

- (b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 10a + 15b + 12c = 612 \\ a + b + c = 48 \\ 5a + 9b + 4c = 304 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10a + 15b + 12c = 612 \\ a = 48 - b - c \\ 5a + 9b + 4c = 304 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10(48 - b - c) + 15b + 12c = 612 \\ 5(48 - b - c) + 9b + 4c = 304 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 480 - 10b - 10c + 15b + 12c = 612 \\ 240 - 5b - 5c + 9b + 4c = 304 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5b + 2c = 132 \\ 4b - c = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5b + 2c = 132 \\ 4b - 64 = c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5b + 2(4b - 64) = 132 \Rightarrow 5b + 8b - 128 = 132 \Rightarrow 13b = 260 \Rightarrow \boxed{b = \frac{260}{13} = 20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 4 \cdot 20 - 64 = 16} \Rightarrow \boxed{a = 48 - 20 - 16 = 12}$$

El productor A aportó 12 recipientes que a 5 € cada uno le supuso unos ingresos de $12 \cdot 5 = 60$ €.

El productor B aportó 20 recipientes que a 9 € cada uno le supuso unos ingresos de $20 \cdot 9 = 180$ €.

El productor C aportó 16 recipientes que a 4 € cada uno le supuso unos ingresos de $16 \cdot 4 = 64$ €.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

(a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea la recta $y = 3 - 3x$ y f tenga un extremo relativo en $x = 1$.

(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de f en el punto $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

(a) La tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ coincide con la función en dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ y = 3 - 3x \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - 3 \cdot 0 = 0^3 + A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 3}$$

La función queda $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + 3$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es el valor de la derivada de la función en dicho valor que debe coincidir con la pendiente de la recta $y = 3 - 3x$ que vale $m = -3$.

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

$$f'(0) = -3 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2A \cdot 0 + B = -3 \Rightarrow \boxed{B = -3}$$

La función queda $f(x) = x^3 + Ax^2 - 3x + 3$.

Si la función tiene un extremo relativo en $x = 1$ significa que la derivada se anula para este valor.

$$f(x) = x^3 + Ax^2 - 3x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax - 3$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

Los valores buscados son $A = 0$, $B = -3$ y $C = 3$.

(b) La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x + 3$. Hallamos su derivada segunda y obtenemos su signo para $x = 1$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

En $x = 1$ se anula la primera derivada de la función y la segunda toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.

- (a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.
- (b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

- (a) El 10% de 1.148.650 son 114865 coches totalmente eléctricos, todos ellos de cambio automático.

El 52% de 1.148.650 son 597298 coches híbridos. De estos el 6 % con cambio manual, lo cual implica $0.06 \cdot 597298 = 35837.88$ coches híbridos con cambio manual. Hay $597298 - 35837.88 = 561460.12$ coches híbridos con cambio automático.

El resto de coches ($100 - 10 - 52 = 38\%$) son $1148650 \cdot 0.38 = 436487$ coches. De estos tienen cambio automático $0.53 \cdot 436487 = 231338.11$ coches que no son ni híbridos ni eléctricos con cambio automático.

El total de coches con cambio automático son:

$$114865 + 561460.12 + 231338.11 = 907663.23$$

Sale una cifra decimal que no es coherente salvo que aceptemos que los porcentajes son aproximados y el resultado obtenido se debe redondear para decir que el total de coches con cambio automático vendidos en España en el año 2025 son 907663.

- (b) En el apartado anterior hemos obtenido que 907663.23 coches vendidos tienen cambio automático y de ellos 561460.12 son híbridos, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que sea híbrido el coche con cambio automático vendido vale

$$\frac{561460.12}{907663.23} = \frac{2444}{3951} \approx 0.6186.$$

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1+s, \\ z = 0. \end{cases}$$

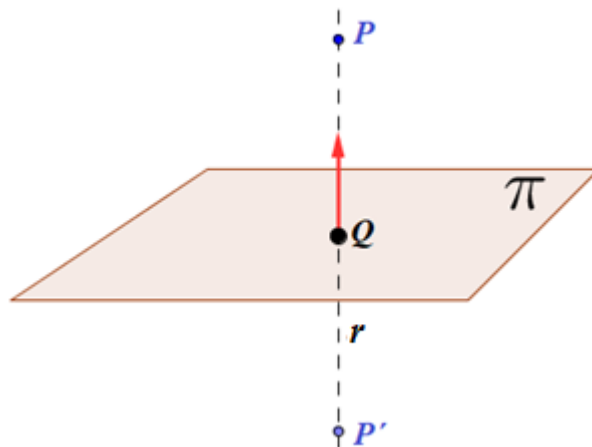
Calcula el punto P' simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x + y - z = 3$.

(a) Hallamos el punto P de corte de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1+s, \\ z = 0. \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} s = 1+t \\ -1+s = 0 \\ 0 = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1+t \\ s = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 = 1+0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,0,0)}$$

El punto de corte de las rectas es $P(1,0,0)$.

Hallamos el punto simétrico P' del punto P respecto del plano determinando primero la recta r perpendicular al plano que pasa por P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi : 2x + y - z = 3 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,0) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : 2x + y - z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda) + \lambda - (-\lambda) = 3 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + \lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico del punto $P(1, 0, 0)$ respecto al plano tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

- (4B)** Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,7,4)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (6,3,-5)$ y sea $\pi \equiv 2x + y - 3z = -13$.
- (a) (1 punto)** Calcula el punto de corte de la recta r y el plano π .
- (b) (1 punto)** Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

(a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P(1,7,4) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{v} = (6,3,-5) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 6\alpha \\ y = 7 + 3\alpha \\ z = 4 - 5\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 6\alpha \\ y = 7 + 3\alpha \\ z = 4 - 5\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + y - 3z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 6\alpha) + 7 + 3\alpha - 3(4 - 5\alpha) = -13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 12\alpha + 7 + 3\alpha - 12 + 15\alpha = -13 \Rightarrow 30\alpha = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-10}{30} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 6\frac{-1}{3} = -1 \\ y = 7 + 3\frac{-1}{3} = 6 \\ z = 4 - 5\frac{-1}{3} = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(-1.6, \frac{17}{3}\right)$$

El punto de corte de la recta r y el plano π tiene coordenadas $Q\left(-1.6, \frac{17}{3}\right)$.

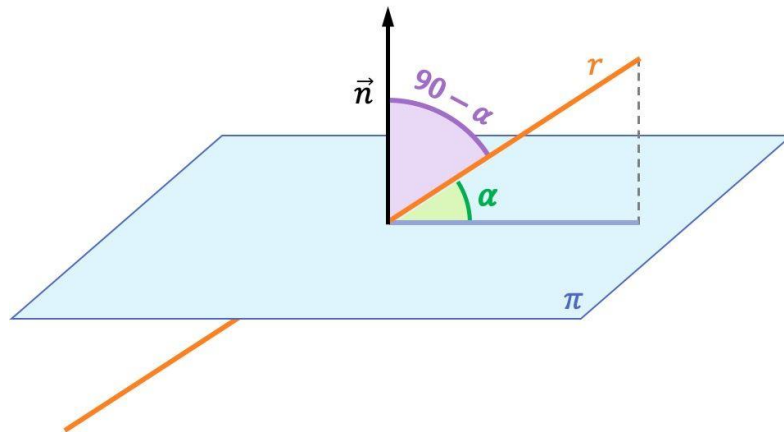
(b) Suponemos que recta y plano se cortan. De todas formas, al calcular el ángulo lo determinaremos. Hallamos el ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (6,3,-5) \\ \pi \equiv 2x + y - 3z = -13 \rightarrow \vec{n} = (2,1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{(6,3,-5) \cdot (2,1,-3)}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-5)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{12 + 3 + 15}{\sqrt{70} \sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right) \approx 16.6^\circ$$

El ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal del plano es de 16.6° .
El ángulo formado por recta y plano es de $90^\circ - 16.6^\circ = 73.4^\circ$.



(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} dx$$

explicando los pasos realizados.

Para que la expresión racional de la integral sea más sencilla podemos hacer la división de polinomios o ajustar los valores. Hacemos un sencillo ajuste y luego aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{x^2 - x - 2 - x + 5}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} dx + \int \frac{-x + 5}{x^2 - x - 2} dx = ..$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\frac{-x + 5}{x^2 - x - 2} = \frac{-x + 5}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

$$-x + 5 = A(x + 1) + B(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow 6 = -3B \rightarrow B = -2 \\ x = 2 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{-x + 5}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 1}$$

$$... = \int dx + \int \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 1} dx = x + \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{2}{x + 1} dx = x + \ln|x - 2| - 2\ln|x + 1| =$$

$$= x + \ln|x - 2| - \ln(x + 1)^2 = \boxed{x + \ln \frac{|x - 2|}{(x + 1)^2} + K}$$

(5B)

- (a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.
- (b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π .

(a) Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - \pi^2 \\ f(x) = \cos(x/2) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - \pi^2 = \cos(x/2) \Rightarrow (x - \pi)(x + \pi) = \cos(x/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\pi \rightarrow \begin{cases} y = (-\pi)^2 - \pi^2 = 0 \\ f(-\pi) = \cos(-\pi/2) = 0 \end{cases} \\ x = \pi \rightarrow \begin{cases} y = \pi^2 - \pi^2 = 0 \\ f(\pi) = \cos(\pi/2) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x = -\pi \\ x = \pi \end{cases}$$

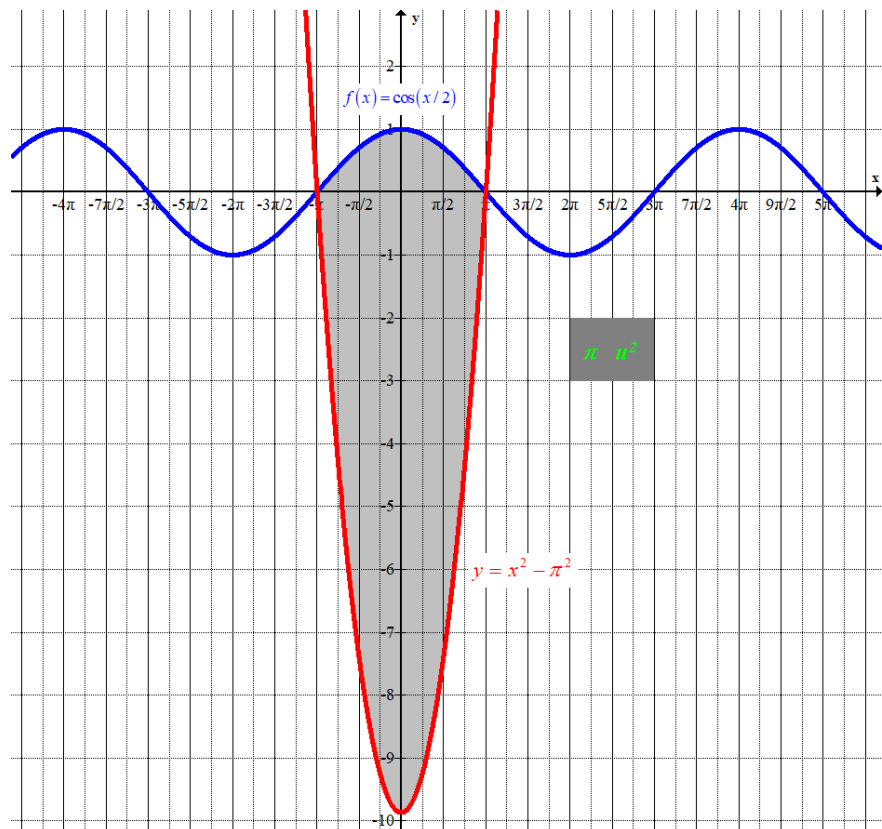
Hacemos una tabla de valores y dibujamos las dos gráficas y el recinto limitado por ellas.

$$y = x^2 - \pi^2$$

x	y
$-\pi$	0
0	$-\pi^2$
π	0

$$f(x) = \cos(x/2)$$

x	y
$-\pi$	0
0	1
π	0



- (b) El área del recinto es el valor de la integral definida de $-\pi$ a π de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) - (x^2 - \pi^2) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) - x^2 + \pi^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2\operatorname{sen}\left(x/2\right) - \frac{x^3}{3} + \pi^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \left[2\operatorname{sen}\left(\pi/2\right) - \frac{\pi^3}{3} + \pi^2 \pi \right] - \left[2\operatorname{sen}\left(-\pi/2\right) - \frac{(-\pi)^3}{3} + \pi^2 (-\pi) \right] = \\
&= 2 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 + 2 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 = \boxed{4 + \frac{4\pi^3}{3} \simeq 45.34 \, u^2}
\end{aligned}$$