



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRAORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA 2026 (extra)
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres y el 56% mujeres. Un 20% de los hombres abandonan los estudios antes de acabar y un 15% en el caso de las mujeres. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de estudiantes que finaliza sus estudios.

1.2 (0.75 puntos) Si se elige un estudiante que ha abandonado los estudios, calcular la probabilidad de que sea mujer.

1.3 (1 punto) Si se eligen a 7 alumnos masculinos, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellos finalicen sus estudios.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Se consideran la matriz A , dependiente del parámetro real a , y el vector w , siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, w = (1 \ 0 \ -1)^T$$

donde T indica traspuesta. Se pide:

2.1.1 (1 punto) Calcular el rango de A en función del parámetro a .

2.1.2 (0.75 puntos) Discutir el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$

2.1.3 (0.75 puntos) Calcular el valor de z en función de a cuando el sistema es compatible determinado.

2.2 Las matrices cuadradas que verifican que su inversa es igual a su traspuesta se llaman matrices ortogonales. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal y

calcular A^{38} y $(AA^T)^{39}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

2.2.2 (0.5 puntos) ¿Puede ser el determinante de una matriz ortogonal igual a cero?

Justificar la respuesta.

2.2.3 (0.5 puntos) Si A y B son dos matrices ortogonales de igual dimensión, analizar si $A \cdot B$ es también una matriz ortogonal.

2.2.4 (0.75 puntos) Encontrar la matriz X que verifique $A^2 X - 2B = 0$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados los puntos $A(1, -2, 1)$ y $B(3, 4, 3)$, y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-1$, se pide:

3.1.1 (1 punto) La ecuación del plano π_1 respecto al cual A y B son puntos simétricos.

3.1.2 (0.5 puntos) Comprobar que la recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 (1 punto) La ecuación del plano π_2 que contiene al punto A y tal que su intersección con π_1 es la recta r .

3.2 Dados el plano $\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(1, -2, 0)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto P al plano π .

3.2.2 (1 punto) Escribir una ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto P .

3.2.3 (1 punto) Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano π con los tres ejes coordenados.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Representar gráficamente la función $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función.

4.2 Se considera un triángulo rectángulo T cuyos catetos se cortan en el origen de coordenadas del plano; el cateto horizontal mide 4 unidades y el vertical 3. Consideramos un rectángulo R inscrito en el triángulo T de modo que dos lados del rectángulo R están situados sobre los catetos de T y uno de sus vértices está en la hipotenusa de T . Denotamos por x la longitud del lado de R que está sobre el cateto mayor y por y la longitud del lado de R que está sobre el cateto menor. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Calcular la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo T .

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular los valores de x e y que hacen que el área de R sea máxima y calcular dicha área.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres y el 56% mujeres. Un 20% de los hombres abandonan los estudios antes de acabar y un 15% en el caso de las mujeres. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de estudiantes que finaliza sus estudios.

1.2 (0.75 puntos) Si se elige un estudiante que ha abandonado los estudios, calcular la probabilidad de que sea mujer.

1.3 (1 punto) Si se eligen a 7 alumnos masculinos, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellos finalicen sus estudios.

Supongamos que son 1000 estudiantes. El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres $\rightarrow 0.44 \cdot 1000 = 440$ estudiantes son hombres y el 56% mujeres $\rightarrow 0.56 \cdot 1000 = 560$ estudiantes son mujeres. Un 20% de los hombres (440) abandonan los estudios antes de acabar $\rightarrow 0.20 \cdot 440 = 88$ estudiantes masculinos abandonan los estudios y un 15% en el caso de las mujeres $\rightarrow 0.15 \cdot 560 = 84$ estudiantes femeninos abandonan.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Abandonan	Finalizan	
Hombres	88		440
Mujeres	84		560
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Abandonan	Finalizan	
Hombres	88	352	440
Mujeres	84	476	560
TOTALES	172	828	1000

1.1 De los 1000 estudiantes 828 finalizan los estudios. El porcentaje de estudiantes que finalizan los estudios es $\frac{828}{1000} = 0.828$, es decir, el 82.8%.

1.2 Hay 172 estudiantes que abandonan y 84 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el estudiante que abandona sea mujer es de $\frac{84}{172} = \frac{21}{43} \approx 0.4884$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de estudiantes masculinos que finalizan los estudios de un grupo de 7 estudiantes masculinos.

Esta variable es una binomial donde $n =$ número de repeticiones $= 7$ y $p =$ probabilidad de que un estudiante masculino finalice los estudios $= 1 - 0.2 = 0.8$. $X = B(7, 0.8)$.

Como esta binomial no aparece en la tabla proporcionada cambiamos a la variable aleatoria Y que cuenta el número de estudiantes masculinos que abandonan los estudios de un grupo de 7 estudiantes masculinos.

Esta variable es una binomial donde $n =$ número de repeticiones $= 7$ y $p =$ probabilidad de que un estudiante masculino abandone los estudios $= 0.2$. $Y = B(7, 0.2)$.

Debemos calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + \dots + P(X = 7) = P(Y = 4) + \dots + P(Y = 0) = P(Y \leq 4).$$

Si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale 0.9953.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8920
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2521
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9330
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953

2.1 Se consideran la matriz A , dependiente del parámetro real a , y el vector w , siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, w = (1 \ 0 \ -1)^T$$

donde T indica transpuesta. Se pide:

2.1.1 (1 punto) Calcular el rango de A en función del parámetro a .

2.1.2 (0.75 puntos) Discutir el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$

2.1.3 (0.75 puntos) Calcular el valor de z en función de a cuando el sistema es compatible determinado.

2.1.1 Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + a + 4a - 3a^2 - 0 - 2 = -3a^2 + 5a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 5a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-5 \pm 1}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} = a} \\ \frac{-5-1}{-6} = \boxed{1 = a} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2/3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la primera columna y la primera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la primera columna y la primera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

Conclusión: Si $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y si $a = 1$ o $a = \frac{2}{3}$ el rango de A es 2.

2.1.2 El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$ es el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Este sistema tiene como

matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En el apartado anterior hemos visto que el determinante de la matriz de coeficientes se anula para $a = 1$ y $a = \frac{2}{3}$. Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = \frac{2}{3}$

En este caso hemos visto que el rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden

3 que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 2 + 2 - 0 = -1 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero el rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A que es 2.

El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 1$

En este caso hemos visto que el rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Podemos observar que la columna 4ª

se puede obtener como $2 \cdot \text{Columna } 3^a - \text{Columna } 1^a$. Por lo que el rango de A/B es 2 como el de la matriz A . De todas formas, para confirmarlo consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 2 + 3 + 0 = 0$$

El rango de la matriz ampliada es 2. Los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = \frac{2}{3}$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.3 Para $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado.

$$\text{El sistema es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Cramer para determinar el valor de z .

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-3 + 0 + 4 - 3a + 2 - 0}{-3a^2 + 5a - 2} = \frac{3 - 3a}{-3a^2 + 5a - 2} = \frac{\cancel{-3(-1+a)}}{\cancel{-3(a-1)} \left(a - \frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{a - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3a-2}{3}} = \boxed{\frac{3}{3a-2}}$$

Para $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y el valor de z es $z = \frac{3}{3a-2}$.

2.2 Las matrices cuadradas que verifican que su inversa es igual a su traspuesta se llaman matrices ortogonales. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal y

calcular A^{38} y $(AA^T)^{39}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

2.2.2 (0.5 puntos) ¿Puede ser el determinante de una matriz ortogonal igual a cero? Justificar la respuesta.

2.2.3 (0.5 puntos) Si A y B son dos matrices ortogonales de igual dimensión, analizar si $A \cdot B$ es también una matriz ortogonal.

2.2.4 (0.75 puntos) Encontrar la matriz X que verifique $A^2 X - 2B = 0$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.1 La traspuesta de la matriz A es $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobamos que $A \cdot A^T = A^T \cdot A = Id$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Se cumple la igualdad y la matriz A^T es la inversa de la matriz A .
Calculamos A^{38} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^T = A^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A^{-1} \cdot A = Id$$

$$A^{38} = A^{36+2} = (A^3)^{12} \cdot A^2 = (Id)^{12} \cdot A^T = A^T$$

Tenemos que $A^{38} = A^T$.

Calculamos $(AA^T)^{39}$. Sabemos que $A \cdot A^T = Id$.

$$(AA^T)^{39} = (Id)^{39} = Id$$

Tenemos que $(AA^T)^{39} = Id$.

2.2.2 Una matriz ortogonal tiene inversa, por lo que su determinante no puede ser cero.

2.2.3 Si A y B son ortogonales entonces $A \cdot A^T = Id$ y $B \cdot B^T = Id$. Investigamos que ocurre con el producto $(AB) \cdot (AB)^T$.

$$(AB) \cdot (AB)^T = ABB^T A^T = A \cdot Id \cdot A^T = AA^T = Id$$

Análogamente se puede probar que $(AB)^T \cdot (AB) = Id$.

El producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.

2.2.4 Despejamos X en la igualdad.

$$A^2 X - 2B = 0 \Rightarrow A^2 X = 2B \Rightarrow A^T A \cdot AX = 2A^T B \Rightarrow Id \cdot AX = 2A^T B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^T AX = 2A^T A^T B \Rightarrow \boxed{X = 2A^T A^T B}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = 2A^T A^T B = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

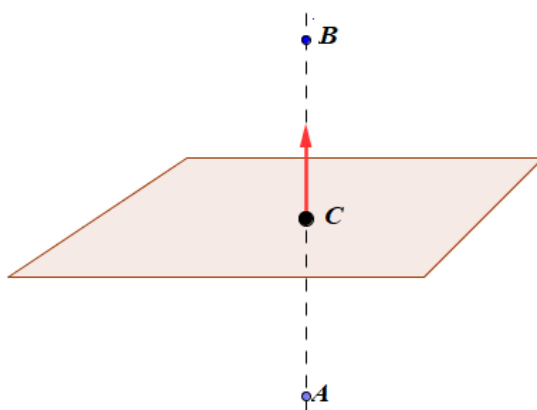
3.1 Dados los puntos $A(1,-2,1)$ y $B(3,4,3)$, y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-1$, se pide:

3.1.1 (1 punto) La ecuación del plano π_1 respecto al cual A y B son puntos simétricos.

3.1.2 (0.5 puntos) Comprobar que la recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 (1 punto) La ecuación del plano π_2 que contiene al punto A y tal que su intersección con π_1 es la recta r .

3.1.1 Si el punto B es simétrico de A respecto del plano π_1 entonces este plano contiene el punto medio C del segmento AB . Además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector normal del plano. También nos sirve como vector normal el vector $\overrightarrow{CB}$



$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 1) \\ B(3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(1, -2, 1) + (3, 4, 3)}{2} = (2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(2, 1, 2) \\ B(3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = (3, 4, 3) - (2, 1, 2) = (1, 3, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(2, 1, 2) \in \pi_1 \\ \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{CB} = (1, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C(2, 1, 2) \in \pi_1 \\ \pi_1 : x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 + D = 0 \Rightarrow D = -7 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : x + 3y + z - 7 = 0}$$

La ecuación del plano es $\pi_1 : x + 3y + z - 7 = 0$.

3.1.2 Para que la recta r esté contenida en el plano π_1 basta que 2 puntos de la recta estén en el plano.

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(0, 2, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Obtenemos un segundo punto de la recta.

$$\text{Si } \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow Q_r(2, 1, 2) \in r \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

¿Está el punto $Q_r(2, 1, 2)$ en el plano $\pi_1: x + 3y + z - 7 = 0$?

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + 3y + z - 7 = 0 \\ \text{¿} Q_r(2, 1, 2) \in \pi_1? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 + 3 \cdot 1 + 2 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

¿Está el punto $P_r(0, 2, 1)$ en el plano $\pi_1: x + 3y + z - 7 = 0$?

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + 3y + z - 7 = 0 \\ \text{¿} P_r(0, 2, 1) \in \pi_1? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 3 \cdot 2 + 1 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Los dos puntos están en el plano y por tanto, todos los puntos de la recta están en el plano.
La recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 El plano π_2 contiene el punto A y la recta r . Este plano tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector $\overrightarrow{AP_r}$.

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 2, 1) \\ A(1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (0, 2, 1) - (1, -2, 1) = (-1, 4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 1) \in \pi_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{AP_r} = (-1, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - y - 2 + 8z - 8 - z + 1 - 0 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - y + 7z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2: 4x + y - 7z + 5 = 0}$$

La ecuación del plano es $\pi_2: 4x + y - 7z + 5 = 0$.

3.2 Dados el plano $\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(1, -2, 0)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto P al plano π .

3.2.2 (1 punto) Escribir una ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto P .

3.2.3 (1 punto) Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano π con los tres ejes coordenados.

3.2.1 Calculamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 0) \\ \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|-2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

La distancia del punto P al plano π vale 1 unidad de longitud.

3.2.2 La recta perpendicular a π que pasa por el punto P tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 0) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (-2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

La recta tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

3.2.3 Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 + y + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 + 0 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Hallamos los vectores que unen los vértices del triángulo ABC entre sí y el ángulo que forman entre ellos.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \\
 & = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \boxed{\widehat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71.57^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = \left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) - (0, -1, 0) = \left(0, 1, \frac{-1}{2}\right) \\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \\
 & = \frac{\left(0, 1, \frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\widehat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36.87^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \\
 & = \frac{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \boxed{\widehat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71.57^\circ}
 \end{aligned}$$

El triángulo ABC es un triángulo isósceles teniendo dos ángulos iguales $A = C = 71.57^\circ$ y otro ángulo desigual $B = 36.87^\circ$.

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Representar gráficamente la función $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función.

4.1.1 El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua y derivable en todo su dominio. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} = \frac{3-1}{2} = 1 = x \rightarrow \boxed{B(1,0)} \\ = \frac{3+1}{2} = 2 = x \rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(2, 0)$. Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

La función tiene dos puntos críticos: $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ y $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).$$

La función crece en $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ y un mínimo relativo en

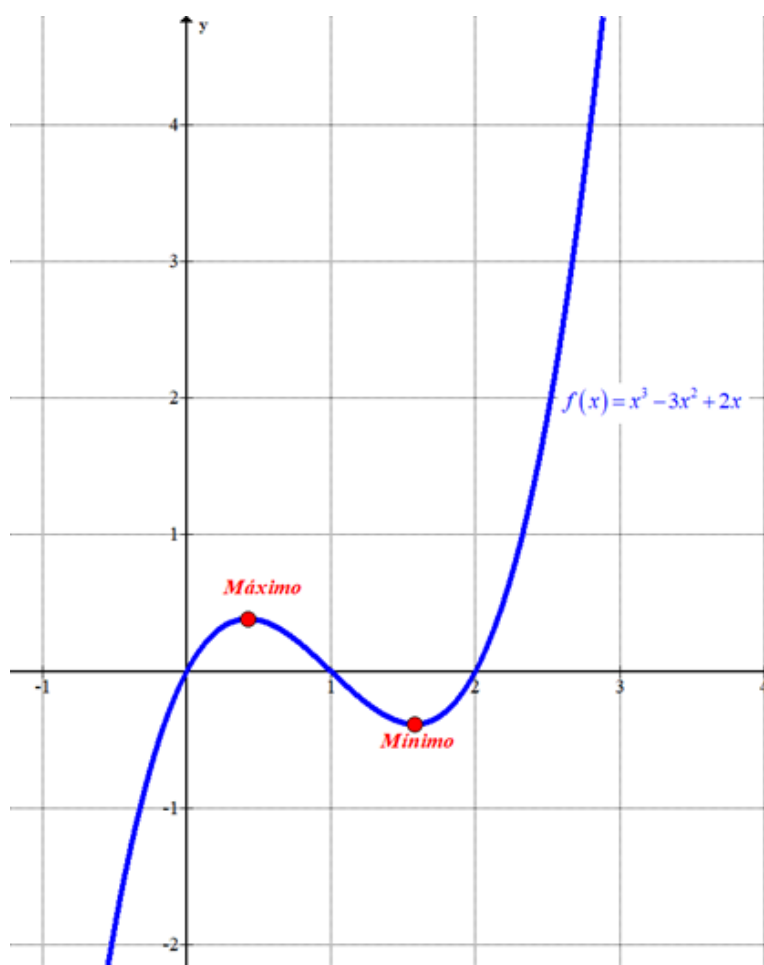
$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58. \text{ Como } f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ y}$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\frac{3+\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{9} \text{ el máximo relativo tiene}$$

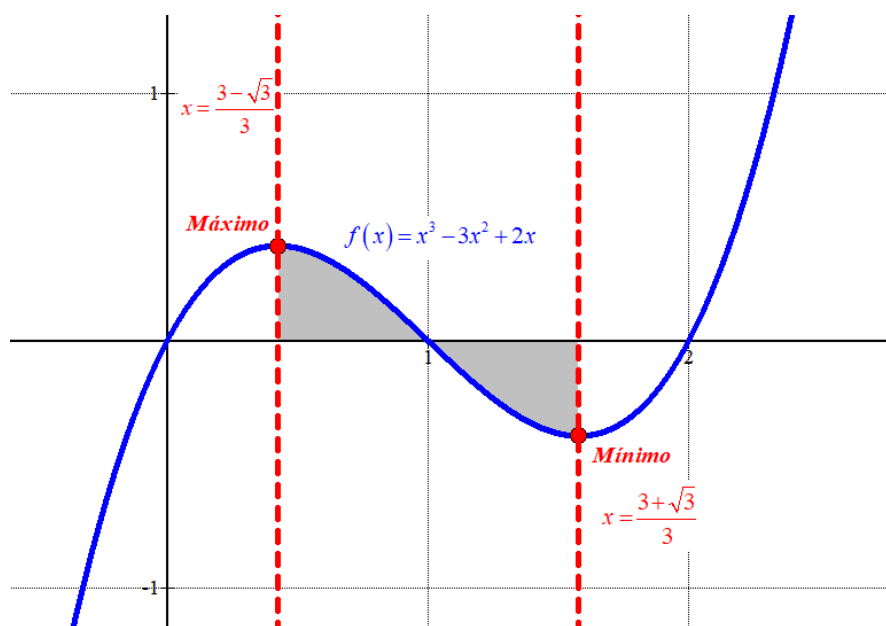
coordenadas $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ y el mínimo relativo $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
-1	-6
0	0
1	0
2	0
3	6



4.1.2 Hacemos un dibujo de la región de la cual queremos hallar el área.



El recinto tiene dos partes simétricas. Hallamos el área de la primera de ellas y el área total será el doble de la integral de $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ a 1 de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 f(x) dx &= \int_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^4}{4} - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^3 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función vale $2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18} \approx 0.2778$ unidades cuadradas.

4.2 Se considera un triángulo rectángulo T cuyos catetos se cortan en el origen de coordenadas del plano; el cateto horizontal mide 4 unidades y el vertical 3. Consideramos un rectángulo R inscrito en el triángulo T de modo que dos lados del rectángulo R están situados sobre los catetos de T y uno de sus vértices está en la hipotenusa de T . Denotamos por x la longitud del lado de R que está sobre el cateto mayor y por y la longitud del lado de R que está sobre el cateto menor. Se pide:

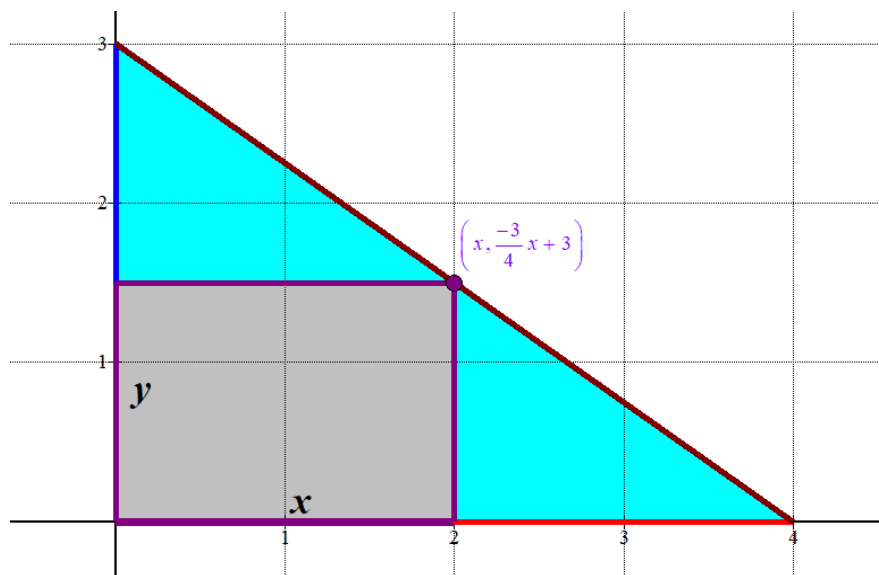
4.2.1 (1 punto) Calcular la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo T .

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular los valores de x e y que hacen que el área de R sea máxima y calcular dicha área.

4.2.1 Los vértices del triángulo rectángulo T son $A(0,0)$, $B(0,3)$ y $C(4,0)$. La recta que contiene a la hipotenusa debe pasar por $B(0,3)$ y $C(4,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(0,3) \\ C(4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y-0 = -\frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Los puntos situados sobre la hipotenusa tienen coordenadas $\left(x, -\frac{3}{4}x + 3\right)$, siendo $0 \leq x \leq 4$



4.2.2 El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.

$$A(x) = x \cdot y = x \left(-\frac{3}{4}x + 3 \right) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

Averiguamos cuando se anula la derivada del área.

$$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow A'(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Existe un punto crítico. Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$A'(x) = \frac{-3}{2}x + 3 \Rightarrow A''(x) = \frac{-3}{2} \Rightarrow A''(2) = \frac{-3}{2} < 0$$

La primera derivada se anula para $x = 2$ y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo para $x = 2$. Para este valor tenemos que $y = \frac{-3}{4}2 + 3 = 1.5$.

El área máxima se consigue con un rectángulo de lados 2 y 1.5 siendo un área máxima con valor de $2 \cdot 1.5 = 3$ unidades cuadradas.