



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRAORDINÀRIA 2026	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA 2026
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos)** Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?
- 1.2 (0.75 puntos)** Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

- 2.1.1 (1.25 punto)** Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .
- 2.1.2 (1.25 puntos)** Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5 (2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Se consideran los puntos del espacio $A(0, -1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, y el vector $v = (2, -1, 1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

3.2 Dado el plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, -20)$, $C(0, 15, -30)$ y $D(1, 2, -1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1 punto) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10 - t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

Supongamos que se enfrentaron en 1000 partidos. El 10% de los partidos se jugaron en hierba ($0.10 \cdot 1000 = 100$ se jugaron en hierba), el 40% en tierra batida ($0.40 \cdot 1000 = 400$ se jugaron en tierra batida) y el resto en pista dura ($1000 - 100 - 400 = 500$ se jugaron en pista dura).

Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba $\rightarrow$ Rafa ganó $0.25 \cdot 100 = 25$ partidos de los jugados en hierba.

Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida $\rightarrow$ Roger ganó $0.125 \cdot 400 = 50$ partidos de los jugados en tierra batida.

Roger ganó el 55% en pista dura $\rightarrow$ Roger ganó $0.55 \cdot 500 = 275$ partidos de los jugados en pista dura.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Gana Rafa	Gana Roger	
Hierba	25		100
Tierra batida		50	400
Pista dura		275	500
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Gana Rafa	Gana Roger	
Hierba	25	75	100
Tierra batida	350	50	400
Pista dura	225	275	500
TOTALES	600	400	1000

1.1 Teniendo en cuenta todos los enfrentamientos Roger ha ganado 400 de los 1000 partidos.

La proporción de partidos ganados es $\frac{400}{1000} = 0.40$.

Roger ha ganado el 40 % de los enfrentamientos.

1.2 Rafa ha ganado 600 partidos y 225 en pista dura. La probabilidad de que se jugara en pista

dura un partido que fue ganado por Rafa vale $\frac{225}{600} = 0.375$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de partidos en pista dura ganados por Roger de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial donde $n = \text{número de repeticiones} = 10$ y $p = \text{probabilidad de que Roger gane un partido a Rafa en pista dura} = 0.55$. $X = B(10, 0.55)$.

Como esta binomial no aparece en la tabla proporcionada cambiamos a la variable aleatoria Y que cuenta el número de partidos en pista dura ganados por Rafa de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial donde $n = \text{número de repeticiones} = 10$ y $p = \text{probabilidad de que Rafa gane un partido a Roger en pista dura} = 1 - 0.55 = 0.45$. $Y = B(10, 0.45)$.

Debemos calcular $P(X = 5) + P(X = 6) = P(Y = 5) + P(Y = 4)$.

Como $P(Y = 5) + P(Y = 4) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 3)$ si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale $0.7384 - 0.2660 = 0.4724$.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0906
	3		1,0000	0,9999	0,9872	0,9791	0,9759	0,9696	0,9593	0,9438	0,9223	0,2660
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9883	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 punto) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

2.1.1 Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

Tanque 1: La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5 $\rightarrow x + 3y + z = 5$.

Tanque 2: La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador $\rightarrow \alpha x + 2z = 0$.

Tanque 3: La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad $y \rightarrow z = \alpha y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ z = \alpha y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{array} \right\}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando la matriz A tiene determinante nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \alpha^2 - 0 + 3\alpha - 2\alpha = \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ o \\ \alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila segunda y tercera son

proporcionales. Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna y la fila

tercera y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la columna cuarta, la

primera y la segunda son proporcionales.

El rango de la matriz ampliada es 2. Los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor que resulta de quitar la

fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 10 - 0 - 0 = 10 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A que es 2.

El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.2 Para $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible.

Si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ \boxed{z=0} \end{array} \right\} \Rightarrow x+3y=5 \Rightarrow \boxed{x=5-3y} \Rightarrow \begin{cases} x=5-3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Si $\alpha = 0$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=5-3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ \alpha x+2z=0 \\ z=\alpha y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+\alpha y=5 \\ \alpha x+2\alpha y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ \alpha x+2\alpha y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\alpha \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ x+2y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ x=-2y \end{array} \right\} \Rightarrow -2y+(3+\alpha)y=5 \Rightarrow (\alpha+1)y=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\alpha \neq -1\} \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{1+\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -2 \frac{5}{1+\alpha} = \frac{-10}{1+\alpha}} \\ \boxed{z = \alpha \frac{5}{1+\alpha} = \frac{5\alpha}{1+\alpha}} \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ la solución es $x = \frac{-10}{1+\alpha}$, $y = \frac{5}{1+\alpha}$, $z = \frac{5\alpha}{1+\alpha}$.

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

2.2.1 Despejamos la matriz x en la ecuación matricial.

$$Ax = Bx + b \Rightarrow Ax - Bx = b \Rightarrow (A - B)x = b \Rightarrow x = (A - B)^{-1}b$$

Hallamos la inversa de la matriz $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - B)^T)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz x .

$$x = (A - B)^{-1}b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 + 0 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

2.2.2 Hallamos el determinante de las matrices A y B .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

Utilizamos las propiedades de los determinantes para hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$.

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \det((2B)^{-1}) = [\det(A)]^5 \cdot \frac{1}{\det(2B)} = \frac{[\det(A)]^5}{2^2 \det(B)} = \frac{3^5}{4 \cdot 19} = \boxed{\frac{243}{76}}$$

2.2.3 Intentamos encontrar los valores de α y β pedidos.

$$\alpha A + \beta B = I \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a = (-1) \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha = -2\beta \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\beta + 5\beta = 1 \\ -2\beta + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2 \cdot 1 = -2}$$

La solución es $\alpha = -2$ y $\beta = 1$.

- 3.1** Se consideran los puntos del espacio $A(0,-1,0)$ y $B(1,0,1)$, y el vector $v=(2,-1,1)$. Se pide:
- 3.1.1 (0.75 puntos)** Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .
- 3.1.2 (0.75 puntos)** Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .
- 3.1.3 (0.75 puntos)** Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .
- 3.1.4 (0.25 puntos)** Calcular la distancia del punto B al plano π .

3.1.1 Si el vector v es perpendicular al plano este puede ser su vector normal.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,-1,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v} = (2,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,-1,0) \in \pi \\ \pi: 2x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - (-1) + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + z - 1 = 0}$$

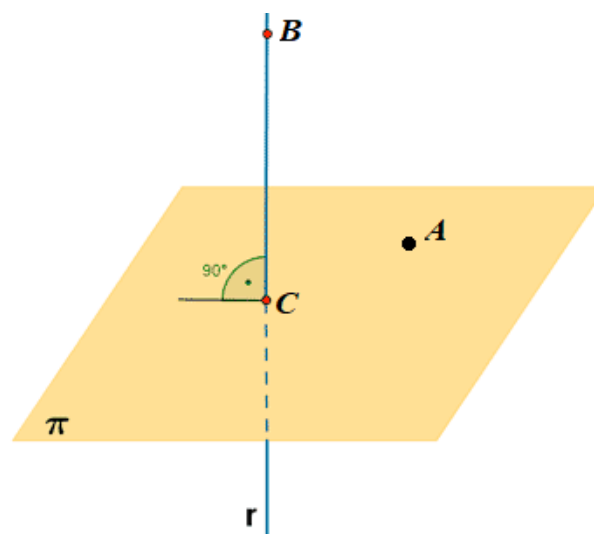
La ecuación del plano es $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$.

3.1.2 La recta que es perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano que es el vector $v=(2,-1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{v} = (2,-1,1) \\ B(1,0,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

La recta buscada tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

3.1.3 El punto C del plano π que está más cerca de B es la proyección ortogonal del punto B sobre el plano.



En los apartados anteriores hemos hallado la ecuación de la recta r y la del plano π . El punto C es el punto de intersección de recta y plano.

$$\begin{aligned}
 r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} &\Rightarrow 2(1 + 2t) - (-t) + 1 + t - 1 = 0 \Rightarrow 2 + 4t + t + 1 + t - 1 = 0 \Rightarrow \\
 \pi: 2x - y + z - 1 = 0 & \\
 \Rightarrow 6t + 2 = 0 \Rightarrow 6t = -2 \Rightarrow t = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

El punto C del plano π que está más cerca de B tiene coordenadas $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.1.4 La distancia del punto B al plano π es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1, 0, 1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$d(B, \pi) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 \text{ unidades}}$$

La distancia de B al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165$ unidades de longitud.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{aligned}
 \pi: 2x - y + z - 1 = 0 \\
 B(1, 0, 1)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \pi: 2x - y + z - 1 = 0 \\ B(1, 0, 1) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 \text{ unidades}}$$

3.2 Dado el plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1 punto) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.1 Para que el triángulo ABC esté contenido en el plano lo deben de estar los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} A(0,0,0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} B(10,0,-20) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0? \Rightarrow \text{¿} 20 + 20 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} C(0,15,-30) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - 30 = 0? \Rightarrow \text{¿} 45 - 30 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

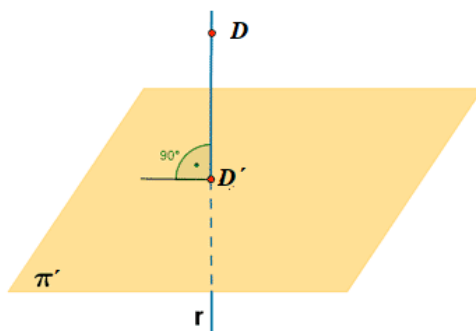
Los puntos B y C no pertenecen al plano. El triángulo ABC no está contenido en el plano π .

3.2.2 Obtenemos la ecuación del plano π' que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi' \\ B(10,0,-20) \in \pi' \\ C(0,15,-30) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20) \\ \overrightarrow{AC} = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \frac{1}{10} \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \\ \vec{v} = \frac{1}{15} \overrightarrow{AC} = (0,1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + 2y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : 2x + 2y + z = 0}$$

Para hallar la proyección del punto D sobre el plano π' obtenemos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto D . El punto D' es la intersección del plano con la recta.



$$\pi': 2x + 2y + z = 0 \Rightarrow \vec{n'} = (2, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} D(1, 2, -1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n'} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Hallamos el punto D' de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ \pi': 2x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - 1 + t = 0 \Rightarrow 2 + 4t + 4 + 4t - 1 + t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t + 5 = 0 \Rightarrow 9t = -5 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{8}{9} \\ z = -1 - \frac{5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases} \Rightarrow D'\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C son $D'\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$.

3.2.3 Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 3y - z = 0 \\ D(1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \simeq 2,4054 \text{ unidades}$$

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10-t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4.1.1 La integral de la derivada es la función $\rightarrow \int F'(t) dt = F(t)$.

$$\int F'(t) dt = \int t^2(10-t) dt = \int 10t^2 - t^3 dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K$$

La función es $F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K$. Determinamos el valor de K utilizando que $F(0) = 6$

$$\left. \begin{array}{l} F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K \\ F(0) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + K \Rightarrow K = 6 \Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

4.1.2 Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} F'(t) = t^2(10-t) \\ F'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2(10-t) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{t=0} \\ o \\ \boxed{t=10} \end{array} \right.$$

La función tiene dos puntos críticos. Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$F'(t) = t^2(10-t) = 10t^2 - t^3 \Rightarrow F''(t) = 20t - 3t^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F''(0) = 20 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0 \\ F''(10) = 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = -100 < 0 \end{array} \right.$$

La función presenta un máximo para $t = 10$.

Para este valor tenemos que $F(10) = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = 839.33$.

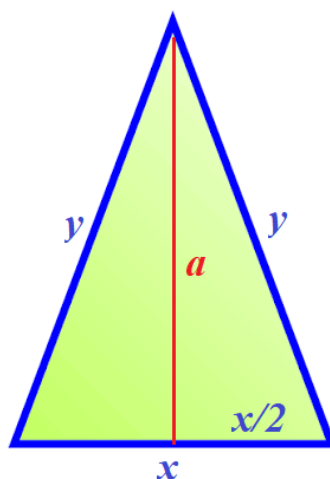
El valor máximo del coeficiente se obtiene a los 10 días siendo el coeficiente de gravedad de 839.33.

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

4.2.1 Dibujamos la situación planteada.



El perímetro es de 60 metros $\rightarrow x + 2y = 60 \rightarrow 2y = 60 - x \Rightarrow y = 30 - \frac{x}{2}$.

Determinamos la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos a y $\frac{x}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + a^2 = y^2 \\ y = 30 - \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + a^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + a^2 = 900 + \frac{x^2}{4} - \frac{60x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 900 - 30x \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{900 - 30x}}$$

El área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(x) = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}$$

4.2.2 Hallamos la expresión de la función $f(x)$.

$$f(x) = (A(x))^2 = \left(\frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}\right)^2 = \frac{x^2(900 - 30x)}{4} = \frac{900x^2}{4} - \frac{30x^3}{4} = 225x^2 - \frac{15x^3}{2}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 225x^2 - \frac{15x^3}{2} \Rightarrow f'(x) = 450x - \frac{45x^2}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 450x - \frac{45x^2}{2} = 0 \Rightarrow 45x \left(10 - \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 20 \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos. Para $x = 0$ no habría invernadero y no lo tendremos en cuenta. Para $x = 20$ sustituimos en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = 450x - \frac{45x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = 450 - 45x \Rightarrow f''(20) = 450 - 45 \cdot 20 = -450 < 0$$

La función tiene un máximo relativo para $x = 20$ metros. Calculamos el área para este valor del lado desigual del invernadero triangular.

$$A(20) = \frac{20\sqrt{900 - 30 \cdot 20}}{2} = 10\sqrt{300} = 100\sqrt{3} \approx 173.205$$

La eficiencia estructural es máxima para $x = 20$ metros y el área del suelo del invernadero para este valor es de 173.205 metros cuadrados.