



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026 (extra)
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.5 puntos)** Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.
- 1.2 (1 punto)** Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?
- 1.3 (1 punto)** Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = 2 \end{cases},$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar para qué valores de a se optimiza el riesgo.

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x+y=a \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x+2y+2z=5 \\ x+z=a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

3.2 Dado el plano $\pi: 2x+y-3=0$ y la recta $r: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-2\alpha \\ z=1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1,5]$.

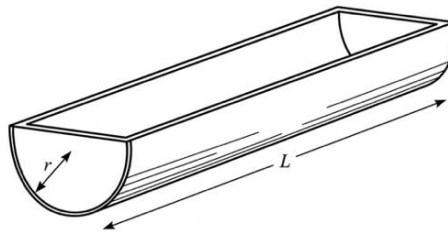
4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1,5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r

medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

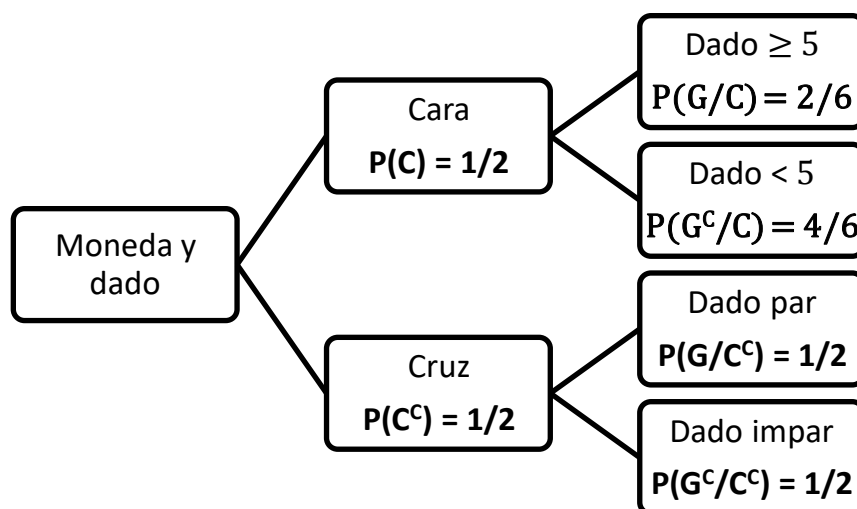
Responda a todos los apartados

1.1 (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.

1.2 (1 punto) Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?

1.3 (1 punto) Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

Realizamos un diagrama de árbol.



1.1 Debemos calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(C)P(G/C) + P(C^c)P(G/C^c) = 0.5 \cdot \frac{2}{6} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

La probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane vale $\frac{5}{12} \approx 0.4167$.

1.2 Debemos calcular $P(C/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C)P(G/C)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara vale 0.4.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de veces que el alumno gana de 7 rondas, sabiendo que siempre sale cara. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 7 y p = probabilidad de que una gane una ronda, saliendo cara en la moneda = $\frac{1}{3}$. $X = B\left(7, \frac{1}{3}\right)$. Debemos calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0.9931 - 0.9547 = \boxed{0.0384}$$

La probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces vale 0.0384.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267
4			1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547
5			1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9963	0,9931
6			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = 2 \end{cases},$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

2.1.1 La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada

es $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & \\ -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a & & \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2 - (a+1)^2 - (a+1)^2 = (a+1)^2 [a-1-1] = (a+1)^2 (a-2) \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)^2 (a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y tercera son

iguales. También es proporcional la fila primera y segunda. El rango de A es 1.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2

que resulta de quitar la primera fila y la primera y segunda columnas (proporcionales a la tercera) y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 2, distinto del rango de A (1). El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera se puede obtener

como la segunda fila menos la tercera. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - 0 + 4 - 2 = 3 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A (2). El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 2$ o $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

2.1.2 Resolvemos el sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 2$. Obtenemos su solución usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{2 - 1 + 2a - a}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{1+a}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{1}{(a+1)(a-2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} &= \{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a\} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = \{\text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a\} = \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) - 3(a+1) = (a-3)(a+1) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{(a-3)(a+1)}{(a+1)^2(a-2)} = \boxed{\frac{a-3}{(a+1)(a-2)}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a\} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{Columna } 2^a + \text{Columna } 1^a\} = \\ &= \begin{vmatrix} a & a+1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (a+1)(3a-3-a) = (a+1)(2a-3) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{(a+1)(2a-3)}{(a+1)^2(a-2)} = \boxed{\frac{2a-3}{(a+1)(a-2)}}$$

La solución del sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ es $x = \frac{1}{(a+1)(a-2)}$, $y = \frac{a-3}{(a+1)(a-2)}$,

$$z = \frac{2a-3}{(a+1)(a-2)}.$$

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Determinar para qué valores de } a \text{ se optimiza el riesgo.}$$

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

2.2.1 Resolvemos la ecuación matricial $A^2 - I = 2A$.

$$\begin{aligned} A^2 - I = 2A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 - 1 & 2 \\ 2 & 1+(1+a)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 2 \\ 2 & (1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 2-2a \\ (1+a)^2 = 2+2a \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 - 2a = 2 - 2a \\ a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{aligned}$$

Para $a = \sqrt{1} = \pm 1$ se optimiza el riesgo.

2.2.2 Para que la matriz A admita inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz A tiene inversa. Calculamos A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{-1}{a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$.

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x+y=a \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x+2y+2z=5 \\ x+z=a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

3.1.1 Hallamos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} 2x+y=a \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a-2x \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=a-2\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,a,1) \\ \vec{v}_r=(1,-2,0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x+2y+2z=5 \\ x+z=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y+2z=5 \\ x=a-z \end{cases} \Rightarrow -a+z+2y+2z=5 \Rightarrow 2y=5+a-3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}z \Rightarrow s: \begin{cases} x=a-\alpha \\ y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \\ \vec{u}_s = \left(-1, -\frac{3}{2}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \\ \vec{w}_s = 2\vec{u}_s = (-2, -3, 2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{w}_s = (-2, -3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{0}{2}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, a, 1) \\ Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = \left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) - (0, a, 1) = \left(a, \frac{5-a}{2}, -1\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{w}_s = 2\vec{u}_s = (-2, -3, 2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = \left(a, \frac{5-a}{2}, -1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ a & \frac{5-a}{2} & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4a + 4 - 2 \frac{5-a}{2} =$$

$$= 3 - 4a + 4 - 5 + a = \boxed{2 - 3a}$$

Averiguamos cuando se anula el producto mixto.

$$\left[\vec{v}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s} \right] = 0 \Rightarrow 2 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ el producto mixto vale cero y las rectas se cortan. Para $a \neq \frac{2}{3}$ el producto mixto tiene un valor distinto de cero y las rectas se cruzan.

3.1.2 Las rectas se cortan para $a = \frac{2}{3}$. Hallamos el punto de corte de las dos rectas.

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} & \quad s: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \alpha \\ y = \frac{5 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - \alpha = \lambda \\ \frac{17}{6} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - 1 = \lambda \\ \frac{17}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = -\frac{1}{3}} \\ \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \{iSe\,cumple!\} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)} \end{aligned}$$

El punto de corte de las dos rectas tiene coordenadas $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$.

3.1.3 La distancia entre el origen de coordenadas y P es el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$.

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) & \quad O(0,0,0) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) - (0,0,0) = P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

$$D(O, P) = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2} = \boxed{\frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1.7 \, u}$$

3.2 Dado el plano $\pi : 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

3.2.1 Un plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta y otro vector director el vector normal del plano π .

$$r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{cases} \quad \pi : 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(z-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : z - 1 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi_1 : z - 1 = 0$.

3.2.2 Estudiamos la posición relativa del plano π y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{n} = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, -2, 0) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano. La recta está contenida en el plano o es paralelo a él.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + y - 3 = 0 \\ P_r(1, -1, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cdot 1 - 1 - 3 = 0? \Rightarrow 2 - 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡NO!} \end{array}$$

El punto $P_r(1, -1, 1)$ de la recta no pertenece al plano, por lo que la recta no está contenida en el plano. La recta es paralela al plano.

Si es posible determinar un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

Este plano paralelo a π tiene ecuación $\pi_2 : 2x + y + D = 0$. Determinamos el valor de D obligando a que el plano π_2 contenga el punto $P_r(1, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 1) \in \pi_2 \\ \pi_2 : 2x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : 2x + y - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_2 : 2x + y - 1 = 0$.

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

4.1.1 Averiguamos cuando la expresión $2x^2 - 3$ es positiva o negativa.

$$2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$$

Solo pertenece al dominio de definición de la función el valor positivo de la raíz.

En el intervalo $\left[-1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos $x = 0$ y la expresión $2x^2 - 3$ vale $2 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$.

En el intervalo $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 5\right]$ tomamos $x = 4$ y la expresión $2x^2 - 3$ vale $2 \cdot 4^2 - 3 = 29 > 0$.

Expresamos la función como una función a trozos.

$$f(x) = |2x^2 - 3| = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2x^2 - 3 & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x \leq 5 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ 4x = 0 \rightarrow x = 0 \notin \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

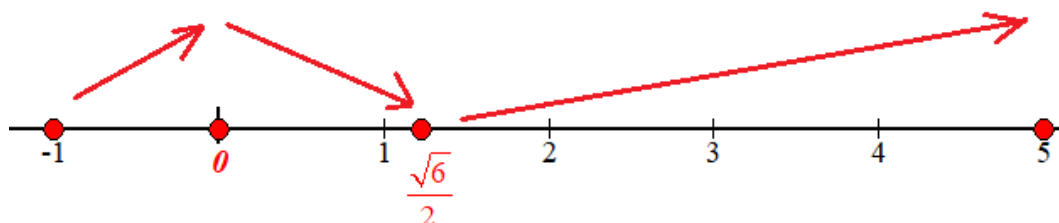
- En el intervalo $[-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = -4(-0.5) = 2 > 0. \text{ La función crece en } [-1, 0).$$

- En el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = -4 \cdot 1 = -4 < 0$. La función decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4) = 4 \cdot 4 = 16 > 0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$.

La función crece en $[-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$ y decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

4.1.2 La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= |2(-1)^2 - 3| = 1 \\ f(0) &= |2 \cdot 0^2 - 3| = 3 \\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) &= \left|2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3\right| = 0 \text{ Mínimo} \\ f(5) &= |2 \cdot 5^2 - 3| = 47 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

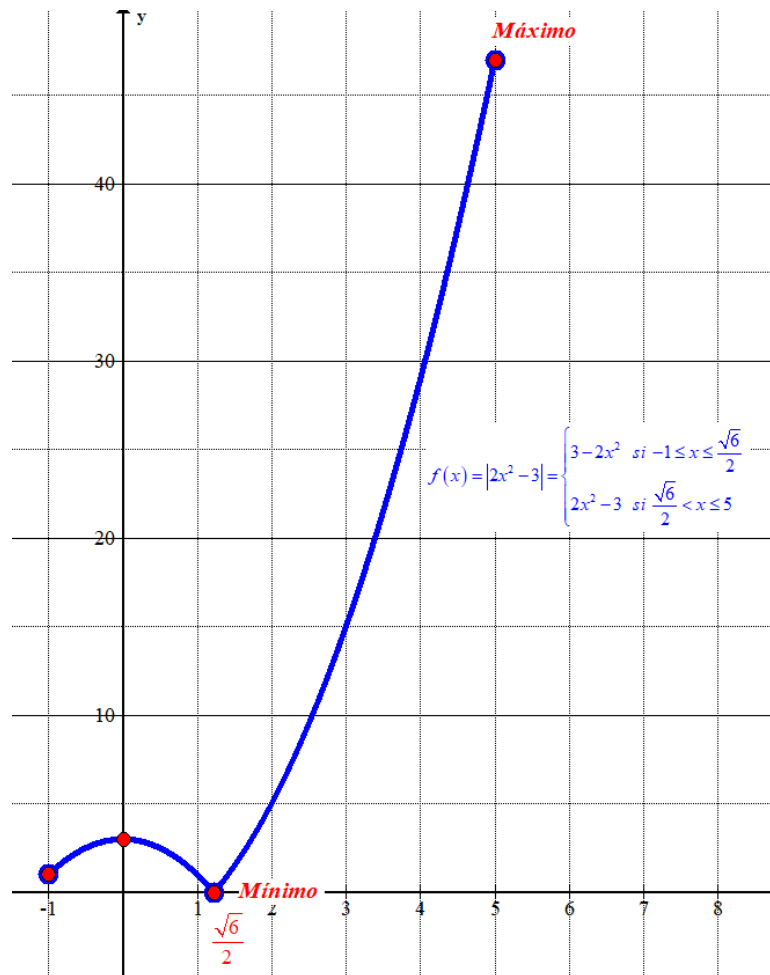
El valor máximo absoluto de la función f en el intervalo $[-1, 5]$ es 47 y se obtiene en $x=5$.

El valor mínimo absoluto de la función f en el intervalo $[-1, 5]$ es 0 y se obtiene en $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

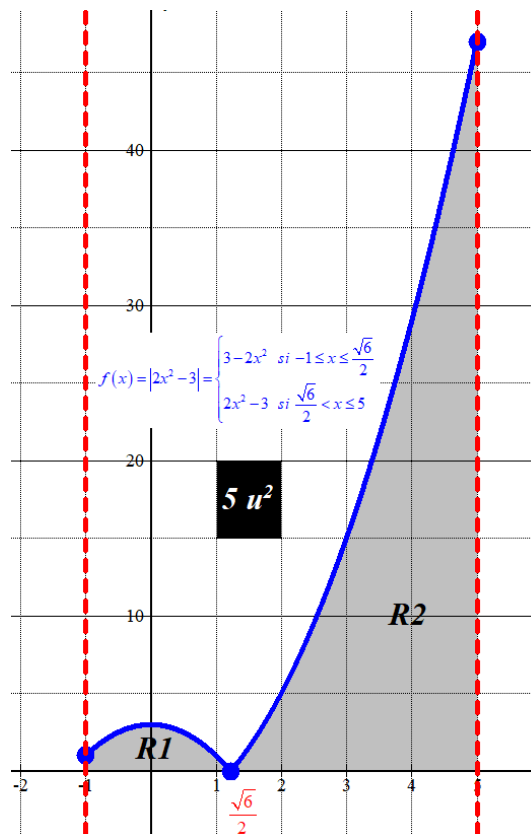
4.1.3 La gráfica de la función son dos trozos de parábolas. Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = 3 - 2x^2$
-1	1
0	3
$\sqrt{6}/2$	0

x	$f(x) = 2x^2 - 3$
3	15
4	29
5	47



4.1.4 Dibujamos el recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.



El área del recinto lo hallamos como la suma de las integrales definidas de -1 a $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de la función y la integral definida de $\frac{\sqrt{6}}{2}$ a 5 de la función.

$$\text{Área } R1 = \int_{-1}^{\sqrt{6}/2} (3 - 2x^2) dx = \left[3x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{\sqrt{6}/2} = \left[3 \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3}{3} \right] - \left[3(-1) - \frac{2(-1)^3}{3} \right] =$$

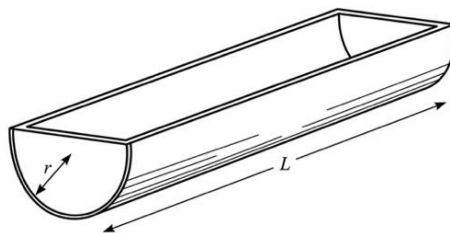
$$= \frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \boxed{\sqrt{6} + \frac{7}{3}}$$

$$\text{Área } R2 = \int_{\sqrt{6}/2}^5 (2x^2 - 3) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\sqrt{6}/2}^5 = \left[\frac{2 \cdot 5^3}{3} - 3 \cdot 5 \right] - \left[\frac{2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3}{3} - 3 \frac{\sqrt{6}}{2} \right] =$$

$$= \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{205}{3} + \sqrt{6}}$$

El área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$ es la suma de los dos valores obtenidos: $\sqrt{6} + \frac{7}{3} + \frac{205}{3} + \sqrt{6} = \frac{212}{3} + 2\sqrt{6} \approx 76.557$ unidades cuadradas.

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

4.2.1 Las dos paredes semicirculares forman un círculo de radio r , por lo que su área es πr^2 . El lateral curvo tiene un área que obtenemos multiplicando la longitud de la semicircunferencia por el largo del semicilindro, es decir, $\frac{2\pi r}{2} \cdot L = \pi r L$. El área total del comedero es la suma de las dos y sabemos que tiene un valor de $600\pi \text{ cm}^2$.

$$\pi r^2 + \pi r L = 600\pi \Rightarrow r^2 + r L = 600 \Rightarrow r L = 600 - r^2 \Rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r}$$

El volumen del comedero es el producto del área del semicírculo por la longitud del comedero (L).

$$V(r, L) = \frac{\pi r^2}{2} L$$

Como $L = \frac{600 - r^2}{r}$ obtenemos la expresión del volumen del comedero en función únicamente del radio de la pared semicircular.

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{600 - r^2}{r} \\ V(r, L) = \frac{\pi r^2}{2} L \end{array} \right\} \Rightarrow V(r) = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{600 - r^2}{r} = \frac{\pi r (600 - r^2)}{2} = \frac{\pi}{2} (600r - r^3)$$

El volumen del comedero en función del radio r tiene la expresión $V(r) = \frac{\pi}{2} (600r - r^3)$.

4.2.2 Hallamos los puntos críticos de la función volumen.

$$V(r) = \frac{\pi}{2} (600r - r^3) \Rightarrow V'(r) = \frac{\pi}{2} (600 - 3r^2) = \frac{3\pi}{2} (200 - r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} (200 - r^2) = 0 \Rightarrow 200 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 200 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}}$$

Sustituimos $r = 10\sqrt{2}$ en la segunda derivada.

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(200 - r^2) \Rightarrow V''(r) = \frac{3\pi}{2}(-2r) = -3\pi r \Rightarrow V''(10\sqrt{2}) = -3\pi(10\sqrt{2}) < 0$$

Para $r = 10\sqrt{2}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función volumen tiene un máximo relativo para este valor del radio.

Si $r = 10\sqrt{2}$ entonces $L = \frac{600 - (10\sqrt{2})^2}{10\sqrt{2}} = \frac{600 - 200}{10\sqrt{2}} = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ y el volumen del comedero tiene un valor de

$$V(10\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \left(600 \cdot 10\sqrt{2} - (10\sqrt{2})^3 \right) = \frac{\pi}{2} (6000\sqrt{2} - 2000\sqrt{2}) = 2000\pi\sqrt{2} \approx 8885.8$$

centímetros cúbicos.

El volumen máximo del comedero es de $2000\pi\sqrt{2} \approx 8885.8 \text{ cm}^3$, que se consigue con un radio de $10\sqrt{2} \approx 14.14 \text{ cm}$ y un largo de $20\sqrt{2} \approx 28.28 \text{ cm}$.