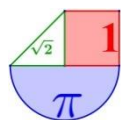


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU 2017 a 2026
Aragón



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Aragón desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026	3
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2026.....	16
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025	29
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025.....	40
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2024.....	53
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024.....	68
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023	82
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2023.....	94
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022	108
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2022.....	123
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021	138
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021.....	151
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020	164
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020	176
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019	188
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019	200
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018	213
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2018	226
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017	241
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017	255



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta deberán elegirse solo DOS de las TRES cuestiones planteadas. En caso de responder a las tres, solo se corregirán las dos que aparezcan contestadas en primer lugar.

Cada ejercicio del examen es independiente y se califica sobre 10 puntos. Las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos cada una), que se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Las respuestas deben expresarse de forma razonada, mostrando con rigor y precisión el proceso seguido en la resolución. Se deberá emplear el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, así como argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin llevar a cabo de manera efectiva la resolución, no será suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Una promotora organiza un festival con dos tipos de actuaciones: grupos internacionales y grupos locales. Cada grupo internacional emplea cuatro horas de actuación en escenario y dos horas para pruebas de sonido, mientras que cada grupo local emplea una hora de actuación en escenario y una hora de pruebas de sonido. En total, la organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido. La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales). La recaudación estimada es de ocho mil euros por cada grupo internacional y de tres mil euros por cada grupo local.

a.- (8 puntos) Determine la combinación óptima de grupos internacionales y locales que maximiza la recaudación cumpliendo todas las restricciones del enunciado. ¿Cuál es la recaudación máxima?

b.- (2 puntos) Si la recaudación por cada grupo local fuese de 4.000 euros, determine todas las soluciones óptimas enteras en la nueva situación. ¿Sería razonable programar solo grupos locales? Justifique la respuesta.

2.- (10 puntos) La promotora que organiza el festival ha estudiado datos de ediciones anteriores y ha construido un modelo matemático que aproxima el comportamiento de los compradores. Según este modelo, el número de entradas vendidas para un concierto $E(p)$, expresado en decenas, depende del precio (p) en euros de la siguiente forma:

$$E(p) = \frac{2000p}{25 + p^2}$$

a.- (6 puntos) Determine el precio al que se deben vender las entradas para que el número vendido sea un máximo relativo, indicando cuántas se venderían en ese caso. Calcule, además, el beneficio neto que obtendría la promotora, en euros, suponiendo que todas las entradas se vendiesen a dicho precio y que cada una tiene un coste fijo de 1 € para la promotora (gastos de organización, personal, etc.).

b.- (4 puntos) Calcule el valor de:

$$\int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp$$

3.- (10 puntos) La promotora del festival, antes de cerrar la contratación de los grupos que formarán parte del cartel, decide realizar una encuesta entre las personas que ya han reservado su sitio en el evento, con el objetivo de conocer a qué tipos de conciertos asistirán.

a.- (6 puntos) En una muestra aleatoria simple de 400 personas, 260 declaran que acudirán a los conciertos de rock. Calcule un intervalo de confianza al 94% para la proporción de asistentes que acudirán a los conciertos de rock. Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». A partir del intervalo de confianza obtenido, determine si los datos respaldan o ponen en duda esta afirmación.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño mínimo de muestra necesario para estimar la proporción de asistentes a conciertos de música country, con un nivel de confianza del 94%, un error máximo del 4% y sabiendo que, en una muestra piloto, la proporción estimada fue del 25%.

4.- (10 puntos) Elija únicamente dos opciones de las tres posibles **Q1, Q2 y Q3**.

Q1.- (5 puntos)

La promotora que organiza el festival está ajustando el presupuesto (en decenas de miles de euros) para la iluminación y el sonido de los conciertos. Estos cálculos se representan mediante una ecuación

matricial de la forma $AX + B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La matriz A

representa la planificación inicial, B es la matriz de ajustes adicionales, C es la matriz de presupuesto final y X es la matriz de gastos desconocidos. Resuelva la ecuación despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos)

La promotora musical estudia la evolución de la función de beneficios netos (en miles de euros) del festival en función de un indicador (x) que mide la intensidad de la campaña publicitaria ($x \in [0, 3]$).

Se propone el modelo $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que sin campaña (intensidad nula) el beneficio es de 8.000 euros, cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros, y que además en $x = 2$ la función tiene un punto crítico. Calcule los valores de b , c y d , para que se satisfagan las condiciones del enunciado. Justifique si en $x = 2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

Q3.- (5 puntos)

Para promocionar el festival se ofrecen tres tipos de tarifas: para estudiantes, para abonados y para el público general. El 30% usa la tarifa de estudiantes, el 50% la de abonados y el resto compra la entrada general. La probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto es del 6% en el caso de los estudiantes, del 80% para los abonados y del 70% para el público general. Si se seleccionan tres asistentes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

- 1.- (10 puntos)** Una promotora organiza un festival con dos tipos de actuaciones: grupos internacionales y grupos locales. Cada grupo internacional emplea cuatro horas de actuación en escenario y dos horas para pruebas de sonido, mientras que cada grupo local emplea una hora de actuación en escenario y una hora de pruebas de sonido. En total, la organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido. La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales). La recaudación estimada es de ocho mil euros por cada grupo internacional y de tres mil euros por cada grupo local.
- a.- (8 puntos)** Determine la combinación óptima de grupos internacionales y locales que maximiza la recaudación cumpliendo todas las restricciones del enunciado. ¿Cuál es la recaudación máxima?
- b.- (2 puntos)** Si la recaudación por cada grupo local fuese de 4.000 euros, determine todas las soluciones óptimas enteras en la nueva situación. ¿Sería razonable programar solo grupos locales? Justifique la respuesta.

- a.-** Llamamos “x” al número de grupos internacionales e “y” al número de grupos locales. Completamos una tabla con los datos del problema.

	Horas de actuación	Horas de pruebas de sonido	Beneficio
Nº grupos internacionales (x)	$4x$	$2x$	$8000x$
Nº grupos locales (y)	y	y	$3000y$
TOTALES	$4x + y$	$2x + y$	$8000x + 3000y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 8000x + 3000y$.

Las restricciones son:

“La organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido” $\rightarrow 4x + y \leq 24$; $2x + y \leq 18$.

“La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales)” $\rightarrow x + y \geq 6$

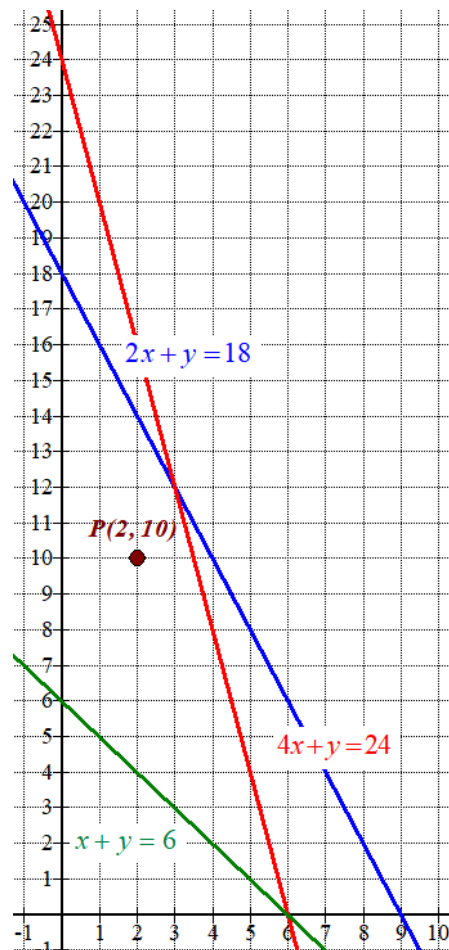
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$4x + y = 24$	$2x + y = 18$	$x + y = 6$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 24 - 4x$	$x \mid y = 18 - 2x$	$x \mid y = 6 - x$	Primer cuadrante
0 $\mid$ 24	0 $\mid$ 18	0 $\mid$ 6	
3 $\mid$ 12	3 $\mid$ 12	2 $\mid$ 4	
6 $\mid$ 0	6 $\mid$ 6	6 $\mid$ 0	



Como las restricciones son

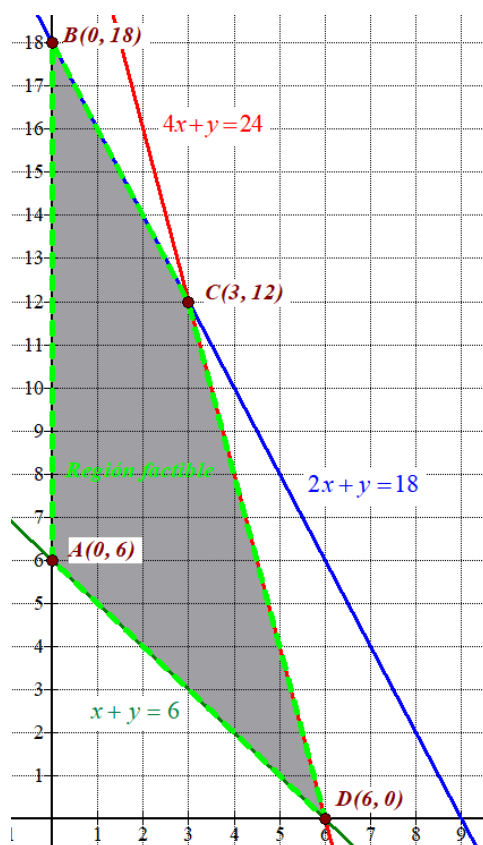
$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(2, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + 10 \leq 24 \\ 2 \cdot 2 + 10 \leq 18 \\ 1 + 10 \geq 6 \\ 2 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 8000x + 3000y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 6) \rightarrow B(0, 6) = 8000 \cdot 0 + 3000 \cdot 6 = 18000$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 8000 \cdot 0 + 3000 \cdot 18 = 54000$$

$$C(3, 12) \rightarrow B(3, 12) = 8000 \cdot 3 + 3000 \cdot 12 = 60000 \text{ Máximo}$$

$$D(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 8000 \cdot 6 + 3000 \cdot 0 = 48000$$

El valor máximo es 60000 y se obtiene en el punto C(3, 12).

Con 3 grupos internacionales y 12 grupos locales se cumplen las restricciones con un beneficio máximo de 60000 €.

- b.- Si la recaudación de un grupo local es de 4000 € la función beneficio pasa a ser $B(x, y) = 8000x + 4000y$. Valoramos esta función en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 6) \rightarrow B(0, 6) = 8000 \cdot 0 + 4000 \cdot 6 = 24000$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 8000 \cdot 0 + 4000 \cdot 18 = 72000 \text{ Máximo}$$

$$C(3, 12) \rightarrow B(3, 12) = 8000 \cdot 3 + 4000 \cdot 12 = 72000 \text{ Máximo}$$

$$D(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 8000 \cdot 6 + 4000 \cdot 0 = 48000$$

El valor máximo es 72000 y se obtiene en todos los puntos del segmento BC que tengan coordenadas con valores enteros: B(0, 18), E(1, 16), F(2, 14), C(3, 12).

¿Sería razonable programar solo grupos locales?

Si. Con 0 grupos internacionales y 18 grupos locales se consigue el beneficio máximo de 72000 euros.

2.- (10 puntos) La promotora que organiza el festival ha estudiado datos de ediciones anteriores y ha construido un modelo matemático que aproxima el comportamiento de los compradores. Según este modelo, el número de entradas vendidas para un concierto $E(p)$, expresado en decenas, depende del precio (p) en euros de la siguiente forma:

$$E(p) = \frac{2000p}{25 + p^2}$$

a.- (6 puntos) Determine el precio al que se deben vender las entradas para que el número vendido sea un máximo relativo, indicando cuántas se venderían en ese caso. Calcule, además, el beneficio neto que obtendría la promotora, en euros, suponiendo que todas las entradas se vendiesen a dicho precio y que cada una tiene un coste fijo de 1 € para la promotora (gastos de organización, personal, etc.).

b.- (4 puntos) Calcule el valor de:

$$\int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp$$

a.- Averiguamos si la derivada de la función $E(p)$ se anula.

$$E'(p) = \frac{2000(25 + p^2) - 2000p \cdot 2p}{(25 + p^2)^2} = \frac{50000 + 2000p^2 - 4000p^2}{(25 + p^2)^2} = \frac{50000 - 2000p^2}{(25 + p^2)^2}$$

$$E'(p) = 0 \Rightarrow \frac{50000 - 2000p^2}{(25 + p^2)^2} = 0 \Rightarrow 50000 - 2000p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2000(25 - p^2) = 0 \Rightarrow 25 - p^2 = 0 \Rightarrow p^2 = 25 \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{25} = 5}$$

La función tiene un punto crítico en $p = 5$. Hemos descartado el valor negativo de la raíz de 25 pues no tiene sentido en el contexto del problema.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $p = 5$.

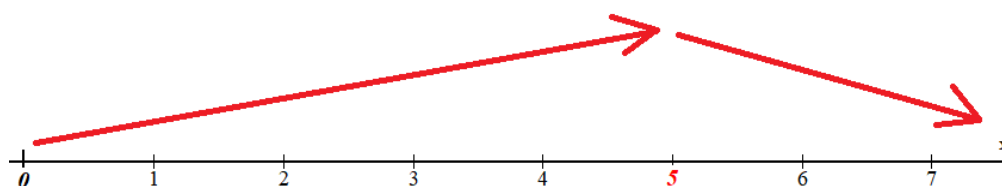
- En el intervalo $[0, 5)$ tomamos $p = 1$ y la derivada vale

$$E'(1) = \frac{50000 - 2000 \cdot 1^2}{(25 + 1^2)^2} = \frac{48000}{26^2} > 0. \text{ La función crece en } [0, 5).$$

- En el intervalo $(5, +\infty)$ tomamos $p = 10$ y la derivada vale

$$E'(10) = \frac{50000 - 2000 \cdot 10^2}{(25 + 10^2)^2} = \frac{-150000}{125^2} < 0. \text{ La función decrece en } (5, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $p = 5$.

Como $E(5) = \frac{2000 \cdot 5}{25 + 5^2} = \frac{10000}{50} = 200$ podemos afirmar que con un precio de 5 € la entrada se venderían un máximo de 2000 entradas.

La promotora tiene un beneficio de $5 - 1 = 4$ euros por cada entrada, por lo que obtendría un beneficio de $2000 \cdot 4 = 8000$ euros.

b.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{2000p}{25 + p^2} dp = 1000 \int \frac{2p}{25 + p^2} dp = 1000 \ln(25 + p^2) + K$$

Calculamos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp &= \left[1000 \ln(25 + p^2) \right]_5^{15} = 1000 \ln(25 + 15^2) - 1000 \ln(25 + 5^2) = \\ &= 1000(\ln 250 - \ln 50) = 1000 \ln \frac{250}{50} = 1000 \ln 5 \approx 1609.437912 \end{aligned}$$

3.- (10 puntos) La promotora del festival, antes de cerrar la contratación de los grupos que formarán parte del cartel, decide realizar una encuesta entre las personas que ya han reservado su sitio en el evento, con el objetivo de conocer a qué tipos de conciertos asistirán.

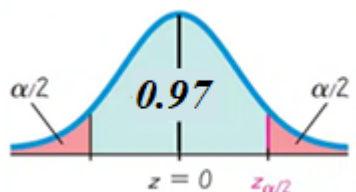
- a.- (6 puntos)** En una muestra aleatoria simple de 400 personas, 260 declaran que acudirán a los conciertos de rock. Calcule un intervalo de confianza al 94% para la proporción de asistentes que acudirán a los conciertos de rock. Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». A partir del intervalo de confianza obtenido, determine si los datos respaldan o ponen en duda esta afirmación.
- b.- (4 puntos)** Determine el tamaño mínimo de muestra necesario para estimar la proporción de asistentes a conciertos de música country, con un nivel de confianza del 94%, un error máximo del 4% y sabiendo que, en una muestra piloto, la proporción estimada fue del 25%.

a.- La proporción de clientes que acudirán a los conciertos de rock tiene un valor de $p = \frac{260}{400} = 0.65$

y de aquí obtenemos $q = 1 - 0.65 = 0.35$.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9648	0.9655	0.9661	0.9667	0.9673	0.9678	0.9683	0.9688

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{400}} \approx 0.0448$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.65 - 0.0448, 0.65 + 0.0448) = (0.6052, 0.6948)$$

Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». Esto significa una proporción de 0.75 que no pertenece al intervalo de confianza obtenido con un nivel de confianza del 94%. Los resultados obtenidos ponen en duda la afirmación.

b.- La proporción muestral de asistentes a conciertos de música country vale 0.25.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.88$.

El error máximo es de 0.04. Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.88} = \sqrt{\frac{0.1875}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.88} \right)^2 = \frac{0.1875}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.04}{1.88} \right)^2} = 414.1875 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 415 personas.

Q1.- (5 puntos)

La promotora que organiza el festival está ajustando el presupuesto (en decenas de miles de euros) para la iluminación y el sonido de los conciertos. Estos cálculos se representan mediante una ecuación matricial de la forma $AX + B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La matriz A representa la planificación inicial, B es la matriz de ajustes adicionales, C es la matriz de presupuesto final y X es la matriz de gastos desconocidos. Resuelva la ecuación despejando previamente X .

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Comprobamos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto tiene matriz inversa y hallamos la expresión de su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 3 & 12 - 9 \\ 15 + 4 & -15 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$.

Q2.- (5 puntos)

La promotora musical estudia la evolución de la función de beneficios netos (en miles de euros) del festival en función de un indicador (x) que mide la intensidad de la campaña publicitaria ($x \in [0, 3]$). Se propone el modelo $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que sin campaña (intensidad nula) el beneficio es de 8.000 euros, cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros, y que además en $x = 2$ la función tiene un punto crítico. Calcule los valores de b , c y d , para que se satisfagan las condiciones del enunciado. Justifique si en $x = 2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

Sin campaña (intensidad nula $\rightarrow x = 0$) el beneficio es de 8.000 euros $\rightarrow f(0) = 8$.

$$f(0) = 8 \Rightarrow 8 = 2 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d \Rightarrow \boxed{d = 8}$$

La función queda $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 8$.

Cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros $\rightarrow f(2) = 16$.

$$f(2) = 16 \Rightarrow 16 = 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 8 \Rightarrow 16 = 16 + 4b + 2c + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b + 2c = -8 \Rightarrow 2b + c = -4 \Rightarrow \boxed{c = -4 - 2b}$$

En $x = 2$ la función tiene un punto crítico $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 8 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2bx + c$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 6 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \Rightarrow \boxed{0 = 24 + 4b + c}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} c = -4 - 2b \\ 0 = 24 + 4b + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 24 + 4b - 4 - 2b \Rightarrow 0 = 20 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = -20 \Rightarrow \boxed{b = -10} \Rightarrow \boxed{c = -4 - 2(-10) = 16}$$

Los valores buscados son $b = -10$, $c = 16$ y $d = 8$.

Para estos valores la función queda $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x + 8$. Para averiguar si el extremo $x = 2$ es máximo o mínimo relativo sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x + 8 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 20x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x - 20 \Rightarrow f''(2) = 12 \cdot 2 - 20 = 4 > 0$$

En $x = 2$ la primera derivada se anula y la segunda tiene valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

Q3.- (5 puntos)

Para promocionar el festival se ofrecen tres tipos de tarifas: para estudiantes, para abonados y para el público general. El 30% usa la tarifa de estudiantes, el 50% la de abonados y el resto compra la entrada general. La probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto es del 6% en el caso de los estudiantes, del 80% para los abonados y del 70% para el público general. Si se seleccionan tres asistentes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto.

Llamamos E a “el asistente al festival es estudiante”, A a “el asistente al festival es abonado”, G a “el asistente al festival es público general” y V a “el asistente vuelve a otro concierto”.

Nos dicen que $P(G) = 0.30$, $P(A) = 0.50$; $P(G) = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2$. También nos dicen que

$$P(V/E) = 0.06; P(V/A) = 0.80; P(V/G) = 0.70.$$

Determinamos la probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto, es decir, el valor de $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(E)P(V/E) + P(A)P(V/A) + P(G)P(V/G) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.558$$

Como la selección de los tres asistentes es con reemplazamiento la selección del primer, segundo y tercer asistente son independientes entre sí y la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto es el producto de la probabilidad de que el primero vuelva a otro concierto por la probabilidad de que vuelva a otro concierto el segundo asistente elegido y por la probabilidad de que vuelva a otro concierto el tercero: $0.558^3 \approx 0.1737$.



Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta deberán elegirse solo DOS de las TRES cuestiones planteadas. En caso de responder a las tres, solo se corregirán las dos que aparezcan contestadas en primer lugar.

Cada ejercicio del examen es independiente y se califica sobre 10 puntos. Las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos cada una), que se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Las respuestas deben expresarse de forma razonada, mostrando con rigor y precisión el proceso seguido en la resolución. Se deberá emplear el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, así como argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin llevar a cabo de manera efectiva la resolución, no será suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Una librería organiza semanalmente sus pedidos en dos tipos de lotes: lotes de Novedades y lotes de Reposición. Cada lote de Novedades requiere 3 horas de trabajo en el departamento de recepción y 1 hora en el de etiquetado, mientras que cada lote de Reposición requiere 1 hora en recepción y 2 horas en etiquetado. Cada departamento dispone como máximo de 100 horas semanales para realizar cada una de estas tareas. La librería obtiene un beneficio de 500 euros por cada lote de Novedades y de 400 euros por cada lote de Reposición. Además, para garantizar una actividad comercial mínima, la librería se compromete a preparar al menos 40 lotes en total cada semana (sumando ambos tipos).

a.- (8 puntos) Determine cuántos lotes de Novedades y cuántos de Reposición debe preparar la librería semanalmente para maximizar el beneficio, cumpliendo todas las restricciones del enunciado, así como el beneficio máximo que puede alcanzar.

b.- (2 puntos) Razone si preparar 10 lotes de Novedades y 40 de Reposición semanalmente satisface las restricciones del enunciado. En caso afirmativo, ¿es una solución óptima?

2.- (10 puntos) En la librería se ha observado que un aumento en el precio del libro en papel puede provocar un aumento de las descargas ilegales. Para estudiar este comportamiento, se considera la siguiente función:

$$D(x) = -4x^3 + 36x^2 + 864x + 400$$

que aproxima el número de descargas ilegales en función del aumento de precio (x) (en euros) sobre un precio base de 10 euros, con $2 \leq x \leq 15$.

a.- (8 puntos) Calcule el número de descargas ilegales para aumentos del precio de 2 y de 15 euros. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $D(x)$ en $2 \leq x \leq 15$. Determine los valores mínimo y máximo de descargas ilegales y el precio final en el que se alcanzan, indicando si se trata de extremos relativos y/o absolutos.

b.- (2 puntos) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de $D(x)$. Estudie la curvatura (concavidad/convexidad) de la función en el intervalo $2 \leq x \leq 15$.

3.- (10 puntos) La librería quiere obtener información para prever la demanda y planificar mejor los pedidos. Para ello se toma una muestra aleatoria simple de 100 clientes y se observa que 52 de ellos realizan compras online al menos una vez al mes.

- a.- (5 puntos) A partir de dicha muestra, se desea estimar la proporción de clientes de la librería que realizan compras online al menos una vez al mes. Calcule un intervalo de confianza del 96% para dicha proporción. A la vista del intervalo obtenido, razone si hay motivos para dudar que la proporción real de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes es del 65%. Justifique su respuesta.
- b.- (5 puntos) Suponga ahora que la proporción real de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes es igual a la estimada en la muestra. Si se seleccionan 10 clientes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que exactamente 6 de ellos realicen compras online al menos una vez al mes.

4.- (10 puntos) Elija únicamente dos opciones de las tres posibles **Q1, Q2 y Q3**.

Q1.- (5 puntos)

Durante una semana en la librería se aplicó un descuento del 10% sobre el precio original de cada artículo. En esa semana, un cliente compró una novela, un cuaderno y una mochila, y pagó en total 117 euros después del descuento. Antes del descuento, el precio del cuaderno era la cuarta parte del precio de la novela y el precio de la mochila era el doble del precio de la novela. Determine el precio original de cada uno de los tres artículos.

Q2.- (5 puntos)

En la librería se ha estudiado el beneficio semanal (en cientos de euros) en función del tiempo (x) (en días) transcurrido desde el inicio de una campaña promocional, y se ha modelizado por la función:

$$B(x) = 3x^2 + ax + 1$$

Se sabe que el beneficio total acumulado durante los dos primeros días de la campaña ha sido de 3.000 euros, lo que se expresa mediante la condición:

$$\int_0^2 B(x) dx = 30$$

Determine el valor del parámetro a .

Q3.- (5 puntos)

En la librería, durante una semana, se ofrecen tres promociones: descuento en novelas (A), descuento en manuales (B) y un vale para accesorios (C). De cada 1.000 clientes de la librería, 300 reciben la promoción A, el 50% recibe la promoción B y el resto recibe la promoción C. Se sabe, además, que la probabilidad de que un cliente realice una compra esa semana es 0,6 si ha recibido la promoción A. Por otro lado, se conoce que el 80% de los clientes que han recibido la promoción B y el 70% de los que han recibido la promoción C realizan una compra durante esa semana. Se elige al azar un cliente de la librería y se sabe que ha realizado una compra esa semana. Calcule la probabilidad de que dicho cliente hubiera recibido la promoción A.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Una librería organiza semanalmente sus pedidos en dos tipos de lotes: lotes de Novedades y lotes de Reposición. Cada lote de Novedades requiere 3 horas de trabajo en el departamento de recepción y 1 hora en el de etiquetado, mientras que cada lote de Reposición requiere 1 hora en recepción y 2 horas en etiquetado. Cada departamento dispone como máximo de 100 horas semanales para realizar cada una de estas tareas. La librería obtiene un beneficio de 500 euros por cada lote de Novedades y de 400 euros por cada lote de Reposición. Además, para garantizar una actividad comercial mínima, la librería se compromete a preparar al menos 40 lotes en total cada semana (sumando ambos tipos).

a.- (8 puntos) Determine cuántos lotes de Novedades y cuántos de Reposición debe preparar la librería semanalmente para maximizar el beneficio, cumpliendo todas las restricciones del enunciado, así como el beneficio máximo que puede alcanzar.

b.- (2 puntos) Razone si preparar 10 lotes de Novedades y 40 de Reposición semanalmente satisface las restricciones del enunciado. En caso afirmativo, ¿es una solución óptima?

a.- Llamamos x al número de lotes de Novedades que se preparan semanalmente e y al número de lotes de Reposición.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Horas de recepción	Horas de etiquetado	Beneficio
Lotes de Novedades (x)	$3x$	x	$500x$
Lotes de Reposición (y)	y	$2y$	$400y$
TOTALES	$3x + y$	$x + 2y$	$500x + 400y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 500x + 400y$.

Las restricciones son:

“Cada departamento dispone como máximo de 100 horas semanales para realizar cada una de estas tareas” $\rightarrow 3x + y \leq 100$; $x + 2y \leq 100$.

“La librería se compromete a preparar al menos 40 lotes en total cada semana (sumando ambos tipos)” $\rightarrow x + y \geq 40$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$3x + y = 100$$

$$x + 2y = 100$$

$$x + y = 40$$

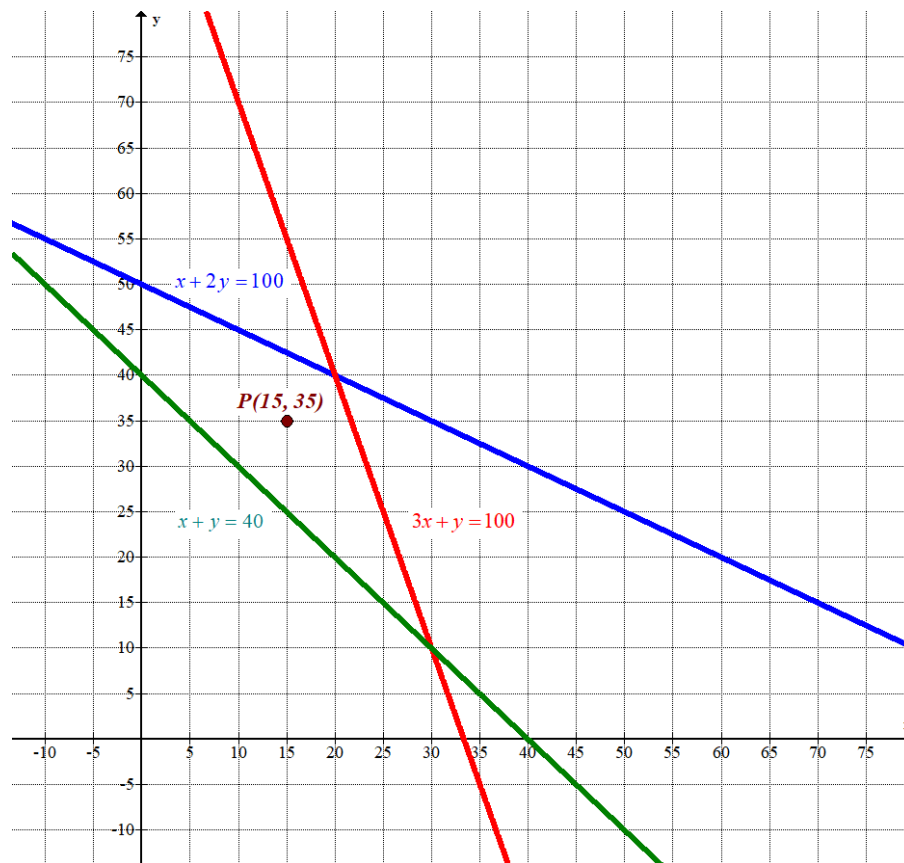
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 100 - 3x$
0	100
20	40
30	10

x	$y = \frac{100 - x}{2}$
0	50
20	40
40	30

x	$y = 40 - x$
0	40
30	10
40	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

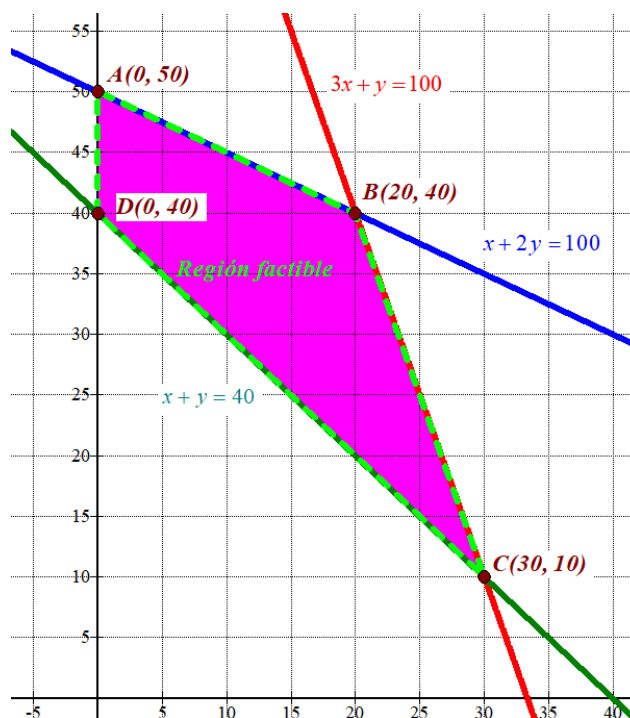
$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas **roja** y **azul**, y por encima de la recta **verde**.

Comprobamos que el punto $P(15, 35)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 15 + 35 \leq 100 \\ 15 + 2 \cdot 35 \leq 100 \\ 15 + 35 \geq 40 \\ 15 \geq 0; 35 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 500x + 400y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 500 \cdot 0 + 400 \cdot 50 = 20000$$

$$B(20, 40) \rightarrow B(20, 40) = 500 \cdot 20 + 400 \cdot 40 = 26000 \text{ Máximo}$$

$$C(30, 10) \rightarrow B(30, 10) = 500 \cdot 30 + 400 \cdot 10 = 19000$$

$$D(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 500 \cdot 0 + 400 \cdot 40 = 16000$$

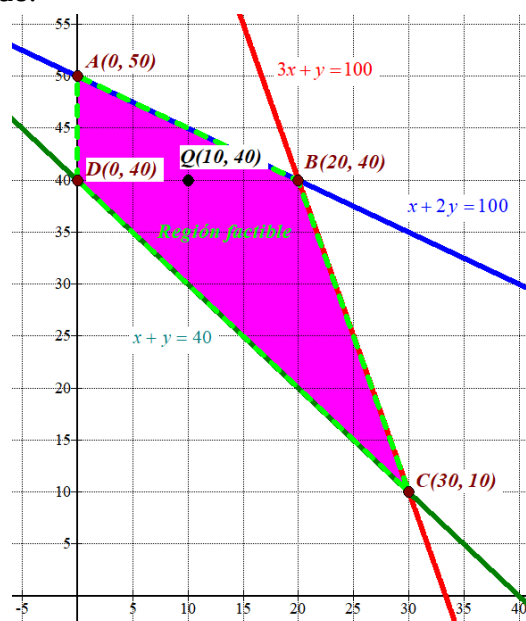
El valor máximo es 26000 y se obtiene en el punto B(20, 40).

Con 20 lotes de Novedades y 40 de Reposición se cumplen las restricciones con un beneficio máximo de 26000 €.

- b.- Preparar 10 lotes de Novedades y 40 de Reposición gráficamente se corresponde con el punto (10, 40). Este punto pertenece a la región factible y preparar 10 lotes de Novedades y 40 de Reposición semanalmente satisface las restricciones del enunciado.

También se puede comprobar que el punto (10, 40) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10 + 40 \leq 100 \\ 10 + 2 \cdot 40 \leq 100 \\ 10 + 40 \geq 40 \\ 10 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$



2.- (10 puntos) En la librería se ha observado que un aumento en el precio del libro en papel puede provocar un aumento de las descargas ilegales. Para estudiar este comportamiento, se considera la siguiente función:

$$D(x) = -4x^3 + 36x^2 + 864x + 400$$

que aproxima el número de descargas ilegales en función del aumento de precio (x) (en euros) sobre un precio base de 10 euros, con $2 \leq x \leq 15$.

a.- (8 puntos) Calcule el número de descargas ilegales para aumentos del precio de 2 y de 15 euros. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $D(x)$ en $2 \leq x \leq 15$. Determine los valores mínimo y máximo de descargas ilegales y el precio final en el que se alcanzan, indicando si se trata de extremos relativos y/o absolutos.

b.- (2 puntos) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de $D(x)$. Estudie la curvatura (concavidad/convexidad) de la función en el intervalo $2 \leq x \leq 15$.

a.- Calculamos el valor de $D(2)$ y de $D(15)$.

$$\left. \begin{aligned} D(2) &= -4 \cdot 2^3 + 36 \cdot 2^2 + 864 \cdot 2 + 400 = 2240 \\ D(15) &= -4 \cdot 15^3 + 36 \cdot 15^2 + 864 \cdot 15 + 400 = 7960 \end{aligned} \right\}$$

El número de descargas ilegales con un aumento del precio de 2 euros es de 2240.

El número de descargas ilegales con un aumento del precio de 15 euros es de 7960.

Averiguamos si la derivada de la función descargas se anula.

$$\left. \begin{aligned} D'(x) &= -12x^2 + 72x + 864 \\ D'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -12x^2 + 72x + 864 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 72 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 18}{2} = \begin{cases} \frac{6+18}{2} = 12 \in [2,15] \\ \frac{6-18}{2} = -6 \notin [2,15] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 12$.

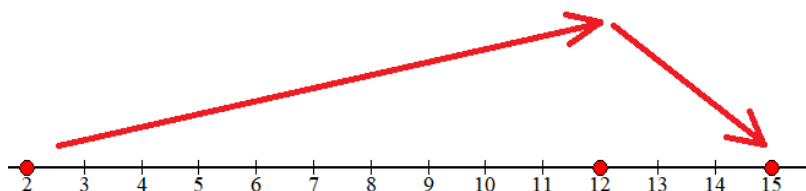
- En el intervalo $[2,12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$D'(10) = -12 \cdot 10^2 + 72 \cdot 10 + 864 = 384 > 0. \text{ La función crece en } [2,12).$$

- En el intervalo $(12,15]$ tomamos $x = 13$ y la derivada vale

$$D'(13) = -12 \cdot 13^2 + 72 \cdot 13 + 864 = -228 < 0. \text{ La función decrece en } (12,15].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = 12$.

Como $D(12) = -4 \cdot 12^3 + 36 \cdot 12^2 + 864 \cdot 12 + 400 = 9040$ podemos afirmar que aumentando el precio 12 euros, es decir, con un precio de $10 + 12 = 22$ euros se consigue un número de descargas máximo de 9040. Este máximo es absoluto.

Como $D(2) = 2240 < 7960 = D(15)$ el mínimo absoluto de las descargas es 2240 que se producen con un aumento de 2 euros en el precio, es decir, con un precio de $10 + 2 = 12$ euros.

b.- Averiguamos si la derivada segunda se anula.

$$D'(x) = -12x^2 + 72x + 864 \Rightarrow D''(x) = -24x + 72$$

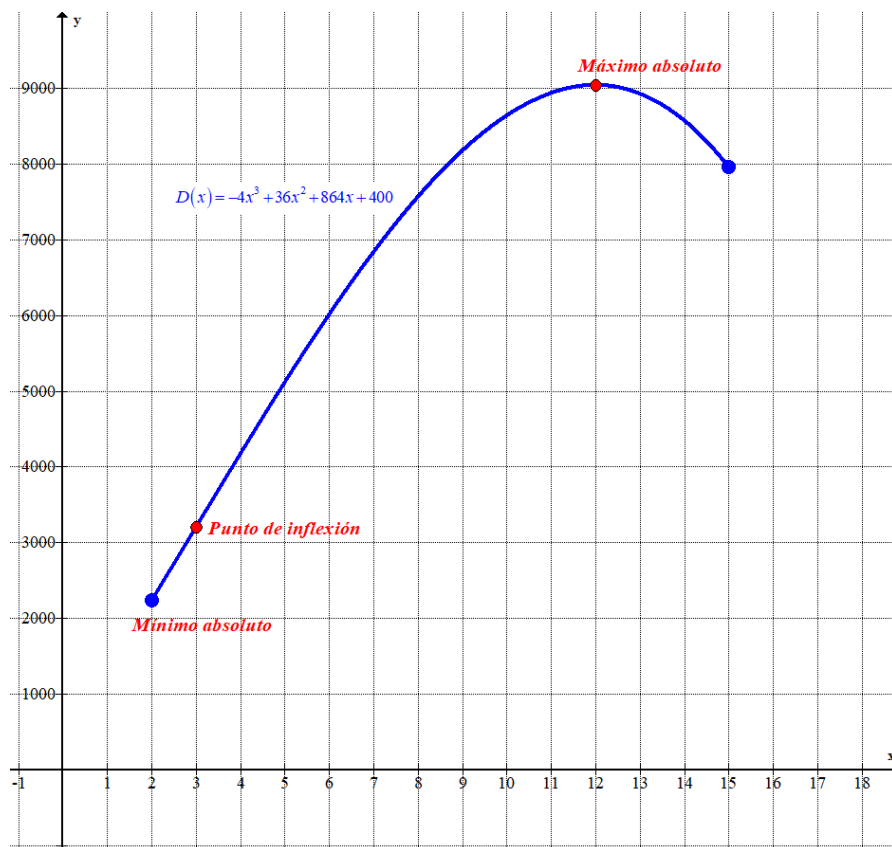
$$D''(x) = 0 \Rightarrow -24x + 72 = 0 \Rightarrow 24x = 72 \Rightarrow x = \frac{72}{24} = 3 \in [2, 15]$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x = 3$

- En el intervalo $[2, 3)$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada segunda vale $D''(2.5) = -24 \cdot 2.5 + 72 = 12 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $[2, 12)$.
- En el intervalo $(3, 15]$ tomamos $x = 10$ y la derivada segunda vale $D''(10) = -24 \cdot 10 + 72 = -168 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(3, 15]$.

La función es convexa ($\cup$) en $[2, 12)$ y cóncava ($\cap$) en $(3, 15]$.

La función cambia de convexa a cóncava en $x = 3$. La función presenta un punto de inflexión en $x = 3$. Como $D(3) = -4 \cdot 3^3 + 36 \cdot 3^2 + 864 \cdot 3 + 400 = 3208$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(3, 3208)$.



3.- (10 puntos) La librería quiere obtener información para prever la demanda y planificar mejor los pedidos. Para ello se toma una muestra aleatoria simple de 100 clientes y se observa que 52 de ellos realizan compras online al menos una vez al mes.

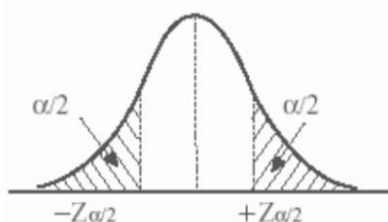
- a.- (5 puntos)** A partir de dicha muestra, se desea estimar la proporción de clientes de la librería que realizan compras online al menos una vez al mes. Calcule un intervalo de confianza del 96% para dicha proporción. A la vista del intervalo obtenido, razone si hay motivos para dudar que la proporción real de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes es del 65%. Justifique su respuesta.
- b.- (5 puntos)** Suponga ahora que la proporción real de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes es igual a la estimada en la muestra. Si se seleccionan 10 clientes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que exactamente 6 de ellos realicen compras online al menos una vez al mes.

a.- La proporción de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes tiene un valor de

$$p = \frac{52}{100} = 0.52 \text{ y de aquí obtenemos } q = 1 - 0.52 = 0.48.$$

Para un nivel de confianza del 96% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.52 \cdot 0.48}{100}} \approx 0.1027$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.52 - 0.1027, 0.52 + 0.1027) = (0.4173, 0.6227)$$

La proporción 0.65 no pertenece al intervalo de confianza obtenido, pues $0.65 > 0.6227$. Hay motivos para dudar que la proporción real de clientes que realizan compras online al menos una vez al mes es del 65%.

b.- Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de clientes de un grupo de 10 que realizan compras online al menos una vez al mes.

Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que un cliente haga compras online al menos una vez al mes = 0.52. $X = B(10, 0.52)$.

Nos piden calcular $P(X = 6)$.

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.52^6 \cdot 0.48^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} \cdot 0.52^6 \cdot 0.48^4 = 210 \cdot 0.52^6 \cdot 0.48^4 = \boxed{0.2204}$$

En una muestra de 10 clientes la probabilidad de que exactamente 6 de ellos realicen compras online al menos una vez al mes vale 0.2204.

Q1.- (5 puntos)

Durante una semana en la librería se aplicó un descuento del 10% sobre el precio original de cada artículo. En esa semana, un cliente compró una novela, un cuaderno y una mochila, y pagó en total 117 euros después del descuento. Antes del descuento, el precio del cuaderno era la cuarta parte del precio de la novela y el precio de la mochila era el doble del precio de la novela. Determine el precio original de cada uno de los tres artículos.

Llamamos “n” al precio original de una novela, “c” al precio de un cuaderno y “m” al precio de una mochila.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

En esa semana, un cliente compró una novela, un cuaderno y una mochila, y pagó en total 117 euros después del descuento $\rightarrow 0.90n + 0.90c + 0.9m = 117$.

Antes del descuento, el precio del cuaderno era la cuarta parte del precio de la novela y el precio de la mochila era el doble del precio de la novela $\rightarrow c = \frac{n}{4}; m = 2n$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.9n + 0.9c + 0.9m = 117 \\ c = \frac{n}{4} \\ m = 2n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n + c + m = \frac{117}{0.9} = 130 \\ c = \frac{n}{4} \\ m = 2n \end{array} \right\} \Rightarrow n + \frac{n}{4} + 2n = 130 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n + n + 8n = 520 \Rightarrow 13n = 520 \Rightarrow \boxed{n = \frac{520}{13} = 40} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c = \frac{40}{4} = 10} \\ \boxed{m = 2 \cdot 40 = 80} \end{array} \right.$$

El precio original de una novela es de 40 euros, de un cuaderno es 10 euros y el de una mochila es de 80 euros.

Q2.- (5 puntos)

En la librería se ha estudiado el beneficio semanal (en cientos de euros) en función del tiempo (x) (en días) transcurrido desde el inicio de una campaña promocional, y se ha modelizado por la función:

$$B(x) = 3x^2 + ax + 1$$

Se sabe que el beneficio total acumulado durante los dos primeros días de la campaña ha sido de 3.000 euros, lo que se expresa mediante la condición:

$$\int_0^2 B(x) dx = 30$$

Determine el valor del parámetro a .

Calculamos la expresión de $\int_0^2 B(x) dx$.

$$\int_0^2 3x^2 + ax + 1 dx = \left[x^3 + \frac{ax^2}{2} + x \right]_0^2 = \left[2^3 + \frac{a \cdot 2^2}{2} + 2 \right] - \left[0^3 + \frac{a \cdot 0^2}{2} + 0 \right] = 8 + 2a + 2 = 10 + 2a$$

Igualamos esta expresión a 30 y determinamos el valor de a .

$$\int_0^2 B(x) dx = 30 \Rightarrow 10 + 2a = 30 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow \boxed{a = 10}$$

Para $a = 10$ se cumple lo pedido.

Q3.- (5 puntos)

En la librería, durante una semana, se ofrecen tres promociones: descuento en novelas (A), descuento en manuales (B) y un vale para accesorios (C). De cada 1.000 clientes de la librería, 300 reciben la promoción A, el 50% recibe la promoción B y el resto recibe la promoción C. Se sabe, además, que la probabilidad de que un cliente realice una compra esa semana es 0,6 si ha recibido la promoción A. Por otro lado, se conoce que el 80% de los clientes que han recibido la promoción B y el 70% de los que han recibido la promoción C realizan una compra durante esa semana. Se elige al azar un cliente de la librería y se sabe que ha realizado una compra esa semana. Calcule la probabilidad de que dicho cliente hubiera recibido la promoción A.

Llamamos A a “recibir la promoción A”, B a “recibir la promoción B”, C a “recibir la promoción C” y D a “realizar una compra durante esa semana”.

Nos dicen que $P(A) = \frac{300}{1000} = 0.3$, $P(B) = 0.5$; $P(C) = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2$. También nos dicen que $P(D/A) = 0.6$; $P(D/B) = 0.8$; $P(D/C) = 0.7$.

Nos piden determinar el valor de $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)} =$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7} = \frac{0.18}{0.18 + 0.40 + 0.14} = \frac{0.18}{0.72} = \frac{18}{72} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$



Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

2.- (10 puntos) La función $B(x) = \begin{cases} 2x(32 - 4x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x + 180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x , al que vende su producto.

a.- (4 puntos) Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- (6 puntos) Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

3.- (10 puntos) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- (4 puntos) Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

b.- (6 puntos) Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

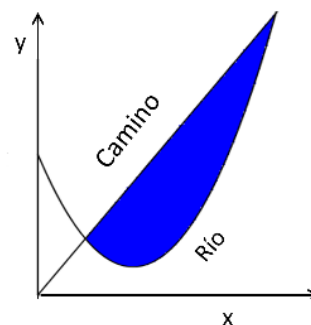
Opción I

Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos) Una finca está delimitada por un río cuyo puede describirse mediante la ecuación $y = (x-2)^2 + 1$ y un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto x como el eje y se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000

calcule el precio de la finca.

Nota: $1 \text{ km}^2 = 100$ hectáreas.



curso
por
el eje
€,

Opción II

Q1.- (5 puntos) Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- (5 puntos) Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

a.- Llamamos x = número de hectáreas sembradas de maíz, y = número de hectáreas sembradas de trigo.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Fertilizante	Beneficio
Hectáreas maíz (x)	$200x$	$800x$
Hectáreas trigo (y)	$300y$	$500y$
TOTALES	$200x + 300y$	$800x + 500y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 800x + 500y$

Las restricciones son:

“La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg” $\rightarrow 200x + 300y \leq 6000$.

“El agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo” $\rightarrow x + y \geq 10$

“La superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo” $\rightarrow x \leq y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 300y \leq 6000 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$2x + 3y = 60$$

$$x + y = 10$$

$$x = y$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{60 - 2x}{3}$
0	20
12	12
30	0

x	$y = 10 - x$
0	10
5	5
10	0

x	$y = x$
5	5
12	12

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

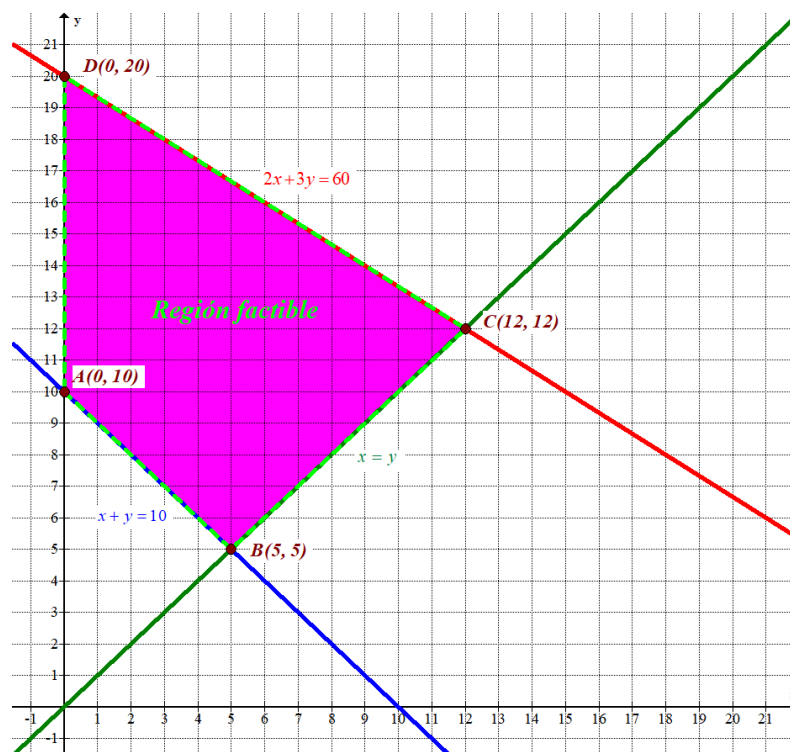
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por encima de las rectas verde y azul, y por debajo de la recta roja.

Comprobamos que el punto $P(5, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 \leq 60 \\ 5 + 10 \geq 10 \\ 5 \leq 10 \\ 5 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 800x + 500y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 800 \cdot 0 + 500 \cdot 10 = 5000$$

$$B(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 800 \cdot 5 + 500 \cdot 5 = 6500$$

$$C(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 800 \cdot 12 + 500 \cdot 12 = 15600 \text{ Máximo}$$

$$D(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 800 \cdot 0 + 500 \cdot 20 = 10000$$

El valor máximo es 15600 y se obtiene en el vértice C(12, 12).

Plantando 12 hectáreas de trigo y otras 12 de maíz se cumplen las restricciones y se obtienen unos beneficios máximos de 15600 €.

b.- La nueva función que nos da los beneficios es $B(x, y) = 800x + 1200y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 800 \cdot 0 + 1200 \cdot 10 = 12000$$

$$B(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 800 \cdot 5 + 1200 \cdot 5 = 10000$$

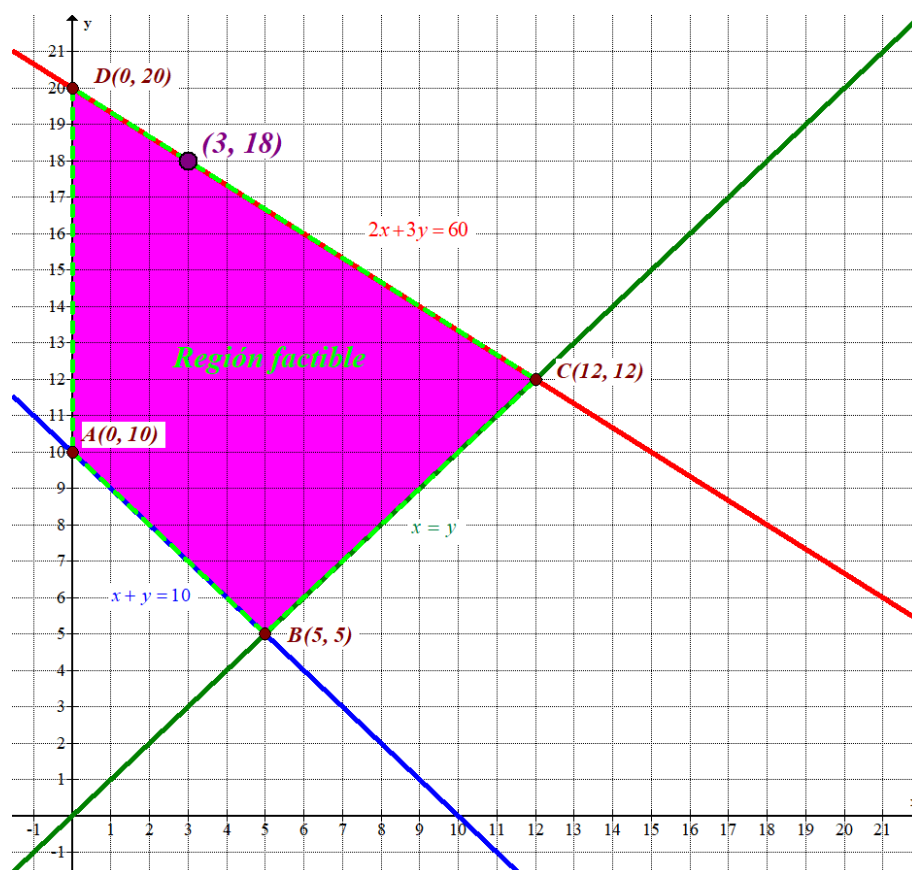
$$C(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 800 \cdot 12 + 1200 \cdot 12 = 24000 \text{ Máximo}$$

$$D(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 800 \cdot 0 + 1200 \cdot 20 = 24000 \text{ Máximo}$$

El valor máximo es 24000 y se obtiene en los vértices C(12, 12) y D(0, 20).

El valor máximo del beneficio se consigue en todos los puntos del segmento CD.

El punto (3, 18) pertenece al segmento CD por lo que (3, 18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.



2.- (10 puntos) La función $B(x) = \begin{cases} 2x(32-4x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x+180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x , al que vende su producto.

a.- (4 puntos) Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- (6 puntos) Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

a.- La función es continua en $[0,3) \cup (3,9]$ pues tiene una expresión polinómica.

Estudiamos la continuidad de la función en $x=3$.

$$\left. \begin{array}{l} B(3) = 2x(32-4x) = 6 \cdot 20 = 120 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x(32-4x) = 120 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -20x+180 = -60+180 = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) = B(3) = 120$$

La función es continua en $x=3$. La función es continua en $[0,9]$.

b.- Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$B(x) = \begin{cases} 64x-8x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x+180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow B'(x) = \begin{cases} 64-16x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -20 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 64-16x = 0 \rightarrow 16x = 64 \rightarrow x = 4 \notin [0,3) \\ -20 = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

La función no tiene ningún punto crítico.

La derivada es positiva en el intervalo $[0,3)$ y negativa en $(3,9]$. La función crece en $[0,3)$ y decrece en $(3,9]$.

Valoramos la función en el cambio de definición y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \rightarrow B(0) = 2 \cdot 0(32-0) = 0 \\ x=3 \rightarrow B(3) = 120 \\ x=9 \rightarrow B(9) = -20 \cdot 9 + 180 = 0 \end{array} \right\}$$

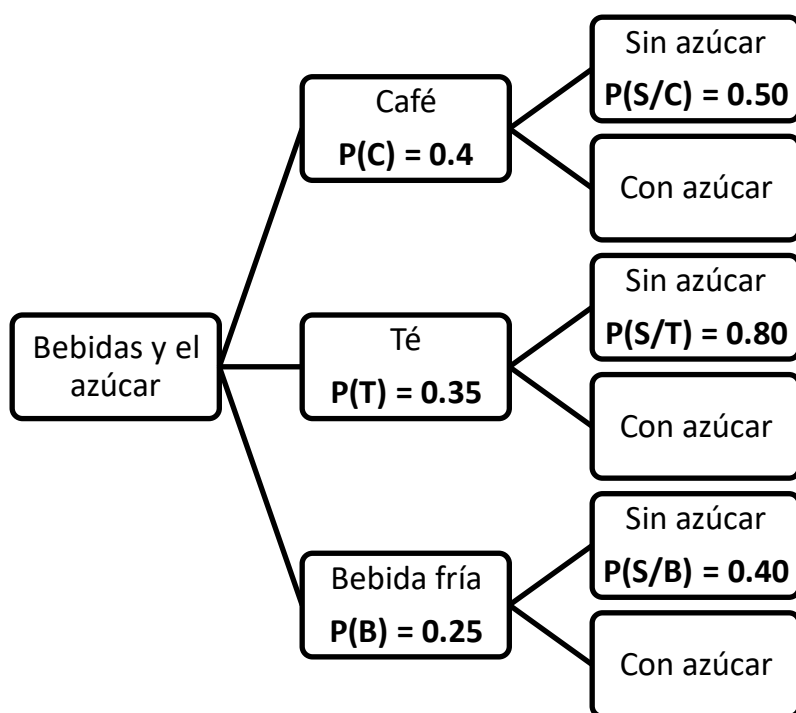
El mayor beneficio es de 120 000 € que se obtienen para $x=3$. El precio unitario necesario para conseguir un beneficio máximo es de 3 €.

3.- (10 puntos) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- (4 puntos) Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

b.- (6 puntos) Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Debemos calcular $P(B \cap S)$.

$$P(B \cap S) = P(B)P(S/B) = 0.25 \cdot 0.4 = \boxed{0.1}$$

b.- Nos piden calcular $P(B/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

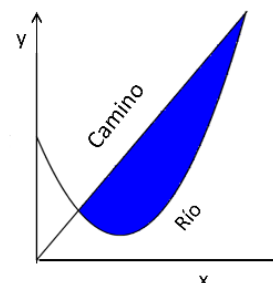
$$\begin{aligned}
 P(B/S) &= \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)P(S/B)}{P(C)P(C/S) + P(T)P(S/T) + P(B)P(S/B)} = \\
 &= \frac{0.1}{0.4 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.8 + 0.1} = \boxed{\frac{5}{29} \approx 0.1724}
 \end{aligned}$$

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje x como el eje y se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.
Nota: $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hectáreas}$.



Q1.- Nos planteamos cuando es posible el producto AX , siendo X una matriz de dimensiones $m \times n$ y A una matriz de orden 2×2 .

$$A \cdot X$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m = 2$, obteniéndose como resultado una matriz de dimensiones $2 \times n$.

Para que sea posible la resta $3AX - B$ las matrices $3AX$ y B tienen que ser de las mismas dimensiones. Como B es de dimensiones 2×3 debe ser $n = 3$.

La matriz X debe ser de dimensiones 2×3 .

Resolvemos la ecuación matricial planteada.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3AX - B = C \Rightarrow 3AX = B + C \Rightarrow AX = \frac{1}{3}(B + C) \Rightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}(B + C)$$

Hallamos la inversa de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la matriz X .

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}A^{-1}(B + C) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3-9 & 9-9 & 3+3 \\ -3+18 & -9+18 & -3-6 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 15 & 9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Q2.- Hallamos los puntos de corte de las gráficas del río y el camino.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-2)^2 + 1 = x^2 + 4 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 = x \\ \frac{6-4}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Calculamos la superficie de la finca.

$$\begin{aligned} \int_1^5 2x - (x^2 - 4x + 5) dx &= \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \\ &= \left[-\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \right] = -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{32}{3} \approx 10.6667 \end{aligned}$$

La superficie de la finca es de $\frac{32}{3} \approx 10.6667 \text{ km}^2$. La finca tiene $\frac{3200}{3} \approx 1066.67$ hectáreas.

El coste de la finca es de $\frac{3200}{3} \cdot 3000 = 3200000$ euros.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- (5 puntos) Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Q1.- Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

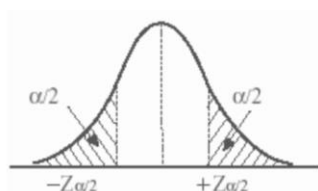
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

Q2.- La proporción de aragoneses interesados en participar como voluntarios es $p = 0.25$ y de aquí obtenemos $q = 1 - 0.25 = 0.75$.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9652	0,9659	0,9666	0,9673	0,9679	0,9686	0,9692	0,9699

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.88} = \sqrt{\frac{0.1875}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2 = \frac{0.1875}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2} = 265.08
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 266 aragoneses.



**Universidad
Zaragoza**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS**
CIENCIAS SOCIALES
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar. Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barras de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barras: A y B. Cada barra A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barra B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barras en total.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barras de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

2.- (10 puntos) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función $N(t) = 1400 \left(\frac{t}{49 + t^2} + 100 \right)$ donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a.- (3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t=0$) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (7 puntos) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

3.- (10 puntos) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de *Ciencia Ficción*, mientras que el resto prefieren *Comedia*. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver *Ciencia Ficción*.

b.- (5 puntos) La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-Frobenius

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array} \right\} (S)$$

Q2.- (5 puntos) Dada $f(x) = \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barras de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barras: A y B. Cada barra A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barra B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barras en total.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barras de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

a.- Llamamos x = número de barras A, y = número de barras B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Proteínas	Carbohidratos	Coste
Nº barras A (x)	$20x$	$10x$	$1.5x$
Nº barras B (y)	$10y$	$15y$	$1.2y$
TOTALES	$20x+10y$	$10x+15y$	$1.5x+1.2y$

Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 1.5x + 1.2y$

Las restricciones son:

“Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos” $\rightarrow 20x + 10y \geq 600$; $10x + 15y \geq 620$.

“no puede consumir más de 100 barras en total” $\rightarrow x + y \leq 100$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 10y \geq 600 \\ 10x + 15y \geq 620 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 2x + 3y \geq 124 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b.- Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$2x + y = 60$$

$$2x + 3y = 124$$

$$x + y = 100$$

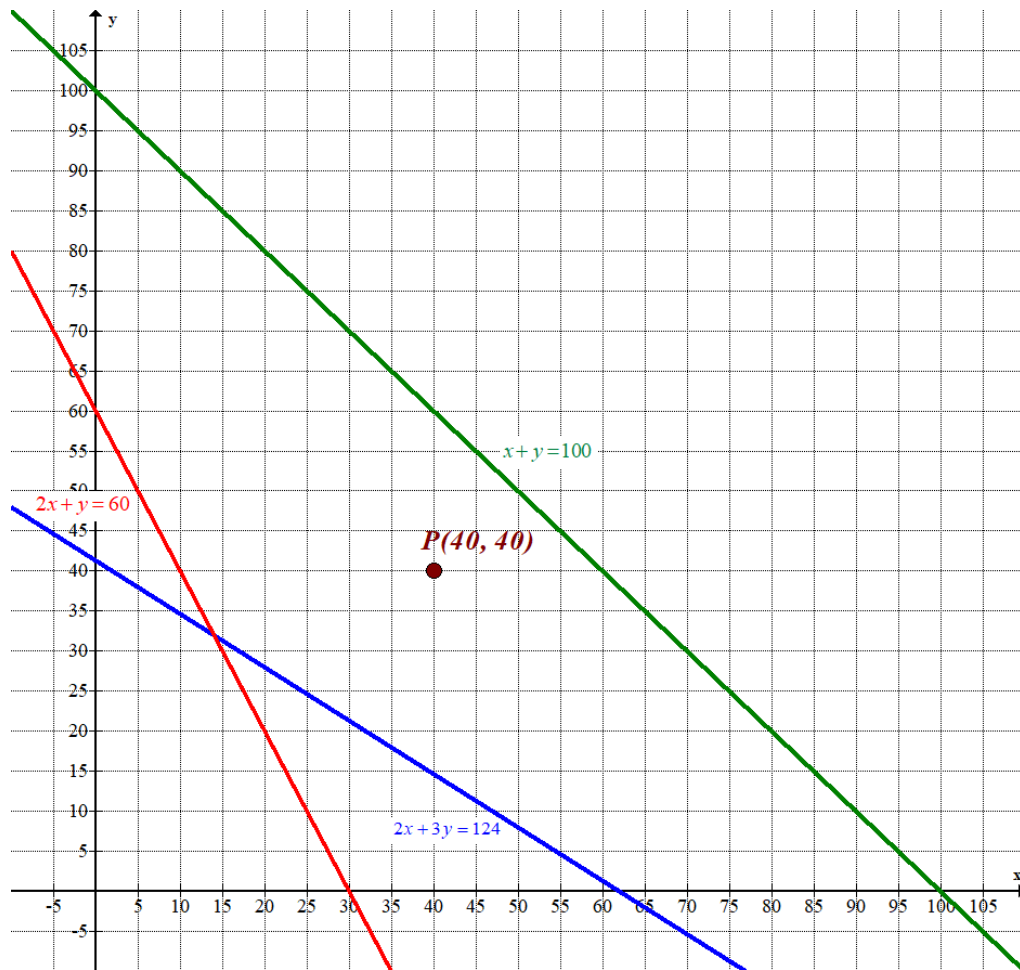
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 60 - 2x$
0	60
10	40
30	0

x	$y = \frac{124 - 2x}{3}$
2	40
35	18
62	0

x	$y = 100 - x$
0	100
100	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

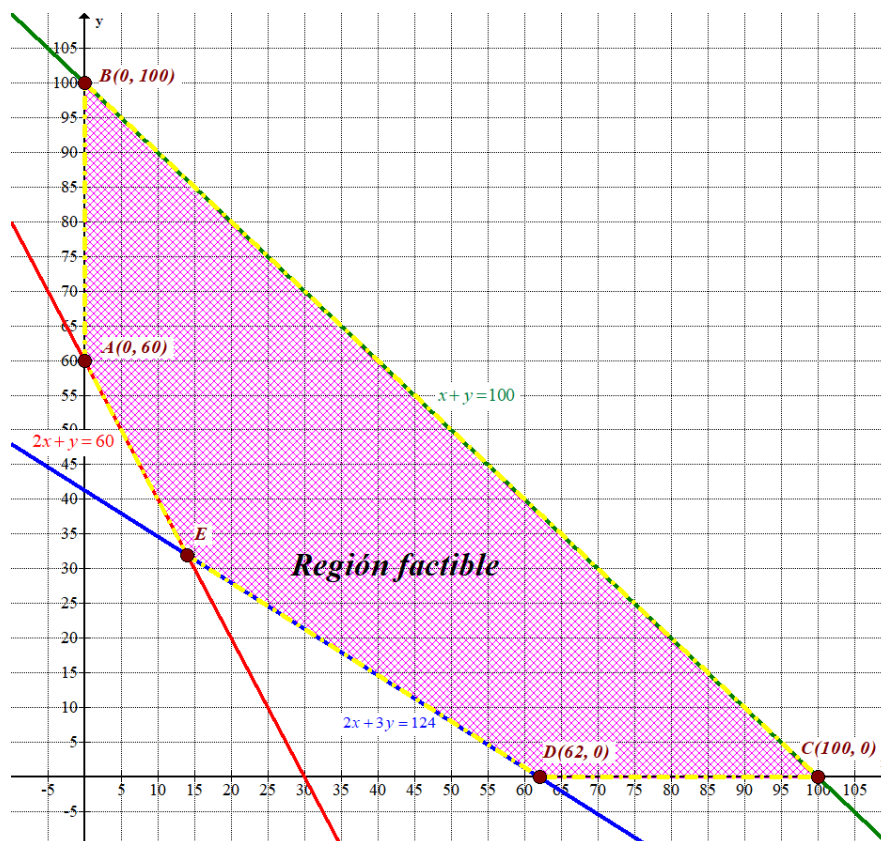
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 2x + 3y \geq 124 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por encima de las rectas **roja** y **azul**, y por debajo de la recta **verde**.

Comprobamos que el punto $P(40, 40)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 40 + 40 \geq 60 \\ 2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 \geq 124 \\ 40 + 40 \leq 100 \\ 40 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 80 + 40 \geq 60 \\ 80 + 120 \geq 124 \\ 40 + 40 \leq 100 \\ 40 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Determinamos las coordenadas del vértice E.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ 2x + 3y = 124 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 60 - y \\ 2x + 3y = 124 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 - y + 3y = 124 \Rightarrow 2y = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{64}{2} = 32} \Rightarrow 2x + 32 = 60 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow \boxed{x = 14} \Rightarrow E(14, 32)$$

Valoramos la función coste $C(x, y) = 1.5x + 1.2y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(0, 60) \rightarrow C(0, 60) = 1.5 \cdot 0 + 1.2 \cdot 60 = 72$$

$$B(0, 100) \rightarrow C(0, 100) = 1.5 \cdot 0 + 1.2 \cdot 100 = 120$$

$$C(100, 0) \rightarrow C(100, 0) = 1.5 \cdot 100 + 1.2 \cdot 0 = 150$$

$$D(62, 0) \rightarrow C(62, 0) = 1.5 \cdot 62 + 1.2 \cdot 0 = 93$$

$$E(14, 32) \rightarrow C(14, 32) = 1.5 \cdot 14 + 1.2 \cdot 32 = 59.4 \text{ Mínimo}$$

El valor mínimo es 59.4 y se obtiene en E(14, 32).

Con 14 barras A y 32 tipo B se cumplen las restricciones con un coste mínimo de 59.4 €.

2.- (10 puntos) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función $N(t) = 1400 \left(\frac{t}{49+t^2} + 100 \right)$ donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a.- (3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t=0$) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (7 puntos) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

a.- Como $N(0) = 1400 \left(\frac{0}{49+0^2} + 100 \right) = 140000$, en el momento inicial del lanzamiento el número de usuarios es de 140 000 que es mayor de 100 000. El lanzamiento ha sido exitoso. Calculamos el límite de la función cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1400 \left(\frac{t}{49+t^2} + 100 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{49+t^2} + 140000 = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{49+t^2} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 140000 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{t^2} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 140000 = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1400}{t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 140000 = \frac{1400}{\infty} + 140000 = 0 + 140000 = \boxed{140000} \end{aligned}$$

La aplicación tendrá 140000 usuarios en un horizonte infinito de tiempo.

b.- Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$N(t) = 1400 \left(\frac{t}{49+t^2} + 100 \right) \Rightarrow N'(t) = 1400 \left(\frac{49+t^2 - 2t \cdot t}{(49+t^2)^2} \right) = 1400 \left(\frac{49-t^2}{(49+t^2)^2} \right)$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 1400 \left(\frac{49-t^2}{(49+t^2)^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{49-t^2}{(49+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 49-t^2 \Rightarrow t^2 = 49 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{49} = 7}$$

Valoramos la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned} t=1 &\rightarrow N(1) = 1400 \left(\frac{1}{49+1^2} + 100 \right) = 140028 \\ t=7 &\rightarrow N(7) = 1400 \left(\frac{7}{49+7^2} + 100 \right) = 140100 \\ t=14 &\rightarrow N(14) = 1400 \left(\frac{14}{49+14^2} + 100 \right) = 140080 \end{aligned} \right\}$$

El mayor número de usuarios es de 140 100 que se obtienen para $t = 7$.

Transcurridos 700 días desde del lanzamiento de la aplicación el número de usuarios es máximo (140 100).

3.- (10 puntos) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de Ciencia Ficción, mientras que el resto prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

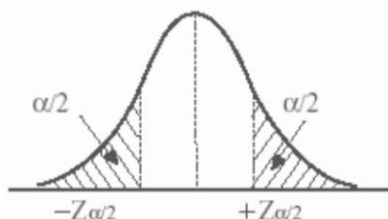
b.- (5 puntos) La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

a.- La proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción es $p = \frac{210}{300} = 0.7$ y de aquí

obtenemos $q = 1 - 0.7 = 0.3$.

Para un nivel de confianza del 96% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

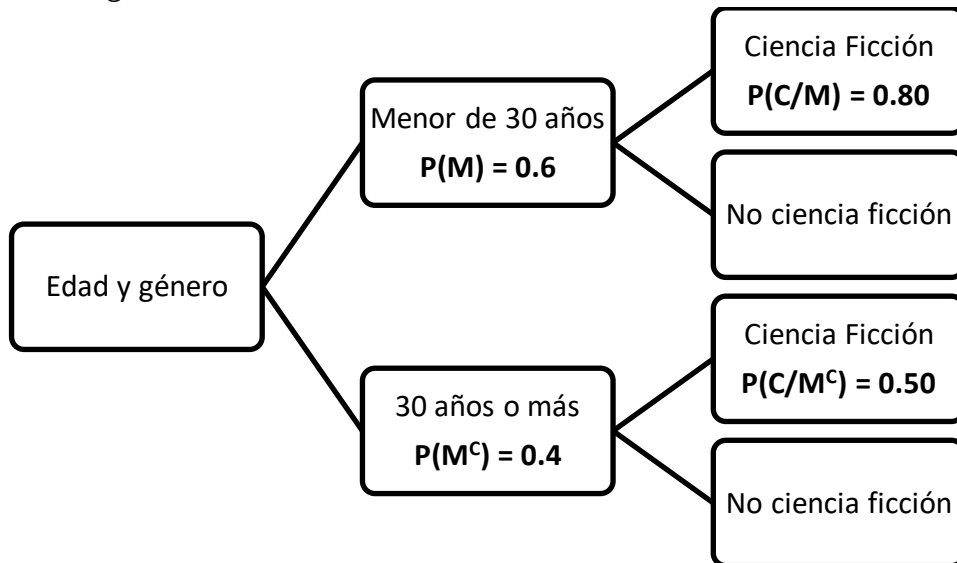
Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{300}} \approx 0.0544$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.7 - 0.0544, 0.7 + 0.0544) = (0.6456, 0.7544)$$

b.- Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(M / C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M / C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)P(C / M)}{P(M)P(C / M) + P(M^c)P(C / M^c)} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.5} = \boxed{\frac{12}{17} \approx 0.7059}$$

La probabilidad de que este usuario que prefiere ver películas de Ciencia Ficción tenga menos de 30 años es de 0.7059.

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Q1.- Sea $X =$ Número de horas de promedio haciendo fila para entrar a conciertos.

$$X = N(3.5, 1.8)$$

Si consideramos la distribución de muestras de tamaño 64 sigue una ley normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.8}{\sqrt{64}} = 0.225$. $\overline{X}_{64} = N(3.5, 0.225)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} < 4)$.

$$P(\overline{X}_{64} < 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{4 - 3.5}{0.225}\right) = P(Z < 2.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9868}$$

k	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9868	0,9871	0,9875

Q2.- Despejamos X.

$$AX + 2A = A^2 \Rightarrow A^{-1}AX + 2A^{-1}A = A^{-1}A^2 \Rightarrow X + 2I = A^{-1}AA \Rightarrow X + 2I = A \Rightarrow \boxed{X = A - 2I}$$

Sustituimos y realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de X.

$$X = A - 2I = A - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener la solución hemos supuesto que la matriz A tiene inversa, aunque no ha sido necesario calcularla. Comprobamos que la matriz A tiene inversa viendo que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Opción II

Q1.- (5 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-Frobenius

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array} \right\} (S)$$

y, si es posible, calcule la solución. **Q2.- (5 puntos)** Dada $f(x) = \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Q1.- El sistema tiene asociada la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ Triangulamos el sistema utilizando el método de Gauss y así poder analizar con más comodidad los rangos de A y A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -5 \quad 8 \quad -14 \\ -3 \quad 3 \quad -6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad -4 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -6 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad -6 \quad 6 \\ 0 \quad -4 \quad 4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 3, al igual que el de A/B. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius podemos afirmar que el sistema es compatible determinado. Hallamos su única solución partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ -2y + 2z = -2 \\ -2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ -2y + 2z = -2 \\ \boxed{z = \frac{2}{-2} = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - 2 = -4 \\ -2y - 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2 \\ -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2 \\ \boxed{y = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 0 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

La solución del sistema es $x = -2, y = 0, z = -1$.

Q2.- Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2} = \frac{2 - \sqrt{6-2}}{2-2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (Conjugado)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{6-x})(x + \sqrt{6-x})}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (\sqrt{6-x})^2}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (6-x)}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \dots\end{aligned}$$

$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad -6 \\ 2 \overline{) \quad 2 \quad 6} \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \\ \underline{1 \quad 3 \quad 0} \end{array}$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x + \sqrt{6-x}} = \frac{2+3}{2 + \sqrt{6-2}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

El límite de la función cuando x tiende a 2 vale $5/4$ (valor finito) por lo que no tiene asíntota en $x = 2$. Para que tuviese asíntota el límite debería ser $+\infty$ o $-\infty$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 2$, pero no tiene asíntota.

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.

a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?

b) (1,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup \bar{B})$?

a) Determinamos las probabilidades de los sucesos A y B.

$$P(A/B) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ son independientes} \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(A) \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ son independientes} \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{P(A)} P(B)}{\cancel{P(A)}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{3}{4}}$$

Calculamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos usando la fórmula.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

b) Sin considerar los sucesos A y B independientes calculamos sus probabilidades.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/B) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{2} P(A \cap B) \\ P(B/A) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{4}{3} P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{3}{2} P(A \cap B) + \frac{4}{3} P(A \cap B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - 1 \right) P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{11}{6} P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{5}{11}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(B) = \frac{3}{2} P(A \cap B) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{22} \\ P(A) = \frac{4}{3} P(A \cap B) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{11} = \frac{20}{33} \end{array} \right.$$

Hemos determinado que $P(A) = \frac{20}{33}$ y $P(B) = \frac{15}{22}$.

Calculamos $P(A \cup \bar{B})$.

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] =$$

$$= \frac{20}{33} + 1 - \frac{15}{22} - \left[\frac{20}{33} - \frac{5}{11} \right] = \boxed{\frac{17}{22}}$$



El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final se calculará sumando las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividiendo dicha suma por tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

3.- (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

4.- (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

c.- (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5.- (10 puntos) En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

6.- (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X=2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial

$AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

a.- Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX - IX = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} B$$

Comprobamos que la matriz $A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - I)^{-1}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$X = (A - I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ -1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

b.- Llamamos "x" al número de unidades vendidas en tienda, "y" al número de unidades vendidas online y "z" al número de unidades vendidas de segunda mano.

Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto →

$$10x + 6y + 5z = 1600$$

El número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física → $y = 5x$

Por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física $\rightarrow 5z = 10x + 800$

Reuniendo las tres ecuaciones tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 10x + 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ z = 2x + 160 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ -2x + z = 160 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema con técnicas matriciales.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ -2x + z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes, hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 0 + 0 + 10 + 30 + 0 = 50 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{50} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 5 & 20 & -25 \\ 2 & -12 & 40 \end{pmatrix}$$

Utilizamos lo obtenido para resolver el sistema.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 5 & 20 & -25 \\ 2 & -12 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1600 - 0 - 800 \\ 8000 - 0 - 4000 \\ 3200 - 0 + 6400 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 800 \\ 4000 \\ 9600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 80 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 unidades en tienda online y 192 en tienda de segunda mano.

2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

a.- Llamamos x = número de partidos, y = número de conciertos.

Obtenemos las restricciones del problema.

Su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros $\rightarrow 60x + 40y \leq 1000$.

Debe asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos $\rightarrow x \geq y$.

Debe acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año $\rightarrow x \leq 14$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 40y \leq 1000 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

¿Puede ser $x = 8$ e $y = 8$? Veamos si se cumplen todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60 \cdot 8 + 40 \cdot 8 \leq 1000 \\ 8 \geq 8 \\ 8 \leq 14 \\ 8 \geq 0; 8 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 800 \leq 1000 \text{ ¡OK!} \\ 8 \geq 8 \text{ ¡OK!} \\ 8 \leq 14 \text{ ¡OK!} \\ 8 \geq 0; 8 \geq 0 \text{ ¡OK!} \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y si puede acudir a 8 partidos y 8 conciertos.

Como se observa en la primera inecuación se gastaría 800 €, por lo que no se gasta todo el presupuesto (1000 €).

b.- Deseamos maximizar el número de salidas $S(x, y) = x + y$.

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$3x + 2y = 50$$

$$y = x$$

$$x = 14$$

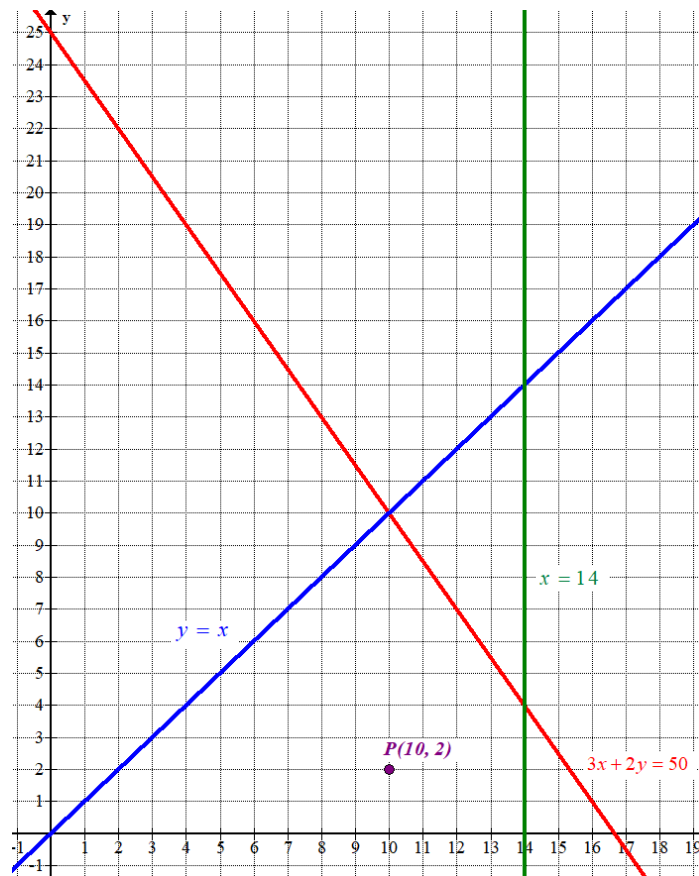
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{50-3x}{2}$
0	25
10	10
14	4

x	$y = x$
0	0
10	10
14	14

$x = 14$	y
14	0
14	4

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

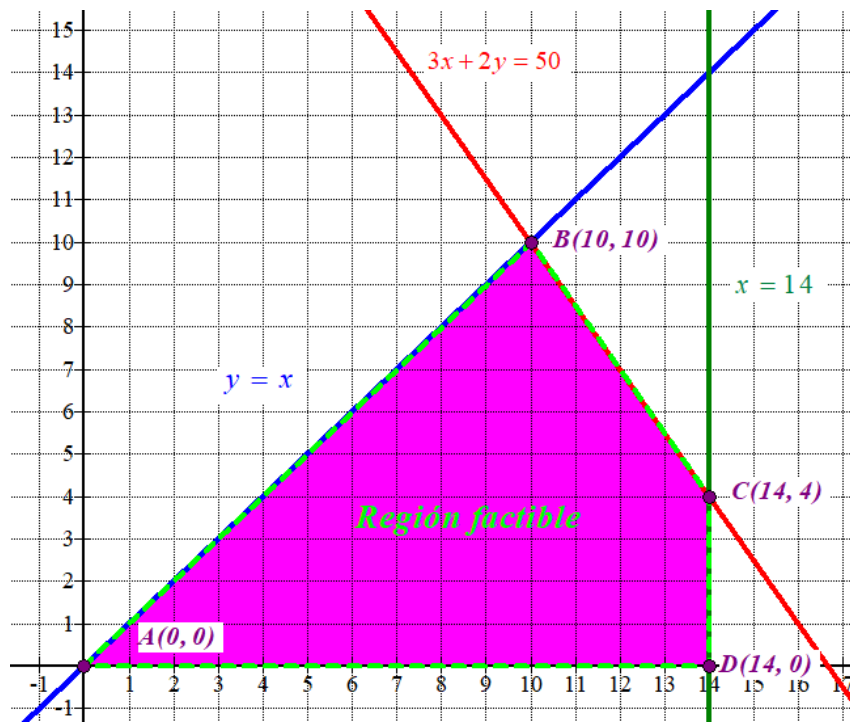
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas roja y azul, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 2)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \leq 50 \\ 10 \geq 2 \\ 10 \leq 14 \\ 10 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función número de salidas $S(x, y) = x + y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow S(0, 0) = 0$$

$$B(10, 10) \rightarrow S(10, 10) = 10 + 10 = 20 \text{ ;Máximo!}$$

$$C(14, 4) \rightarrow S(14, 4) = 14 + 4 = 18$$

$$D(14, 0) \rightarrow S(14, 0) = 14 + 0 = 14$$

El valor máximo es 20 y se obtiene en $B(10, 10)$.

El mayor número de salidas cumpliendo las restricciones son 20 debiendo ir a 10 partidos y a 10 conciertos.

3.- (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

a.- Utilizamos la derivada para averiguar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 \\ IPR'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3t^2 + 108t + 480 = 0 \Rightarrow t^2 - 36t - 160 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4(1)(-160)}}{2} = \frac{36 \pm 44}{2} = \begin{cases} \frac{36 + 44}{2} = 40 \in [0, 62] \\ \frac{36 - 44}{2} = -4 \notin [0, 62] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 40.

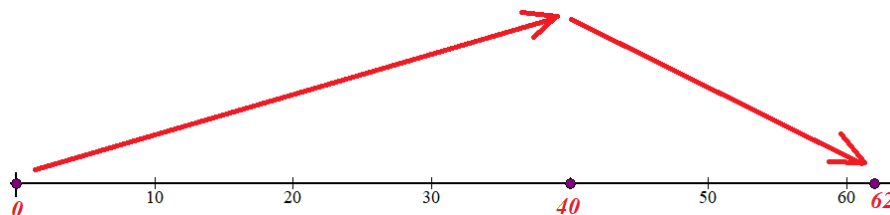
- En el intervalo $[0, 40)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale

$$IPR'(10) = -3 \cdot 10^2 + 108 \cdot 10 + 480 = 1260 > 0. \text{ La función crece en } [0, 40).$$

- En el intervalo $(40, 62]$ tomamos $t = 50$ y la derivada vale

$$IPR'(50) = -3 \cdot 50^2 + 108 \cdot 50 + 480 = -1260 < 0. \text{ La función decrece en } (40, 62].$$

La función sigue el esquema siguiente.



El IPR del país crece los primeros 40 años y decrece a partir del año 1972.

b.- Por lo visto en el apartado anterior sabemos que en el año 1972 se alcanza un valor máximo del IPR. Obtenemos el IPR de ese año.

$$IPR(40) = -40^3 + 54 \cdot 40^2 + 480 \cdot 40 + 6000 = 47600.$$

El valor máximo del IPR es de 47600 en el año 1972.

Como la función crece del año 1932 al año 1972 y decrece del año 1972 al año 1994 el valor mínimo debe estar en los extremos del intervalo $[0, 62]$.

$$IPR(0) = -0^3 + 54 \cdot 0^2 + 480 \cdot 0 + 6000 = 6000$$

$$IPR(62) = -62^3 + 54 \cdot 62^2 + 480 \cdot 62 + 6000 = 5008$$

El valor mínimo del IPR es 5008 que se produce en el año 1994.

c.- Utilizamos la segunda derivada para intentar encontrar los posibles puntos de inflexión de la función.

$$IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 \Rightarrow IPR''(t) = -6t + 108$$

$$IPR''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 108 = 0 \Rightarrow 6t = 108 \Rightarrow t = \frac{108}{6} = 18$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 18)$ tomamos $t = 10$ y la derivada segunda vale
 $IPR''(10) = -60 + 108 = 48 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $[0, 18)$.
- En el intervalo $(18, 62]$ tomamos $t = 40$ y la derivada segunda vale
 $IPR''(40) = -6 \cdot 40 + 108 = -132 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(18, 62]$.

La función tiene un punto de inflexión en el año 1950, siendo convexa de 1932 a 1950 y cóncava del año 1950 a 1994.

4.- (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

c.- (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

a.- En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función es $f(x) = \frac{1}{2-x}$ que es continua pues el denominador no se anula en el intervalo $(-\infty, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$. Estudiamos el signo del radicando.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \text{ para } x \in (2, +\infty)$$

El radicando es positivo y la función es continua en el intervalo $(2, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 2$.

- Existe $f(2) = 1$.
- ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$? ¡No existe!

La función no es continua en $x = 2$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b.- La función en el intervalo $[0, 1]$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2-x} dx = -\int \frac{-1}{2-x} dx = -\ln(2-x) + C$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx = [-\ln(2-x)]_0^1 = [-\ln(2-1)] - [-\ln(2-0)] = -\ln 1 + \ln 2 = \boxed{\ln 2}$$

Hemos comprobado que $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.

c.- La función en el intervalo $(2, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} = \infty - \infty = \text{Indeterminación (conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2x})(x + \sqrt{x^2 - 2x})}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{+\infty}}} = \frac{2}{1 + 1} = \boxed{1}$$

Hemos obtenido que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

5.- (10 puntos) En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

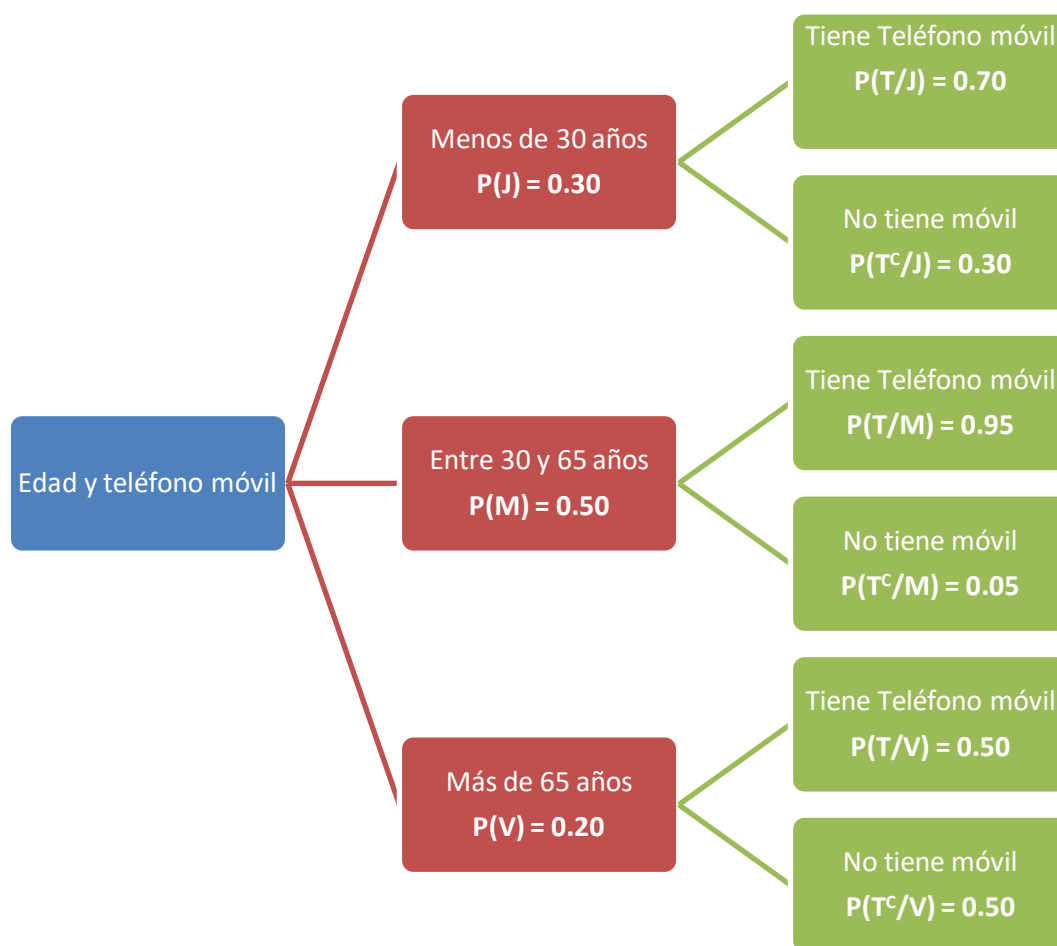
b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Llamamos J a “tener menos de 30 años”, M a “tener entre 30 y 65 años”, V a “tener más de 65 años” y T a “tener Teléfono móvil”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Nos piden calcular $P(V \cap T)$.

$$P(V \cap T) = P(V)P(T/V) = 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.1}$$

La probabilidad de elegir una persona de más de 65 años y con teléfono móvil es de 0.1.

b.- Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}P(T) &= P(J)P(T/J) + P(M)P(T/M) + P(V)P(T/V) = \\&= 0.3 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.95 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{\frac{157}{200} = 0.785}\end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar tenga teléfono móvil es de 0.785.

c.- Nos piden calcular $P(V/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/T) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{P(V)P(T/V)}{P(T)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.785} = \boxed{\frac{20}{157} \approx 0.1274}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años, sabiendo que tiene teléfono móvil tiene un valor aproximado de 0.1274.

d.- Si suponemos independencia en la elección de las tres personas la probabilidad de que los tres tengan teléfono móvil es el producto de las probabilidades de que cada uno tenga móvil.

$$\begin{aligned}P(\text{Los tres tienen teléfono móvil}) &= P(T/J)P(T/M)P(T/V) = \\&= 0.7 \cdot 0.95 \cdot 0.5 = \boxed{\frac{133}{400} = 0.3325}\end{aligned}$$

La probabilidad de que eligiendo una persona de cada grupo de edad los tres tengan teléfono móvil es de 0.3325.

6.- (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

- a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X=2)$.
- b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.
- b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?
- b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

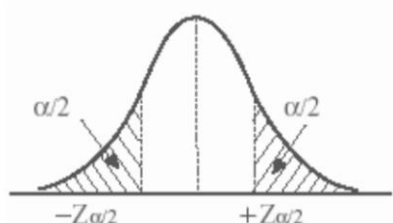
- a.- La variable X es una binomial pues cada elección es independiente de las otras (con reemplazamiento) y solo puede pasar que la persona elegida sea hombre o mujer. Esta binomial tiene parámetros $n = 4$ y $p = \text{probabilidad de elegir un hombre} = 0.48$.
 $X = B(4, 0.48)$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0.48^2 \cdot 0.52^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} 0.48^2 \cdot 0.52^2 = 6 \cdot 0.48^2 \cdot 0.52^2 \approx \boxed{0.3738}$$

- b.- Como no tenemos el dato de la proporción muestral, tomamos $p = 0.5$.

Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6065
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8341
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9293
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685	0.9691
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850

Como el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a $0.08 / 2 = 0.04$.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.04}{1.96}\right)^2} = 600.25 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 601 aficionados.

c.- Tenemos que $p = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667$, $n = 120$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{120}} \simeq 0.0843$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.6667 - 0.0843, 0.6667 + 0.0843) = (0.5824, 0.751)$$



El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final se calculará sumando las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividiendo dicha suma por tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$

esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la

ecuación matricial despejando previamente X .

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

2.- (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B , con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible del apartado **a.-** y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$, donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20).

3.- (10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50$, $0 \leq x \leq 8$.

a.- (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- (3 puntos) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

4.- (10 puntos) La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

- a.- (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.
- b.- (4 puntos) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a.- para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.
- c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?
- 5.- (10 puntos) Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.
- a.- (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?
- b.- (4 puntos) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?
- c.- (3 puntos) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?
- 6.- (10 puntos) En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.
- a.- (5 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.
- b.- (2 puntos) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado a.-, ¿es razonable tal afirmación?
- c.- (3 puntos) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

- a.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .
- b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$A \cdot X + 3B$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n + 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3$$

El producto AX es posible si $m = 2$ y se obtiene una matriz $2 \times n$.

$$A \cdot X$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para que sea posible la suma $AX + 3B$ las dos matrices tienen que tener las mismas dimensiones y para ello debe ser $n = 3$, obteniéndose una matriz 2×3 con las mismas dimensiones que la matriz C .

$$A \cdot X + 3B = C$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 + 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3$$

Las dimensiones de la matriz X deben ser 2×3 .

Resolvemos la ecuación matricial $AX + 3B = C$. Despejamos X .

$$AX + 3B = C \Rightarrow AX = C - 3B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 3B)$$

Hallamos la matriz inversa de A y determinamos la expresión de la matriz X .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-4 & 3-1 & -2+4 \\ 10+4 & -6+1 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

b.- Llamamos “x” al número de participaciones de 10 € vendidas, “y” al número de participaciones de 25 € vendidas y “z” al número de participaciones de 5 €.

Han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros $\rightarrow x = \frac{y}{2}$

Han recaudado 7.100 € $\rightarrow 10x + 25y + 5z = 7100$

Han vendido 430 participaciones $\rightarrow x + y + z = 430$

Reuniendo las tres ecuaciones tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ x = \frac{y}{2} \\ 10x + 25y + 5z = 7100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x = y \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema con técnicas matriciales.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 10 + 2 - 2 - 0 = 9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Utilizamos lo obtenido para resolver el sistema.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -430 + 1420 \\ -860 + 2840 \\ 5160 - 4260 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 990 \\ 1980 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Se han vendido 110 participaciones de 10 €, 220 participaciones de 25 € y 100 de 10 €.

Calculamos las ganancias de estas ventas: $110 \cdot 2.5 + 220 \cdot 5 + 100 \cdot 1 = 1475$ €.

Las ganancias han sido de 1475 €.

2.- (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible del apartado **a.-** y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$. donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20).

a.- Llamamos x = número de productos A, y = número de productos B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Mano de obra en horas	Unidades de material	Ganancias
Nº productos A (x)	$3x$	$2x$	$30x$
Nº productos B (y)	$2y$	$3y$	$40y$
TOTALES	$3x + 2y$	$2x + 3y$	$30x + 40y$

Queremos maximizar las ganancias: $G(x, y) = 30x + 40y$

Las restricciones son:

“Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material” $\rightarrow$
 $3x + 2y \leq 150$; $2x + 3y \leq 150$.

“La producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos” $\rightarrow$
 $x + y \geq 20$

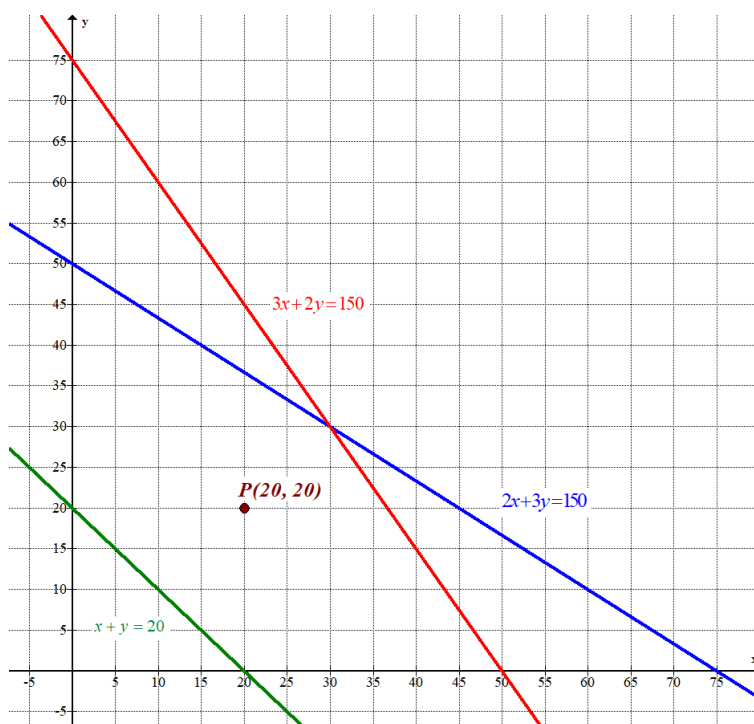
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$3x + 2y = 150$	$2x + 3y = 150$	$x + y = 20$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = \frac{150 - 3x}{2}$	$x \mid y = \frac{150 - 2x}{3}$	$x \mid y = 20 - x$	Primer cuadrante
0 $\mid$ 75	0 $\mid$ 50	0 $\mid$ 20	
30 $\mid$ 30	30 $\mid$ 30	20 $\mid$ 0	
50 $\mid$ 0	75 $\mid$ 0		



Como las restricciones son

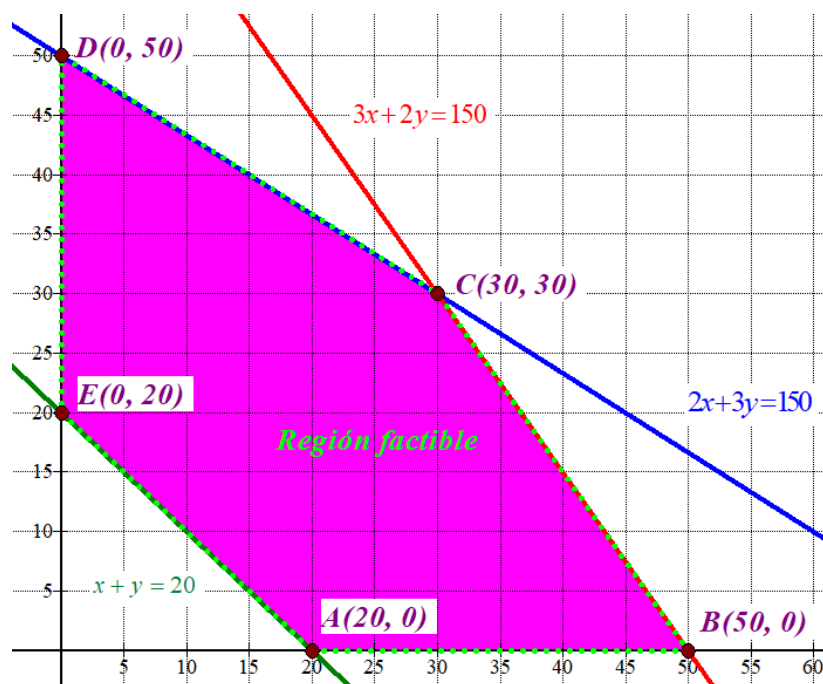
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \leq 150 \\ 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 \leq 150 \\ 20 + 20 \geq 20 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función ganancias $G(x, y) = 30x + 40y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(20, 0) \rightarrow G(20, 0) = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 0 = 600$$

$$B(50, 0) \rightarrow G(50, 0) = 30 \cdot 50 + 40 \cdot 0 = 1500$$

$$C(30, 30) \rightarrow G(30, 30) = 30 \cdot 30 + 40 \cdot 30 = 2100 \text{ ¡Máximo!}$$

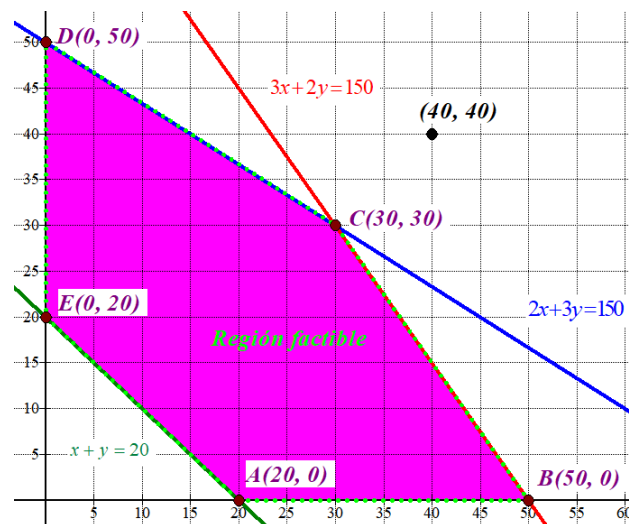
$$D(0, 50) \rightarrow G(0, 50) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 50 = 2000$$

$$E(0, 20) \rightarrow G(0, 20) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 20 = 800$$

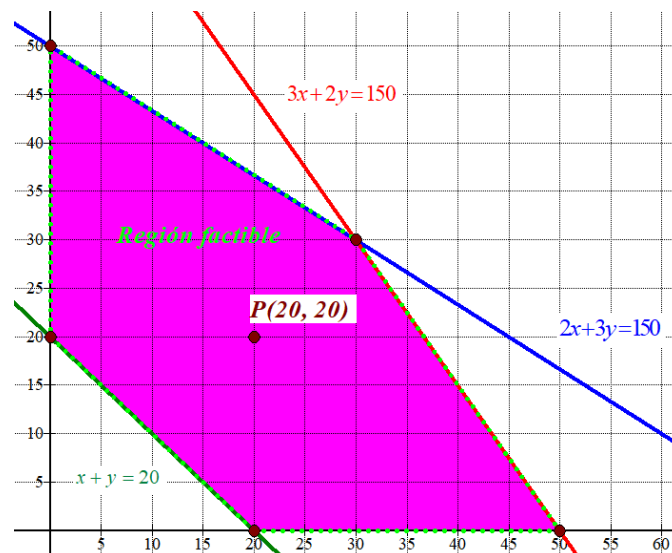
El valor máximo es 2100 y se obtiene en $C(30, 30)$.

Con 30 productos de cada tipo nos ajustamos a las restricciones y obtenemos una máxima ganancia por valor de 2100 €.

- b.- El punto $(40, 40)$ está situado fuera de la región factible y no cumple las restricciones del problema. No puede ser solución del problema.



El punto $(20, 20)$ si pertenece a la región factible y el punto cumple las restricciones, pero no puede ser solución óptima pues es un punto interior de la región factible. Cualquier solución óptima debe estar situada en las rectas que delimitan la región.



3.- (10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50$, $0 \leq x \leq 8$.

a.- (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- (3 puntos) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

a.- Utilizamos la derivada para averiguar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 18x + 40 = 0 \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(40)}}{2(3)} =$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{-156}}{6} = \text{No existe}$$

La derivada nunca se anula. Como $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 + 40 = 25 > 0$ la derivada siempre es positiva y la función es creciente en su intervalo de definición $[0, 8]$.

El valor mínimo de la función está en $x = 0$ y el máximo en $x = 8$.

El valor mínimo de la función es $f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 + 50 = 50$ y el valor máximo es

$$f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 40 \cdot 8 + 50 = 306. \text{ Ambos son extremos absolutos.}$$

b.- Calculamos la derivada segunda y buscamos los valores donde se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow f''(x) = 6x - 18 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Comprobamos si la derivada tercera en $x = 3$ no se anula.

$$f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(3) = 6 \neq 0$$

Al ser un valor distinto de cero la función tiene un punto de inflexión en $x = 3$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 - 18 = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 8]$ tomamos $x = 5$ y la derivada segunda vale $f''(5) = 30 - 18 = 12 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(3, 8]$.

La función tiene un punto de inflexión en $x = 3$, es cóncava en $[0, 3)$ y convexa en $(3, 8]$.

c.- Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 x^3 - 9x^2 + 40x + 50 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{3^4}{4} - 3 \cdot 3^3 + 20 \cdot 3^2 + 50 \cdot 3 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 20 \cdot 1^2 + 50 \cdot 1 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{81}{4} - 81 + 180 + 150 - \frac{1}{4} + 3 - 20 - 50 = \boxed{202}$$

4.- (10 puntos) La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (4 puntos) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en **a.-** para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

a.- Nos piden calcular $V(0)$.

$$V(0) = 200 - \frac{100 \cdot 0}{10 + 2 \cdot 0} = 200 - \frac{0}{10} = 200 \text{ €}$$

El valor inicial del dispositivo es de 200 €.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{100t}{10+2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{\frac{100t}{t}}{\frac{10}{t} + \frac{2t}{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{100}{\frac{10}{t} + 2} = 200 - \frac{100}{\frac{10}{\infty} + 2} = 200 - \frac{100}{2} = \boxed{150 \text{ €}} \end{aligned}$$

El valor del dispositivo en un horizonte infinito de tiempo es de 150 €.

b.- Calculamos la derivada de la función.

$$V'(t) = -\frac{100(10+2t) - 2(100t)}{(10+2t)^2} = -\frac{1000 + 200t - 200t}{(10+2t)^2} = \frac{-1000}{(10+2t)^2}$$

El numerador de la derivada (-1000) es constante y negativo, el denominador $((10+2t)^2)$ es siempre positivo, salvo en $t = -5$ que se anula, pero no pertenece al intervalo $[0, +\infty)$. El cociente es siempre negativo. La función $V(t)$ es siempre decreciente.

El máximo absoluto es $V(0) = 200$ €, la función decrece alcanzando en un horizonte infinito de tiempo un valor de 150 €, por lo que es imposible que el dispositivo alcance un valor inferior a 150 €, en particular no puede alcanzar un precio de 125 €.

c.- Igualamos la función a 175.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t} \\ V(t) = 175 \end{array} \right\} &\Rightarrow 200 - \frac{100t}{10+2t} = 175 \Rightarrow 25 = \frac{100t}{10+2t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 250 + 50t = 100t \Rightarrow 250 = 50t \Rightarrow \boxed{t = \frac{250}{50} = 5} \end{aligned}$$

El dispositivo alcanza un valor de 175 € al cabo de 5 años.

5.- (10 puntos) Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

a.- (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?

b.- (4 puntos) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c.- (3 puntos) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de respuestas correctas de un grupo de 4.

El número de repeticiones es $n = 4$ y la probabilidad de éxito es $p = 0.7$.

X es una variable binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 0.7$. $X = B(4, 0.7)$

a.- Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^0 = 0.7^4 = \boxed{0.2401}$$

La probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas es de 0.2401.

b.- Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{2} 0.7^2 \cdot 0.3^2 + \binom{4}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^1 + 0.2401 = \\ &= 6 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^2 + 4 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3 + 0.2401 = \boxed{0.9163} \end{aligned}$$

La probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen es de 0.9163.

c.- Si llamamos A al suceso aprobar el examen y B al suceso contestar correctamente todas las preguntas. Nos piden calcular $P(B/A)$. Hemos calculado en los apartados anteriores

$P(A) = 0.9163$ y $P(B) = 0.2401$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \{A \cap B = B\} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.2401}{0.9163} = \boxed{\frac{49}{187} \approx 0.262}$$

Hemos utilizado que el suceso $A \cap B =$ “Aprobar el examen (A) y contestar correctamente a todas las preguntas (B)” es el mismo suceso que contestar correctamente a todas las preguntas (B).

La probabilidad de que haya contestado correctamente todas las preguntas sabiendo que ha aprobado el examen es de 0.262.

6.- (10 puntos) En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a.- (5 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

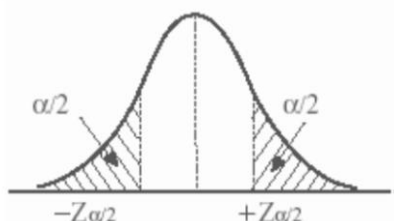
b.- (2 puntos) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado **a.-**, ¿es razonable tal afirmación?

c.- (3 puntos) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

a.- $p = \frac{120}{200} = 0.6$ y $q = 1 - 0.6 = 0.4$.

Para un nivel de confianza del 98%

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5558
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9903
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{200}} \approx 0.08$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6 - 0.08, 0.6 + 0.08) = (0.52, 0.68)$$

b.- El porcentaje del 75% se corresponde con una proporción de 0.75 que no está incluido en el intervalo de confianza calculado en el apartado **a.-**

No es razonable la afirmación con el nivel de confianza del 98%.

c.- Consideramos la variable aleatoria X = Número de votantes a Rupérez de un grupo de 3 personas. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0.62$. $X = B(3, 0.62)$

Nos piden calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0.62^0 \cdot 0.38^3 = 1 - 0.38^3 = \boxed{0.9451}$$

La probabilidad de que al elegir 3 votantes con reemplazamiento al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez es 0.9451.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO C.

Si 0.62 es la probabilidad de que al elegir un votante este haya votado a Rupérez entonces la probabilidad de que no haya votado a Rupérez es de $1 - 0.62 = 0.38$.

Como la elección de los tres votantes es con reemplazamiento sabemos que cada una de las tres elecciones es independiente de las anteriores y en todas la probabilidad de elegir a un votante que no haya votado a Rupérez es de 0.38.

La probabilidad de que al elegir a tres votantes estos no hayan votado a Rupérez es el producto $0.38 \cdot 0.38 \cdot 0.38 = 0.0549$.

El suceso contrario de “al elegir a 3 votantes ninguno ha votado a Rupérez” es “Al elegir 3 votantes al menos uno ha votado a Rupérez”.

$$P(\text{Al elegir 3 votantes al menos uno ha votado a Rupérez}) = 1 - 0.0549 = 0.9451$$

La probabilidad de que al elegir 3 votantes con reemplazamiento al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez es 0.9451.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B . Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$\begin{aligned} XB + A &= C \\ m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 + 2 \times 3 &\rightarrow 2 \times 3 \end{aligned}$$

El producto XB es posible cuando $n = 3$ obteniéndose una matriz $m \times 3$.

Para que sea posible la suma $XB + A$ la matriz debe ser de dimensiones 2×3 , por lo que m debe ser 2.

La matriz X es de dimensiones 2×3 .

Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XB + A = C \Rightarrow XB = C - A \Rightarrow X = (C - A)B^{-1}$$

Comprobamos que la matriz B es invertible y calculamos su inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la obtención de la matriz X.

$$\begin{aligned} X &= (C - A)B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-2 & 0+0+1 & -6+0+5 \\ -1+0-4 & 0+0+2 & 2+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b.- Obtenemos la expresión matricial del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

La ecuación matricial se resuelve despejando $X \rightarrow AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.
Hallamos la inversa de la matriz A y calculamos la expresión de X.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 15 + 9 + 9 + 5 - 6 = 0$, no existe la inversa de A. El sistema no es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad -5 \quad 3 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila 2}^a \leftrightarrow \text{Fila 1}^a\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ -3y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ \boxed{z = -1 + 3y} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 2y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

Llamamos x = número de sacos A, y = número de sacos B.
Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades de nitrógeno	Nº unidades de fósforo	Nº unidades de potasio	Coste
Nº sacos A (x)	$3x$	$5x$	x	$4x$
Nº sacos B (y)	$2y$	$2y$	$2y$	$6y$
TOTALES	$3x + 2y$	$5x + 2y$	$x + 2y$	$4x + 6y$

Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 4x + 6y$

Las restricciones son:

“Debe comprar como máximo 100 sacos” $\rightarrow x + y \leq 100$

“Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio” $\rightarrow 3x + 2y \geq 180$; $5x + 2y \geq 200$; $x + 2y \geq 80$

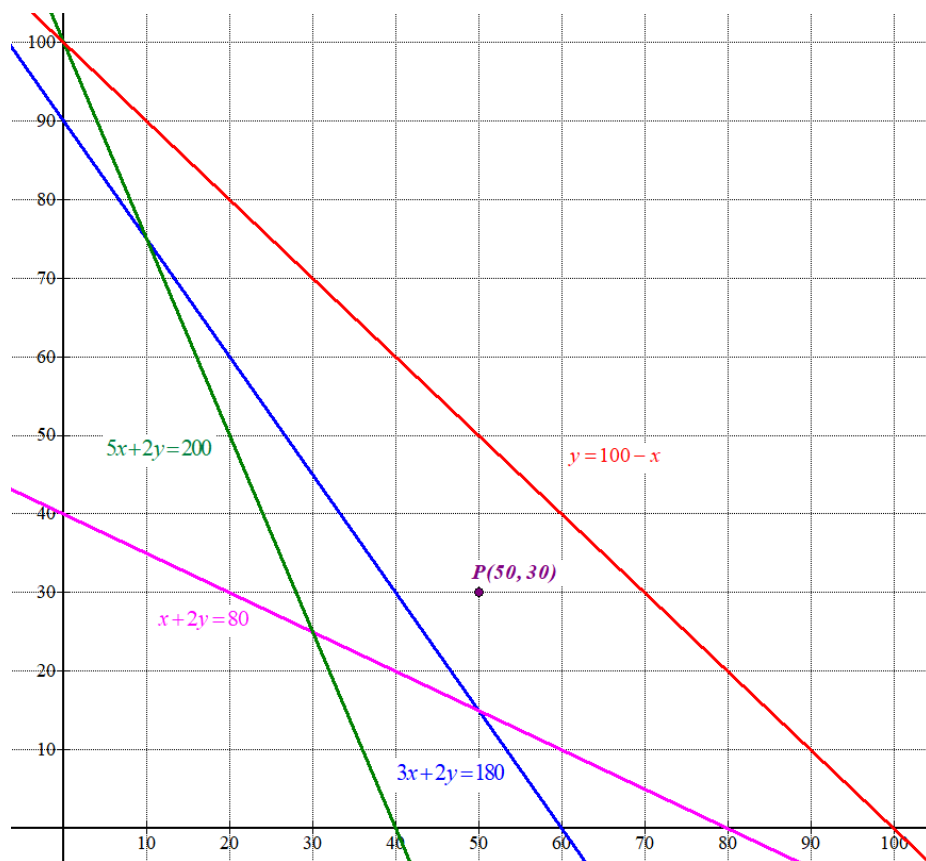
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$y = 100 - x$	$3x + 2y = 180$	$5x + 2y = 200$	$x + 2y = 80$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 100 - x$	$x \mid y = \frac{180 - 3x}{2}$	$x \mid y = \frac{200 - 5x}{2}$	$x \mid y = \frac{80 - x}{2}$	Primer cuadrante
0 120	0 78	0 60	0 60	
70 50	45 60	10 60	10 60	
120 0	70 50			



Como las restricciones son

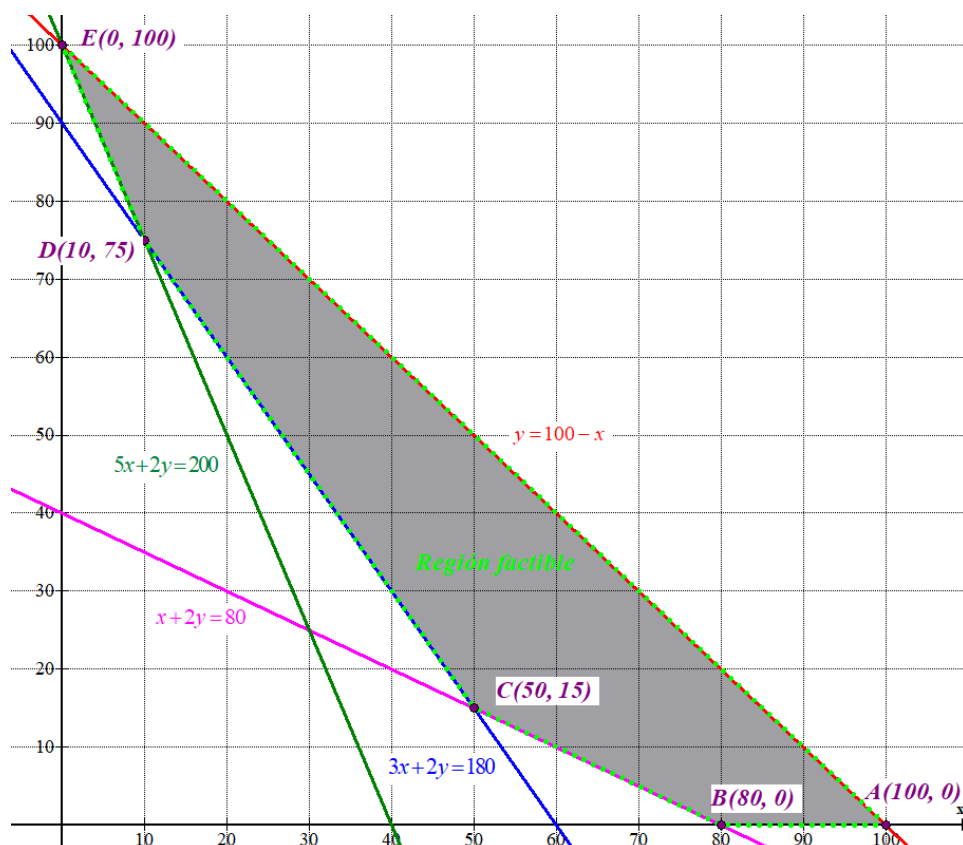
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de la recta **roja** y por encima de las rectas **azul**, **rosa** y **verde**.

Comprobamos que el punto $P(50, 30)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 30 \leq 100 \\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 180 \\ 5 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 200 \\ 50 + 2 \cdot 30 \geq 80 \\ 50 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función costes $C(x, y) = 4x + 6y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(100, 0) \rightarrow C(100, 0) = 400$$

$$B(80, 0) \rightarrow C(80, 0) = 320$$

$$C(50, 15) \rightarrow C(50, 15) = 200 + 90 = 290 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(10, 75) \rightarrow C(10, 75) = 40 + 450 = 490$$

$$E(0, 100) \rightarrow C(0, 100) = 600$$

El valor mínimo es 290 y se obtiene en el punto $C(50, 15)$.

Con 50 sacos A y 15 sacos B nos ajustamos a las restricciones y tenemos un mínimo coste de 290 euros.

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

a.- Los ingresos son $I(x) = 400x$, por lo que la función beneficios es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10.000) = -x^2 + 320x - 10000$$

Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$B(x) = -x^2 + 320x - 10000 \Rightarrow B'(x) = -2x + 320$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 320 = 0 \Rightarrow 2x = 320 \Rightarrow x = \frac{320}{2} = 160$$

Comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 320 \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(160) = -2 < 0 \Rightarrow x = 160 \text{ es máximo}$$

El beneficio es máximo con 160 unidades producidas y vendidas.

$$B(160) = -160^2 + 320 \cdot 160 - 10000 = 15600$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 15600 €.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 80x + 10.000}{x} = x + 80 + \frac{10000}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} \\ CM'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{10000}{x^2} \Rightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{10000} = +100}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en $x = 100$.

$$CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} = 1 - 10000x^{-2} \Rightarrow CM''(x) = -(-2)10000x^{-3} = \frac{20000}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM''(100) = \frac{20000}{100^3} > 0 \Rightarrow \boxed{x = 100 \text{ es mínimo}}$$

El coste medio se minimiza en un nivel de producción de 100 unidades.

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

a.- Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(3mx^2)x^2 - 2x(mx^3 - 1)}{x^4} = \frac{3mx^4 - 2mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^3 + 2}{x^3}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{m(-1)^3 + 2}{(-1)^3} = 0 \Rightarrow \frac{-m + 2}{-1} = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

El valor del parámetro es $m = 2$.

La función queda $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$.

Para decidir si es máximo o mínimo calculamos el signo de la derivada segunda en $x = -1$.

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2x^3 - 3x^2(2x^3 + 2)}{(x^3)^2} = \frac{6x^5 - 6x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6 < 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es máximo relativo}}$$

En $x = -1$ hay un máximo relativo.

b.- Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{mx^3 - 1}{x^2} dx = \int \frac{mx^3}{x^2} - \frac{1}{x^2} dx = \int mx - x^{-2} dx = m \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x}$$

Lo aplicamos a lo pedido.

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[\frac{m}{2} 2^2 + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{m}{2} 1^2 + \frac{1}{1} \right] = 2m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m - 1 = \frac{3}{2} m - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow \frac{3}{2} m - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow 3m - 1 = 8 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

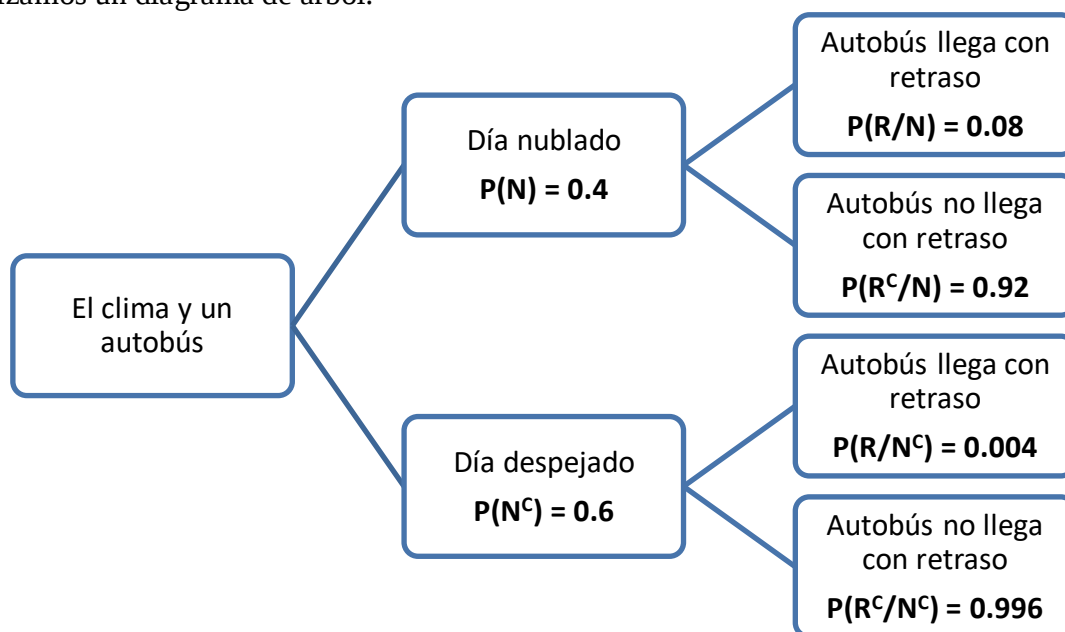
El valor del parámetro es $m = 3$.

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

a.- La probabilidad de que un día sea nublado es $8/20 = 0.4$ y de que sea despejado es 0.6. Llamamos N al suceso “Día nublado” y R al suceso “el autobús llega con retraso”. Realizamos un diagrama de árbol.



Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(N)P(R/N) + P(N^c)P(R/N^c) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.08 + 0.6 \cdot 0.004 = \boxed{0.0344}
 \end{aligned}$$

b.- Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos.

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{3}{4} &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}
 \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

Calculamos $P(A \cap \bar{B})$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0.25 \\ P(A)P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} = 0.234375 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

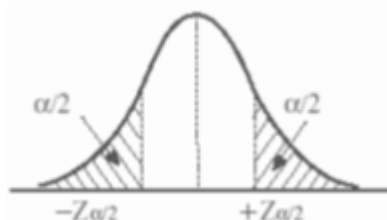
- 6.- (10 puntos)** Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.
- a.- (5 puntos)** Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?
- b.- (4 puntos)** En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.
- c.- (1 punto)** Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

Sea X la variable aleatoria que mide el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. $X = N(\mu, 3000)$

- a.** Si la amplitud del intervalo no es superior a 2000 € entonces el error no debe ser superior a $2000/2 = 1000$ €.

Para un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000 = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000\sqrt{n} = 2.055 \cdot 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \Rightarrow n = \left(\frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \right)^2 \approx \boxed{38.007}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo es de 39 hogares españoles.

- b.-** Para un nivel de confianza del 96% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.055$. $n = 60$. $\bar{x} = 17000$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{60}} \approx 795.9$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17000 - 795.9, 17000 + 795.9) = (16204.1, 17795.9)$$

- c.-** Como 20000 no pertenece al intervalo de confianza hallado con un nivel de confianza del 96% podemos afirmar que es dudosa su afirmación.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule } X.$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{array} \right\} (S)$$

2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

3.- (10 puntos) Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:

a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

4.- (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a \left(1 - \frac{1}{2}x \right)^3$, $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

b.- (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx$.

5.- (10 puntos) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40%, el 35% y el 25% de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80% del grupo G1, el 60% del grupo G2 y el 92% del grupo G3. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

6.- (10 puntos) Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95%.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule X.}$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + my + z &= 0 \end{aligned} \right\} (S)$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

El producto AB es posible y se obtiene una matriz 2×2 .

$$A \cdot B$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$$

Para que sea posible el producto $(A \cdot B) \cdot X$ debe ser $m = 2$, obteniéndose una matriz $2 \times n$, por lo que $n = 1$.

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

La matriz X es de dimensiones 2×1 .

Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tenemos la igualdad:

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+1 & -1+6 \\ -24+24+1 & 12-16+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=2 \\ a+2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=2 \\ a=-4-2b \end{cases} \Rightarrow -12-6b+5b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 14 \Rightarrow \boxed{b = -14} \Rightarrow \boxed{a = -4 + 28 = 24} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

b.- Como es un sistema lineal homogéneo siempre tiene solución (una o infinitas), pues siempre tiene la solución $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. Tiene solución para cualquier valor de m .

Lo resolvemos para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 2}^a \leftrightarrow \text{Ecuación 1}^a \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ \hline -3y + z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ \hline 6y - 2z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 6y - 2z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ \boxed{z = 3y} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = -2\lambda$; $y = \lambda$; $z = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

a.- Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava	Ingresos
Nº lotes A (x)	x	$2x$		$90x$
Nº lotes B (y)	y	$5y$	$4y$	$180y$
TOTALES	$x + y$	$2x + 5y$	$4y$	$90x + 180y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 90x + 180y$

Las restricciones son:

“Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava” $\rightarrow$
 $x + y \leq 120$; $2x + 5y \leq 390$; $4y \leq 240$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 2x + 5y \leq 390 \\ 4y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$y = 120 - x$$

$$5y = 390 - 2x$$

$$y = 60$$

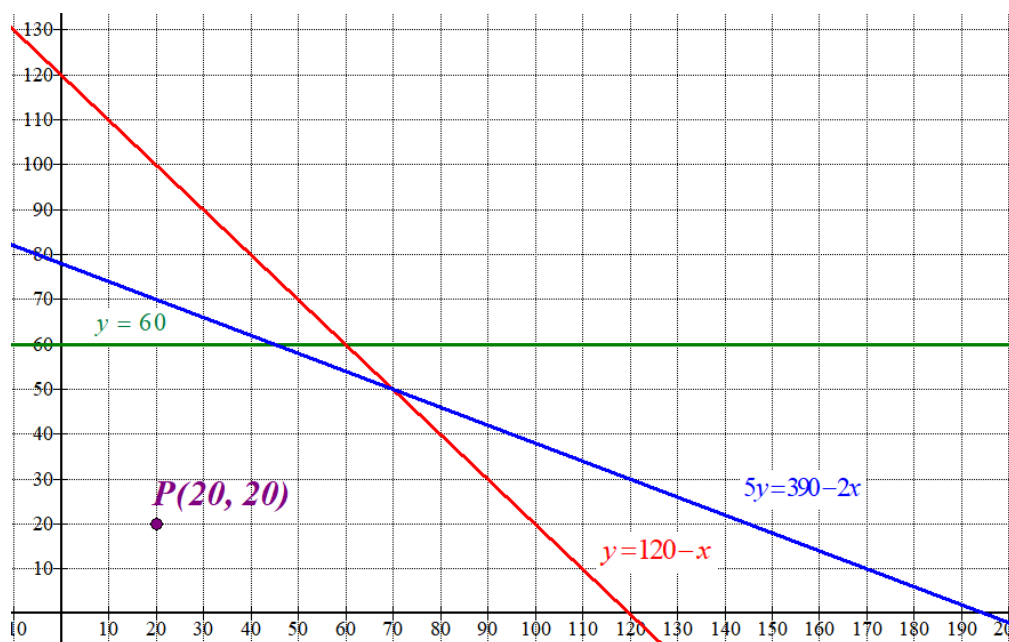
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 120 - x$
0	120
70	50
120	0

x	$y = \frac{390 - 2x}{5}$
0	78
45	60
70	50

x	$y = 60$
0	60
10	60

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

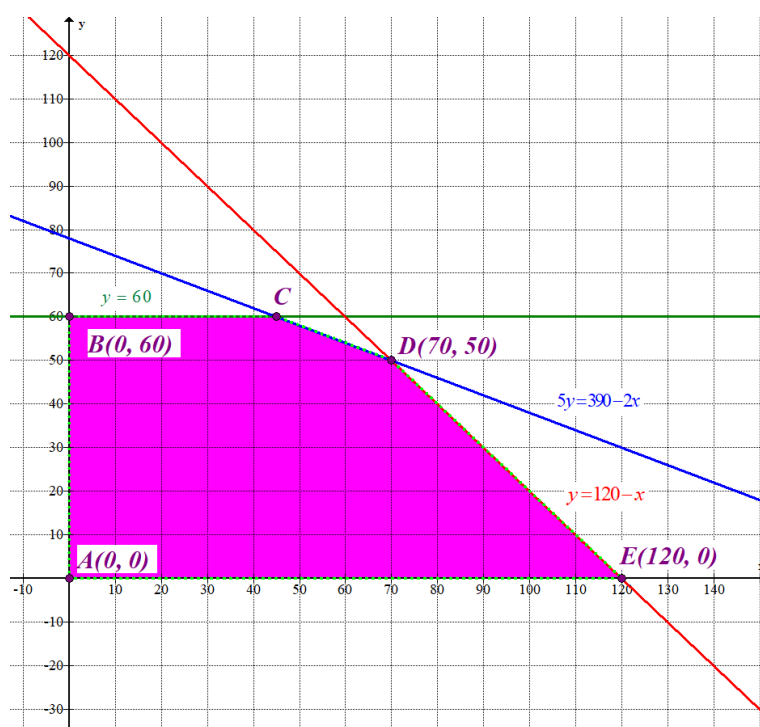
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 120 - 20 \\ 5 \cdot 20 \leq 390 - 2 \cdot 20 \\ 20 \leq 60 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas azul y verde.

$$\left. \begin{array}{l} y = 60 \\ 5y = 390 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 300 = 390 - 2x \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow C(45, 60)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 90x + 180y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 60) \rightarrow I(0, 60) = 0 + 180 \cdot 60 = 10800$$

$$C(45, 60) \rightarrow I(45, 60) = 90 \cdot 45 + 180 \cdot 60 = 14850$$

$$D(70, 50) \rightarrow I(70, 50) = 90 \cdot 70 + 180 \cdot 50 = 15300 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(120, 0) \rightarrow I(120, 0) = 90 \cdot 120 + 0 = 10800$$

El valor máximo es 15300 y se obtiene en D(70, 50).

Con 70 lotes A y 50 lotes B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 15300 €.

b.- Calculamos lo que se gasta haciendo 70 lotes A y 50 lotes B.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava
Nº lotes A (70)	70	140	
Nº lotes B (50)	50	250	200
TOTALES	120	390	200

Como dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava se gastan todos los jamones y las botellas de vino y solo sobran 40 botellas de cava.

3.- (10 puntos) Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:

- a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.
 b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?
 c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

a.- Nos piden calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{t}{t^2}}{\frac{100}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{t}}{\frac{100}{t^2} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{100}{\infty} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{0}{0 + 1} \right) = 15000 \end{aligned}$$

Cuando transcurran muchos años la tendencia es que el número de habitantes se estabilice en torno a los 15000 habitantes.

b.- Utilizamos la derivada.

$$P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100 + t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 2t(1000t)}{(100 + t^2)^2} = \frac{100000 + 1000t^2 - 2000t^2}{(100 + t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= \frac{100000 - 1000t^2}{(100 + t^2)^2} \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{100000 - 1000t^2}{(100 + t^2)^2} = 0 \Rightarrow 100000 - 1000t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = \pm 10$$

Nos quedamos solo con el valor positivo $t = 10$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, 10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$P'(5) = \frac{100000 - 1000 \cdot 5^2}{(100 + 5^2)^2} = \frac{75000}{125^2} > 0. \text{ La función crece en } (0, 10).$$

- En el intervalo $(10, +\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale

$$P'(20) = \frac{100000 - 1000 \cdot 20^2}{(100 + 20^2)^2} = \frac{-300000}{250000} < 0. \text{ La función decrece en } (10, +\infty).$$

La población crece desde el año 2000 al año 2010 y decrece del año 2010 en adelante.

La población es máxima en el año 2010 y su población es el valor de $P(10)$.

$$P(10) = 1000 \left(15 + \frac{10}{100 + 10^2} \right) = 15050$$

La población máxima es de 15050 habitantes en el año 2010.

c.- Igualamos la función a 15040.

$$P(t) = 15040 \Rightarrow 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right) = 15040 \Rightarrow 15 + \frac{t}{100 + t^2} = \frac{15040}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100 + t^2} = 15.04 - 15 = 0.04 \Rightarrow t = 0.04(100 + t^2) \Rightarrow t = 4 + 0.04t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.04t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0.04)(-4)}}{2(-0.04)} = \frac{-1 \pm 0.6}{-0.08} = \begin{cases} \frac{-1 + 0.6}{-0.08} = 5 = t \\ \frac{-1 - 0.6}{-0.08} = 20 = t \end{cases}$$

La población es de 15040 en dos momentos: transcurridos 5 y 20 años, es decir, en el año 2005 y en el 2020.

4.- (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

b.- (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx$.

$$\text{a.- } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$\text{b.- La función es } f(x) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \{\text{apartado a.-}\} = 3 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 24}$$

El valor buscado es $a = 24$.

c.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int (1 - 2x)^3 dx &= \left\{ \begin{aligned} 1 - 2x &= t \\ -2dx &= dt \rightarrow dx = \frac{1}{-2} dt \end{aligned} \right\} = \int t^3 \frac{1}{-2} dt = \\ &= \frac{-1}{2} \int t^3 dt = \frac{-1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{-t^4}{8} = \frac{-(1 - 2x)^4}{8} + K \end{aligned}$$

Pasamos a calcular la integral definida pedida.

$$\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx = \left[\frac{-(1 - 2x)^4}{8} \right]_0^2 = \left[\frac{-(1 - 4)^4}{8} \right] - \left[\frac{-(1 - 0)^4}{8} \right] = \frac{-81}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{-10}$$

5.- (10 puntos) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40%, el 35% y el 25% de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80% del grupo G1, el 60% del grupo G2 y el 92% del grupo G3. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

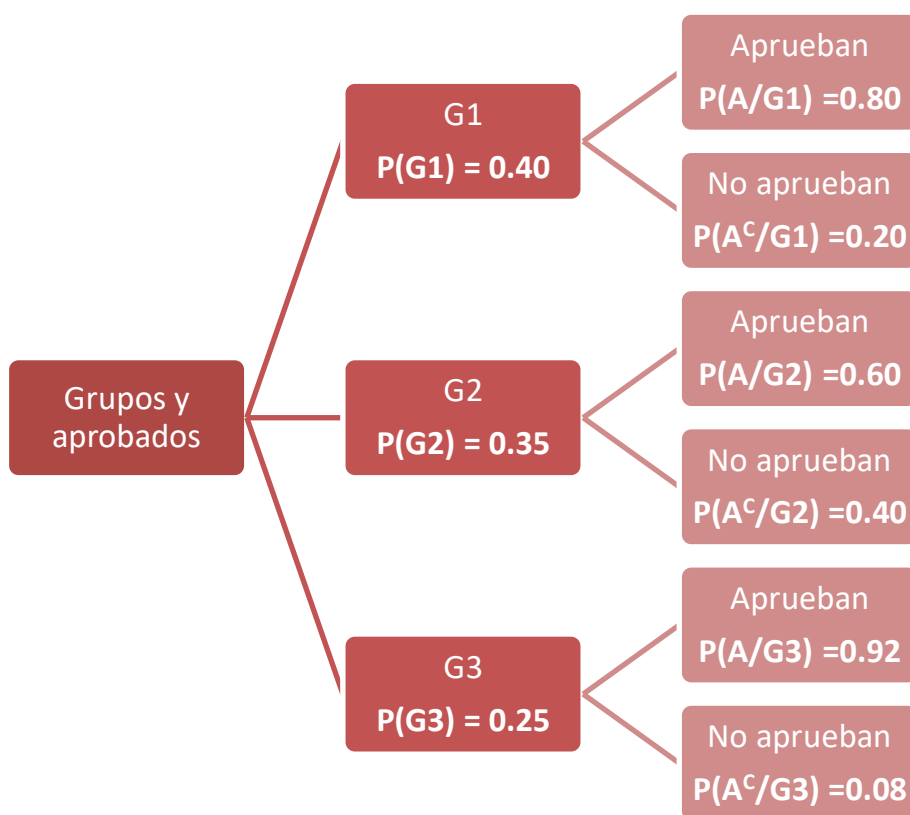
b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Nos piden calcular $P(A \cap G3)$.

$$P(A \cap G3) = P(G3) \cdot P(A/G3) = 0.25 \cdot 0.92 = \boxed{0.23}$$

b.- Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(G1) \cdot P(A^c/G1) + P(G2) \cdot P(A^c/G2) + P(G3) \cdot P(A^c/G3) = \\ &= 0.40 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 0.40 + 0.25 \cdot 0.08 = \boxed{0.24} \end{aligned}$$

c.- Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.24 = \boxed{0.76}$$

d.- Nos piden calcular $P(A^c \cap G1^c)$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap G1^c) &= P((A \cup G1)^c) = 1 - P(A \cup G1) = 1 - [P(A) + P(G1) - P(A \cap G1)] = \\ &= 1 - [P(A) + P(G1) - P(G1)(A/G1)] = 1 - [0.76 + 0.40 - 0.40 \cdot 0.80] = \boxed{0.16} \end{aligned}$$

e.- Nos piden calcular $P(G3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

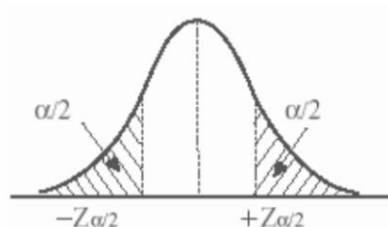
$$P(G3/A) = \frac{P(G3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G3)P(A/G3)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.92}{0.76} = \boxed{\frac{23}{76} \approx 0.3026}$$

- 6.- (10 puntos)** Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.
- a.- (4 puntos)** Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.
- b.- (4 puntos)** Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95%.
- c.- (2 puntos)** A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar medido en horas. $X = N(\mu, 2)$

- a.-** Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



El tamaño de la muestra es $n = 64$. La media es 10. La desviación típica es $\sigma = 2$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0,49$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (10 - 0,49, 10 + 0,49) = (9,51, 10,49)$$

- b.-** Para un nivel de confianza del 95% $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Igualemos el error a 0.75 y hallamos n en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75 = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75\sqrt{n} = 1,96 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \right)^2 = 27,318$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea menor de 0.75 es de 28 hogares.

- c.-** El error debe ser la mitad de la amplitud del Intervalo de confianza, es decir:

$$Error = \frac{10.7555 - 9.8444}{2} = 0.45555 \text{ horas.}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.45555 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.45555 \cdot 9}{2} = 2.049975 \approx 2.05$$

Buscamos en la tabla la probabilidad obtenida y tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9798 \Rightarrow 1 - 0.9798 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9798) = 0.0404 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9596 \approx 0.96}$$

El nivel de confianza es del 96 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8314
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8769
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9677	0.9683
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

$$1.- (10 \text{ puntos}) \text{ Dado el sistema lineal: } \left. \begin{array}{l} (m+1)x = m-2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y + mz = -8 \end{array} \right\} . \text{ Se pide:}$$

- a.- (3 puntos) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.
- b.- (3 puntos) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.
- c.- (4 puntos) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a.-.

2.- (10 puntos) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

- a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.
- b.- (5 puntos) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.
- c.- (2 puntos) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

$$3.- (10 \text{ puntos}) \text{ Dada } f(x) = 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x} . \text{ Se pide:}$$

- a.- (2 puntos) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.
- b.- (5 puntos) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?
- c.- (3 puntos) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

$$4.- (10 \text{ puntos}) \text{ La primera derivada de una cierta función es } f'(x) = x(x-1)^2$$

- a.- (3 puntos) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.
- b.- (4 puntos) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c.- (3 puntos) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

5.- (10 puntos) Responde a las cuestiones siguientes:

a.- (7 puntos) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (2 puntos) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (2 puntos) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (3 puntos) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (3 puntos) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

6.- (10 puntos) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a.- (3 puntos) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b.- (4 puntos) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.

c.- (3 puntos) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Dado el sistema lineal:
$$\left. \begin{aligned} (m+1)x &= m-2 \\ 2x+y &= -3 \\ 3x-2y+mz &= -8 \end{aligned} \right\} . \text{ Se pide:}$$

a.- (3 puntos) Expresa el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b.- (3 puntos) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c.- (4 puntos) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a.-.

$$\left. \begin{aligned} (m+1)x &= m-2 \\ 2x+y &= -3 \\ 3x-2y+mz &= -8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz A y de la matriz ampliada A/B en función del valor de m .

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{vmatrix} = (m+1)m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ o \\ m=0 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{aligned} x &= -2 \\ 2x+y &= -3 \\ 3x-2y &= -8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -4+y &= -3 \\ -6-2y &= -8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= 1 \\ -2y &= -2 \rightarrow y=1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Solución: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -1 - 2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y - z = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible.

a.-

$$\left. \begin{array}{l} (m+1)x = m-2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y + mz = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

b.- Es compatible indeterminado cuando $m = 0$.

Está resuelto en el estudio previo y la solución es: $x = -2$; $y = 1$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$.

c.- Para $m = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1-3 \\ 7/2-6-8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}}$$

- 2.- (10 puntos) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.
- a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.
- b.- (5 puntos) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.
- c.- (2 puntos) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

- a) Llamamos x = número de euros invertidos en criptomonedas, y = número de euros invertidos en fondos de inversión.

Queremos maximizar la rentabilidad: $R(x, y) = 0.3x + 0.05y$

Las restricciones son:

“Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir” $\rightarrow x + y \leq 10000$

“Quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas” $\rightarrow x \leq y$

“Le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros” $\rightarrow 1000 \leq x \leq 3000$

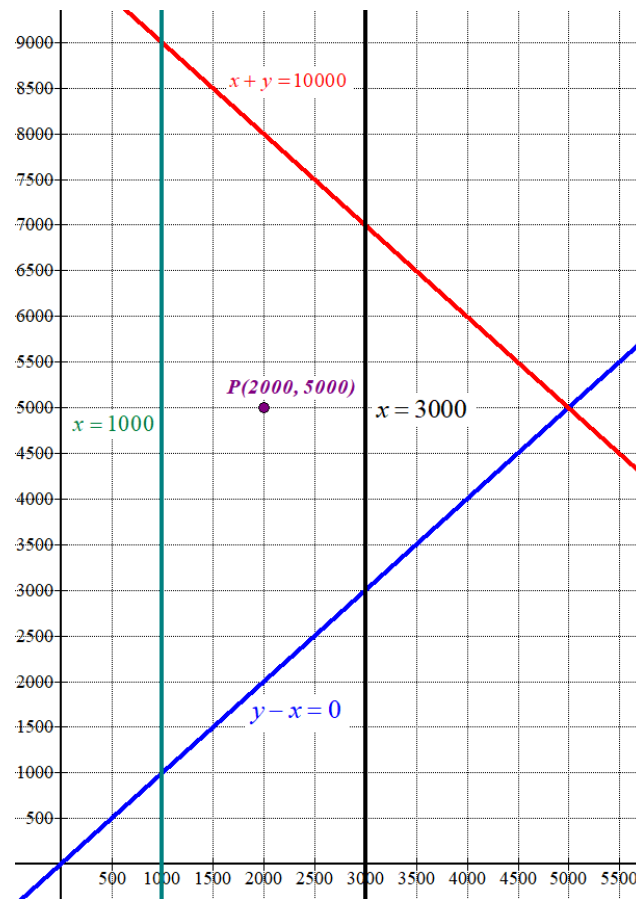
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ x \leq y \\ 1000 \leq x \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ 0 \leq y - x \\ 1000 \leq x \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$x + y = 10000$		$y - x = 0$		$x = 1000$	$x = 3000$	$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 10000 - x$	x	$y = x$	Recta	Recta	Primer cuadrante
1000	9000	1000	1000	vertical	vertical	
3000	7000	3000	3000			



Como las restricciones son

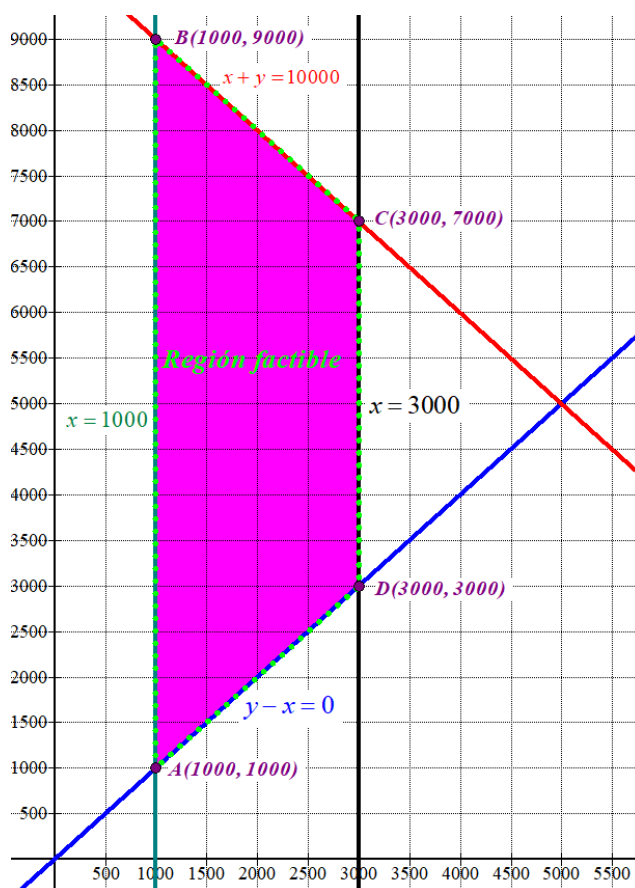
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ 0 \leq y - x \\ 1000 \leq x \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y entre las rectas verticales verde y negra.

Comprobamos que el punto $P(2000, 5000)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2000 + 5000 \leq 10000 \\ 0 \leq 5000 - 2000 \\ 1000 \leq 2000 \leq 3000 \\ 2000 \geq 0; 5000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función rentabilidad $R(x, y) = 0.3x + 0.05y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(1000, 1000) \rightarrow R(1000, 1000) = 300 + 50 = 350$$

$$B(1000, 9000) \rightarrow R(1000, 9000) = 300 + 450 = 750$$

$$C(3000, 7000) \rightarrow R(3000, 7000) = 900 + 350 = 1250 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(3000, 3000) \rightarrow R(3000, 3000) = 900 + 150 = 1050$$

El valor máximo es 1250 y se obtiene en $C(3000, 7000)$.

Invirtiendo 3000 € en criptomonedas y 7000 € en fondos de inversión se obtiene una rentabilidad máxima, siendo esta de 1250 €.

- c) Cambiamos la función objetivo por la de riesgo $G(x, y) = 0.35x + 0y = 0.35x$ intentando minimizar su valor.

Valoramos esta función en los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(1000, 1000) \rightarrow G(1000, 1000) = 350 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(1000, 9000) \rightarrow G(1000, 9000) = 350 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(3000, 7000) \rightarrow G(3000, 7000) = 1050$$

$$D(3000, 3000) \rightarrow G(3000, 3000) = 1050$$

El valor mínimo se alcanza en dos vértices (A y B) lo que implica que cualquier punto que esté en el segmento AB es una solución óptima del problema.

Como $Q(1000, 5000)$ pertenece al segmento AB es una solución óptima del problema.

3.- (10 puntos) Dada $f(x) = 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x}$. Se pide:

- a.- (2 puntos) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.
 b.- (5 puntos) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?
 c.- (3 puntos) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

a.- El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x} = 50 + \frac{1}{100}(1-1) + \frac{1}{1-1} = 50 + \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x} = 50 + \frac{1}{100}(1-\infty) + \frac{1}{1-\infty} = 50 - \infty + 0 = -\infty$$

No existe asíntota horizontal.

b.- Calculamos la función derivada y vemos cuando se anula.

$$f'(x) = \frac{1}{100}(-1) + \frac{-1(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{100} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{100} + \frac{1}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow (1-x)^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x = \sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -10 \Rightarrow \boxed{x=11} \\ 1-x = 10 \Rightarrow \boxed{x=-9} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y comprobamos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = -\frac{1}{100} + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1 \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(-9) = \frac{2}{(1-(-9))^3} = \frac{2}{1000} > 0 \rightarrow x = -9 \text{ es mínimo relativo}$$

$$f''(11) = \frac{2}{(1-11)^3} = -\frac{2}{1000} < 0 \rightarrow x = 11 \text{ es máximo relativo}$$

Como $f(-9) = 50 + \frac{1}{100}(1 - (-9)) + \frac{1}{1 - (-9)} = \boxed{\frac{251}{5}}$ y $f(11) = 50 + \frac{1}{100}(1 - 11) + \frac{1}{1 - 11} = \boxed{\frac{249}{5}}$

tenemos que $f(11) = \frac{249}{5} < \frac{251}{5} = f(-9)$, es decir, el valor en el mínimo relativo es mayor que en el máximo relativo.

c.- Hemos hallado el máximo de la función ingresos $f(x) = 50 + \frac{1}{100}(1 - x) + \frac{1}{1 - x}$ y el máximo ingreso se obtiene con el precio $x = 11$, siendo estos ingresos máximos de $\frac{249}{5} = 49.8 \rightarrow 4980 \text{ €}$.
Pero hay que valorar los ingresos en los extremos del intervalo:

$$\begin{cases} f(5) = 50 + \frac{1}{100}(1 - 5) + \frac{1}{1 - 5} = 49.71 \rightarrow \boxed{4971 \text{ €}} \\ f(21) = 50 + \frac{1}{100}(1 - 21) + \frac{1}{1 - 21} = 49.75 \rightarrow \boxed{4975 \text{ €}} \end{cases}$$

El máximo absoluto de la función en el intervalo $[5, 21]$ se obtiene en $x = 11$, es decir, con un precio de 11 €/kg se obtienen unos ingresos máximos de 4980 €.

4.- (10 puntos) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$

a.- (3 puntos) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b.- (4 puntos) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c.- (3 puntos) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

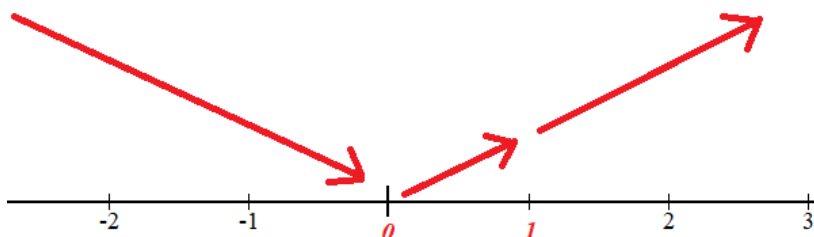
a.- Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -1(-1-1)^2 = -4 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 0.5(0.5-1)^2 = 0.125 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2(2-1)^2 = 2 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

b.- Hallamos la segunda derivada y la igualamos a cero para el estudio de la curvatura.

$$f'(x) = x(x-1)^2 = x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} = x \\ \frac{4+2}{6} = 1 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0. \text{ La función es convexa (U) en } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la segunda derivada vale

$$f''(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 1 = -\frac{1}{4} < 0. \text{ La función es cóncava (O) en } \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (1, +\infty).$$

La función es convexa (U) en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y cóncava (O) en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

La función presenta dos puntos de inflexión (cambio de curvatura): $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$.

c.- Calculamos la integral de la derivada obteniendo la función.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^3 - 2x^2 + x dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + K$$

Determinamos el valor de K sabiendo que $f(0) = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + K \\ f(0) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + K = 10 \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10}$$

5.- (10 puntos) Responde a las cuestiones siguientes:

a.- (7 puntos) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (2 puntos) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

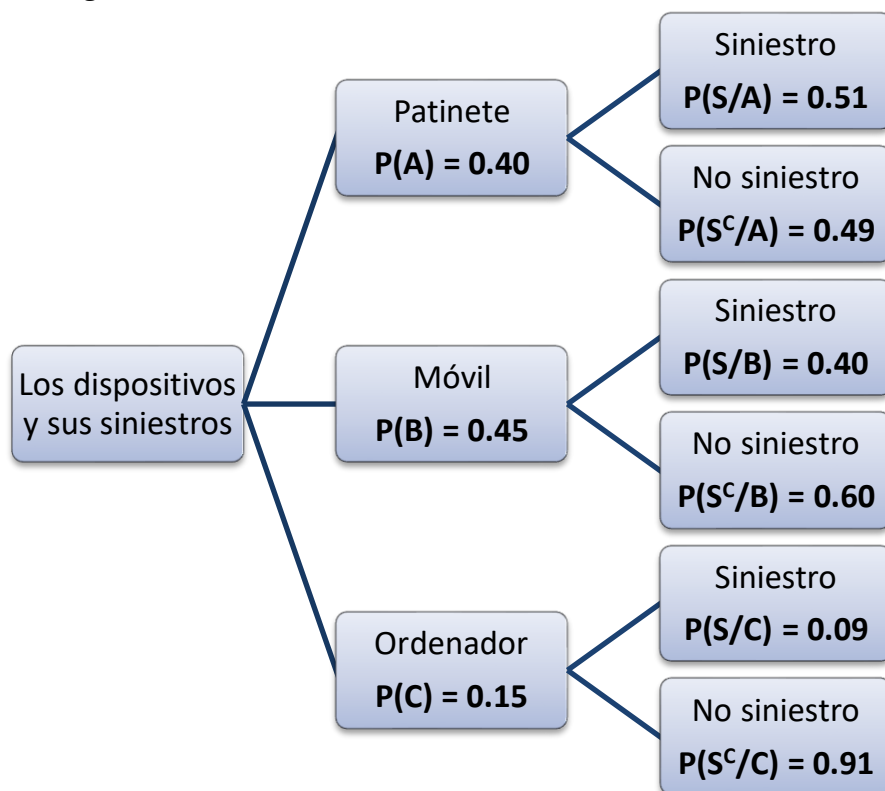
a.2 (2 puntos) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (3 puntos) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (3 puntos) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

a.- Llamamos A = “el dispositivo es un patinete”, B = “el dispositivo es un teléfono móvil”, C = “el dispositivo es un ordenador portátil” y S = “Tener un siniestro”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.1.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(A)P(S/A) + P(B)P(S/B) + P(C)P(S/C) =$$

$$= 0.40 \cdot 0.51 + 0.45 \cdot 0.40 + 0.15 \cdot 0.09 = \boxed{0.3975}$$

a.2.- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)P(S/B)}{P(S)} = \frac{0.45 \cdot 0.40}{0.3975} = \frac{24}{53} \approx 0.453$$

a.3.- Calculamos la probabilidad de que habiendo un siniestro sea por una contingencia de patinete, Y lo mismo para ordenador.

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)P(S/A)}{P(S)} = \frac{0.40 \cdot 0.51}{0.3975} = \frac{136}{265} \approx 0.513$$

$$P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C)P(S/C)}{P(S)} = \frac{0.15 \cdot 0.09}{0.3975} = \frac{9}{265} \approx 0.034$$

Como $P(A/S) = 0.513$, $P(B/S) = 0.453$ y $P(C/S) = 0.034$ lo más probable es que la contingencia provenga de un patinete.

b.- El tamaño de la muestra es $n = 100$.

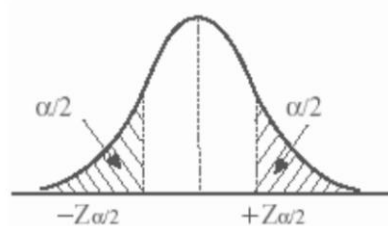
La proporción de personas que tienen contratado un seguro para su teléfono móvil es

$$p = \frac{15}{100} = 0.15 \text{ y la proporción de los que no lo tienen contratado es } q = 1 - 0.15 = 0.85.$$

Para un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803



Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{100}} = 0.0734$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.15 - 0.0734, 0.15 + 0.0734) = (0.0766, 0.2234)$$

- 6.- (10 puntos) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.
- a.- (3 puntos) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?
- b.- (4 puntos) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.
- c.- (3 puntos) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

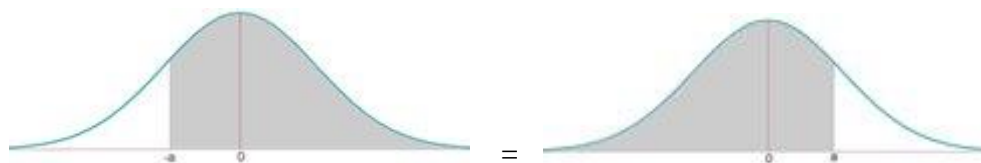
Sea X la variable aleatoria que da el tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos».

Como la varianza es 16 la desviación típica es $\sqrt{16} = 4$ minutos. $X = N(\mu, 4)$

- a.- Si $\mu = 12 \rightarrow X = N(12, 4)$ entonces $\bar{X}_7 = N\left(12, \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$. Nos piden calcular $P(\bar{X}_7 \geq 10)$

$$P(\bar{X}_7 \geq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{10-12}{4/\sqrt{7}}\right) = P(Z \geq -1.32) = P(Z \leq 1.32) =$$

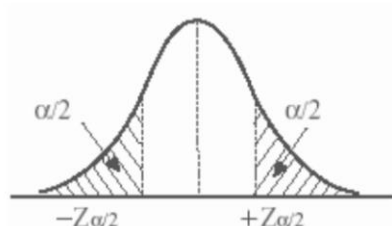
$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.9066}$$



k	0.00	0.01	0.02	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9

- b.- Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0

El tamaño de la muestra es $n = 49$. La media es $\bar{x} = 12$. La desviación típica es $\sigma = 4$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}} = 1.24 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (12 - 1.24, 12 + 1.24) = (10.76, 13.24)$$

c.- Los datos son $n = 16$, $\sigma = 4$. El intervalo de confianza es (9,7; 13,5) minutos.

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{13.5 - 9.7}{2} = 1.9$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.9 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.9$$

Obtenemos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2} = 1.9$.

$$z_{\alpha/2} = 1.9 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.9713 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.0287 \Rightarrow \alpha = 0.0574 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9426}$$

k	0.00	0
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8
1.1	0.8643	0.8
1.2	0.8849	0.8
1.3	0.9032	0.9
1.4	0.9192	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	0.9452	0.9
1.7	0.9554	0.9
1.8	0.9641	0.9
1.9	0.9713	0.9
2.0	0.9772	0.9

Como $1 - \alpha = 0.9426$ el nivel de confianza es del 94.26 %.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a.- (3 puntos) Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

b.- (4 puntos) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (3 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- (10 puntos) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (5 puntos) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

3.- (10 puntos) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (3 puntos) Calcule la función coste marginal ($C_m(q) = C'(q)$) ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (3 puntos) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

c.- (4 puntos) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

4.- (10 puntos) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a.- (3 puntos) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.
- b.- (4 puntos) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.
- c.- (3 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.
- 5.- (10 puntos) Responde a las dos cuestiones siguientes:
- a.- (6 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:
- a.1 (3 puntos) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.
- a.2 (3 puntos) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?
- b.- (4 puntos) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?
- 6.- (10 puntos) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.
- a.- (4 puntos) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.
- b.- (3 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.
- c.- (3 puntos) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a.- (3 puntos) Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

b.- (4 puntos) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (3 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a.- La ecuación $X \cdot A = B$ tiene solución única cuando la matriz A tenga inversa y la solución sería $X = B \cdot A^{-1}$.

Averiguamos cuando tiene inversa la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4m + 8 - 3m = -7m + 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -7m + 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{8}{7}$$

Si $m = \frac{8}{7}$ el determinante de A es nulo y no tiene inversa. La ecuación no tendrá solución.

Si $m \neq \frac{8}{7}$ el determinante de A es no nulo y la matriz tiene inversa. La ecuación matricial tendrá solución única.

b.- Para $m = 1$ la matriz A tiene inversa y la ecuación matricial tiene como solución $X = B \cdot A^{-1}$.
Calculamos la inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 - 3 = 1 \neq 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la solución de la ecuación matricial.

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-8 & 2-1 & -3+2 \\ -7-8 & -1-1 & 2+2 \\ -7-12 & -1-2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

c.- Comprobamos si B tiene inversa.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

No tiene inversa, por lo que intentamos resolverlo sin el uso del cálculo matricial.

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ \boxed{x=y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=-y}$$

Las soluciones son $\begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases}$

2.- (10 puntos) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (5 puntos) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

a.- Llamamos x = número de sucursales rurales, y = número de sucursales urbanas.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de empleados	Inversión	Ingresos (en miles de euros)
Nº sucursales rurales (x)	$3x$	$100000x$	$15x$
Nº sucursales urbanas (y)	$6y$	$150000y$	$18y$
TOTALES	$3x + 6y$	$100000x + 150000y$	$15x + 18y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 15x + 18y$

Las restricciones son:

“La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales” $\rightarrow 100000x + 150000y \leq 3000000$

“Han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25” $\rightarrow x + y \leq 25$

“Se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos” $\rightarrow 3x + 6y \geq 60$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100000x + 150000y \leq 3000000 \\ x + y \leq 25 \\ 3x + 6y \geq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 15y \leq 300 \\ x + y \leq 25 \\ x + 2y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \leq 25 \\ x + 2y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b.- Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$2x + 3y = 60$$

$$x + y = 25$$

$$x + 2y = 20$$

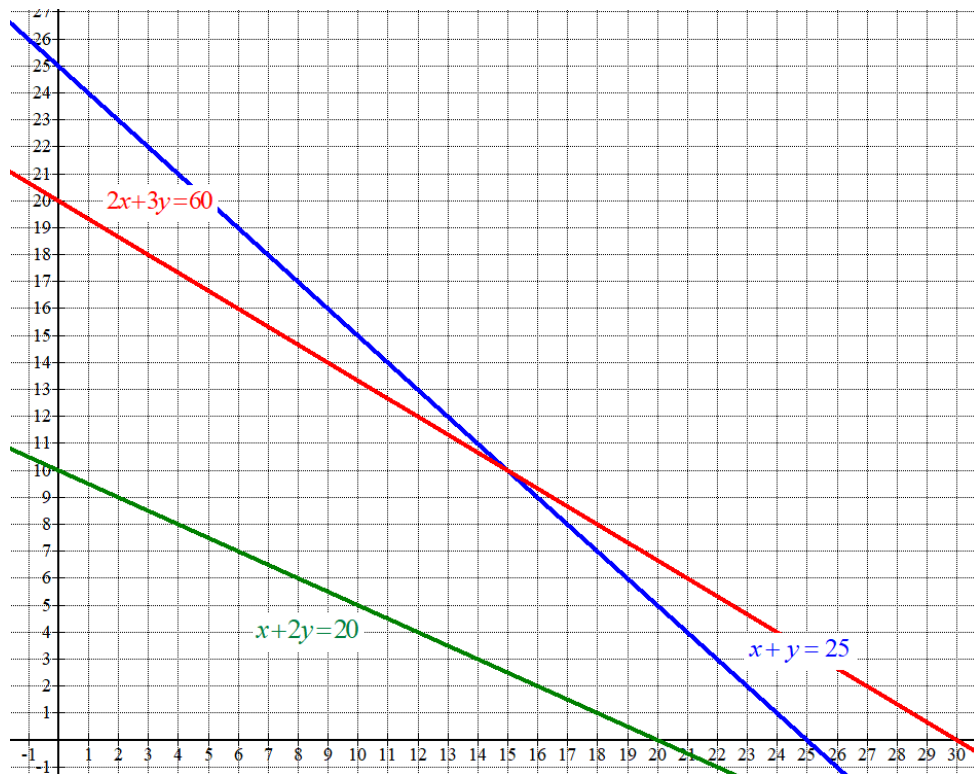
$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c} x & y = \frac{60-2x}{3} \\ \hline 0 & 20 \\ 30 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y = 25-x \\ \hline 0 & 25 \\ 25 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y = \frac{20-x}{2} \\ \hline 0 & 10 \\ 20 & 0 \end{array}$$

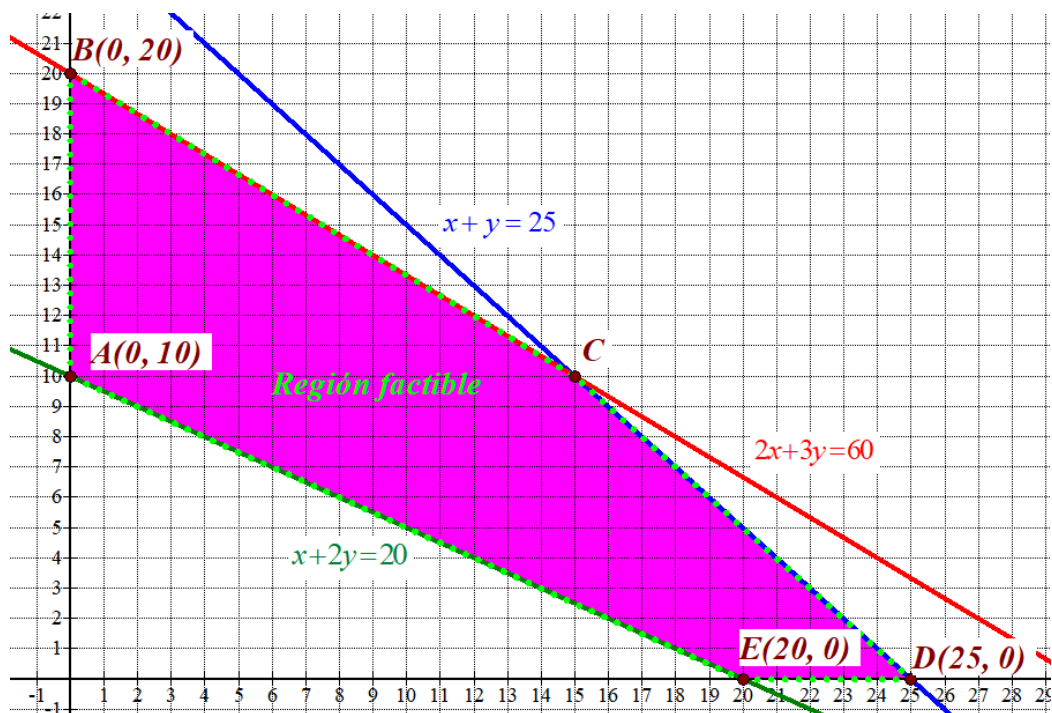
Primer
cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \leq 25 \\ x + 2y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.
Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 25 \\ 2x + 3y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 25 - y \\ 2x + 3y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(25 - y) + 3y = 60 \Rightarrow 50 - 2y + 3y = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow x = 25 - 10 = 15 \Rightarrow C(15, 10)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 15x + 18y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(10, 0) \rightarrow I(10, 0) = 150$$

$$B(0, 20) \rightarrow I(0, 20) = 0 + 360 = 360$$

$$C(15, 10) \rightarrow I(15, 10) = 225 + 180 = 405 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(25, 0) \rightarrow I(25, 0) = 375 + 0 = 375$$

$$E(20, 0) \rightarrow I(20, 0) = 300 + 0 = 300$$

El valor máximo es 405 y se obtiene en C(15, 10).

Abriendo 15 sucursales rurales y 10 urbanas nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 405000 €.

- c.- En la solución óptima se abren 15 sucursales rurales y 10 urbanas generando $15 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 105$ empleos. Y se invierten $15 \cdot 100.000 + 10 \cdot 150.000 = 3.000.000$ €, por lo que se invierte todo el dinero disponible.

3.- (10 puntos) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (3 puntos) Calcule la función coste marginal ($C_m(q) = C'(q)$) ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (3 puntos) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

c.- (4 puntos) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

a.- $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2$

Derivamos el coste marginal y vemos cuando la derivada es positiva.

$$C_m'(q) = -20 + 2q$$

$$C_m'(q) = 0 \Rightarrow -20 + 2q = 0 \Rightarrow q = \frac{20}{2} = 10$$

El crecimiento del coste marginal es nulo cuando se producen 10 unidades. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $q = 10$.

De 0 a 10 unidades tomamos $q = 5$ y tenemos que $C_m'(5) = -20 + 2(5) = -10 < 0$. Por lo que el coste marginal decrece cuando aumenta la producción.

De 10 en adelante tomamos $q = 15$ y tenemos que $C_m'(15) = -20 + 2(15) = 10 > 0$. Por lo que el coste marginal crece cuando aumenta la producción en el intervalo $(15, +\infty)$.

El coste marginal aumenta a partir de la producción de 10 unidades.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}}{q} = 300 - 10q + \frac{q^2}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener el punto crítico del coste medio.

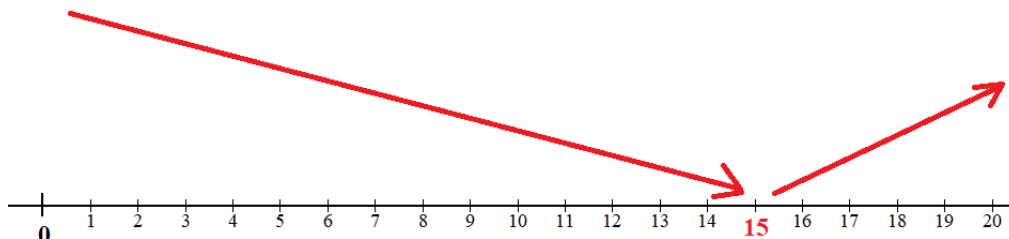
$$CM'(q) = -10 + 2\frac{q}{3}$$

$$CM'(q) = 0 \Rightarrow -10 + 2\frac{q}{3} = 0 \Rightarrow -30 + 2q = 0 \Rightarrow q = \frac{30}{2} = 15$$

Comprobamos la evolución del coste medio estudiando el signo de la derivada antes de $q = 15$ y después de dicho valor.

- En $(0, 15)$ tomamos $q = 10$ y tenemos que $CM'(10) = -10 + 2\frac{10}{3} = -\frac{10}{3} < 0$. El coste medio decrece en $(0, 15)$.
- En $(15, +\infty)$ tomamos $q = 20$ y tenemos que $CM'(20) = -10 + 2\frac{20}{3} = \frac{10}{3} > 0$. El coste medio crece en $(15, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



El coste medio se minimiza en $q = 15$. Con la producción de 15 unidades.

c.- Los ingresos son el número de unidades (q) multiplicado por el precio de una unidad ($P(q)$).

$$I(q) = q \cdot P(q) - C(q) = q(240 - 2q) = 240q - 2q^2$$

Obtenemos la expresión de la función Beneficios.

$$B(q) = I(q) - C(q) = 240q - 2q^2 - \left(300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}\right)$$

$$B(q) = 240q - 2q^2 - 300q + 10q^2 - \frac{q^3}{3} = -60q + 8q^2 - \frac{q^3}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función beneficios.

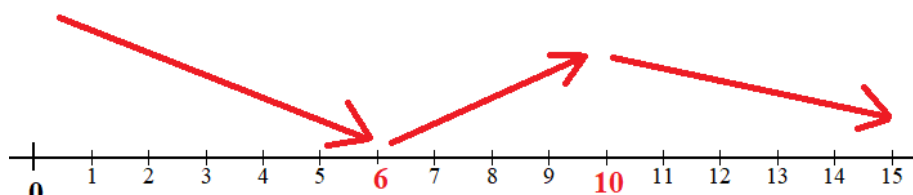
$$B(q) = -60q + 8q^2 - \frac{q^3}{3} \Rightarrow B'(q) = -60 + 16q - q^2$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow 60 - 16q + q^2 = 0 \Rightarrow q = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(60)}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = 10 = q \\ \frac{16-4}{2} = 6 = q \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(0, 6)$ tomamos $q = 1$ y tenemos que $B'(1) = -60 + 16 - 1^2 = -45 < 0$. El beneficio decrece en $(0, 6)$.
- En $(6, 10)$ tomamos $q = 8$ y tenemos que $B'(8) = -60 + 16 \cdot 8 - 8^2 = 4 > 0$. El beneficio crece en $(6, 10)$.
- En $(10, +\infty)$ tomamos $q = 15$ y tenemos que $B'(15) = -60 + 16 \cdot 15 - 15^2 = -45 < 0$. El beneficio decrece en $(10, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



El beneficio es máximo en $q = 10$, es decir, con la producción de 10 unidades.

4.- (10 puntos) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a.- (3 puntos) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

b.- (4 puntos) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

c.- (3 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

a.- Para que sea continua debe serlo en $x = 0$ y en $x = 3$.

Continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \\ f(0) &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{b} \Rightarrow 4 \cdot 3 = b \Rightarrow \boxed{b=12}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+12} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Continua en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{ax+12} = \sqrt{3a+12} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7}{2} - \frac{x}{6} = \frac{7}{2} - \frac{3}{6} = 3 \\ f(3) &= \sqrt{3a+12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{3a+12} = 3 \Rightarrow 3a+12 = 9 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 12$.

Con estos valores la expresión $\sqrt{-x+12}$ existe en el intervalo $0 < x \leq 3$.

b.- Para $a = -1$ y $b = 12$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{-x+12} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & \text{si } 0 < x < 3 \\ -\frac{1}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Estudiamos su derivabilidad en $x = 0$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 2 \cdot 0 = 0 \\ f'(0^+) &= \frac{-1}{2\sqrt{-0+12}} = -\frac{1}{2\sqrt{12}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

No es derivable en $x = 0$.

Estudiamos su derivabilidad en $x = 3$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= \frac{-1}{2\sqrt{-3+12}} = \frac{-1}{6} \\ f'(3^+) &= -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+)$$

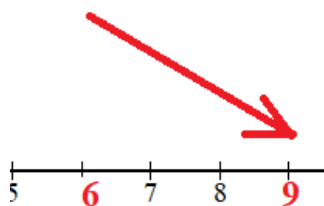
Si es derivable en $x = 3$.

c.- En el intervalo $[6, 9]$ la función es $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6}$.

Buscamos los extremos relativos.

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{6} < 0$$

La función siempre es decreciente.



El valor máximo se alcanza en $x = 6$ y el mínimo en $x = 9$.

El valor máximo es $f(6) = \frac{7}{2} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$ y el mínimo es $f(9) = \frac{7}{2} - \frac{9}{6} = 2$.

Las coordenadas del máximo son $(6, 2.5)$ y del mínimo son $(9, 2)$

5.- (10 puntos) Responde a las dos cuestiones siguientes:

a.- (6 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

a.1 (3 puntos) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

a.2 (3 puntos) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

b.- (4 puntos) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

a.- Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	15		
No compra ropa usada			60
			100

Completamos la tabla de contingencia.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	15	25	40
No compra ropa usada			60
			100

Como dicen que el 90% dice que compra ropa (usada o nueva) y tenemos que el 15 % compra de los dos tipos y 25 % compra usada pero no nueva entonces los que compran ropa nueva y no usada son $90 - 15 - 25 = 50$ %.

Seguimos completando la tabla.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	15	25	40
No compra ropa usada	50	10	60
	65	35	100

a.1 Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(N \cap \bar{U}) = \frac{\text{Nº de personas que compran ropa nueva y no compran ropa usada}}{\text{Nº de personas}} = \frac{50}{100} = \boxed{0.5}$$

a.2 Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\bar{N} / \bar{U}) = \frac{\text{Nº personas que no compran ropa usada ni nueva}}{\text{Nº personas que no compran ropa usada}} = \frac{10}{60} = \boxed{0.167}$$

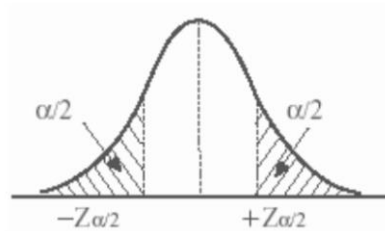
b.- El tamaño de la muestra es $n = 64$.

La proporción de contrarios a usar mascarilla es $p = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0.125$ y la de partidarios de usarla

es $q = 1 - 0.125 = 0.875$.

Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{64}} = 0.0897$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.125 - 0.0897, 0.125 + 0.0897) = (0.0353, 0.2147)$$

Para la segunda pregunta:

Un 25 % supone una proporción de 0.25.

Como 0.25 no pertenece al intervalo de confianza porque es mayor que el extremo superior del intervalo, $0.25 \notin (0.0353, 0.2147)$ significa que no es necesario hacer campaña de concienciación.

- 6.- (10 puntos) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.
- a.- (4 puntos) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.
- b.- (3 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.
- c.- (3 puntos) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

Sea X la variable aleatoria que da la nota de un estudiante de segundo de bachillerato.

a.- Si $X = N(65, 8)$ entonces $\overline{X}_{25} = N\left(65, \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = N(65, 1.6)$

$$P(\overline{X}_{25} > 63) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{25} - 65}{1.6} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{63 - 65}{1.6}\right) = P(Z > -1.25) = \dots$$

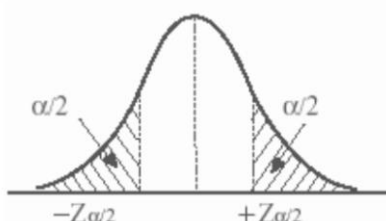


$$\dots = P(Z \leq 1.25) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0.8944}$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.80
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.87
1.2	0.8944	0.8965	0.8985	0.9005	0.9025	0.9044	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.91

b.- Para un nivel de confianza del 92%

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$



El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media es $\bar{x} = 80$. La desviación típica es $\sigma = 8.8$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8.8}{\sqrt{100}} = 1.54$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (80 - 1.54, 80 + 1.54) = (78.46, 81.54)$$

c.- Los datos son $n = 100$. $\bar{x} = 80$. $\sigma = 8.8$

El error debe ser la mitad, es decir, $1.54 / 2 = 0.77$ puntos.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.77 = 1.75 \cdot \frac{8.8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.77\sqrt{n} = 1.75 \cdot 8.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75 \cdot 8.8}{0.77} \Rightarrow n = \left(\frac{1.75 \cdot 8.8}{0.77} \right)^2 = 400$$

El tamaño mínimo para que el error sea de un máximo de 0.77 puntos es de 400 estudiantes.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a.- (3 puntos) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1} .
- b.- (3 puntos) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.- (10 puntos) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

- a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.
- b.- (2 puntos) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

3.- (10 puntos) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a.- (3 puntos) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿ $f(x)$ es continua en la recta real?
- b.- (3 puntos) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.
- c.- (1 punto) Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d.- (3 puntos) Calcula $\int_1^2 f(x) dx$

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

- a.- (4 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b.- (6 puntos) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

5.- (10 puntos) Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- (3 puntos) Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- (3 puntos) El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- (4 puntos) El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

6.- (10 puntos) Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a.- (6 puntos) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

b.- (4 puntos) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a.- (3 puntos) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1} .

b.- (3 puntos) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a.- La matriz tiene inversa si su determinante no es cero.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9 - 6m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{6} = 1.5$$

El determinante se anula para $m = 1.5$, por lo que existe la inversa de A para cualquier valor de m distinto de 1.5.

Para $m = 2$ existe la inversa, la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b.- El determinante de la matriz de coeficientes B es:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m$$

$$|B| = 0 \Rightarrow 9 - 6m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{6} = 1.5$$

Distinguimos dos casos.

CASO 1. $m \neq 1.5$

En este caso el determinante de B es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{9-6m} = \frac{1}{3-2m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3}$$

La solución es $x = z = \frac{2}{2m-3}$; $y = \frac{1}{3-2m}$

CASO 2. $m=1.5$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes B es nulo y su rango no es 3. La

matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. La transformamos en una matriz triangular equivalente y

obtenemos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \Rightarrow \\ \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes B tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3, por lo que los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

2.- (10 puntos) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- (2 puntos) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

a.- Llamamos “x” a los kilos de soja e “y” a los kilos de maíz que deben consumir los cerdos. Hacemos una tabla para ordenar la información proporcionada.

	Proteínas	Grasa vegetal	Coste
Kilos de soja (x)	5x	3x	3x
Kilos de maíz (y)	y	3y	2y
Totales	5x + y	3x + 3y	3x + 2y

Deseamos minimizar el coste que viene dado por la expresión $C(x, y) = 3x + 2y$.

Las restricciones son:

“La ingesta mínima es de 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal”

$$\rightarrow 5x + y \geq 28; \quad 3x + 3y \geq 36$$

“El granjero dispone de un presupuesto de 60€” $\rightarrow 3x + 2y \leq 60$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; \quad y \geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones y dibujamos la región del plano que cumple todas las condiciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y \geq 28 \\ 3x + 3y \geq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y \geq 28 \\ x + y \geq 12 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$$5x + y = 28$$

$$x + y = 12$$

$$3x + 2y = 60$$

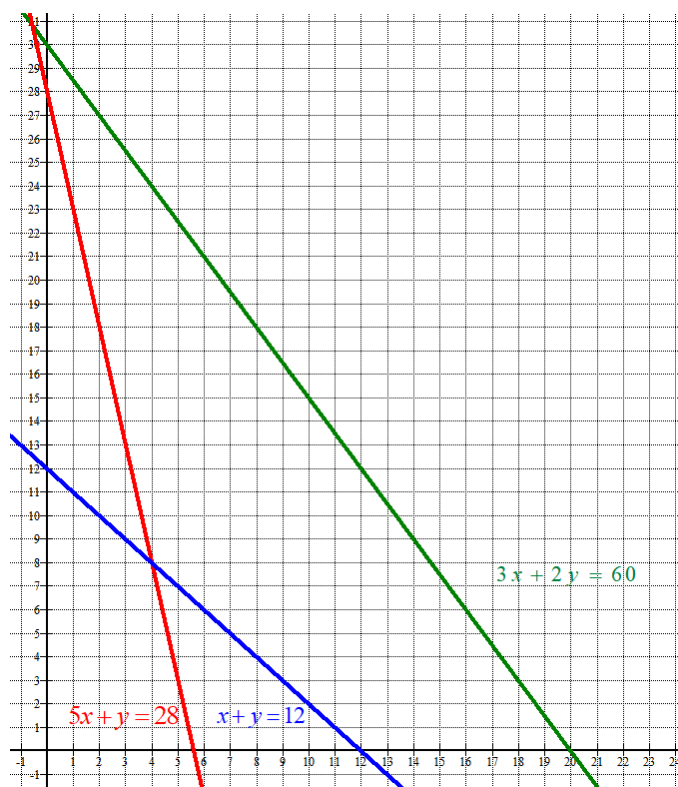
$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$

x	y = 28 - 5x
4	8
0	28

x	y = 12 - x
4	8
0	12

x	y = $\frac{60 - 3x}{2}$
0	30
20	0

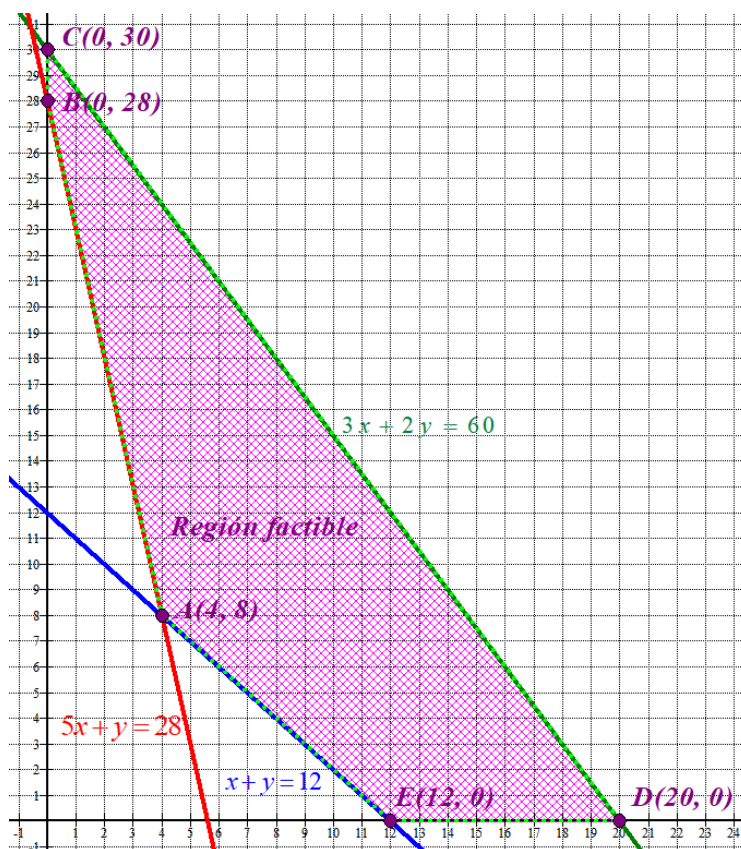
Primer
cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y \geq 28 \\ x + y \geq 12 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de las rectas roja y azul y por debajo de la recta verde.
Coloreamos de rosa esta región.



Para encontrar el valor mínimo del coste en esta región valoramos la función $C(x, y) = 3x + 2y$ en cada uno de los vértices.

$$A(4, 8) \rightarrow C(4, 8) = 12 + 16 = 28$$

$$B(0, 28) \rightarrow C(0, 28) = 0 + 56 = 56$$

$$C(0, 30) \rightarrow C(0, 30) = 0 + 60 = 60$$

$$D(20, 0) \rightarrow C(20, 0) = 60 + 0 = 60$$

$$E(12, 0) \rightarrow C(12, 0) = 36 + 0 = 36$$

El coste mínimo es de 28 € y se produce con el consumo de 4 kilos de soja y 8 de maíz.

- b.-** La dieta más cara es la de 60 € y se produce en todo el segmento comprendido entre los puntos $C(0, 30)$ y $D(20, 0)$, estos puntos cumplen la ecuación $3x + 2y = 60$ y el punto que se plantea como solución óptima es $(12, 15)$ que no cumple la ecuación y no está en el segmento CD .

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 60 \\ \text{¿}(12, 15) \in CD? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿}36 + 30 = 60? \quad \text{¡No se cumple!}$$

La dieta sugerida no sería la óptima. Aunque es más cara no satisface todas las restricciones.

3.- (10 puntos) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿ $f(x)$ es continua en la recta real?

b.- (3 puntos) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.

c.- (1 punto) Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d.- (3 puntos) Calcula $\int_1^2 f(x) dx$

a.- Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 - 2x = -0^2 - 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es continua en $x = 0$.

Es continua en toda la recta pues está definida como dos trozos de funciones polinómicas, siendo ambas continuas en todo su dominio de definición.

b.- La función en el intervalo $[1, 4]$ está definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Calculamos el signo de la derivada segunda en cada uno de estos puntos críticos para decidir si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \\ f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(1) = 1^3 - 6 + 9 = 4$ y $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 27 = 0$ el máximo relativo tiene coordenadas $(1, 4)$ y el mínimo relativo $(3, 0)$

Para obtener los máximos y mínimos absolutos valoramos la función en los extremos del intervalo $[1, 4]$ y lo comparamos con los valores de los máximos y mínimos relativos.

$$f(1) = 1^3 - 6 + 9 = 4; \quad f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 27 = 0 \quad \text{y} \quad f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 36 = 4$$

Los máximos absolutos son $(1, 4)$ y $(4, 4)$. El mínimo absoluto es $(3, 0)$.

c.- Cuando $x > 0$ la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Para estudiar la concavidad y convexidad utilizamos la derivada segunda y estudiamos sus cambios de signo.

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 2$.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(0, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

d.- La función en el intervalo $(1, 2)$ es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x^3 - 6x^2 + 9x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 9\frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 2 \cdot 1^3 + 9\frac{1^2}{2} \right] = 4 - 16 + 18 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2} = \boxed{3.25} \end{aligned}$$

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

a.- (4 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- (6 puntos) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

a.- El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}.$$

Asíntota vertical. $x = a$

$$¿x = -3?$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = \frac{2 \cdot (-3)^2 - 16}{-3 + 3} = \frac{2}{0} = \infty$$

La recta $x = -3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{16}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{16}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 - \frac{16}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}} = \frac{2}{0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 16}{x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{16}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2 - \frac{16}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty}} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 16}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} - 16 - \cancel{2x^2} - 6x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x - 16}{x + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-6x}{x} - \frac{16}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 - \frac{16}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-6 - \frac{16}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty}} = -6$$

La asíntota oblicua es la recta $y = 2x - 6$

b.- Derivo e igualo a cero.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x + 3) - (2x^2 - 16)}{(x + 3)^2} = \frac{4x^2 + 12x - 2x^2 + 16}{(x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 12x + 16}{(x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 12x + 16}{(x + 3)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-6+2}{2} = -2 \\ \frac{-6-2}{2} = -4 \end{cases}$$

Estudio el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -4)$ tomamos $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5) = \frac{50 - 60 + 16}{(-5+3)^2} = \frac{6}{4} > 0$. La función crece en $(-\infty, -4)$.
- En $(-4, -3)$ tomamos $x = -3.5$ y la derivada vale $f'(-3.5) = \frac{2x^2 + 12x + 16}{(-3.5+3)^2} = \frac{-1.5}{+} < 0$. La función decrece en $(-4, -3)$.
- En $(-3, -2)$ tomamos $x = -2.5$ y la derivada vale $f'(-2.5) = \frac{2x^2 + 12x + 16}{(-2.5+3)^2} = \frac{-1.5}{+} < 0$. La función decrece en $(-3, -2)$.
- En $(-2, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0+0+16}{(0+3)^2} = \frac{16}{9} > 0$. La función crece en $(-2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un máximo relativo en $x = -4$.

Como $f(-4) = \frac{2(-4)^2 - 16}{-4+3} = -16$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-4, -16)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2) = \frac{2(-2)^2 - 16}{-2+3} = -8$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(-2, -8)$.

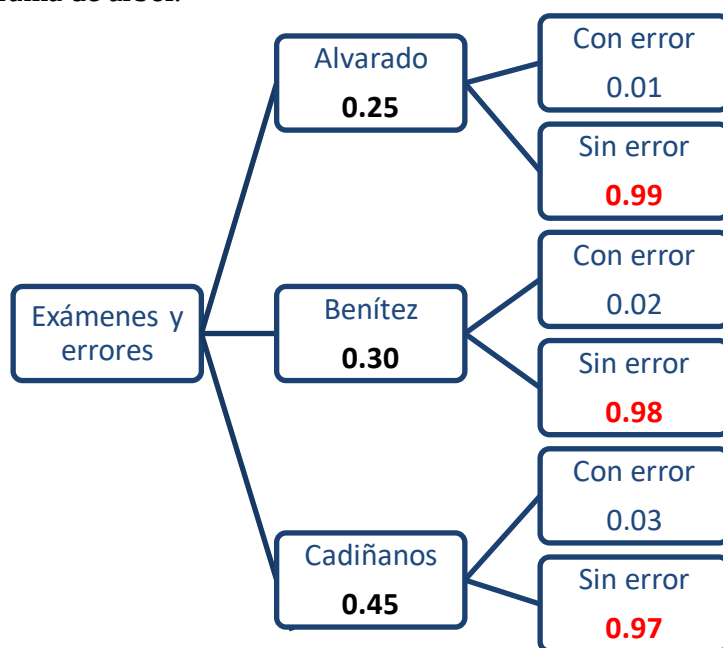
5.- (10 puntos) Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- (3 puntos) Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- (3 puntos) El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- (4 puntos) El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = El examen lo corrige Alvarado, B = El examen lo corrige Benítez, C = El examen lo corrige Cadiñanos. M = El examen está mal corregido. $\bar{M}$ = El examen está bien corregido.

a.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= 0.25 \cdot 0.01 + 0.30 \cdot 0.02 + 0.45 \cdot 0.03 = \boxed{0.022 = 2.2 \%}$$

b.- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.30 \cdot 0.02}{0.022} = \boxed{\frac{3}{11} \approx 0.27}$$

c.- Hemos calculado $P(B/M) = 0.27$, calculamos $P(A/M)$ y $P(C/M)$ y los comparamos.

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.022} = \boxed{\frac{5}{44} \approx 0.11}$$

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M/C)}{P(M)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.022} = \boxed{\frac{27}{44} \approx 0.61}$$

Como $P(A/M) = 0.11$; $P(B/M) = \frac{3}{11}$ y $P(C/M) = 0.61$ el corrector que es más probable

que lo haya corregido es Cadiñanos. Es lógico pues es quien más exámenes corrige y el que más errores comete.

6.- (10 puntos) Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

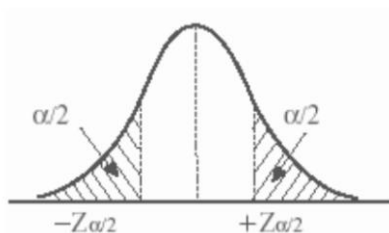
a.- (6 puntos) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

b.- (4 puntos) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

a.- $p = 0.2$ y $q = 1 - 0.2 = 0.8$.

Para un nivel de confianza del 98%

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5558
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863
2.3	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945

Utilizamos la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{2.33} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.1}{2.33} \right)^2 = \frac{0.2 \cdot 0.8}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2 \cdot 0.8}{\left(\frac{0.1}{2.33} \right)^2} \approx 86.86 \end{aligned}$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 87 estudiantes.

b.- $n = 50$. $p = \frac{12}{50} = 0.24$, $q = 1 - \frac{12}{50} = 0.76$.

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.33$.

El error será:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} \approx 0.14$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.24 - 0.14, 0.24 + 0.14) = (0.1, 0.38)$$



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b.- (3 puntos) Calcula la matriz X , que verifica $2X - AB = BA$.

c.- (4 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- (10 puntos) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

3.- (10 puntos) Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t - 6}{t + 4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (2 puntos) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- (4 puntos) En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- (2 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- (2 puntos) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{donde } a, b, c \text{ son parámetros reales. Se pide:}$$

- a.- (5 puntos) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.
- b.- (2 puntos) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c.- (3 puntos) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\int_1^2 f(x) dx$.
- 5.- (10 puntos) Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:
- a.- (2,5 puntos) La probabilidad de que quiera ir a Portugal.
- b.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.
- c.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.
- d.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.
- 6.- (10 puntos) Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:
- a.- (6 puntos) ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?
- b.- (3 puntos) Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.
- c.- (1 punto) Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b.- (3 puntos) Calcula la matriz X , que verifica $2X - AB = BA$.

c.- (4 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a.- Hallamos la expresión de $B - A$ y el valor de su determinante.

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B - A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

El determinante es no nulo y por tanto existe la inversa. La calculamos.

$$(B - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B - A)^T)}{|B - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-8} = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b.- Despejo X en la ecuación: $2X - AB = BA \Rightarrow 2X = BA + AB \Rightarrow X = \frac{1}{2}(BA + AB)$.

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BA + AB = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(BA + AB) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

c.- El sistema de ecuaciones planteado queda:

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es $C / B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

La transformamos en una matriz triangular equivalente.

$$C/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline -1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y \\ z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array}}, t \in \mathbb{R}$$

La solución es $x = -t; y = t; z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

2.- (10 puntos) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

- a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- b.- (2 puntos) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

a.- Llamamos x = número de ofertas A, y = número de ofertas B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de botas	Nº de mocasines	Nº de zapatillas	Ingresos
Nº ofertas A (x)	x	$3x$	$7x$	$360x$
Nº ofertas B (y)	$2y$	$2y$		$120y$
TOTALES	$x + 2y$	$3x + 2y$	$7x$	$360x + 120y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 360x + 120y$

Las restricciones son:

“Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas” $\rightarrow x + 2y \leq 800$; $3x + 2y \leq 1200$; $7x \leq 2100$

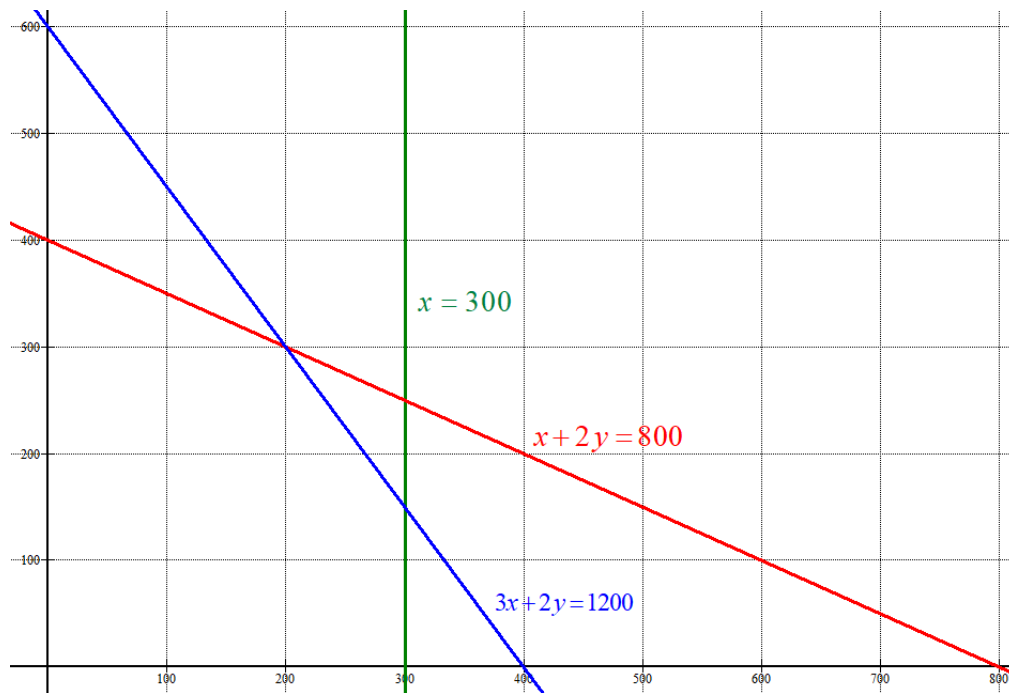
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ 7x \leq 2100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$x + 2y = 800$	$3x + 2y = 1200$	$x = 300$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = \frac{800 - x}{2}$	$x \mid y = \frac{1200 - 3x}{2}$		
0 400	0 600	Recta	Primer
200 300	200 300	vertical	cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas roja y azul y a la izquierda de la recta verde.
Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 360x + 120y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 400) \rightarrow I(0, 400) = 0 + 48000 = 48000$$

$$C(200, 300) \rightarrow I(200, 300) = 72000 + 36000 = 108000$$

$$D(300, 150) \rightarrow I(300, 150) = 108000 + 18000 = 126000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(300, 0) \rightarrow I(300, 0) = 108000 + 0 = 108000$$

Los ingresos máximos son 126000 y se obtienen en D(300, 150).

Con la venta de 300 lotes de la oferta A y 150 lotes de la oferta B se cumplen las restricciones y se consiguen los máximos ingresos, siendo estos de 126000 €.

b.- En la solución óptima se venden 300 lotes de A y 150 de B lo que supone la venta de:

	Nº de botas	Nº de mocasines	Nº de zapatillas	Ingresos
Nº ofertas A ($x = 300$)	$x = 300$	$3x = 900$	$7x = 2100$	$360x$
Nº ofertas B ($y = 150$)	$2y = 300$	$2y = 300$		$120y$
TOTALES	$x + 2y = 600$	$3x + 2y = 1200$	$7x = 2100$	$360x + 120y$

Se venden 600 pares de botas, por lo que quedan $800 - 600 = 200$ pares de botas sin vender.

Se venden 1200 pares de mocasines, por lo que quedan $1200 - 1200 = 0$ pares sin vender. Se venden todos los pares de mocasines.

Se venden 2100 pares de zapatillas, por lo que quedan $2100 - 2100 = 0$ pares sin vender. Se venden todos los pares de zapatillas.

Solo quedan 200 pares de botas sin vender.

- 3.- (10 puntos)** Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

- a.- (2 puntos)** ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?
b.- (4 puntos) En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.
c.- (2 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?
d.- (2 puntos) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

- a.-** Tener pérdidas significa que los beneficios son negativos.

Buscamos cuando la función $B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$ es negativa

Como el valor de t es positivo entonces $t + 4 > 0$.

Para que sea negativo el cociente debe ser negativo el numerador.

$$2t-6 < 0 \Rightarrow 2t < 6 \Rightarrow t < 3 \Rightarrow 0 \leq t < 3$$

La empresa tiene pérdidas entre los años 0 y 3, durante los tres primeros años.

- b.-** Derivamos la función beneficios y buscamos el máximo.

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4} \Rightarrow B'(t) = \frac{2(t+4) - (2t-6)}{(t+4)^2} = \frac{2t+8-2t+6}{(t+4)^2} = \frac{14}{(t+4)^2}$$

Para cualquier valor de t la derivada es positiva, pues numerador es positivo, sin depender del valor de t y del denominador está elevado al cuadrado, por lo que siempre es positivo.

La función es creciente en el intervalo $[3,10]$, por lo que el máximo beneficio lo alcanza en $t=10$.

Hallamos ese valor máximo: $B(10) = \frac{20-6}{10+4} = 1$. El beneficio máximo en el intervalo $[3,10]$ son 10000 € y se consigue en el décimo año.

- c.-** Buscamos t para que $B(t) = 1.5$.

$$B(t) = 1.5 \Rightarrow \frac{2t-6}{t+4} = 1.5 \Rightarrow 2t-6 = 1.5t+6 \Rightarrow 0.5t = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{0.5} = 24$$

Se consigue un beneficio de 150000 € al cabo de 24 años.

- d.-** La función crece siempre, veamos su límite en el infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t-6}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2t}{t} - \frac{6}{t}}{\frac{t}{t} + \frac{4}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{6}{t}}{1 + \frac{4}{t}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Existe un límite para el aumento del beneficio. Ese límite son 200000 €.

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{donde } a, b, c \text{ son parámetros reales. Se pide:}$$

a.- (5 puntos) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- (2 puntos) Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $\int_1^2 f(x) dx$.

a.- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{a}{1-0} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{1-x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} bx^2 + 2x + c = c \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = c}$$

Para que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ debe cumplirse que $f'(1) = 0$. Como en las proximidades de $x = 1$ la función es $f(x) = bx^2 + 2x + c$ tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= bx^2 + 2x + c \Rightarrow f'(x) = 2bx + 2 \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 2b + 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Como en las proximidades de $x = -1$ la función es $f(x) = \frac{a}{1-x}$ para que $f'(-1) = -1$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{(1-x)^2} \\ f'(-1) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{(1-(-1))^2} = -1 \Rightarrow \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Por lo que $c = a = -4$.

Resumiendo: El valor de los parámetros es $a = -4, b = -1, c = -4$.

Comprobamos si el extremo relativo que hay en $x = 1$ es máximo o mínimo relativo. Para ello usamos la segunda derivada. Como la función es $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ tenemos que:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(1) = -2 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

b.- Para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = (+\infty)(-2) = \boxed{-\infty}$$

c.- Para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

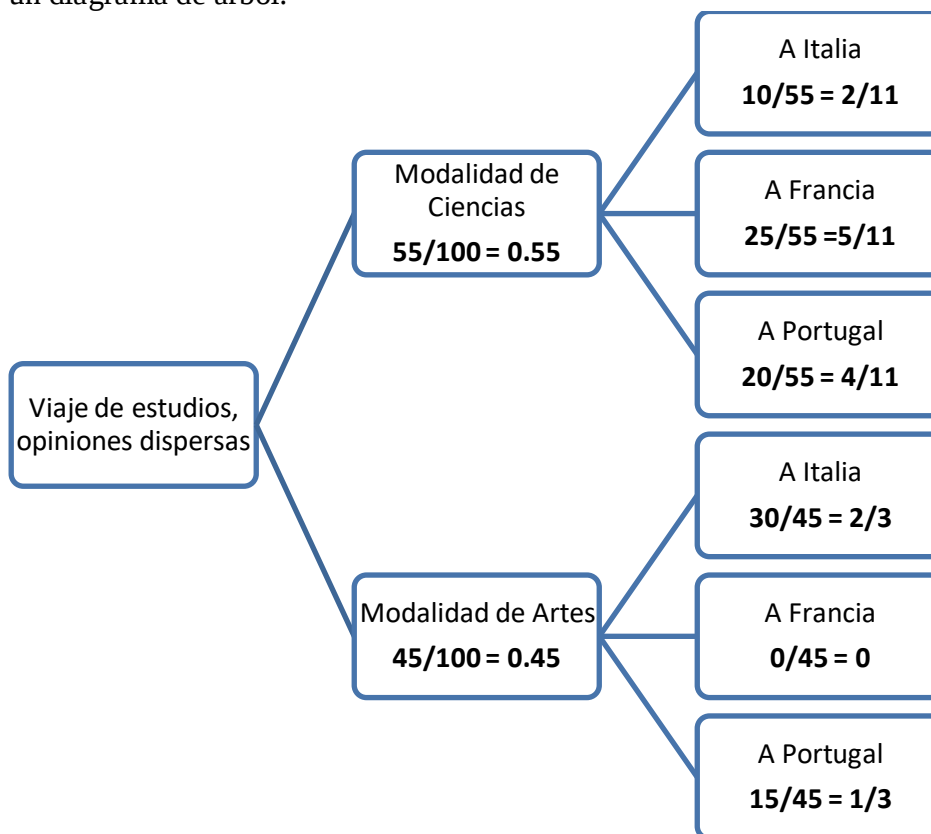
$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 -2x^2 + 2x + 3 dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1 \right] = -\frac{16}{3} + 4 + 6 + \frac{2}{3} - 1 - 3 = 6 - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

5.- (10 puntos) Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

- a.- (2,5 puntos) La probabilidad de que quiera ir a Portugal.
 b.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.
 c.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.
 d.- (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos C = El alumno es de bachillerato de Ciencias, $\bar{C}$ = El alumno es de bachillerato de Artes.

I = “Prefiere viajar a Italia”, F = “Prefiere viajar a Francia”, P = “Prefiere viajar a Portugal”

a.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(P) &= P(C \cap P) + P(\bar{C} \cap P) = \\
 &= P(C)P(P/C) + P(\bar{C})P(P/\bar{C}) = \\
 &= 0.55 \cdot \frac{4}{11} + 0.45 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{20} = 0.35}
 \end{aligned}$$

b.- Nos piden la probabilidad de que sea de Artes, sabiendo que quiere ir a Italia.

$$P(\bar{C}/I) = \frac{P(\bar{C} \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\bar{C})P(I/\bar{C})}{P(C)P(I/C) + P(\bar{C})P(I/\bar{C})} =$$

$$= \frac{0.45 \cdot \frac{2}{3}}{0.55 \cdot \frac{2}{11} + 0.45 \cdot \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

c.- Nos piden calcular $P(F \cap C)$.

$$P(F \cap C) = P(C)P(F/C) = 0.55 \cdot \frac{5}{11} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

d.- Esta probabilidad se obtiene aplicando la regla de Laplace y los datos proporcionados en el ejercicio.

$$P(F/C) = \boxed{\frac{5}{11} \approx 0.45}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

También se puede resolver con una tabla de contingencia y aplicar la regla de Laplace.

De los 100 alumnos, 55 son de ciencias y 45 de artes. 10 de ciencias quieren ir a Italia, 25 de ciencias quieren ir a Francia y 20 de ciencias quieren ir a Portugal. 30 de artes quieren ir a Italia, 0 de artes quieren ir a Francia y 15 de artes quieren ir a Portugal.

Lo resumimos todo en una tabla de contingencia.

	A Italia	A Francia	A Portugal	
Ciencias	10	25	20	55
Artes	30	0	15	45
	10+30 = 40	25+0 = 25	20+15 = 35	100

a.- $P(P) = \frac{n^\circ \text{ casos favorables a } P}{n^\circ \text{ casos posibles}} = \frac{35}{100} = \boxed{0.35}$

b.- $P(\bar{C}/I) = \frac{30}{40} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$

c.- $P(F \cap C) = \frac{25}{100} = \boxed{0.25}$

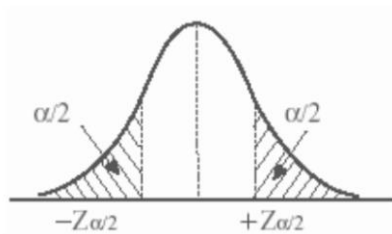
d.- $P(F/C) = \frac{25}{55} = \boxed{\frac{5}{11}}$

- 6.- (10 puntos)** Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:
- a.- (6 puntos)** ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?
- b.- (3 puntos)** Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.
- c.- (1 punto)** Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

Sea X la variable aleatoria que da el tiempo diario (en horas) de conexión a redes sociales de un universitario. Sabemos que sigue una $N(\mu, 0.55)$.

- a.-** Para un nivel de confianza del 97% hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$



El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $\rightarrow Error = 0.08$ horas

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.08 = 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 0.55}{0.08}$$

$$n = (14.91875)^2 \approx 222.569$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 223 universitarios.

- b.-** Tamaño de la muestra $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 4$.

Para un nivel de confianza del 97% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2,17$.

El error será:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{100}} = 0.11935$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4 - 0.12, 4 + 0.12) = (3.88, 4.12)$$

- c.-** La media 5 no pertenece al intervalo de confianza anterior. $5 \notin (3.88, 4.12)$ y el nivel de confianza es del 97%.
Por lo tanto, es dudosa la afirmación del ministerio.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (10 puntos) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

2.- (10 puntos) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

3.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular:

a.- (1 punto) Dominio de f .

b.- (3 puntos) Para que valores de x se cumple $f(x) < 0$?

c.- (2 puntos) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d.- (4 puntos) Máximos y mínimos relativos de f .

4.- (10 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x - 2x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudiar la continuidad de f

b.- (4,5 puntos) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

c.- (2,5 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 f(x) dx$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a.- (2 puntos) La probabilidad de que las dos sean blancas.

- b.- (3 puntos) La probabilidad de que al menos una sea blanca.
 c.- (2 puntos) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
 d.- (3 puntos) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

- a.- (6 puntos) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?
 b.- (4 puntos) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Llamamos “x” al número de entrenamientos cortos e “y” al número de entrenamientos largos. Construimos una tabla con lo datos del ejercicio.

	Nº horas	Nº km	Nº kilocalorías
Nº entrenamientos cortos (x)	x	15x	1200x
Nº entrenamientos largos (y)	3y	30y	2500y
TOTALES	$x + 3y$	$15x + 30y$	$1200x + 2500y$

Las restricciones son:

“Hace al menos 24 entrenamientos” $\rightarrow x + y \geq 24$

“No corre más de 660 km ni dedica más de 48 horas” $\rightarrow 15x + 30y \leq 660 \quad x + 3y \leq 48$

Los valores son positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Queremos maximizar el consumo de kilocalorías $f(x, y) = 1200x + 2500y$, pero con una serie de restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 24 \\ 15x + 30y \leq 660 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 24 \\ x + 2y \leq 44 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y que delimitan nuestra región factible.

$$x + y = 24$$

$$x + 2y = 44$$

$$x + 3y = 48$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 24 - x
0	24
24	0

x	y = $\frac{44-x}{2}$
0	22
44	0

x	y = $\frac{48-x}{3}$
0	16
48	0

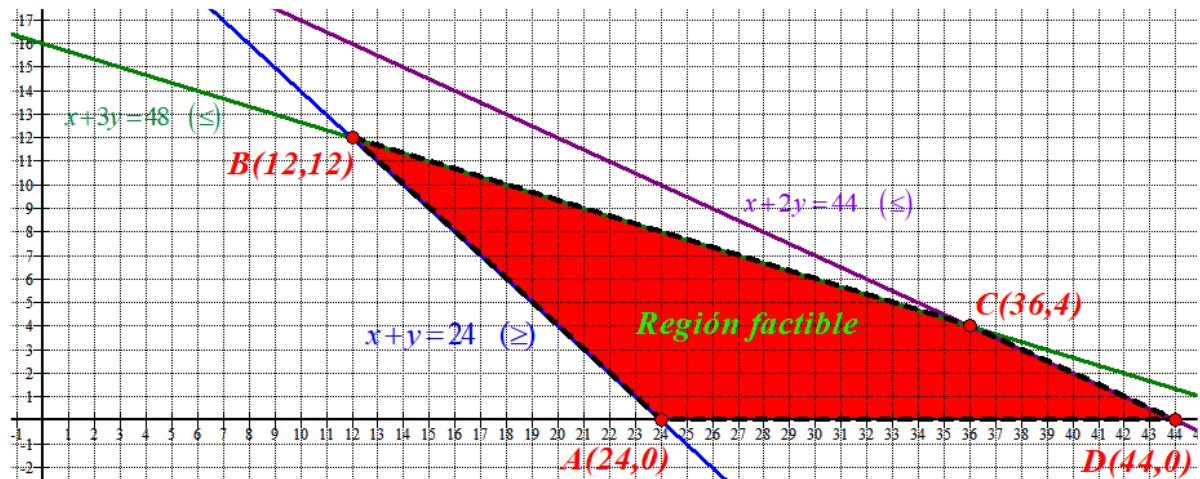
Primer cuadrante



Probamos si el punto $P(25,5)$ cumple todas las restricciones y por tanto la región del plano a la que pertenece es la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} 25 + 5 \geq 24 \\ 25 + 10 \leq 44 \\ 25 + 15 \leq 48 \\ 25 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Cumple todas las restricciones.}$$

La región factible es la zona pintada de rojo en el dibujo. En la que indicamos sus vértices, candidatos a maximizar la función $f(x, y) = 1200x + 2500y$.



Las coordenadas de los vértices A y D las obtenemos de la tabla de valores de cada recta. Las coordenadas de los vértices B y C las obtenemos resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 24 \\ x + 3y = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 24 \\ -x - 3y = -48 \end{array} \right\}$$

$$\hline -2y = -24 \Rightarrow y = 12 \rightarrow x + 12 = 24 \rightarrow x = 12 \Rightarrow B(12, 12)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ x + 3y = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ -x - 3y = -48 \end{array} \right\}$$

$$\hline -y = -4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x + 8 = 44 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow C(36, 4)$$

Valoramos cada vértice en la función consumo de kilocalorías y averiguamos en cual se produce un consumo máximo.

$$A(24, 0) \rightarrow f(24, 0) = 28800$$

$$B(12, 12) \rightarrow f(12, 12) = 14400 + 30000 = 44400$$

$$C(36, 4) \rightarrow f(36, 4) = 43200 + 10000 = 53200$$

$$D(44, 0) \rightarrow f(44, 0) = 52800$$

El consumo máximo de kilocalorías se produce en el vértice $C(36, 4)$.

El máximo consumo de kilocalorías son 53200 kilocalorías y se produce con 36 entrenamientos cortos y 4 largos.

2.- (10 puntos) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Llamemos “x” al número de niños que visitan el museo, “y” al número de jóvenes y “z” al número de adultos.

“Ayer se recaudaron un total de 600 euros” $\rightarrow x + 2y + 5z = 600$

“El número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes” $\rightarrow z = 2(x + y)$

“Si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos” $\rightarrow y + 100 = x + z$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 600 \\ z = 2(x + y) \\ y + 100 = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 600 \\ z = 2x + 2y \\ y + 100 = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sustituimos } z \text{ por } 2x + 2y \text{ en} \\ \text{ecuación } 1^a \text{ y } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 5(2x + 2y) = 600 \\ y + 100 = x + 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 10x + 10y = 600 \\ 100 = 3x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11x + 12y = 600 \\ y = 100 - 3x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x + 12(100 - 3x) = 600 \Rightarrow 11x + 1200 - 36x = 600 \Rightarrow -25x = -600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{600}{25} = 24} \Rightarrow \boxed{y = 100 - 72 = 28} \Rightarrow \boxed{z = 48 + 56 = 104}$$

Visitaron el museo 24 niños, 28 jóvenes y 104 adultos.

3.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular:

- a.- (1 punto) Dominio de f .
 b.- (3 puntos) Para que valores de x se cumple $f(x) < 0$?
 c.- (2 puntos) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d.- (4 puntos) Máximos y mínimos relativos de f .

a.- El dominio de la función son todos los reales menos los valores que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$$

b.- $f(x) < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} < 0$

Analizamos el signo del numerador y luego el signo conjunto de la fracción.

$$x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{2} = \text{No existe}$$

Por lo que esa parábola es siempre positiva o siempre negativa.

$$\text{Probamos con } \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 4x + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 0^2 - 0 + 12 = 12 > 0$$

El numerador ($x^2 - 4x + 12$) siempre es positivo.

El denominador es negativo cuando $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$

Conclusión: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} < 0$ cuando $x < 1$.

c.- **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} = \frac{9}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 12 - x^2 + x}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 12}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x} = -3 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 3$

d.- Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 4)(x - 1) - (x^2 - 4x + 12)}{(x - 1)^2}$$

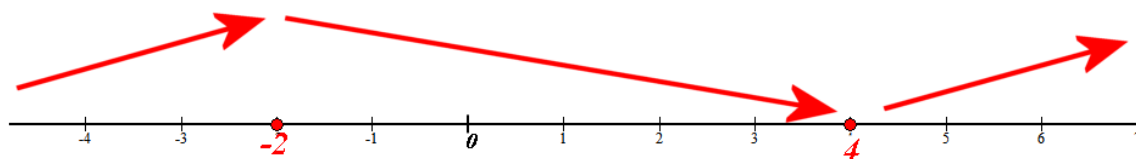
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 12}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \begin{cases} \frac{2 + 6}{2} = 4 = x \\ \frac{2 - 6}{2} = -2 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de -2 , entre -2 y 4 y después de 4 .

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 2(-3) - 8}{(-3 - 1)^2} = \frac{7}{16} > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0^2 - 0 - 8}{(0 - 1)^2} = -8 < 0$. La función decrece en $(-2, 4)$.
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5^2 - 10 - 8}{(5 - 1)^2} = \frac{7}{16} > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 4$.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4(-2) + 12}{-2 - 1} = \frac{24}{-3} = -8 \rightarrow \text{Máximo en } (-2, -8)$$

$$f(4) = \frac{4^2 - 16 + 12}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow \text{Mínimo en } (4, 4)$$

4.- (10 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudiar la continuidad de f

b.- (4,5 puntos) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

c.- (2,5 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 f(x) dx$$

a.- En $(-\infty, -1)$ la función es $f(x) = \frac{3}{x+1}$ y es continua pues en $x = -1$ no está definida.

En $(-1, 4)$ la función es $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ y es continua pues es un polinomio.

En $(4, +\infty)$ la función es $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x$ y es continua pues el radicando es positivo en el intervalo de definición $(4, +\infty)$. Lo comprobamos:

$$4x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(4x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4} = 1,75 \end{cases}$$

$$\text{Si } x > 1,75 \rightarrow 4x^2 - 7x > 0; \text{ por ejemplo } x = 5 \rightarrow 4 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 = 100 - 35 = 65 > 0$$

El radicando es positivo si $x > 4$ y la función es continua en $(4, +\infty)$

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

En $x = -1$.

- Existe $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 2(-1) - 10 = -1 - 4 - 2 - 10 = -17$

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 - 4x^2 + 2x - 10 = -17 \end{cases} \Rightarrow \text{No son iguales. No existe el límite.}$

La función **no** es continua en $x = -1$.

En $x = 4$.

- Existe $f(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 - 10 = -2$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} x^3 - 4x^2 + 2x - 10 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x = \sqrt{4 \cdot 4^2 - 28} - 8 = -2 \end{cases} = -2$

- $f(4) = -2 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

La función es continua en $x = 4$.

Conclusión: La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

b.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x = \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 7x})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 7x - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{2x + 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{4x} = \boxed{\frac{-7}{4}}
\end{aligned}$$

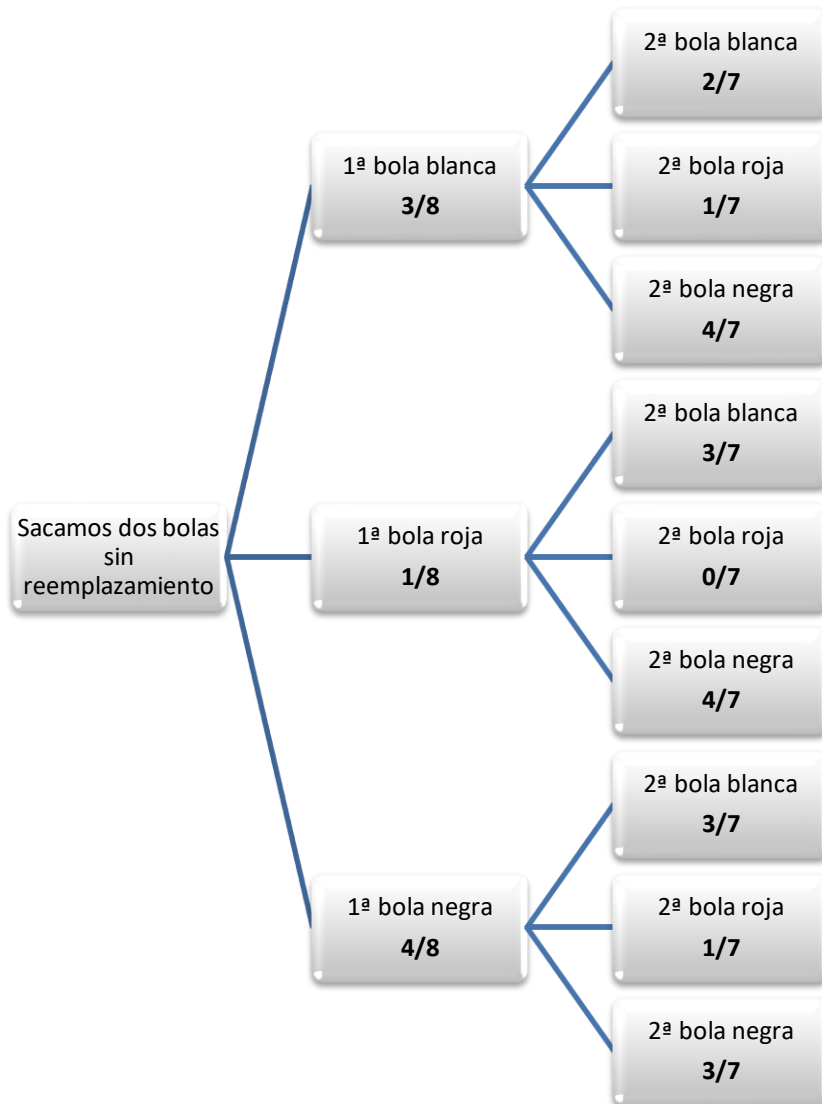
c.- En el intervalo $(1, 2)$ la función es $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ si $-1 \leq x \leq 4$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x^3 - 4x^2 + 2x - 10 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + x^2 - 10x \right]_1^2 = \\
&= \left[\frac{2^4}{4} - 4 \frac{2^3}{3} + 2^2 - 20 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 4 \frac{1^3}{3} + 1^2 - 10 \right] = 4 - \frac{32}{3} + 4 - 20 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 1 + 10 = \\
&= -3 - \frac{28}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{151}{12} = -12.58}
\end{aligned}$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

- a.- (2 puntos) La probabilidad de que las dos sean blancas.
- b.- (3 puntos) La probabilidad de que al menos una sea blanca.
- c.- (2 puntos) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
- d.- (3 puntos) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Realizamos el diagrama de árbol.



a.-

$$P(\text{Las dos bolas blancas}) = P(1^{\text{a}} \text{ bola blanca})P(2^{\text{a}} \text{ bola blanca} / 1^{\text{a}} \text{ bola blanca}) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \boxed{\frac{3}{28} = 0,107}$$

b.- Hay varias formas de que ocurra lo pedido, calculamos la probabilidad de cada una de las posibilidades y las sumamos.

$$P(\text{Al menos una blanca}) = P(1^{\text{a}} \text{ blanca})P(2^{\text{a}} \text{ blanca} / 1^{\text{a}} \text{ blanca}) + \\ + P(1^{\text{a}} \text{ blanca})P(2^{\text{a}} \text{ roja} / 1^{\text{a}} \text{ blanca}) + P(1^{\text{a}} \text{ blanca})P(2^{\text{a}} \text{ negra} / 1^{\text{a}} \text{ blanca}) + \\ + P(1^{\text{a}} \text{ roja})P(2^{\text{a}} \text{ blanca} / 1^{\text{a}} \text{ roja}) + P(1^{\text{a}} \text{ roja})P(2^{\text{a}} \text{ roja} / 1^{\text{a}} \text{ roja}) + P(1^{\text{a}} \text{ roja})P(2^{\text{a}} \text{ negra} / 1^{\text{a}} \text{ roja}) + \\ + P(1^{\text{a}} \text{ negra})P(2^{\text{a}} \text{ blanca} / 1^{\text{a}} \text{ negra}) + P(1^{\text{a}} \text{ negra})P(2^{\text{a}} \text{ roja} / 1^{\text{a}} \text{ negra}) + P(1^{\text{a}} \text{ negra})P(2^{\text{a}} \text{ negra} / 1^{\text{a}} \text{ negra}) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{36}{56} = \boxed{\frac{9}{14} = 0,643}$$

c.-

$$P(\text{Las dos bolas del mismo color}) = P(\text{Las dos blancas}) + P(\text{Las dos negras}) =$$

$$= \frac{6}{56} + P(1^{\text{a}} \text{ bola negra})P(2^{\text{a}} \text{ bola negra} / 1^{\text{a}} \text{ bola negra}) = \frac{6}{56} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \boxed{\frac{9}{28} = 0.321}$$

d.- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Las dos bolas sean blancas} / \text{Son del mismo color}) =$$

$$= \frac{P(\text{Las dos bolas sean blancas} \cap \text{Son del mismo color})}{P(\text{Son del mismo color})} =$$

$$= \frac{P(\text{Las dos bolas sean blancas})}{P(\text{Son del mismo color})} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = 0.33}$$

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (6 puntos) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

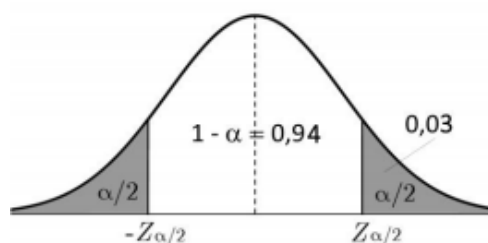
b.- (4 puntos) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr = 0,5$.

Con este valor de la proporción el producto $pr \cdot qr$ toma el valor máximo.

a.- Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 94%

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,88}$$



El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, por lo que el *Error* debe ser menor de 0.05.

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.88} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2} = 353.44 \end{aligned}$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 354 hogares.

b.- Tenemos que $n = 200$ y la proporción es $pr = \frac{112}{200} = 0.56 \rightarrow qr = 1 - 0.56 = 0.44$

Para un nivel de confianza del 94% el valor crítico es $z_{\alpha/2} = \mathbf{1,88}$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.56 \cdot 0.44}{200}} = 0.06$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(0.56 - 0.066, 0.56 + 0.066) = (0.494, 0.626).$$



Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a.- (3 puntos) ¿Es posible calculara $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
 b.- (3 puntos) Encontrar, si existe, una matriz X , que verifique $2X + 3B = 2C$.
 c.- (3 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .

2.- (10 puntos) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

3.- (10 puntos)

- a.- (3 puntos) Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2 - 5x}$$

- b.- (3 puntos) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{16x^2 + 5}}$$

- c.- (4 puntos) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \right) dx$$

4.- (10 puntos) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

- a.- (1 punto) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?
 b.- (4 puntos) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?
 c.- (5 puntos) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo?
 ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

- 5.- (10 puntos) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.
- a.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
 - b.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
 - c.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de los dos hayan votado por Londres?
 - d.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?
- 6.- (10 puntos) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.
- a.- (5 puntos) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.
 - b.- (4 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:
175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158
Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.
 - c.- (1 punto) Calcular la varianza de la muestra del apartado b.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (3 puntos) Encontrar, si existe, una matriz X , que verifique $2X + 3B = 2C$.

c.- (3 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .

a.- B es de dimensión 3×2 , A es una matriz de dimensión 2×3 . Para poder realizar un producto de matrices en número de columnas del primer factor del producto debe ser igual al número de filas del segundo.

$$B \cdot A$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

BA se puede calcular y se obtiene una matriz 3×3 .

$$(BA)^2 = (BA)(BA)$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \rightarrow 3 \times 3$$

$(BA)^2$ se puede calcular y se obtiene una matriz 3×3 .

Calculamos la expresión de $(BA)^2$.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 6+0 & 4+0 \\ -2+2 & -3+0 & -2+2 \\ -2+1 & -3+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+0-4 & 24-18-12 & 16+0-4 \\ 0+0+0 & 0+9+0 & 0+0+0 \\ -4+0+1 & -6+9+3 & -4+0+1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$$

b.- Despejamos X de la ecuación $2X + 3B = 2C$

$$2X + 3B = 2C \Rightarrow 2X = 2C - 3B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(2C - 3B) = C - \frac{3}{2}B$$

Sustituimos las matrices C y B en la expresión anterior.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3/2 & -3 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

c.- $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ Existe la inversa de D. La calculamos.

$$D^{-1} = \frac{Adj(D^t)}{|D|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.- (10 puntos) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

Llamemos “x” al número de vestidos de fiesta e “y” al número de vestidos de calle. Realizamos una tabla para clarificar la situación planteada.

	Metros de tela	Horas de trabajo	Beneficio
Nº vestidos de fiesta (x)	3x	6x	100x
Nº vestidos de calle (y)	y	4y	65y
TOTALES	3x + y	6x + 4y	100x + 65y

Como el taller solo dispone de 36 metros de tela $\rightarrow 3x + y \leq 36$

Como el taller solo dispone de 120 horas de trabajo $\rightarrow 6x + 4y \leq 120$

Como no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle $\rightarrow x \leq y$

El número de vestidos es una cantidad positiva $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 36 \\ 6x + 4y \leq 120 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Y la función objetivo son los beneficios que los deseamos maximizar $B(x, y) = 100x + 65y$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que separan el plano en zonas.

$$3x + y = 36$$

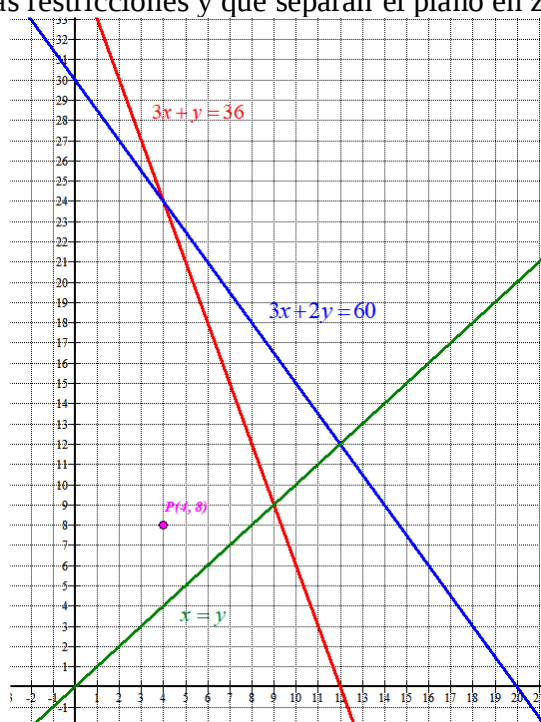
x	y = 36 - 3x
0	36
12	0

$$3x + 2y = 60$$

x	y = $\frac{60 - 3x}{2}$
0	30
20	0

$$x = y$$

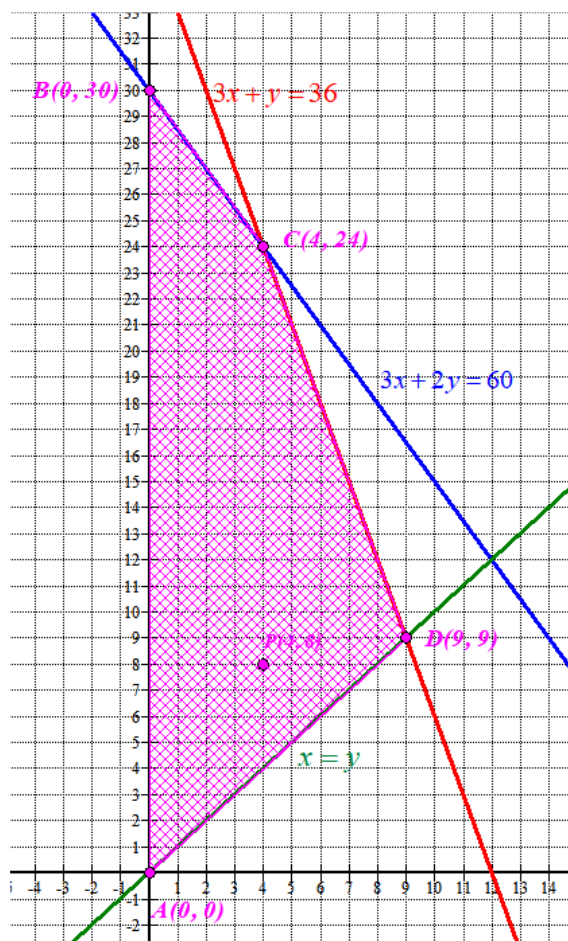
x	y = x
0	0
12	12



Comprobamos si el punto $P(4, 8)$ satisface todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 8 \leq 36 \\ 12 + 16 \leq 60 \\ 4 \leq 8 \\ 4 \geq 0 \\ 8 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las restricciones y la región factible es la zona rayada.



Las coordenadas de los vértices C y D se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones formado por las ecuaciones de los pares de rectas.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 36 \\ 3x + 2y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 36 - 3x \\ 3x + 2y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 2(36 - 3x) = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 72 - 6x = 60 \Rightarrow -3x = -12 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 36 - 12 = 24} \Rightarrow \boxed{C(4, 24)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 36 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + y = 36 \Rightarrow 4y = 36 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \boxed{D(9, 9)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 100x + 65y$ en cada vértice en busca del máximo.

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 1950$
- $C(4, 24) \rightarrow B(4, 24) = 400 + 1560 = 1960$
- $D(9, 9) \rightarrow B(9, 9) = 900 + 595 = 1495$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(4, 24)$ con un beneficio de 1960 €. Hay que fabricar 4 vestidos de fiesta y 24 de calle para obtener un beneficio máximo de 1960 €.

3.- (10 puntos)**a.- (3 puntos)** Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b.- (3 puntos) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (4 puntos) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \right) dx$$

$$\text{a.- } f(x) = e^{3x^2-5x} \Rightarrow f'(x) = e^{3x^2-5x} (6x-5)$$

$$\text{b.- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{16 + \frac{5}{x^2}}} = \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{\sqrt{16 + \frac{5}{\infty}}} = \frac{3+0}{\sqrt{16+0}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Este límite se puede hacer también con equivalencias.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{16x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{16}\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x}}{4\cancel{x}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

c.- Para calcular la integral definida $\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \right) dx$ calculamos primero la integral indefinida

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \right) dx = \int 3x^2 dx - \int \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx =$$

Cambio de variable en 2ª integral

$$4x = t \Rightarrow 4dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t+1}} \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{t+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshago el cambio} \\ \text{de variable } 4x = t \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{4x+1}$$

$$= x^3 - \frac{1}{2} \sqrt{4x+1} + C$$

Seguimos con la integral definida inicial.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \right) dx &= \left[x^3 - \frac{1}{2} \sqrt{4x+1} \right]_0^2 = \\ &= \left[2^3 - \frac{1}{2} \sqrt{8+1} \right] - \left[0^3 - \frac{1}{2} \sqrt{0+1} \right] = 8 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{7} \end{aligned}$$

4.- (10 puntos) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

- a.- (1 punto) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?
- b.- (4 puntos) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?
- c.- (5 puntos) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

a.- Como en la función coste la “x” viene en miles de unidades, nos piden calcular $C(5)$, que sustituyendo en la fórmula queda $C(5) = \frac{1}{10}(5^2 - 80 + 100) = \frac{45}{10} = \boxed{4,5 \text{ €}}$

b.- Debe ser $C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4 \Rightarrow x^2 - 16x + 100 < 40 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 < 0$

Esta es una inecuación que se resuelve averiguando cuando es 0 y luego ver cuando es negativa.

$$x^2 - 16x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = 10 = x \\ \frac{16-4}{2} = 6 = x \end{cases}$$

Con los valores $x = 6$ y $x = 10$ el intervalo $[2, 15]$ se divide en tres partes veamos en que partes es negativa la expresión $x^2 - 16x + 60$.

- En $[2, 6]$ tomamos $x = 4$ y la expresión $x^2 - 16x + 60$ vale $4^2 - 64 + 60 = 12 > 0$. En $[2, 6]$ es positiva.
- En $[6, 10]$ tomamos $x = 8$ y la expresión $x^2 - 16x + 60$ vale $8^2 - 128 + 60 = -4 < 0$ En $[6, 10]$ es negativa.
- En $[10, 15]$ tomamos $x = 12$ y la expresión $x^2 - 16x + 60$ vale $12^2 - 192 + 60 = 12 > 0$. En $[10, 15]$ es positiva.

El coste unitario es inferior a 4 euros entre 6000 y 10000 unidades.

c.- Para hallar esos máximos y mínimos utilizo la derivada de $C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$.

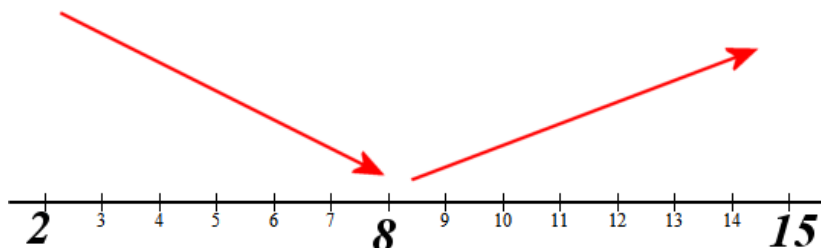
$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{10}(2x - 16)$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{10}(2x - 16) = 0 \Rightarrow 2x - 16 = 0 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

- Antes de 8, por ejemplo, en $x = 5$ la derivada del coste es $C'(5) = \frac{1}{10}(10 - 16) = -\frac{6}{10} < 0$. El coste decrece.

- Después de 8, por ejemplo, en $x = 10$ la derivada del coste es $C'(10) = \frac{1}{10}(20 - 16) = \frac{4}{10} > 0$. El coste crece.

La función sigue el esquema siguiente.



En $x = 8$ el coste presenta un mínimo.

Averiguamos ese coste mínimo:

$$C(8) = \frac{1}{10}(8^2 - 16 \cdot 8 + 100) = \frac{1}{10}(64 - 128 + 100) = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ €}$$

Para hallar el máximo valoramos el coste en los extremos del intervalo $[2, 15]$.

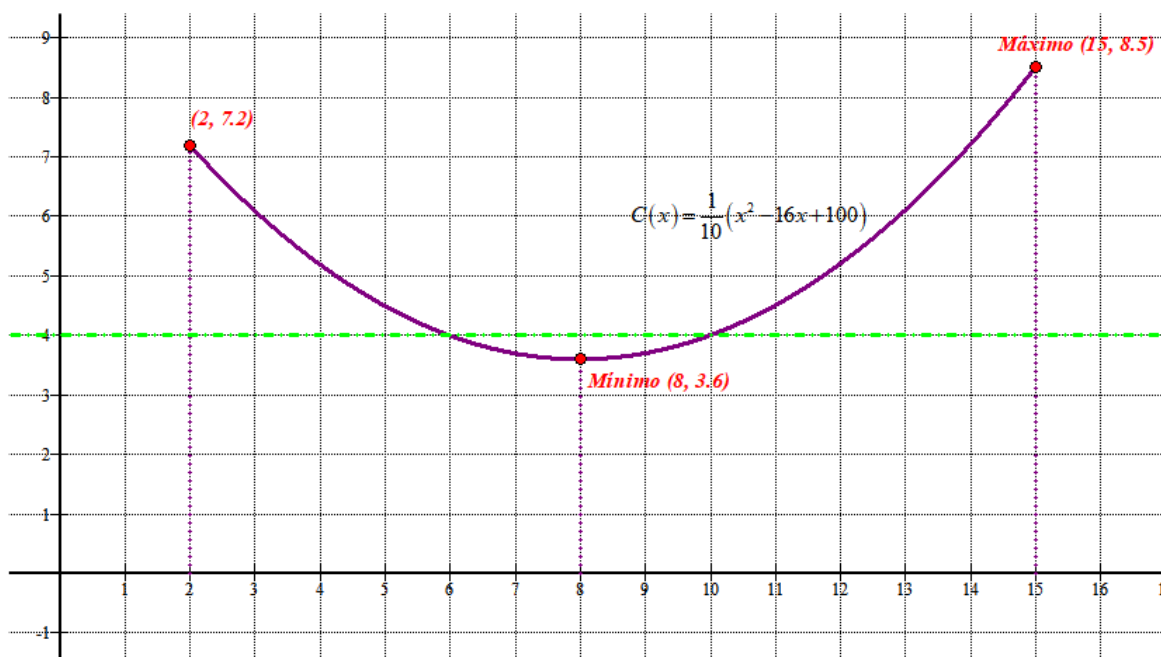
$$x = 2 \rightarrow C(2) = \frac{1}{10}(2^2 - 32 + 100) = \frac{72}{10} = 7,2 \text{ €}$$

$$x = 15 \rightarrow C(15) = \frac{1}{10}(15^2 - 240 + 100) = \frac{85}{10} = 8,5 \text{ €}$$

El coste unitario mínimo se obtiene produciendo 8000 unidades siendo de 3.6 €.

El coste unitario máximo se obtiene produciendo 15000 unidades siendo de 8.5 €.

Dibujamos esta función para poder comprobar todo lo dicho hasta ahora.



- 5.- (10 puntos) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.
- a.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
- b.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
- c.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de los dos hayan votado por Londres?
- d.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Hacemos una tabla de contingencia para aclarar la situación.

	Clase A	Clase B	Clase C	
Vota por Londres	12	10	18	
Vota por París				
	28	25	23	

Completamos la tabla.

	Clase A	Clase B	Clase C	
Vota por Londres	12	10	18	40
Vota por París	16	15	5	36
	28	25	23	76

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas usando la regla de Laplace.

- a.- De los 76 alumnos 40 han votado por Londres, por lo que

$$P(\text{Haya votado por Londres}) = \frac{40}{76} = \boxed{\frac{10}{19} = 0.526}$$

- b.- De los 40 que han votado por Londres hay 10 en la clase B, por lo que

$$P(\text{Sea de clase B / Ha votado por Londres}) = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

- c.- Como es sin reemplazamiento la probabilidad de haber votado por Londres en la primera elección es $\frac{40}{76}$ y en la segunda elección (ya tenemos uno menos que sabemos ha votado por Londres) la probabilidad es $\frac{39}{75}$.

$$P(\text{Los dos hayan votado por Londres}) =$$

$$= P(1^\circ \text{ vota por Londres}) P(2^\circ \text{ vota por Londres} / 1^\circ \text{ ha votado Londres}) =$$

$$= \frac{40}{76} \cdot \frac{39}{75} = \boxed{0.2736}$$

d.- Para que los tres alumnos sean de distinta clase debe ser uno de A, otro de B y otro de C. Puede suceder de 6 formas distintas que expresamos de forma simbólica ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Calculamos la probabilidad de cada uno de ellos y la probabilidad pedida es la suma de todas.

$$P(ABC) =$$

$$= P(\text{Elegir el 1º de la clase A})P(\text{Elegir el 2º de la clase B})P(\text{Elegir el 3º de la clase C}) = \\ = \frac{28}{76} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{23}{74} = \frac{28 \cdot 25 \cdot 23}{76 \cdot 75 \cdot 74} = \boxed{0.038}$$

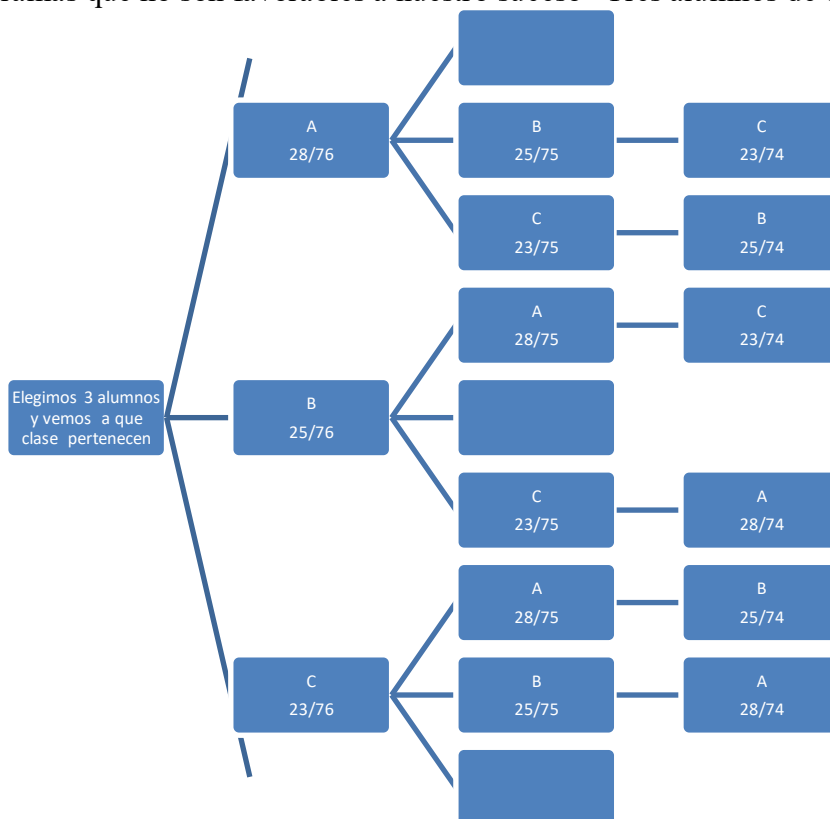
$$P(ACB) =$$

$$= P(\text{Elegir el 1º de la clase A})P(\text{Elegir el 2º de la clase C})P(\text{Elegir el 3º de la clase B}) = \\ = \frac{28}{76} \cdot \frac{23}{76} \cdot \frac{25}{76} = \frac{28 \cdot 25 \cdot 23}{76 \cdot 75 \cdot 74} = \boxed{0.038}$$

$$P(BAC) = \boxed{0.038}; P(BCA) = \boxed{0.038}; P(CAB) = \boxed{0.038}; P(CBA) = \boxed{0.038}$$

Como hemos visto que es la misma en cada una de las 6 situaciones favorables entonces la probabilidad de elegir un alumno de cada clase es $6 \cdot 0.038 = \boxed{0.228}$

Este último apartado se puede resolver con un diagrama de árbol. Para no hacerlo muy grande suprimimos las ramas que no son favorables a nuestro suceso “Tres alumnos de clases distintas”



$$P(\text{Tres de distinta clase}) = \frac{28}{76} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{23}{74} + \frac{28}{76} \cdot \frac{23}{75} \cdot \frac{25}{74} + \frac{25}{76} \cdot \frac{28}{75} \cdot \frac{23}{74} + \frac{25}{76} \cdot \frac{23}{75} \cdot \frac{28}{74} + \\ + \frac{23}{76} \cdot \frac{28}{75} \cdot \frac{25}{74} + \frac{23}{76} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{28}{74} = 6 \cdot \frac{28}{76} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{23}{74} = \boxed{0.228}$$

6.- (10 puntos) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (5 puntos) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (4 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

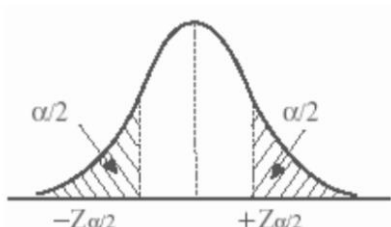
c.- (1 punto) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

Sea X la variable aleatoria que da la estatura en centímetros de un estudiante.

Sabemos que sigue una $N(\mu, 10)$.

a.- Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$



El error es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, por lo que $Error = 2 \text{ cm}$

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,17 \cdot 10}{2} = 10,85$$

$$n = (10,85)^2 = 117,72$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 118 estudiantes.

b.- La media de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{175 + 187 + 183 + 162 + 161 + 164 + 180 + 171 + 158}{9} = 171,22$$

También tenemos que $n = 9$

Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7,23$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (171,22 - 7,23, 171,22 + 7,23) = (163,99, 178,45)$$

c.- Para el cálculo de la varianza utilizamos la fórmula: $Varianza = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$

$$Varianza = \frac{175^2 + 187^2 + 183^2 + 162^2 + 161^2 + 164^2 + 180^2 + 171^2 + 158^2}{9} - 171,22^2 = 100,267$$



**Universidad
Zaragoza**

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019**

EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II

TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

2. (3,25 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

Calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$?
 c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d) (1,25 puntos) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
3. (3,5 puntos) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.
- a) (2 puntos) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.
 b) (1,5 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

2. (3,25 puntos)

- a) (2 puntos) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

- b) (1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx$$

3. (3,5 puntos) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

- a) (1 punto) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?
- b) (1 punto) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?
- c) (0,75 puntos) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso “el trabajador es del departamento de Administración” y B el suceso “el trabajador sabe inglés”. ¿Son los sucesos A y B independientes?
- d) (0,75 puntos) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

Llamemos x = Número de lotes A e y = Número de lotes B.

La función de Gasto del restaurante es $G(x, y) = 8x + 10y$. Se desea minimizar el gasto.

Las restricciones se obtienen del enunciado del problema:

- x e y son cantidades positivas $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$
- El restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas $\rightarrow x + 4y \geq 24$
- El restaurante quiere tener, al menos, 30 kilos de naranjas $\rightarrow 5x + 2y \geq 30$
- El restaurante quiere tener, al menos, 12 kilos de peras $\rightarrow x + y \geq 12$

Resumimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \end{array} \right\}$$

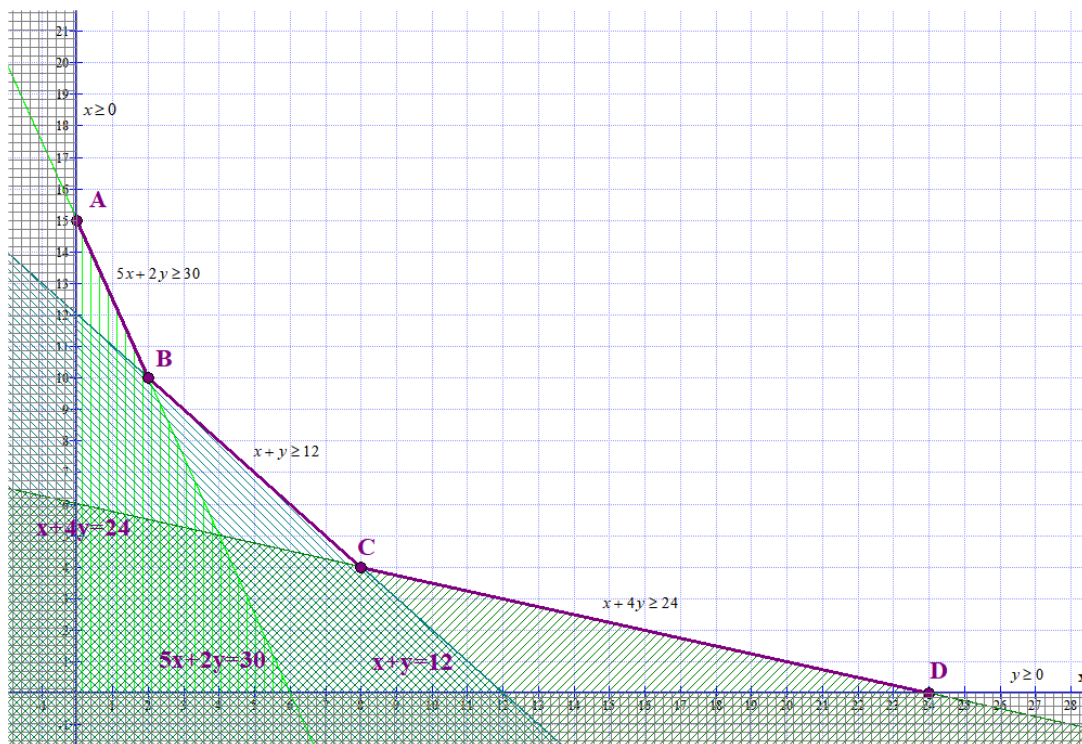
Para obtener la región factible dibujamos las rectas asociadas y vamos tachando la zona que no pertenece a la región factible, quedando en blanco la zona del plano que cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x + 4y = 24 \\ 5x + 2y = 30 \\ x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = \frac{24-x}{4} \\ y = \frac{30-5x}{2} \\ y = 12-x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

x	$y = \frac{24-x}{4}$
0	6
24	0
8	4

x	$y = \frac{30-5x}{2}$
0	15
6	0
2	10

x	$y = 12-x$
0	12
12	0
2	10
8	4



Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{30-5x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y=\frac{30-5x}{2}=\frac{30}{2}=15$$

El punto de corte es A(0, 15).

$$\left. \begin{array}{l} y=\frac{30-5x}{2} \\ y=12-x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{30-5x}{2}=12-x \Rightarrow 30-5x=24-2x \Rightarrow 6=3x \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=12-2=10$$

El punto de corte es B(2, 10)

$$\left. \begin{array}{l} y=\frac{24-x}{4} \\ y=12-x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{24-x}{4}=12-x \Rightarrow 24-x=48-4x \Rightarrow 3x=24 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=12-8=4$$

El punto de corte es C(8, 4)

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{24-x}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 0=\frac{24-x}{4} \Rightarrow 0=24-x \Rightarrow x=24$$

El punto de corte es D(24, 0)

Valoramos el gasto en cada vértice de la región factible y localizamos cuando el gasto es mínimo.

$$A(0, 15) \rightarrow G(0, 15) = 0 + 150 = 150$$

$$B(2, 10) \rightarrow G(2, 10) = 16 + 100 = 116$$

$$C(8, 4) \rightarrow G(8, 4) = 64 + 40 = 104$$

$$D(24, 0) \rightarrow G(24, 0) = 192 + 0 = 192$$

El gasto es mínimo en el punto C(8, 4). Se deben comprar solo 8 lotes del tipo A y 4 lotes del tipo B, satisfacemos las necesidades y el coste es el más bajo posible: 104 €.

2. (3,25 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

Calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$?
 c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d) (1,25 puntos) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) El dominio de la función son todos los números reales, salvo los que anulan el denominador.

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

b) Buscamos cuando $f(x) = 5$.

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Rightarrow \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = 5 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 5 = 10x + 5 \Rightarrow 4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

c) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\text{Como Dominio} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, \text{ entonces la asíntota vertical es } x = -\frac{1}{2}$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty. \text{ No existe asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 5 - 4x^2 - 2x}{2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 1$

d) Obtenemos la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x + 4)(2x + 1) - 2(4x^2 + 4x + 5)}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 8x + 8x + 4 - 8x^2 - 8x - 10}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2 + 8x - 6}{(2x+1)^2}$$

Igualamos a cero la derivada.

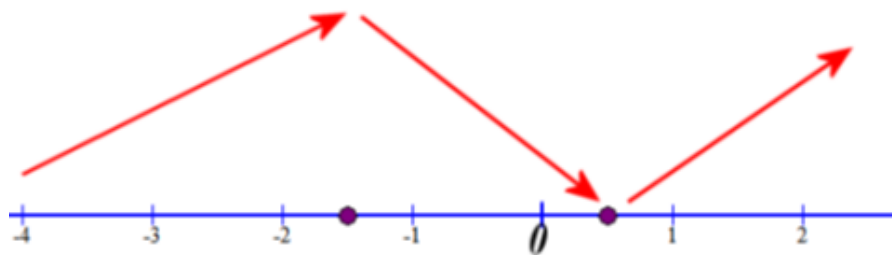
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x^2 + 8x - 6}{(2x+1)^2} = 0 \Rightarrow 8x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{16} = \begin{cases} x = \frac{-8+16}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-8-16}{16} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada antes de $-1,5$, entre $-1,5$ y $0,5$ y después de $0,5$.

- En $(-\infty, -1.5)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{32 - 16 - 6}{(-4+1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece.
- En $(-1.5, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{8 - 8 - 6}{(-2+1)^2} = -6 < 0$. La función decrece.
- En $(-0.5, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0 + 0 - 6}{(0+1)^2} = -6 < 0$. La función decrece.
- En $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{8 + 8 - 6}{(2+1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (0.5, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, -0.5) \cup (-0.5, 0.5)$

3. (3,5 puntos) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (2 puntos) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) (1,5 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

X = Peso de las manzanas de un agricultor en gramos. $X = N(\mu, 20)$

a) Si la amplitud del intervalo de confianza $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$ es igual a 8, entonces el error es $8/2 = 4$ g.

El nivel de confianza del 93% $\rightarrow 1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,965 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,81$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 1,81 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{20 \cdot 1,81}{4} = 9,05 \Rightarrow n = (9,05)^2 = 81,9025$$

Para que la amplitud sea menor o igual que 8 g, el tamaño de la muestra debe ser igual o superior a 82 manzanas.

b) La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{178 + 221 + 196 + 231 + 210 + 168 + 203 + 186 + 196 + 214 + 230 + 224}{12} = \frac{2457}{12} = 204,75$$

El nivel de confianza del 93% $\rightarrow 1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,965 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,81$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{20}{\sqrt{12}} \Rightarrow \text{Error} = 10,45$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (204,75 - 10,45, 204,75 + 10,45) = (194,3, 215,2)$$

Es decir, la media del peso de las manzanas está entre 194,3 g. y 215,2 g. con un nivel de confianza del 93%.

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Llamemos x = número de habitaciones individuales, y = número de habitaciones dobles, z = número de habitaciones familiares.

- El hotel tiene un total de 144 habitaciones $\rightarrow x + y + z = 144$
- El hotel tiene una capacidad total de 312 personas $\rightarrow x + 2y + 4z = 312$
- El número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares $\rightarrow y = 3(x + z)$

Uniando las tres condiciones surge un sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ y = 3(x + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ -3x + y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ \hline x \quad +2y \quad +4z \quad = 312 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -144 \\ \hline y \quad +3z \quad = 168 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \hline -3x \quad +y \quad -3z \quad = 0 \\ 3x \quad +3y \quad +3z \quad = 432 \\ \hline 4y \quad \quad \quad = 432 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 144 \\ y + 3z = 168 \\ 4y = 432 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 144 \\ y + 3z = 168 \\ \boxed{y = \frac{432}{4} = 108} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 108 + z = 144 \\ 108 + 3z = 168 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 36 \\ 3z = 60 \Rightarrow \boxed{z = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 20 = 36 \Rightarrow \boxed{x = 16}$$

La solución es $x = 16$, $y = 108$ y $z = 20$. Es decir, el hotel tiene 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 habitaciones familiares.

2. (3,25 puntos)

a) (2 puntos) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x + y = 4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx$$

a) Buscamos la expresión del beneficio dependiendo de una sola variable.

$$\left. \begin{array}{l} B = 10(2x+1)^2 y \\ x + y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = 10(2x+1)^2 y \\ y = 4 - x \end{array} \right\} \Rightarrow B(x) = 10(2x+1)^2 (4-x) \Rightarrow$$

$$B(x) = 10(4x^2 + 1 + 4x)(4-x) = 10(16x^2 + 4 + 16x - 4x^3 - x - 4x^2) \Rightarrow$$

$$B(x) = 10(-4x^3 + 12x^2 + 15x + 4) = -40x^3 + 120x^2 + 150x + 40$$

Queremos hallar el máximo de esta función. Para ello la derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$B'(x) = -40x^3 + 120x^2 + 150x + 40 \Rightarrow B'(x) = -120x^2 + 240x + 150$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -120x^2 + 240x + 150 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 8x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{-8} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{-8} = \frac{-8 \pm 12}{-8} = \begin{cases} x = \frac{-8+12}{-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} = -0,5 \\ x = \frac{-8-12}{-8} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2} = 2,5 \end{cases}$$

No tiene sentido una inversión negativa, por eso se rechaza el valor de $x = -0,5$ miles de euros. Calculamos el valor de la derivada segunda del beneficio en $x = 2,5$. Si tiene sentido pues sería una inversión de 2500 €.

$$B'(x) = -120x^2 + 240x + 150 \Rightarrow B''(x) = -240x + 240$$

$$x = 2,5 \rightarrow B''(2,5) = -600 + 240 = -360 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa el beneficio es máximo para una inversión de 2500 euros en el fondo M y 1500 en el fondo N. Este beneficio máximo es de $B = 10(2 \cdot 2,5 + 1)^2 \cdot 1,5 = 540$ €.

b) Primero calculamos la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 3x+1=t \rightarrow 3dx=dt \\ dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right\} = \int \left(\frac{5}{t} - \frac{4}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \frac{5}{t} dt - \frac{1}{3} \int \frac{4}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{t} dt - \frac{4}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{5}{3} \ln t - \frac{8}{3} \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{5}{3} \ln t - \frac{8}{3} \sqrt{t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t=3x+1 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{5}{3} \ln(3x+1) - \frac{8}{3} \sqrt{3x+1} + K\end{aligned}$$

Aplicamos este resultado para el cálculo de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx &= \left[\frac{5}{3} \ln(3x+1) - \frac{8}{3} \sqrt{3x+1} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{5}{3} \ln(3+1) - \frac{8}{3} \sqrt{3+1} \right] - \left[\frac{5}{3} \ln(0+1) - \frac{8}{3} \sqrt{0+1} \right] = \\ &= \frac{5}{3} \ln(4) - \frac{16}{3} - 0 + \frac{8}{3} = \frac{5 \ln 4}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{5 \ln 4 - 8}{3}}\end{aligned}$$

3. (3,5 puntos) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

- a) (1 punto) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?
- b) (1 punto) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?
- c) (0,75 puntos) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso “el trabajador es del departamento de Administración” y B el suceso “el trabajador sabe inglés”. ¿Son los sucesos A y B independientes?
- d) (0,75 puntos) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

Completamos la tabla con los totales en fila y columna.

	Administración	Producción	Ventas	
Sabe inglés	12	30	6	48
No sabe inglés	4	11	1	16
	16	41	7	64

- a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sepa inglés}) = \frac{\text{Número de empleados que saben inglés}}{\text{Número de empleados}} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} = \boxed{0,75}$$

- b) Hay 48 empleados que saben inglés y de estos 6 son de ventas. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea de ventas} / \text{Sabe inglés}) = \frac{\text{Número de empleados de ventas que saben inglés}}{\text{Número de empleados que saben inglés}} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = \boxed{0,125}$$

- c) Para que sean independientes dos sucesos debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Calculemos estas tres probabilidades y veamos si se cumple la igualdad.

$A \cap B$ = "El trabajador es de Administración y sabe inglés"

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Nº de trabajadores de Administración que saben inglés}}{\text{Nº de trabajadores}} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

$$P(A) = P(\text{Sea de Administración}) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(\text{Sepa inglés}) = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

¿Es cierto que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{3}{16} \\ P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{16} = P(A)P(B).$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

d) Hay 64 empleados, 16 de administración, 41 de producción y 7 de ventas.

La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(\text{Los tres elegidos sean del mismo departamento}) &= \\ &= P(\text{Los tres son de administración}) + P(\text{Los tres son de producción}) + \\ &+ P(\text{Los tres son de ventas}) = \\ &= \frac{16}{64} \cdot \frac{15}{63} \cdot \frac{14}{62} + \frac{41}{64} \cdot \frac{40}{63} \cdot \frac{39}{62} + \frac{7}{64} \cdot \frac{6}{63} \cdot \frac{5}{62} = \frac{3360 + 63960 + 210}{249984} = \boxed{0,27} \end{aligned}$$



Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) (2 puntos)** ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?
b) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .
2. (3,25 puntos) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

donde $x \in [0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

- a) (0,25 puntos)** El precio de la acción a las nueve y media.
b) (1 punto) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?
c) (2 puntos) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.
3. (3,5 puntos) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.
a) (2 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?
b) (1,5 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

2. (3,25 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) (1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2 + 1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

3. (3,5 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

a) (0,75 puntos) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) (1 punto) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) (1 punto) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) (0,75 puntos) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .

a) Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y resolvemos el sistema de ecuaciones que se plantea.

$$AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -8-1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-1-2y=2 \\ x-4y=-3 \\ -8-1=-9 \\ 4=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=3 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=3 \\ x=-3+4y \end{cases} \Rightarrow -2(-3+4y)-2y=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-8y-2y=3 \Rightarrow -10y=-3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{10}} \Rightarrow \boxed{x = -3 + 4\left(\frac{3}{10}\right) = -3 + \frac{12}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}}$$

Los valores buscados son $x = -\frac{9}{5}$; $y = \frac{3}{10}$

b) Comprobamos si existe la inversa de la matriz C viendo si su determinante es no nulo.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 27 = -19 \neq 0$$

Existe la inversa de C . La calculamos:

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}{-19} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}}$$

2. (3,25 puntos) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x \in [0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

- a) (0,25 puntos) El precio de la acción a las nueve y media.
 b) (1 punto) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?
 c) (2 puntos) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

- a) Nos piden calcular $P(30)$.

$$P(30) = 12 - \frac{60-8}{30^2+120+4} = 12 - \frac{52}{1024} = 11.95$$

El precio de la acción a las nueve y media es de 11.95 €.

- b) Resolvemos la inecuación $P(x) > 12$.

$$P(x) > 12 \Rightarrow 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} > 12 \Rightarrow \frac{2x-8}{x^2+4x+4} < 0 \Rightarrow \frac{2x-8}{(x+2)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-8 < 0 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow \boxed{x < \frac{8}{2} = 4}$$

El precio es mayor de 12 euros entre los 0 y 4 minutos iniciales, es decir, entre las 9 y las 9:04.

- c) Utilizamos la derivada para determinar estos valores.

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} \Rightarrow P'(x) = 0 - \frac{2(x^2+4x+4) - (2x+4)(2x-8)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$P'(x) = -\frac{2x^2+8x+8 - (4x^2-16x+8x-32)}{(x^2+4x+4)^2} = -\frac{-2x^2+16x+40}{(x^2+4x+4)^2} = \frac{2x^2-16x-40}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-16x-40}{(x^2+4x+4)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2-16x-40 = 0 \Rightarrow x^2-8x-20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-20)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{8+12}{2} = 10 \\ \frac{8-12}{2} = -2 \end{cases}$$

Como $x = -2$ no pertenece al intervalo $[0,60]$ solo estudiamos la posibilidad de que 10 sea máximo o mínimo.

Como la función es continua en su intervalo de definición valoramos la función en $x = 10$, así como los extremos del intervalo $[0,60]$ para determinar los valores máximos y mínimos en dicho intervalo.

- Para $x = 0 \rightarrow P(0) = 12 - \frac{0-8}{0^2+0+4} = 12 + 2 = 14 \text{ €}$
- Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 12 - \frac{20-8}{10^2+40+4} = 12 - \frac{12}{144} = 12 - \frac{1}{12} \approx 11.916666 \text{ €}$
- Para $x = 60 \rightarrow P(60) = 12 - \frac{120-8}{60^2+240+4} = 12 - \frac{112}{3844} = \frac{11504}{961} \approx 11.9709 \text{ €}$

El precio mínimo es de 11.917 € y se alcanza a los 10 minutos y el precio máximo es de 14 € y se produce a los 0 minutos. Es decir, a las 9 se tiene el precio máximo y a las 9:10 el precio mínimo.

3. (3,5 puntos) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.

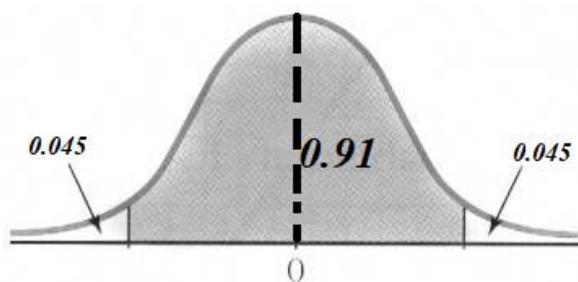
a) (2 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (1,5 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

a) Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr = 0,5$.

Con este valor de la proporción el producto $pr \cdot qr$ toma el valor máximo.

Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 91%



$$1 - \alpha = 0,91 \rightarrow \alpha = 0,09 \rightarrow \alpha/2 = 0,045 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,955 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.69 + 1.70}{2} = 1.695$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza (0.08), por lo que el *Error* debe ser menor de 0.04.

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.695 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.695} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.695} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.04}{1.695} \right)^2} = 448.91
 \end{aligned}$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 449 consumidores.

b) Tenemos que $n = 175$ y la proporción es $pr = \frac{126}{175} = 0.72 \rightarrow qr = 1 - 0.56 = 0.44$

Para un nivel de confianza del 91% el valor crítico es $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.695}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.695 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{175}} = 0.0575$$

El intervalo de confianza para la proporción de consumidores que conocen la marca es:

$$(0.72 - 0.0575, 0.72 + 0.0575) = (0.6625, 0.7775)$$

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Se trata de un problema de programación lineal.

Llamemos “x” al número de sillas que se fabrican e “y” al número de taburetes.

Organicemos los datos en una tabla:

	Kilos de madera	Horas de trabajo	Beneficio
Nº sillas (x)	4x	x	70x
Nº taburetes (y)	2y	3y	50y
	4x + 2y	x + 3y	70x + 50y

La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 70x + 50y$

Las restricciones del problema son:

“Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes” $\rightarrow x \geq 6; y \geq 4$

“Dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo” $\rightarrow 4x + 2y \leq 72; x + 3y \leq 48$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ 4x + 2y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ 2x + y \leq 36 \\ x + 3y \leq 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ y \leq 36 - 2x \\ 3y \leq 48 - x \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$$x = 6$$

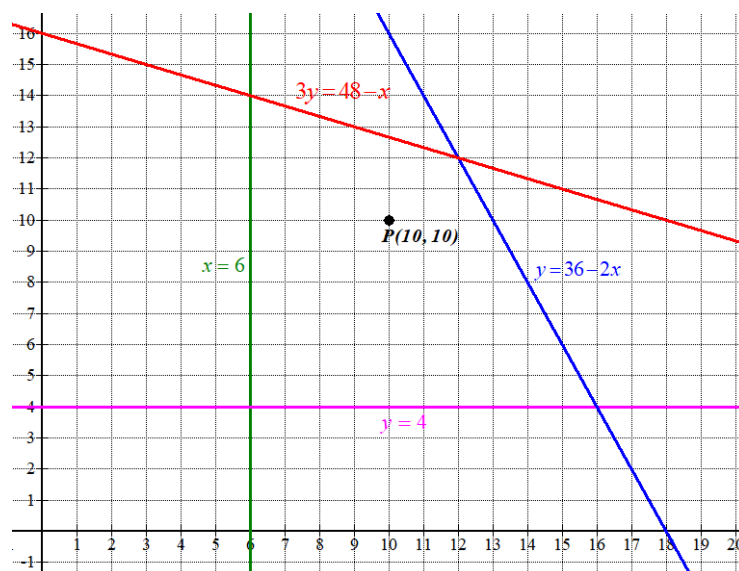
$$3y = 48 - x$$

$x = 6$	y	x	$y = \frac{48-x}{3}$
6	0	36	4
6	10	6	14

$$y = 36 - 2x$$

$$y = 4$$

x	$y = 36 - 2x$	x	$y = 4$
18	0	6	4
6	24	36	4

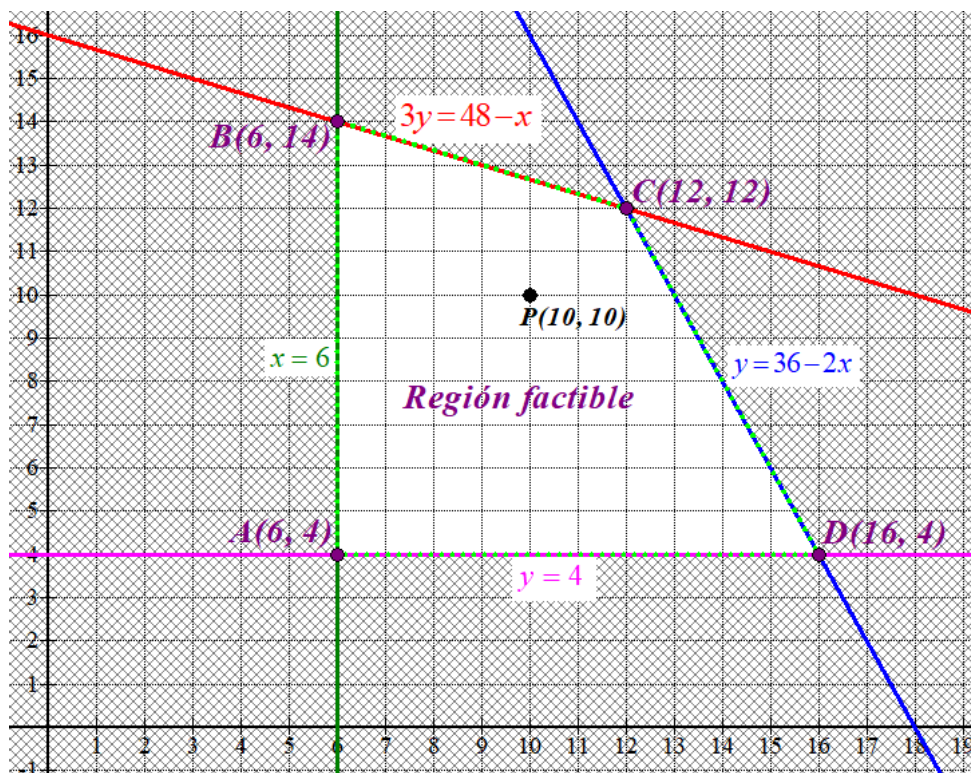


Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 6 \\ 10 \geq 4 \\ 10 \leq 36 - 20 \\ 30 \leq 48 - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

La región factible es la situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical verde.

La dejamos en blanco en el dibujo siguiente señalando los vértices y sus coordenadas.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 70x + 50y$ en cada uno de los vértices.

$$A(6, 4) \rightarrow B(6, 4) = 420 + 200 = 620$$

$$B(6, 14) \rightarrow B(6, 14) = 420 + 700 = 1120$$

$$C(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 840 + 600 = 1440 \quad \text{¡¡máximo!!}$$

$$D(16, 4) \rightarrow B(16, 4) = 1120 + 200 = 1320$$

El máximo beneficio es de 1440 € y se obtiene fabricando 12 sillas y 12 taburetes.

2. (3,25 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) (1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2 + 1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

a) La función debe cumplir que $f(-2) = -6$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + 3x - 6 \\ f(-2) &= -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a(-2)^3 + b(-2)^2 + 3(-2) - 6 = -6 \Rightarrow \boxed{-8a + 4b - 6 = 0}$$

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ esto implica que la derivada primera se anula y que la derivada segunda es negativa.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3 \\ f'(-2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a(-2)^2 + 2b(-2) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{12a - 4b + 3 = 0}$$

Unimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} -8a + 4b - 6 &= 0 \\ 12a - 4b + 3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$4a - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}} \Rightarrow 12 \cdot \frac{3}{4} - 4b + 3 = 0 \Rightarrow 9 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Con $a = \frac{3}{4}$ y $b = 3$ se debe cumplir que la derivada segunda es negativa en $x = -2$.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f''(x) = \frac{18}{4}x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(-2) = \frac{18}{4}(-2) + 6 = -\frac{36}{4} + 6 = -3 < 0$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{4}$ y $b = 3$

b) Empezamos calculando la primitiva de la función.

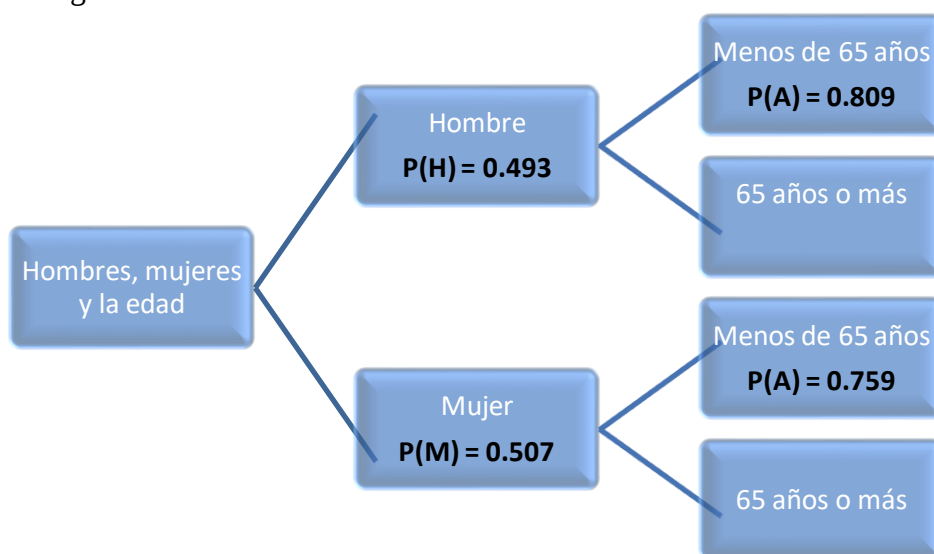
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx &= \int \frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} dx - \int 3xe^{-4x^2} dx = \\&= \frac{5 \cdot 2}{16} \int \frac{16x}{2\sqrt{8x^2+1}} dx + \frac{3}{8} \int (-8x) e^{-4x^2} dx = \\&= \frac{10}{16} \sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8} e^{-4x^2} = \boxed{\frac{5}{8} \sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8} e^{-4x^2} + K}\end{aligned}$$

Pasamos a calcular el valor pedido de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx &= \left[\frac{5}{8} \sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8} e^{-4x^2} \right]_0^1 = \\&= \left[\frac{5}{8} \sqrt{8 \cdot 1^2 + 1} + \frac{3}{8} e^{-4 \cdot 1^2} \right] - \left[\frac{5}{8} \sqrt{0+1} + \frac{3}{8} e^{-0} \right] = \\&= \frac{5}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} e^{-4} - \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{15}{8} - \frac{8}{8} + \frac{3}{8e^4} = \boxed{\frac{7}{8} + \frac{3}{8e^4} \approx 0.88}\end{aligned}$$

3. (3,5 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.
- a) (0,75 puntos) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?
- b) (1 punto) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?
- c) (1 punto) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- d) (0,75 puntos) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos H al suceso “la persona es un hombre”, M al suceso “la persona es una mujer”, A al suceso “la persona tiene menos de 65 años” y $\bar{A}$ al suceso “la persona tiene 65 años o más”

a) $P(M \cap A) = 0.507 \cdot 0.759 = \boxed{0.384813}$

b) $P(A) = P(H \cap A) + P(M \cap A) = 0.493 \cdot 0.809 + 0.507 \cdot 0.759 = \boxed{0.78365}$

c) $P(M / A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.384813}{0.78365} = \boxed{0.49}$

- d) Esta probabilidad es más sencilla calcularla haciendo uso del suceso contrario. Lo contrario a “al menos una de las tres sea mujer” es el suceso “ninguna de las tres es mujer” o lo que es lo mismo “elegimos tres hombres”. Elegir tres hombres con reemplazamiento es como elegir en tres elecciones sucesivas independientes entre si y con la misma probabilidad en cada elección.

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = P(H_1)P(H_2)P(H_3) = \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} = 0.1198$$

$$P(\text{Elegir al menos una mujer de entre 3 personas}) = 1 - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1 - 0.1198 = \boxed{0.8802}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Sea H el suceso “la persona es un hombre”, M el suceso “la persona es una mujer”, A el suceso “la persona tiene menos de 65 años” y $\bar{A}$ el suceso “la persona tiene 65 años o más”

Pasemos los valores porcentuales a valores absolutos y organicemos los datos en una tabla de contingencia.

Para un total de 100 personas, hay 49,3 hombres y 50,7 mujeres.

Entre los hombres un 80,9% tienen menos de 65 años, es decir, $49,3 \times 0,809 = 39,8837$ menores de 65 años y entre las mujeres un 75,9% tienen menos de 65 años, es decir, $50,7 \times 0,759 = 38,4813$ menores de 65 años.

	Menos de 65 años	65 años o más	
Hombres	39.8837		49.3
Mujeres	38.4813		50.7
			100

Completamos la tabla.

	Menos de 65 años	65 años o más	
Hombres	39.8837	9.4163	49.3
Mujeres	38.4813	12.2187	50.7
	78.365	21.635	100

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

$$a) P(M \cap A) = \frac{38.4813}{100} = \boxed{0.384813}$$

$$b) P(A) = \frac{78.365}{100} = \boxed{0.78365}$$

$$c) P(M / A) = \frac{12.2187}{21.635} = \boxed{0.49}$$

d) Esta probabilidad es más sencilla calcularla haciendo uso del suceso contrario. Lo contrario a “al menos una de las tres sea mujer” es el suceso “ninguna de las tres es mujer” o lo que es lo mismo “elegimos tres hombres”. Elegir tres mujeres con reemplazamiento es como elegir en tres elecciones sucesivas independientes entre si y con la misma probabilidad en cada elección.

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = P(H_1)P(H_2)P(H_3) = \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} = 0.1198$$

$$P(\text{Elegir al menos una mujer de entre 3 personas}) =$$

$$= 1 - P(\text{Elegir 3 hombres}) = 1 - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$$

$$= 1 - P(H_1)P(H_2)P(H_3) = 1 - \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} = 1 - 0.1198 = \boxed{0.8802}$$



Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

2. (3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+b}{x^2+1} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos
 b) (1,5 puntos) Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.
 c) (0,75 puntos) Calcular

$$\int_1^2 f(x) dx$$

3. (3,5 puntos) En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.
- a) (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?
 b) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?
 c) (1 punto) Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?
 d) (0,75 puntos) Sea A el suceso “Luis falla el primer lanzamiento” y B el suceso “Luis gana el premio”. ¿Son los sucesos A y B independientes?

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcular $(AB)^2$.
 b) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.
 c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .
2. (3,25 puntos) Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500)$$

donde $x \in [0, 120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

- a) (0,75 puntos) Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.
 b) (1,5 puntos) ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?
 c) (1 punto) Calcular:

$$\int_{10}^{20} C(x) dx$$

3. (3,5 puntos)

- a) (1 punto) En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?
 b) (2,5 puntos) En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

Se trata de un problema de programación lineal. Llamamos “x” al número de figuras de cisne e “y” al número de figuras de elefantes.

Organicemos los datos en una tabla:

	Kg de vidrio	Horas de trabajo	Beneficio
Nº cisnes (x)	0.1x	x/2	10x
Nº elefantes (y)	0.2y	y/3	8y
	0.1x + 0.2y	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	10x + 8y

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y tiene la expresión:

$$B(x, y) = 10x + 8y$$

Las restricciones son:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio” $\rightarrow 0.1x + 0.2y \leq 16$

“El artesano puede utilizar como máximo 40 horas de trabajo” $\rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 40$

“El número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante” $\rightarrow x \leq 2y$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 0.1x + 0.2y \leq 16 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 40 \\ x \leq 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 160 \\ 3x + 2y \leq 240 \\ x \leq 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2y \leq 160 - x \\ 2y \leq 240 - 3x \\ 2y \geq x \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

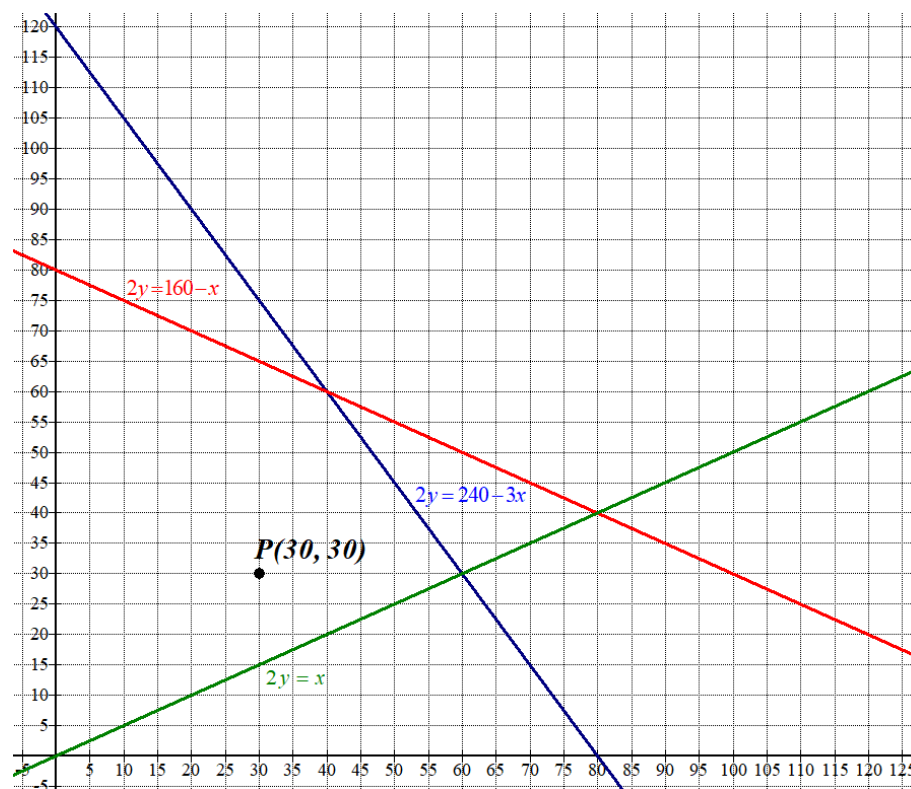
$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$2y = 160 - x$$

$$2y = 240 - 3x$$

$$2y = x$$

Primer	x	y = $\frac{160 - x}{2}$	x	y = $\frac{240 - 3x}{2}$	x	y = $\frac{x}{2}$
cuadrante	0	80	0	120	0	0
	160	0	80	0	80	40

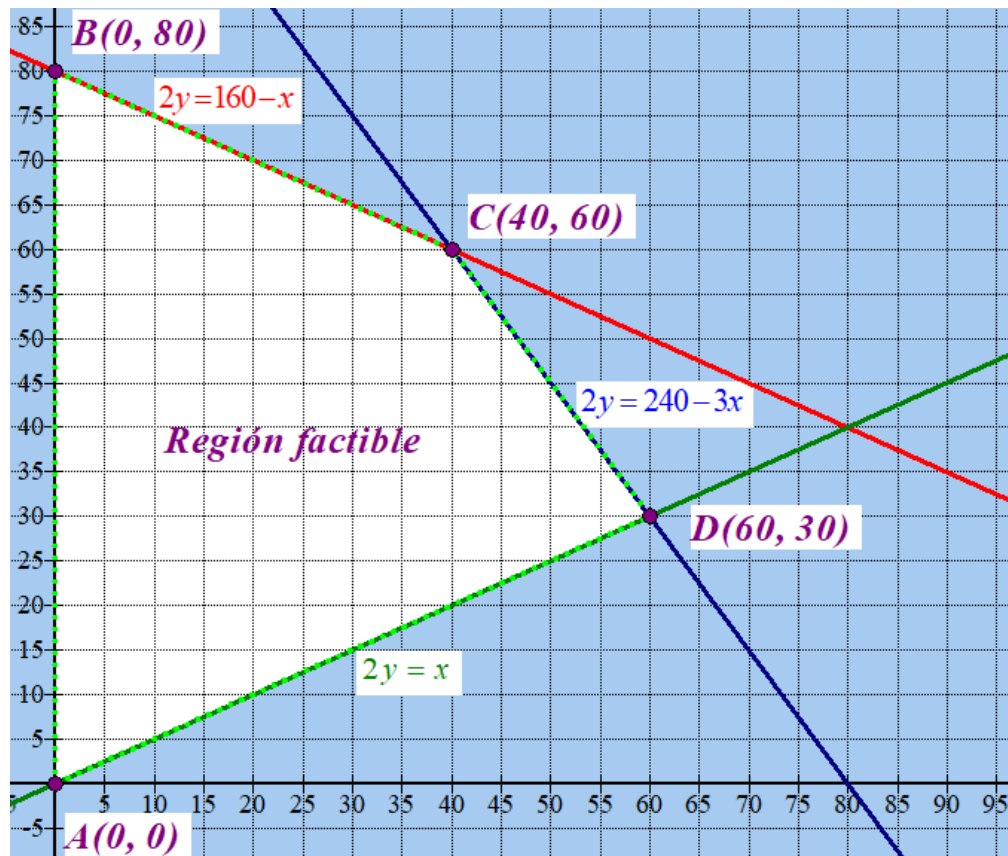


Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2y \leq 160 - x \\ 2y \leq 240 - 3x \\ 2y \geq x \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde. Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \geq 0; 30 \geq 0 \\ 60 \leq 160 - 30 \\ 60 \leq 240 - 90 \\ 60 \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Dejamos en blanco dicha región en el siguiente dibujo



Las coordenadas de los vértices se han podido obtener durante el dibujo de las rectas. Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 10x + 8y$ en cada uno de los vértices en busca de un valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 80) \rightarrow B(0, 80) = 640$$

$$C(40, 60) \rightarrow B(40, 60) = 400 + 480 = 880 \quad \text{¡¡Máximo!!}$$

$$D(60, 30) \rightarrow B(60, 30) = 600 + 240 = 840$$

El beneficio máximo es de 880 € y se obtiene con la fabricación de 40 cisnes y 60 elefantes.

2. (3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+b}{x^2+1} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos

b) (1,5 puntos) Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.

c) (0,75 puntos) Calcular

$$\int_1^2 f(x) dx$$

a) Las tres funciones que definen a son continuas. Debemos exigir que también lo sea en $x = -2$ y $x = 0$. Para ello, debe ser:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{-2+b}{(-2)^2+1} = \frac{b-2}{5} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+b}{x^2+1} = \frac{b-2}{5} \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} ax+1 = -2a+1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b-2}{5} = -2a+1 \Rightarrow b-2 = -10a+5 \Rightarrow \boxed{b = -10a+7}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 9x^2 + 24x + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+b}{x^2+1} = \frac{b}{1} = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Sustituimos el valor de “b” obtenido en la primera ecuación y tenemos

$$4 = -10a + 7 \Rightarrow 10a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{10} = 0.3$$

Los valores buscados son $a = 0.3$ y $b = 4$.

b) En el intervalo $[3, 8]$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4$.

Estudiamos si tiene algún mínimo en este intervalo.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 32}}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 = x \\ \frac{6-2}{2} = 2 = x \end{cases}$$

El valor $x = 4$ es un valor crítico y pertenece al intervalo $[3, 8]$. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en $x = 4$ y comprobamos donde se alcanza el valor mínimo.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + 4 = 22 \\ f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 4 = 20 \text{ ¡Mínimo!} \\ f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 4 = 132 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{En } x = 4 \text{ se alcanza el valor mínimo}$$

El mínimo valor que alcanza la función en el intervalo $[3, 8]$ es 20.

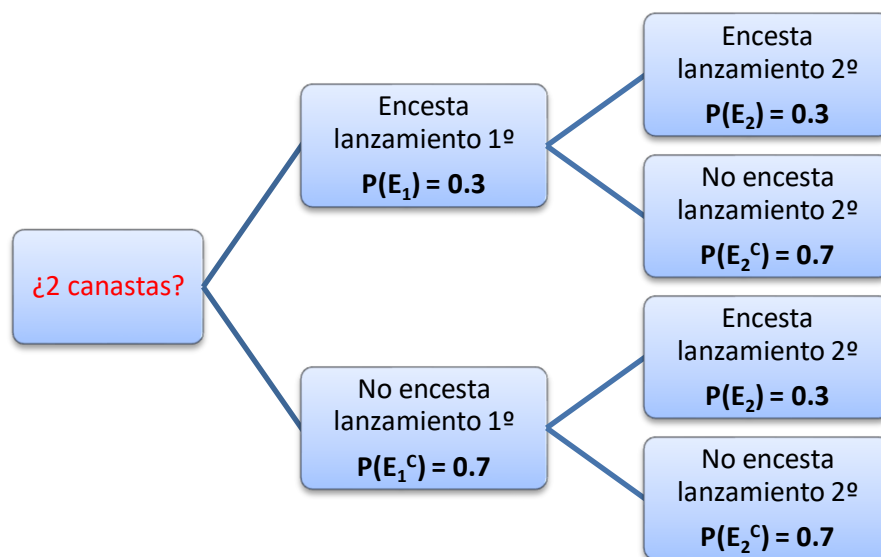
c) En el intervalo $[1, 2]$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x^3 - 9x^2 + 24x + 4 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 4x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 3 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right] = \\ &= 4 - 24 + 48 + 8 - \frac{1}{4} + 3 - 12 - 4 = 23 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{91}{4}} \end{aligned}$$

3. (3,5 puntos) En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.
- a) (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?
- b) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?
- c) (1 punto) Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?
- d) (0,75 puntos) Sea A el suceso “Luis falla el primer lanzamiento” y B el suceso “Luis gana el premio”. ¿Son los sucesos A y B independientes?

Llamamos E_1 al suceso “encesta el primer lanzamiento” y E_2 al suceso “encesta el segundo lanzamiento”. B al suceso “Luis gana el premio”.

El diagrama en árbol de la situación es:



a) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = 0.3 \cdot 0.3 = \boxed{0.09}$

- b) Como puede ganar de distintas maneras y de perderlo solo de una forma lo calculamos con el suceso opuesto.

Calculamos la probabilidad de perder. $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2}) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$

Calculamos la probabilidad de ganar. $P(B) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - 0.49 = \boxed{0.51}$

c) $P(\overline{E_1} / B) = \frac{P(\overline{E_1} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{E_1})P(B / \overline{E_1})}{P(B)} = \frac{P(\overline{E_1})P(E_2 / \overline{E_1})}{P(B)} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.51} = \boxed{\frac{7}{17} \approx 0.41}$

- d) He llamado $\overline{E_1}$ al suceso A . Por lógica los sucesos A y B no son independientes. Lo comprobamos con cálculos.

$$\left. \begin{array}{l} P(\overline{E_1} \cap B) = P(E_2) = 0.3 \\ P(\overline{E_1})P(B) = 0.7 \cdot 0.51 = 0.357 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\overline{E_1} \cap B) = 0.3 \neq 0.357 = P(\overline{E_1})P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular $(AB)^2$.b) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .

$$a) \quad AB = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6+1 & 0-9+4 \\ 0+8+2 & 0+12+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-50 & -15-100 \\ 30+200 & -50+400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & -115 \\ 230 & 350 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad 2A + 3X = 4C \Rightarrow 3X = 4C - 2A \Rightarrow X = \frac{4}{3}C - \frac{2}{3}A$$

$$X = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & \frac{6}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -8/3 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 2 & -2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

c) Comprobamos si existe la inversa de D viendo que su determinante es no nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 12 + 6 = -4 \neq 0. \text{ Existe la inversa de la matriz } D.$$

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -6 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (3,25 puntos) Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500)$$

donde $x \in [0, 120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

- a) (0,75 puntos) Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.
 b) (1,5 puntos) ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?
 c) (1 punto) Calcular:

$$\int_{10}^{20} C(x) dx$$

- a) Nos piden encontrar los valores de x , si los hay, para los que $C(x) = 18$.

$$C(x) = 18 \Rightarrow \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500) = 18 \Rightarrow -x^2 + 100x + 7500 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 100x + 3900 = 0 \Rightarrow x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4(-1)3900}}{-2} = \frac{-100 \pm \sqrt{25600}}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-100 \pm 160}{-2} = \begin{cases} \frac{-100 + 160}{-2} = -30 \notin [0, 120] \\ \frac{-100 - 160}{-2} = 130 \notin [0, 120] \end{cases}$$

No hay ningún momento durante el programa en el que la cuota de pantalla sea 18 %.

- b) Utilizamos la derivada para buscar los momentos críticos.

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500) \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{200}(-2x + 100)$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{200}(-2x + 100) = 0 \Rightarrow -2x + 100 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 50}$$

Solo existe un valor crítico en $x = 50$. Como la función es polinómica es una función continua, por lo que valoramos la función en los extremos del intervalo $[0, 120]$ y en $x = 50$ para determinar el valor máximo y mínimo de cuota de audiencia.

- En $x = 0$ la cuota es de $C(0) = \frac{1}{200}(-0^2 + 0 + 7500) = 37.5$
- En $x = 50$ la cuota es de $C(50) = \frac{1}{200}(-50^2 + 5000 + 7500) = 50$ ¡Máximo!
- En $x = 120$ la cuota es de $C(120) = \frac{1}{200}(-120^2 + 12000 + 7500) = \frac{1}{200}(-14400 + 12000 + 7500) = 25.5$ ¡Mínimo!

La mínima cuota de pantalla se produjo en el minuto 120 y fue del 25,5% y la máxima en el minuto 50 con un 50%.

c)

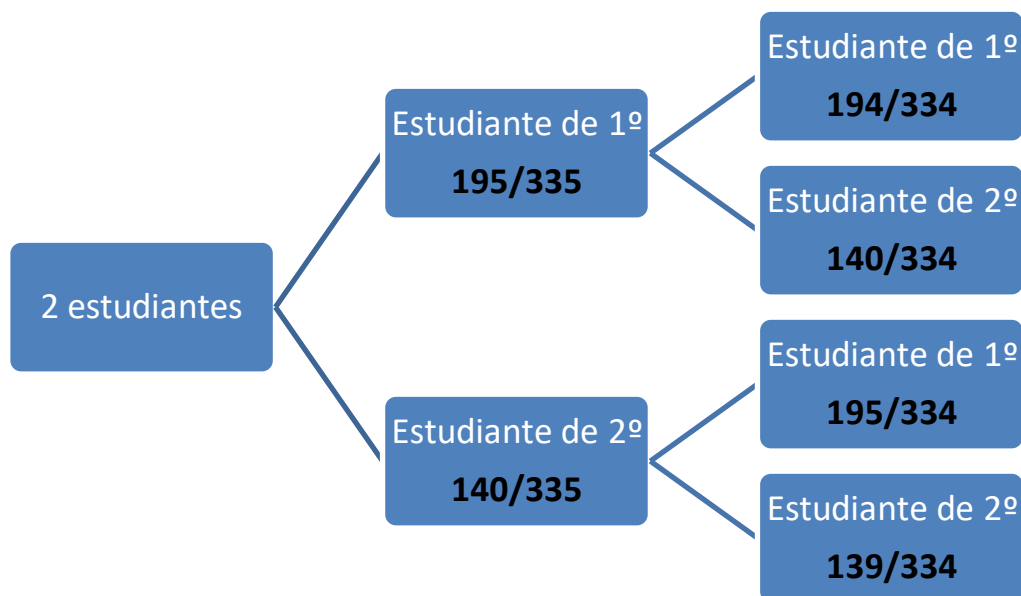
$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} C(x) dx &= \int_{10}^{20} \frac{1}{200} (-x^2 + 100x + 7500) dx = \frac{1}{200} \int_{10}^{20} -x^2 + 100x + 7500 dx = \\&= \frac{1}{200} \left[-\frac{x^3}{3} + 50x^2 + 7500x \right]_{10}^{20} = \\&= \frac{1}{200} \left[\left(-\frac{20^3}{3} + 50 \cdot 20^2 + 7500 \cdot 20 \right) - \left(-\frac{10^3}{3} + 50 \cdot 10^2 + 7500 \cdot 10 \right) \right] = \\&= \frac{1}{200} \left[-\frac{8000}{3} + 20000 + 150000 + \frac{1000}{3} - 5000 - 75000 \right] = \frac{263000}{600} = \boxed{\frac{1315}{3}}\end{aligned}$$

3. (3,5 puntos)

a) (1 punto) En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) (2,5 puntos) En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

a) Realizamos un diagrama de árbol. Tenemos en cuenta que elegimos un estudiante y después un segundo estando la probabilidad influida por lo que haya ocurrido en la primera elección.



Sean P_1 el suceso “el primer estudiante es de primer curso”, P_2 el suceso “el segundo estudiante es de primer curso”, S_1 el suceso “el primer estudiante es de segundo curso” y S_2 el suceso “el segundo estudiante es de segundo curso”. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 P((P_1 \cap P_2) \cup (S_1 \cap S_2)) &= P(P_1 \cap P_2) + P(S_1 \cap S_2) = \\
 &= P(P_1)P(P_2 / P_1) + P(S_1)P(S_2 / S_1) = \frac{195}{335} \cdot \frac{194}{334} + \frac{140}{335} \cdot \frac{139}{334} = \frac{5729}{11189} = 0.51
 \end{aligned}$$

b) Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 94%:



$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$

La proporción de personas vegetarianas en la muestra es: $pr = \frac{72}{300} = 0.24$

El error máximo admisible o cota de error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{300}} = 0.046$$

El intervalo de confianza pedido es:

$$(0.24 - 0.046, 0.24 + 0.046) = (0.194, 0.286)$$

Es decir, con un nivel de confianza del 94% hay entre un 19,4% y un 28,6% de personas vegetarianas en la ciudad.



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. (3,25 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}$$

Calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 - b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x es la función positiva?
 - c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 - d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.
3. (3,5 puntos) Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.
- a) (0,75 puntos) Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?
 - b) (1 punto) Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?
 - c) (1 punto) Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?
 - d) (0,75 puntos) Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Discutir, según los valores de
- a
- , el sistema:

$$2x + ay + az = 4$$

$$-x + ay + z = a$$

$$x + y + az = 3$$

Resolverlo para $a = -3$.

2. (3,25 puntos) Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio
- B
- que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta
- x
- (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$$

donde B está expresado en millones de euros.

- a) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de $x \in [1,10]$ el beneficio es positivo?
 b) (1,5 puntos) ¿Qué precio de venta $x \in [1,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?
 c) (1 punto) Calcular

$$\int_1^{10} B(x) dx$$

3. (3,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) Dados dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A/B) = 0,7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?
 b) (2 puntos) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):
 24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de programación lineal.

Llamamos “x” al número de horas que tiene que trabajar la fábrica A e “y” al número de horas de la fábrica B.

Organicemos los datos en una tabla:

	Nº sillas	Nº mesas	Nº taburetes	Coste
Nº horas de A (x)	x	2x	4x	1500x
Nº horas de B (y)	4y	3y	2y	1000y
	$x + 4y$	$2x + 3y$	$4x + 2y$	$1500x + 1000y$

La función objetivo es el coste que debe ser mínimo teniendo la expresión:

$$C(x, y) = 1500x + 1000y$$

El conjunto de restricciones a las que debe estar sometida la solución son:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes” $\rightarrow x + 4y \geq 80;$
 $2x + 3y \geq 120; 4x + 2y \geq 96$

Las reunimos en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 4y \geq 80 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ 4x + 2y \geq 96 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 4y \geq 80 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ 2x + y \geq 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 4y \geq 80 - x \\ 3y \geq 120 - 2x \\ y \geq 48 - 2x \end{array} \right\}$$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$4y = 80 - x$$

$$3y = 120 - 2x$$

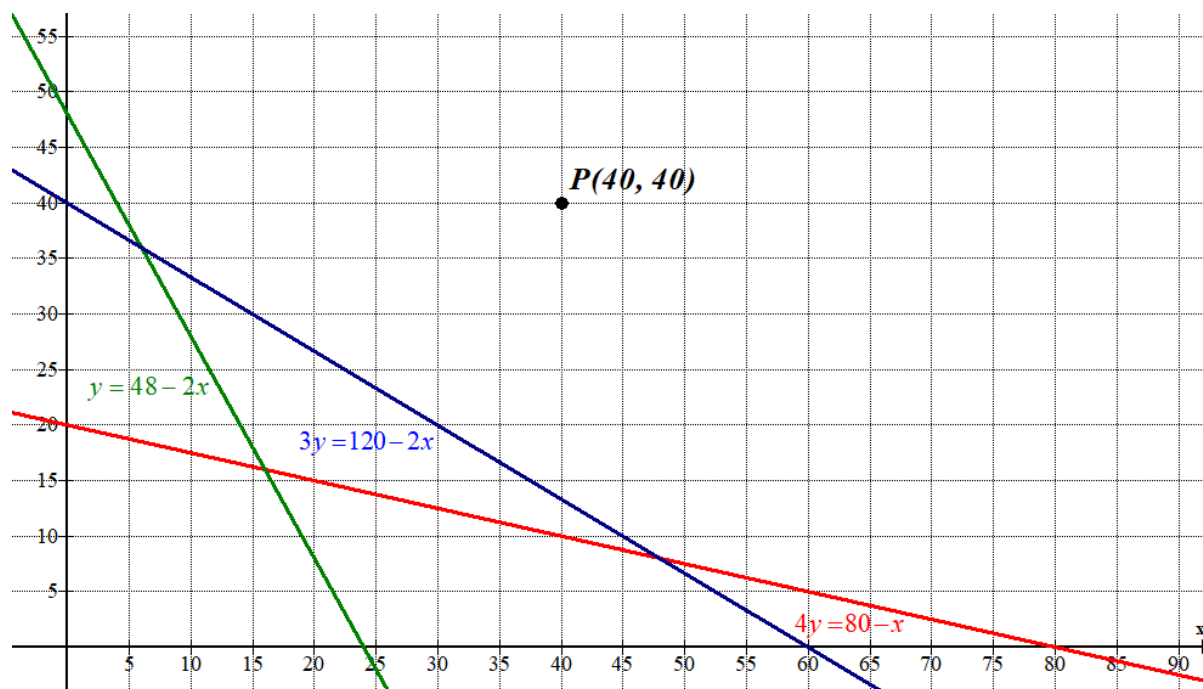
$$y = 48 - 2x$$

Primer
cuadrante

x	$y = \frac{80-x}{4}$
0	20
80	0

x	$y = \frac{120-2x}{3}$
0	40
45	10

x	$y = 48 - 2x$
0	48
24	0



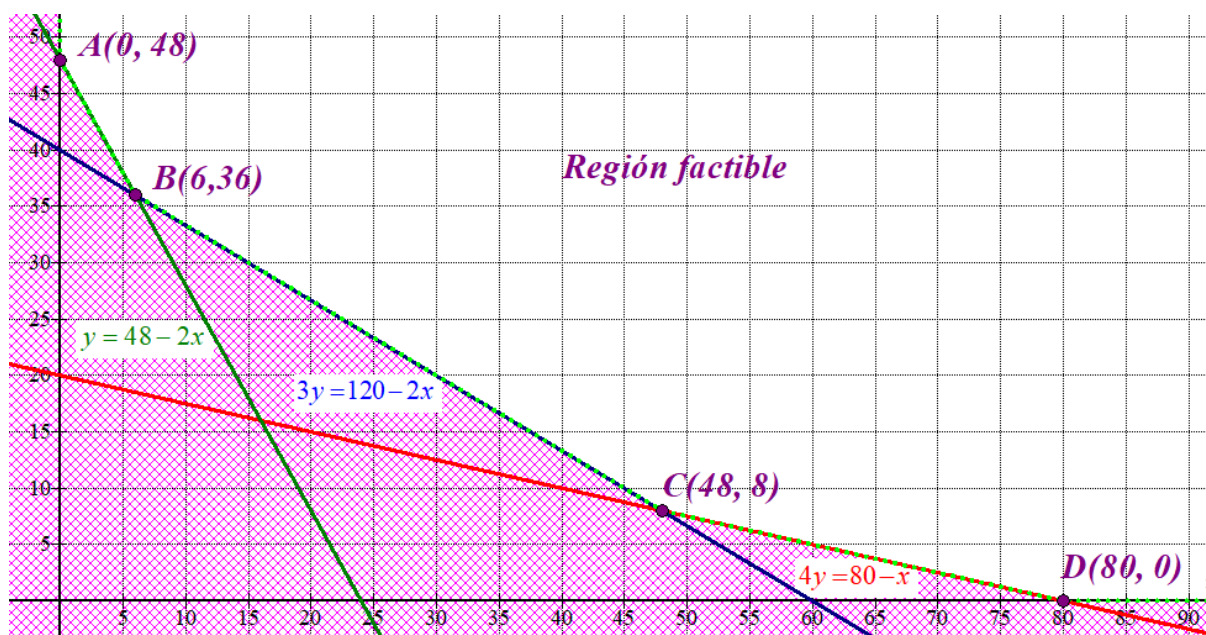
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 4y \geq 80 - x \\ 3y \geq 120 - 2x \\ y \geq 48 - 2x \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de las rectas verde, azul y roja. Se puede comprobar que el punto $P(40, 40)$ perteneciente a esta zona cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 40 \geq 0; 40 \geq 0 \\ 4 \cdot 40 \geq 80 - 40 \\ 3 \cdot 40 \geq 120 - 2 \cdot 40 \\ 40 \geq 48 - 2 \cdot 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡Todas se cumplen!!}$$

Dejamos de blanco la región factible en el siguiente dibujo y obtenemos las coordenadas de los vértices.



Las coordenadas del vértice A aparecen en la tabla de valores de la recta verde. Las coordenadas del punto D aparecen en la tabla de la recta roja.

Falta determinar las coordenadas de los vértices B y C que obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por las rectas correspondientes.

$$B \rightarrow \begin{cases} y = 48 - 2x \\ 3y = 120 - 2x \end{cases} \Rightarrow 3(48 - 2x) = 120 - 2x \Rightarrow 144 - 6x = 120 - 2x \Rightarrow 24 = 4x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 48 - 12 = 36 \Rightarrow \boxed{B(6, 36)}$$

$$C \rightarrow \begin{cases} 4y = 80 - x \\ 3y = 120 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80 - 4y \\ 3y = 120 - 2x \end{cases} \Rightarrow 3y = 120 - 2(80 - 4y) \Rightarrow 3y = 120 - 160 + 8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 = 5y \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 80 - 32 = 48 \Rightarrow \boxed{C(48, 8)}$$

Valoramos la función coste en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(0, 48) \rightarrow C(0, 48) = 48000$$

$$B(6, 36) \rightarrow C(6, 36) = 9000 + 36000 = 45000 \quad \text{¡¡Mínimo!!}$$

$$C(48, 8) \rightarrow C(48, 8) = 72000 + 8000 = 80000$$

$$D(80, 0) \rightarrow C(80, 0) = 120000$$

El coste mínimo es de 45000 € y se obtiene con 6 horas de la fábrica A y 36 de la fábrica B.

2. (3,25 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}$$

Calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x es la función positiva?
 c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

- a) Al tratarse de una función racional, su dominio son todos los números reales menos los valores de x que anulen al denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

- b) La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}$ es positiva cuando son positivos numerador y denominador y también cuando ambos son negativos.

Pero $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} = \frac{(x-1)^2}{2x + 3}$ por lo que el numerador siempre es positivo o cero, entonces la función es positiva solo cuando es positivo el denominador.

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

Como el numerador se anula para $x = 1$, entonces la función es positiva en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

- c) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -3/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} = \frac{6.25}{0} = \infty$$

$x = -\frac{3}{2}$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} = \infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} - \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2 - 2x + 1) - x(2x + 3)}{2(2x + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} - 4x + 2 - \cancel{2x^2} - 3x}{4x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x + 2}{4x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x}{4x} = \boxed{-\frac{7}{4}}$$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ es asíntota oblicua de la función.

d) Usamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(2x + 3) - 2(x^2 - 2x + 1)}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 6x - \cancel{4x} - 6 - 2x^2 + \cancel{4x} - 2}{(2x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - 8}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 6x - 8}{(2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 = x \\ \frac{-3-5}{2} = -4 = x \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x = -4$ y $x = 1$.

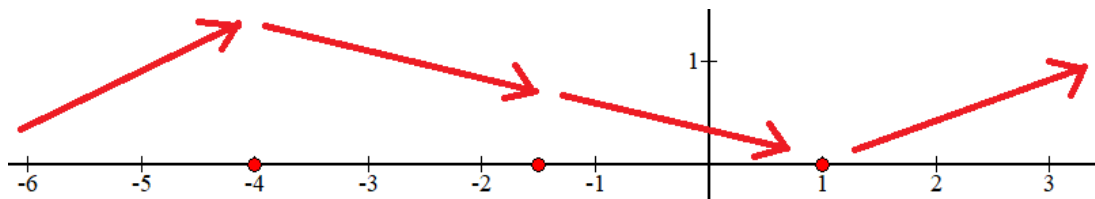
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor

$x = -\frac{3}{2}$ pues está excluido del dominio.

- En $(-\infty, -4)$ tomamos $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5) = \frac{50 - 30 - 8}{(-10 + 3)^2} = \frac{12}{49} > 0$. La función crece en $(-\infty, -4)$.
- En $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{18 - 18 - 8}{(-6 + 3)^2} = \frac{-8}{9} < 0$. La función decrece en $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-8}{(3)^2} < 0$. La función decrece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8}{(2 \cdot 2 + 3)^2} = \frac{12}{49} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

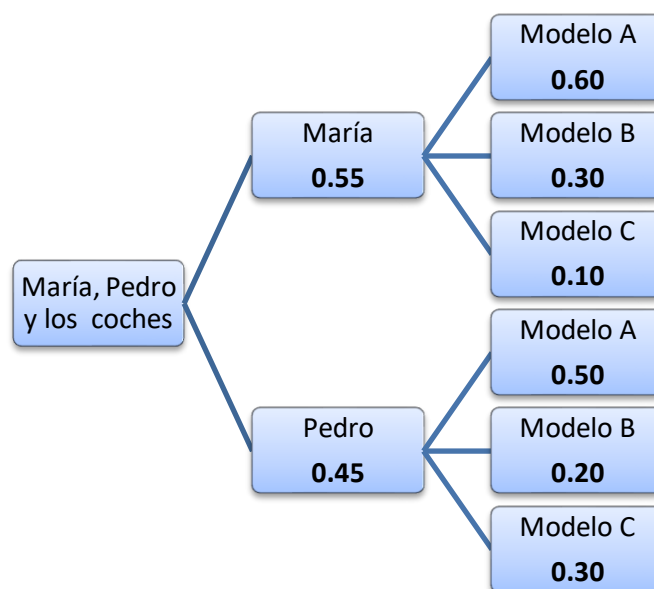


La función presenta un máximo relativo en $x = -4$, como $f(-4) = \frac{(-4)^2 - 2(-4) + 1}{2(-4) + 3} = -5$, el máximo relativo tiene coordenadas $(-4, -5)$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$, como $f(1) = \frac{1^2 - 2 + 1}{2 + 3} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$.

3. (3,5 puntos) Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.
- a) (0,75 puntos) Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?
- b) (1 punto) Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?
- c) (1 punto) Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?
- d) (0,75 puntos) Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos M al suceso “el coche es vendido por María”, $\bar{M}$ al suceso “el coche es vendido por Pedro”. A al suceso “El coche es del modelo A”, B al suceso “El coche es del modelo B” y C al suceso “El coche es del modelo C”.

a) $P(B \cap M) = P(M)P(B/M) = 0.55 \cdot 0.30 = \boxed{0.165}$

b) $P(B) = P(M)P(B/M) + P(\bar{M})P(B/\bar{M}) = 0.55 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.2 = \boxed{0.255}$

c) $P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M)P(B/M)}{P(B)} = \frac{0.165}{0.255} = \boxed{0.6471}$

- d) El suceso “al menos una de las dos ventas es de María” es el suceso contrario al suceso “ninguna de las dos ventas es de María”. Como además hay reposición, los dos sucesos son independientes.

$$P(\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2) = P(\bar{M}_1)P(\bar{M}_2) = 0.45 \cdot 0.45 = 0.2025$$

$$P(\text{Al menos una de las dos ventas es de María}) = 1 - P(\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2) = 1 - 0.2025 = \boxed{0.7975}$$

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Discutir, según los valores de a , el sistema:

$$2x + ay + az = 4$$

$$-x + ay + z = a$$

$$x + y + az = 3$$

Resolverlo para $a = -3$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, y la ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array} \right)$.

Estudiamos el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + \cancel{a} - \cancel{a} - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} - 2 = 2a^2 - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La columna 2ª y 3ª son iguales, por lo que

considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$. La columna 2ª y 3ª son iguales, por lo que

considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 4 - 4 + 3 - 2 = 0. \text{ El rango de A/B no es 3 y tendrá rango 2 igual que la matriz}$$

A. Como este rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada y determinara con más facilidad el rango de A y de A/B y por tanto la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 3}^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 3}^a \\ 0 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

El sistema equivalente queda $\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 4 \\ -3y + z = 2 \\ 0 = 4 \end{array} \right\}$ y es incompatible.

Para $a = -3$ el sistema es compatible determinado. El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - 3z = 4 \\ -x - 3y + z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{array} \right\}$.

Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 3 + 3 - 9 + 9 - 2 = 16$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{36 - 9 + 9 - 27 + 27 - 4}{16} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{18 + 4 + 9 - 9 - 12 - 6}{16} = \frac{1}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-18 + 9 - 4 + 12 - 9 + 6}{16} = \frac{-1}{4}$$

Para $a = -3$ la solución es $x = 2$; $y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{-1}{4}$

2. (3,25 puntos) Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$$

donde B está expresado en millones de euros.

- a) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de $x \in [1,10]$ el beneficio es positivo?
 b) (1,5 puntos) ¿Qué precio de venta $x \in [1,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?
 c) (1 punto) Calcular

$$\int_1^{10} B(x) dx$$

- a) Averiguamos cuando se anula la función.

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = \frac{9x - 18 - x^2}{x^2} = \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2}$$

$$B(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 9x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-1)(-18)}}{-2} =$$

$$= \frac{-9 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-9+3}{-2} = 3 = x \\ \frac{-9-3}{-2} = 6 = x \end{cases}$$

La función es continua en el intervalo de estudio pues su único punto de discontinuidad está en $x = 0$. Como la función se anula en $x = 3$ y en $x = 6$, el signo de la función se alternará en los intervalos $(1, 3)$, $(3, 6)$ y $(6, 10)$.

- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la función vale $B(2) = \frac{-2^2 + 18 - 18}{2^2} = -1 < 0$. La función es negativa en el intervalo $(1, 3)$.
- En $(3, 6)$ tomamos $x = 4$ y la función vale $B(4) = \frac{-4^2 + 36 - 18}{4^2} = \frac{2}{16} > 0$. La función es positiva en el intervalo $(3, 6)$.
- En $(6, 10)$ tomamos $x = 8$ y la función vale $B(8) = \frac{-8^2 + 72 - 18}{8^2} = \frac{-10}{64} < 0$. La función es negativa en el intervalo $(6, 10)$.

El beneficio es positivo en el intervalo $(3, 6)$, es decir, con un precio entre 3 y 6 €.

- b) Estudiamos el signo de la derivada.

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} \Rightarrow B'(x) = \frac{(-2x + 9) \cdot x^2 - 2x(-x^2 + 9x - 18)}{(x^2)^2}$$

$$B'(x) = \frac{-\cancel{2x^3} + 9x^2 + \cancel{2x^3} - 18x^2 + 36x}{x^4} = \frac{-9x^2 + 36x}{x^4}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-9x^2 + 36x}{x^4} = 0 \Rightarrow -9x^2 + 36x = 0 \Rightarrow -9x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1, 10] \\ 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Tenemos un punto crítico en $x = 4$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(1, 4)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $B'(2) = \frac{-9 \cdot 2^2 + 72}{2^4} = \frac{36}{16} > 0$. La función crece en $(1, 4)$
- En $(4, 10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $B'(5) = \frac{-9 \cdot 5^2 + 180}{5^4} = \frac{-45}{625} < 0$. La función decrece en $(4, 10)$

La función presenta un máximo relativo en $x = 4$.

Dicho beneficio es de $B(4) = \frac{-4^2 + 36 - 18}{4^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0.125$.

El beneficio es máximo con un precio de 4 € y dicho beneficio es de 125.000 €

c)

$$\int_1^{10} B(x) dx = \int_1^{10} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx = \int_1^{10} \frac{9}{x} - 18x^{-2} - 1 dx = \left[9 \ln x - 18 \frac{x^{-1}}{-1} - x \right]_1^{10} =$$

$$= \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_1^{10} = \left[9 \ln 10 + \frac{18}{10} - 10 \right] - \left[9 \ln 1 + \frac{18}{1} - 1 \right] =$$

$$= 9 \ln 10 + 1.8 - 10 - 18 + 1 = \boxed{9 \ln 10 - 25.2}$$

3. (3,5 puntos)**a)** (1,5 puntos) Dados dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A/B) = 0,7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?**b)** (2 puntos) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

a) Calculamos las probabilidades pedidas.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0,7 = \frac{P(A \cap B)}{0,8} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,56 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0,84}$$

Comprobamos si los sucesos A y B son independientes viendo si se cumple

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,6 \\ P(B) = 0,8 \\ P(A \cap B) = 0,56 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48 \neq 0,56 = P(A \cap B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.**b)** X = Gasto semanal en ocio de un joven. $X = N(\mu, 6)$.La muestra es de tamaño 10 $\rightarrow n = 10$. Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{24,5 + 11 + 16,5 + 18,5 + 21,5 + 25 + 6,5 + 12 + 10,5 + 9,5}{10} = 15,55 \text{ €}$$

Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 94%:



$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5715	0.5755
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6143
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7225
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7853
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8390
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8829
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9440
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9663	0.9671	0.9678	0.9685	0.9691	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Determinamos el valor del error del intervalo de confianza con la fórmula $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} = 3.567$$

El intervalo de confianza será:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (15.55 - 3.567, 15.55 + 3.567) = (11.983, 19.117)$$

Con un nivel de confianza del 94%, la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad está entre 11,98 € y 19,12 €.



Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) (0,5 puntos)** ¿Se puede calcular AB ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular BA ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .
d) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.
- 2. (3,25 puntos)** Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x) = \frac{21x+12}{x+1}$$

- a) (0,75 puntos)** Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.
b) (1 punto) Calcular:
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$$
- ¿Cómo se puede interpretar el resultado?
c) (1,5 puntos) Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$, calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0,5]$.

3. (3,5 puntos) En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

- a) (0,5 puntos)** Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?
b) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?
c) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso “Es del Grado en Contabilidad” y B el suceso “Es del grupo de tarde”, ¿son independientes los sucesos A y B ?
d) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?
e) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, “Grupal-A” y “Grupal-B” con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo “Grupal-A” permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo “Grupal-B” permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo “Grupal-A” y 2 entradas de tipo “Grupal-B”.

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo “Grupal-A” y “Grupal-B” debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. (3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ 18 - 4x + x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 20 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- a) (0,75 puntos) Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.
 b) (1,5 puntos) Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4, 8]$.
 c) (1 punto) Calcular:

$$\int_1^2 f(x) dx$$

3. (3,5 puntos)

a) (2,75 puntos) La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) (1,75 puntos) Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) (1 punto) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) (0,75 puntos) Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,6$, $P(B/A) = 0,9$ y $P(B) = 0,8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular AB ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
 b) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular BA ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
 c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .
 d) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.

a) Comparamos el número de columnas de A con el número de filas de B . Como son iguales es posible el producto y nos daría como resultado una matriz con 2 filas y 3 columnas.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

¡¡IGUALES!!

Calculamos AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+0 & 0+1+0 & 15-1+0 \\ -1+4-3 & 0+2+12 & -5-2+0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix}}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

¡¡IGUALES!!

b) Comparamos el número de columnas de B con el número de filas de A . Como son distintos no es posible el producto.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot \boxed{2} \times 3 \longrightarrow \text{¡¡No es posible!!}$$

¡¡DISTINTOS!

c) Calculamos su determinante para comprobar si existe la inversa.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 + 0 - 0 - 0 - 2 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \text{Existe la inversa de } C.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 19 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{19}{3} & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación.

$$2C + 4X = 3D \Rightarrow 4X = 3D - 2C \Rightarrow X = \frac{3}{4}D - \frac{1}{2}C$$

Reemplazamos el valor de las matrices y realizamos las operaciones indicadas.

$$X = \frac{3}{4}D - \frac{1}{2}C$$

$$X = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. (3,25 puntos) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x) = \frac{21x+12}{x+1}$$

- a) (0,75 puntos) Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

- b) (1 punto) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

- c) (1,5 puntos) Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$, calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0, 5]$.

$$a) V(x) = 18 \Rightarrow \frac{21x+12}{x+1} = 18 \Rightarrow 21x+12 = 18x+18 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2.$$

Cuando gaste 2 millones de euros en publicidad obtendrá 18 millones de euros de ventas.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{21x+12}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{21x}{x} = 21$$

La interpretación es que por mucho que aumente el gasto en publicidad, los ingresos por ventas no sobrepasarán los 21 millones de euros.

$$c) B(x) = V(x) - x = \frac{21x+12}{x+1} - x = \frac{21x+12-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+20x+12}{x+1}$$

Buscamos algún punto crítico en el intervalo $[0, 5]$.

$$B(x) = \frac{-x^2+20x+12}{x+1} \Rightarrow B'(x) = \frac{(-2x+20)(x+1) - (-x^2+20x+12)}{(x+1)^2}$$

$$B'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + \cancel{20x} + 20 + x^2 - \cancel{20x} - 12}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x+1)^2}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)8}}{-2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \begin{cases} x = \frac{2+6}{-2} = -4 \notin [0, 5] \\ x = \frac{2-6}{-2} = 2 \in [0, 5] \end{cases}$$

Como la función es continua en $[0, 5]$, pues el denominador se anula en $x = -1$ que no pertenece al intervalo indicado, valoramos la función en el punto crítico $x = 2$ y en los extremos del intervalo para localizar el máximo relativo.

$$\text{En } x = 0 \rightarrow B(0) = \frac{-0^2 + 0 + 12}{0 + 1} = 12$$

$$\text{En } x = 2 \rightarrow B(x) = \frac{-2^2 + 40 + 12}{2 + 1} = 16 \text{ ¡Máximo!}$$

$$\text{En } x = 5 \rightarrow B(5) = \frac{-5^2 + 100 + 12}{5 + 1} = \frac{87}{6} = 14.5$$

El máximo beneficio en el intervalo $[0, 5]$ se obtiene en $x = 2$.

El máximo beneficio que se puede obtener con un gasto en publicidad entre 0 y 5 millones de euros es de 16 millones de euros y se obtiene con un gasto en publicidad de 2 millones de euros.

3. (3,5 puntos) En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

- a) (0,5 puntos) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?
- b) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?
- c) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso “Es del Grado en Contabilidad” y B el suceso “Es del grupo de tarde”, ¿son independientes los sucesos A y B ?
- d) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?
- e) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

La tabla de contingencia correspondiente a la distribución de los estudiantes es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales	TOTAL
Mañana	395	278	538	1211
Tarde	240	306	486	1032
TOTAL	635	584	1024	2243

Llamamos M al suceso “Ser del grupo de mañana”, T al suceso “Ser del grupo de tarde”, C al suceso “Ser de Contabilidad”, E_c al suceso “Ser del grupo de Economía” y E_m al suceso “Ser del grupo de Empresariales”.

- a) Nos piden calcular $P(T \cap C)$.

$$P(T \cap C) = \frac{240}{2243} \approx \boxed{0.107}$$

- b) Nos piden calcular $P(C/T)$.

$$P(C/T) = \frac{240}{1032} \approx \boxed{0.2326}$$

- c) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(C \cap T) = \frac{240}{2243} \approx 0.107 \\ P(A)P(B) &= P(C)P(T) = \frac{635}{2243} \cdot \frac{1032}{2243} \approx 0.13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \mathbf{0.107 \neq 0.13} = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

- d) Este experimento es como elegir un primer alumno y después un segundo alumno del resto de alumnos.

Nos piden calcular la probabilidad del suceso $T_1 \cap T_2$.

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(T_2 / T_1) = \frac{1032}{2243} \cdot \frac{1031}{2242} \approx \boxed{0.2116}$$

- e) Para que sean del mismo grado hay tres formas distintas: ser del grado de economía o de contabilidad o de empresariales.

Nos piden la probabilidad de que ocurra alguno de estos sucesos que es la suma de la probabilidad de cada uno de ellos.

$$P(\text{Los dos alumnos son del mismo grado}) =$$

$$= P(C_1 \cap C_2) + P(Em_1 \cap Em_2) + P(Ec_1 \cap Ec_2) =$$

$$= \frac{635}{2243} \cdot \frac{634}{2242} + \frac{584}{2243} \cdot \frac{583}{2242} + \frac{1024}{2243} \cdot \frac{1023}{2242} \approx \boxed{0.3561}$$

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, “Grupal-A” y “Grupal-B” con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo “Grupal-A” permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo “Grupal-B” permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo “Grupal-A y 2 entradas de tipo “Grupal-B”.

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo “Grupal-A” y “Grupal-B” debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de Programación Lineal.

Organicemos los datos en una tabla:

	Adultos	Niños	Coste
Grupal A (x)	2x	3x	85x
Grupal B (y)	4y	12y	230y
	$2x + 4y$	$3x + 12y$	$85x + 230y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar: $C(x, y) = 85x + 230y$

Las restricciones son:

“Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo “Grupal-A y 2 entradas de tipo “Grupal-B”” $\rightarrow x \geq 4; y \geq 2$

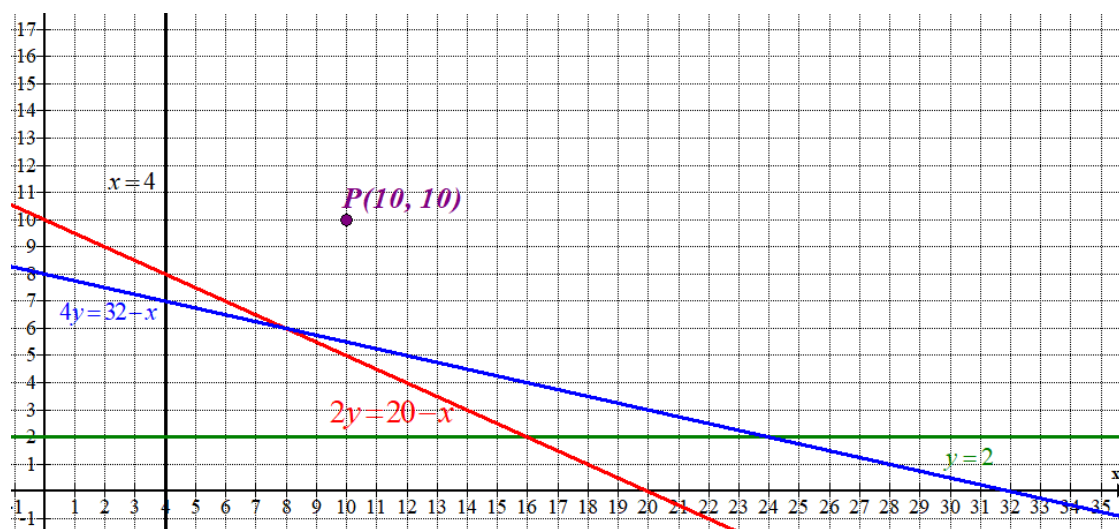
“La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños” $\rightarrow 2x + 4y \geq 40; 3x + 12y \geq 96$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 4; y \geq 2 \\ 2x + 4y \geq 40 \\ 3x + 12y \geq 96 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 4; y \geq 2 \\ x + 2y \geq 20 \\ x + 4y \geq 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 4; y \geq 2 \\ 2y \geq 20 - x \\ 4y \geq 32 - x \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

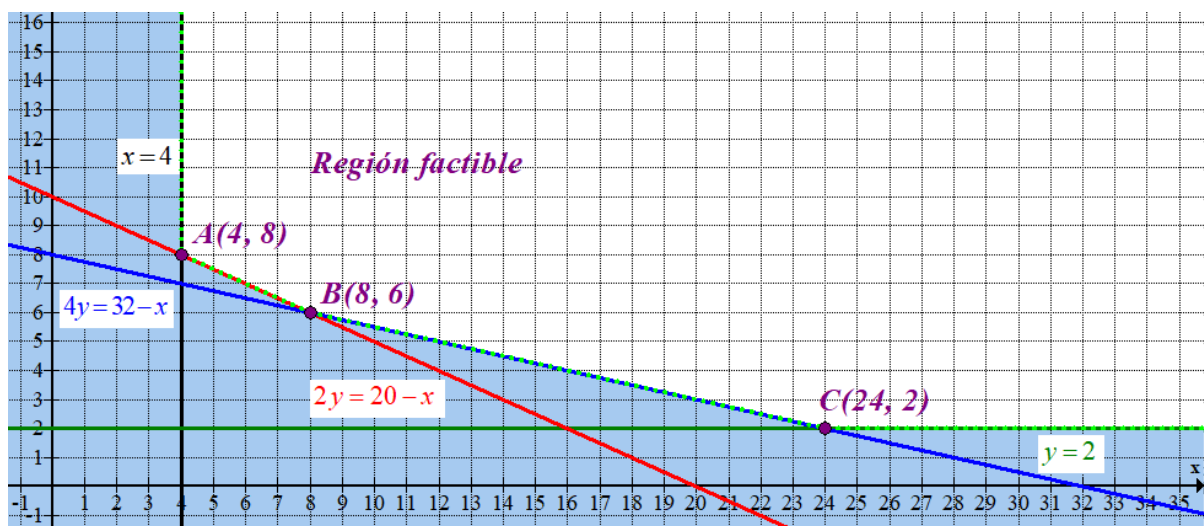
$x = 4$	$y = 2$	$2y = 20 - x$	$4y = 32 - x$
$\begin{array}{c c} x = 4 & y \\ \hline 4 & 2 \\ 4 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 2 \\ \hline 4 & 2 \\ 24 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{20-x}{2} \\ \hline 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{32-x}{4} \\ \hline 24 & 2 \\ 8 & 6 \end{array}$



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 4; \quad y \geq 2 \\ 2y \geq 20 - x \\ 4y \geq 32 - x \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano que está a la derecha de la recta vertical negra y por encima de las rectas verde, azul y roja. Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 4; \quad 10 \geq 2 \\ 20 \geq 20 - 10 \\ 40 \geq 32 - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región del plano que dejamos de color blanco en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas de los vértices.

$$A \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ 2y = 20 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 20 - 4 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \rightarrow A(4, 8)$$

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y = 32 - x \\ 2y = 20 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 32 - 4y \\ 2y = 20 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 20 - 32 + 4y \Rightarrow 12 = 2y \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 32 - 24 = 8 \rightarrow B(8, 6)$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y = 32 - x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = 32 - x \Rightarrow x = 32 - 8 = 24 \rightarrow C(24, 2)$$

Valoramos la función Coste $C(x, y) = 85x + 230y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(4, 8) \rightarrow C(4, 8) = 340 + 1840 = 2180$$

$$B(8, 6) \rightarrow C(8, 6) = 680 + 1380 = 2060 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(24, 2) \rightarrow C(24, 2) = 85 \cdot 24 + 230 \cdot 2 = 2500$$

El coste mínimo es de 2060 € y se consigue comprando 8 entradas del tipo Grupal-A y 6 entradas del tipo Grupal-B.

2. (3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ 18 - 4x + x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 20 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.

b) (1,5 puntos) Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4, 8]$.

c) (1 punto) Calcular:

$$\int_1^2 f(x) dx$$

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= a(-1) + 2 = 2 - a \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} ax + 2 = 2 - a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 18 - 4x + x^2 = 18 - 4(-1) + (-1)^2 = 23 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 23 = 2 - a \Rightarrow \boxed{a = -21}$$

b) En el intervalo $[4, 8]$ la función es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 20$. Utilizamos la derivada para localizar sus valores críticos.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 20 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = 1 \notin [4, 8] \end{cases}$$

La función es polinómica y por lo tanto es continua y para hallar su máximo valoramos la función en los extremos del intervalo y en $x = 5$ que es el valor crítico.

$$\text{En } x = 4 \text{ la función vale } f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 + 20 = 0$$

$$\text{En } x = 5 \text{ la función vale } f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 20 = -5$$

$$\text{En } x = 8 \text{ la función vale } f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 15 \cdot 8 + 20 = 76$$

El máximo valor es 76 y lo alcanza en $x = 8$.

c) En el intervalo $[1, 2]$ la función es $f(x) = 18 - 4x + x^2$.

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 18 - 4x + x^2 dx = \left[18x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= \left[18 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + \frac{2^3}{3} \right] - \left[18 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3} \right] = 36 - 8 + \frac{8}{3} - 18 + 2 - \frac{1}{3} = 12 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{43}{3}}$$

3. (3,5 puntos)

a) (2,75 puntos) La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) (1,75 puntos) Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) (1 punto) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) (0,75 puntos) Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,6$, $P(B/A) = 0,9$ y $P(B) = 0,8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

a) $X =$ Duración de las bombillas de un fabricante. $X = N(\mu, 75)$

a1) Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.325$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9

El error máximo admisible o cota de error debe ser menor de 15 horas:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} = 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 75 = 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.325 \cdot 75}{15} \Rightarrow n = \left(\frac{2.325 \cdot 75}{15} \right)^2 = 135.14$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor del obtenido la muestra debe ser de, al menos, 136 bombillas para obtener como máximo un error en la media de 15 horas.

a2) Ahora, tenemos una muestra de $n = 150$ bombillas y con media $\bar{x} = 1053$ horas.

El valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98% lo hemos obtenido en el apartado anterior y es $z_{\alpha/2} = 2.325$.

El error del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}} = 14.238$

El intervalo de confianza para la media de la población, centrado en la media muestral será:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (1053 - 14.238, 1053 + 14.238) = (1038.762, 1067.238)$$

b) Utilizamos las distintas fórmulas de probabilidad.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = 0.6 \cdot 0.9 = \boxed{0.54}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.54 = \boxed{0.66}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.54}{0.8} = \boxed{0.675}$$



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. (3,25 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) (1,25 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

3. (3,5 puntos) En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) (0,75 puntos) La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) (1 punto) La probabilidad de que sean de distinto color.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) (1 punto) Sea A el suceso “la primera bola extraída es roja” y B el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos A y B independientes?

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

2. (3,25 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x es la función positiva?
 c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.
3. (3,5 puntos)
 a) (2 puntos) Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.
 b) (1,5 puntos) Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. (3,25 puntos) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de programación lineal. Organizamos los datos en una tabla:

	Perros	Gatos	Coste
Nº furgonetas A (x)	4x	3x	240x
Nº furgonetas B (y)	2y	6y	400y
TOTAL	$4x + 2y$	$3x + 6y$	$240x + 400y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y tiene la expresión $C(x, y) = 240x + 400y$

Las restricciones son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A” $\rightarrow y \geq x$

“La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos” $\rightarrow 4x + 2y \geq 24;$
 $3x + 6y \geq 54$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \geq 54 \\ 4x + 2y \geq 24 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 18 \\ 2x + y \geq 12 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y \geq 18 - x \\ y \geq 12 - 2x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$y = x$$

$$y = 12 - 2x$$

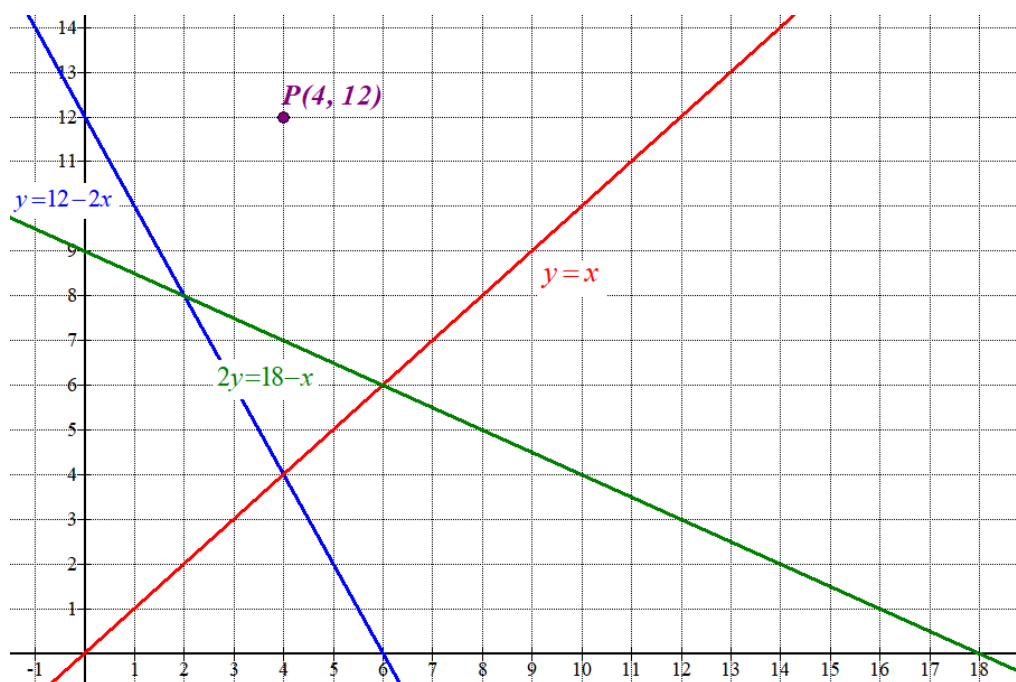
$$2y = 18 - x$$

Primer
cuadrante

x	y = x
4	4
6	6

x	y = 12 - 2x
2	8
4	4

x	y = $\frac{18-x}{2}$
2	8
6	6



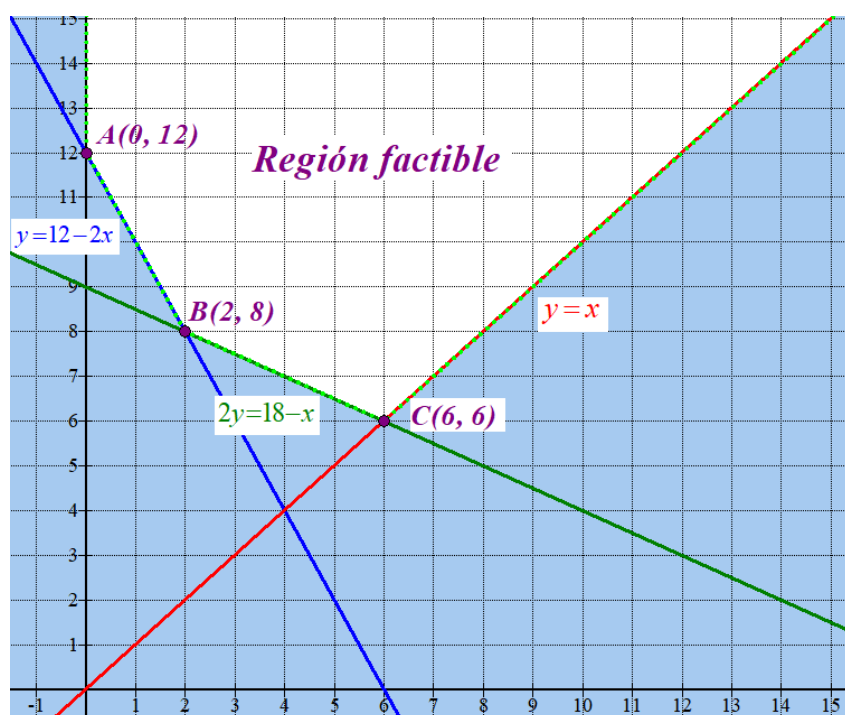
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2y \geq 18 - x \\ y \geq 12 - 2x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada

por encima de las rectas verde, roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(4, 12)$ de esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 24 \geq 18 - 4 \\ 12 \geq 12 - 8 \\ 12 \geq 4 \\ 4 \geq 0; 12 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

Dejamos la región factible de color blanco en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son:

$$A \rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=12-2x \end{array} \right\} \Rightarrow y=12 \rightarrow A(0,12)$$

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} y=12-2x \\ 2y=18-x \end{array} \right\} \Rightarrow 2(12-2x)=18-x \Rightarrow 24-4x=18-x \Rightarrow 6=3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=12-4=8 \rightarrow B(2,8)$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} y=x \\ 2y=18-x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x=18-x \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=6 \rightarrow C(6,6)$$

Valoramos la función coste $C(x,y) = 240x + 400y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(0,12) \rightarrow C(0,12) = 4800$$

$$B(2,8) \rightarrow C(2,8) = 480 + 3200 = 3680 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(6,6) \rightarrow C(6,6) = 1440 + 2400 = 3840$$

El coste mínimo es de 3680 € y se obtiene alquilando 2 furgonetas del tipo A y 8 furgonetas del tipo B.

2. (3,25 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) (1,25 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

a) Sabemos que $f(-1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + 2(-1) + 2 \Rightarrow 2 = -a + b - 2 + 2 \Rightarrow \boxed{b - a = 2}$$

Como f tiene un máximo relativo en $x = -1$ la derivada primera se anula para ese valor.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{3a - 2b + 2 = 0}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} b - a = 2 \\ 3a - 2b + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 2 + a \\ 3a - 2(2 + a) + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a - 4 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{b = 2 + 2 = 4}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 4$.

b) Calculamos primero la primitiva de la función.

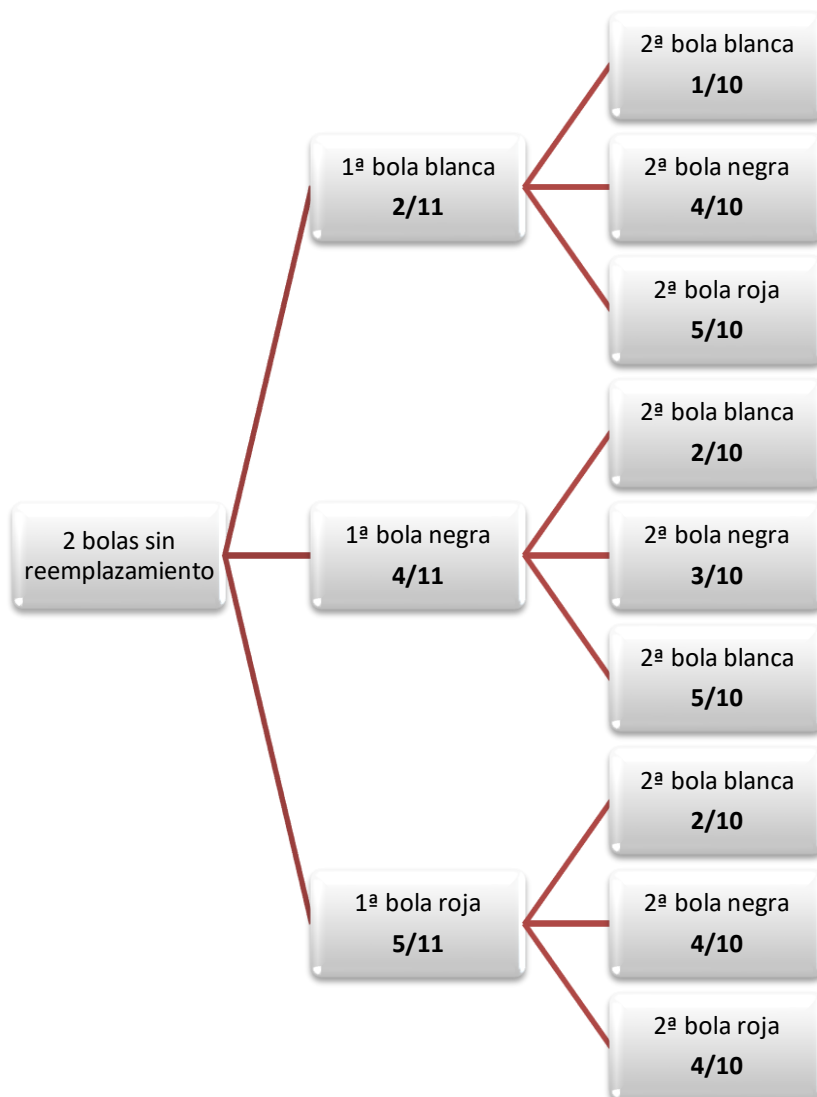
$$\begin{aligned} \int \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx &= 7 \int e^{3x} dx + \frac{4}{3} \int x^2 dx - 3 \int x^{1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= 7 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^{1+1/2}}{1+\frac{1}{2}} + \ln x = \frac{7}{3} e^{3x} + \frac{4}{9} x^3 - 3 \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \ln x = \frac{7}{3} e^{3x} + \frac{4}{9} x^3 - 2\sqrt{x^3} + \ln x \end{aligned}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx &= \left[\frac{7}{3} e^{3x} + \frac{4}{9} x^3 - 2\sqrt{x^3} + \ln x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{7}{3} e^6 + \frac{4}{9} 2^3 - 2\sqrt{2^3} + \ln 2 \right] - \left[\frac{7}{3} e^3 + \frac{4}{9} 1^3 - 2\sqrt{1^3} + \ln 1 \right] = \\ &= \frac{7}{3} e^6 + \frac{4}{9} 2^3 - 2\sqrt{2^3} + \ln 2 - \frac{7}{3} e^3 - \frac{4}{9} + 2 = \frac{7}{3} e^6 - \frac{7}{3} e^3 - 4\sqrt{2} + \ln 2 + \frac{32}{9} - \frac{4}{9} + 2 = \\ &= \boxed{\frac{7}{3} e^6 - \frac{7}{3} e^3 - 4\sqrt{2} + \ln 2 + \frac{46}{9} \simeq 894.615} \end{aligned}$$

- 3.** (3,5 puntos) En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:
- a)** (0,75 puntos) La probabilidad de que las dos sean rojas.
- b)** (1 punto) La probabilidad de que sean de distinto color.
- c)** (0,75 puntos) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
- d)** (1 punto) Sea A el suceso “la primera bola extraída es roja” y B el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos A y B independientes?

Realizamos un diagrama de árbol.



Sean B_1 , N_1 y R_1 los sucesos “la primera bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente” y B_2 , N_2 y R_2 los sucesos “la segunda bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente”.

$$a) P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 / R_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11} \approx 0.181$$

- b)** Hay muchas combinaciones posibles para sacar dos bolas de distinto color, por lo que calculamos la probabilidad utilizando el suceso contrario a “Sacar dos bolas de distinto color” que es “Sacar dos bolas del mismo color” = “Sacar dos bolas rojas o dos bolas blancas o dos bolas negras”.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2) = \\
 &= P(B_1)P(B_2 / B_1) + P(N_1)P(N_2 / N_1) + P(R_1)P(R_2 / R_1) = \\
 &= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2+12+20}{110} = \frac{34}{110} = \frac{17}{55}
 \end{aligned}$$

Hallamos ahora la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sacar dos bolas de distinto color}) &= 1 - P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) = \\
 &= 1 - \frac{17}{55} = \boxed{\frac{38}{55} \approx 0.691}
 \end{aligned}$$

c) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(R_2) &= P(B_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \\
 &= P(B_1)P(R_2 / B_1) + P(N_1)P(R_2 / N_1) + P(R_1)P(R_2 / R_1) = \\
 &= \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{10+20+20}{110} = \frac{50}{110} = \boxed{\frac{5}{11} \approx 0.455}
 \end{aligned}$$

d) Hemos llamado al suceso A como R_1 . La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color lo hemos calculado en el apartado b).

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) = \frac{17}{55} \\
 P(A) &= P(R_1) = \frac{5}{11} \\
 P(A \cap B) &= P(\text{Sacar 1ª bola roja y la 2ª roja}) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{11}
 \end{aligned}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Comprobamos si es cierta la igualdad.

$$\begin{aligned}
 &¿P(A \cap B) = P(A)P(B)? \\
 &¿\frac{2}{11} = \frac{5}{11} \cdot \frac{17}{55}? \\
 &¿\frac{2}{11} = \frac{17}{121}? \quad \text{¡¡No es cierto!!}
 \end{aligned}$$

No se cumple la igualdad y los dos sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

Sea “x” la inversión en el fondo A, “y” la inversión en B y “z” la inversión en C. Se tiene:

“Una empresa invirtió un total de 10000 euros” $\rightarrow x + y + z = 10000$

“El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Obtiene un beneficio total de 497 €” $\rightarrow 0.05x + 0.1y + 0.02z = 497$

“La inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C” $\rightarrow x = 3(y + z)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 0.05x + 0.1y + 0.02z = 497 \\ x = 3(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 0.05x + 0.1y + 0.02z = 497 \\ x = 3y + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ \Rightarrow 5x + 10y + 2z = 49700 \\ x = 3y + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z + y + z = 10000 \\ 5(3y + 3z) + 10y + 2z = 49700 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 4y + 4z = 10000 \\ \Rightarrow 15y + 15z + 10y + 2z = 49700 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 2500 \\ 25y + 17z = 49700 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow y = 2500 - z \\ \Rightarrow 25y + 17z = 49700 \end{array} \right\} \Rightarrow 25(2500 - z) + 17z = 49700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 62500 - 25z + 17z = 49700 \Rightarrow 12800 = 8z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{12800}{8} = 1600} \Rightarrow \boxed{y = 2500 - 1600 = 900} \Rightarrow \boxed{x = 2700 + 4800 = 7500}$$

Ha invertido 7500 € en fondos A, 900 € en fondos B y 1600 en fondos C.

2. (3,25 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

calcular:

- a) (0,25 puntos) Dominio de f .
 b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de x es la función positiva?
 c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

- a) El dominio de una función racional son todos los reales menos los valores que anulen el denominador.

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Dominio de } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

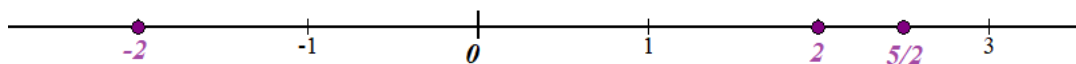
- b) La función es positiva cuando son positivos numerador y denominador o cuando ambos son negativos.

El denominador se anula en $x = \frac{5}{2}$, veamos cuando se anula el numerador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El denominador se anula para $x = -2$ y para $x = 2$.

Estudiamos el signo de la función antes de los tres valores, entre ellos y después de los tres.



- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la función vale $f(-3) = \frac{(-3)^2 - 4}{2(-3) - 5} = \frac{5}{-11} < 0$. La función es negativa en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y la función vale $f(0) = \frac{0^2 - 4}{0 - 5} = \frac{4}{5} > 0$. La función es positiva en $(-2, 2)$.
- En $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ tomamos $x = 2.25$ y la función vale $f(2.25) = \frac{2.25^2 - 4}{4.5 - 5} = \frac{1.0625}{-0.5} < 0$. La función es negativa en $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 3$ y la función vale $f(3) = \frac{3^2 - 4}{6 - 5} = 1 > 0$. La función es positiva en $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

La función es positiva en $(-2, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

- c) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 5/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{x^2 - 4}{2x - 5} = \frac{1.0625}{0} = \infty$$

La recta $x = \frac{5}{2}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{2x - 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{2x - 5} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8 - 2x^2 + 5x}{2(2x - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 8}{4x - 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

La función tiene una asíntota oblicua en $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

d) Utilizamos la derivada para encontrar los valores críticos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2x - 5) - 2(x^2 - 4)}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^2 - 10x - 2x^2 + 8}{(2x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 8}{(2x - 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 8}{(2x - 5)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

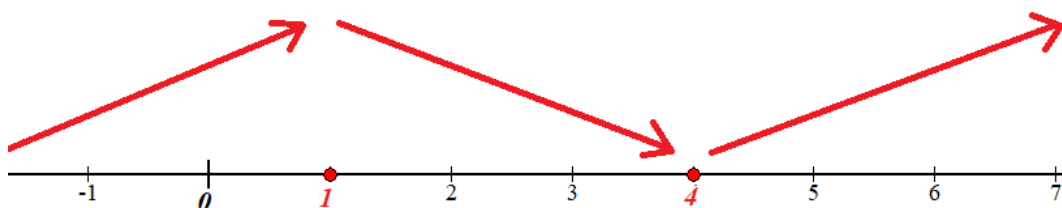
$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos, valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0 - 0 + 8}{(0 - 5)^2} = \frac{8}{25} > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 8}{(2 \cdot 2 - 5)^2} = -2 < 0$. La función decrece en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

- En $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 8}{(2 \cdot 3 - 5)^2} = -4 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{2 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 + 8}{(10 - 5)^2} = \frac{8}{25} > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 4$. Como $f(1) = \frac{1^2 - 4}{2 - 5} = 1$ y

$f(4) = \frac{4^2 - 4}{8 - 5} = 4$ el máximo tiene coordenadas $(1, 1)$ y el mínimo $(4, 4)$.

3. (3,5 puntos)

- a) (2 puntos) Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.
- b) (1,5 puntos) Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

a) X = Cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca (gramos). $X = N(\mu, 1.5)$

Tamaño de la muestra = $n = 75$. La media muestral es $\bar{x} = 23.8$ gramos.

Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.325$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9

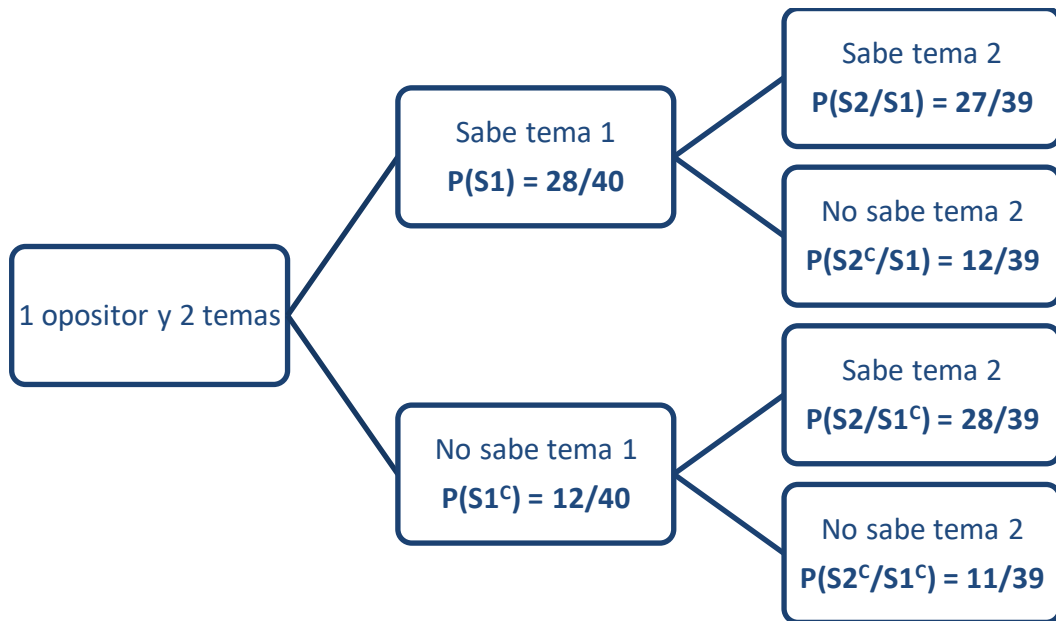
Utilizamos la fórmula del error.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{75}} \approx 0.403 \text{ gramos}$$

Calculamos el intervalo de confianza.

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (23.8 - 0.403, 23.8 + 0.403) = (23.397, 24.203)$$

- b) Realizamos un diagrama de árbol. En la primera elección hay 40 temas de los cuales se sabe 28 y no sabe 12. Tras esta primera elección quedan 39 temas a elegir y dependiendo de lo que haya elegido en primera instancia así será la composición de los temas.



¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas?

Nos piden calcular $P(S1 \cap S2)$.

$$P(S1 \cap S2) = P(S1)P(S2/S1) = \frac{28}{40} \cdot \frac{27}{39} = \frac{63}{130} \approx 0.4846$$

¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

Este suceso es el contrario de “no saberse ningún tema”. Calculamos la probabilidad del suceso contrario: $P(S1^c \cap S2^c)$.

$$P(S1^c \cap S2^c) = P(S1^c)P(S2^c/S1^c) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$$

La probabilidad de que el opositor se sepa al menos uno de los dos temas tiene un valor de

$$1 - \frac{11}{130} = \frac{119}{130} \approx 0.9154.$$