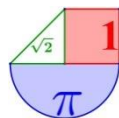
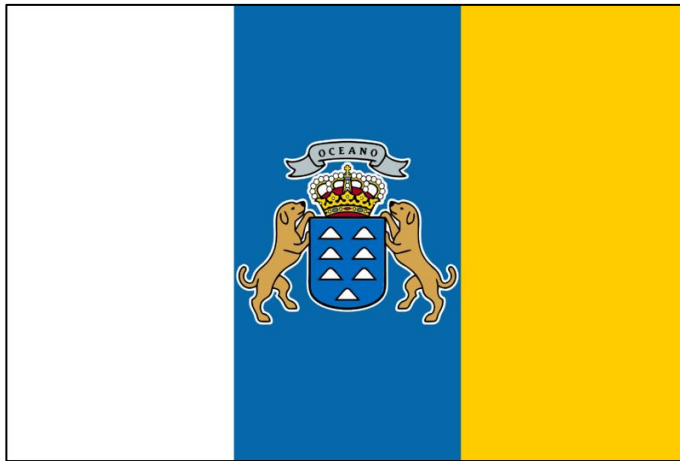


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU Canarias
2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de las Islas Canarias desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2026.....	3
PAU Extraordinaria Reserva 2026	17
PAU Ordinaria 2026.....	33
PAU Extraordinaria 2025.....	49
PAU Ordinaria 2025.....	65
EBAU Extraordinaria 2024.....	82
EBAU Ordinaria 2024.....	99
EBAU Extraordinaria 2023.....	116
EBAU Ordinaria 2023.....	132
EBAU Extraordinaria 2022.....	150
EBAU Ordinaria 2022.....	166
EBAU Extraordinaria 2021.....	183
EBAU Ordinaria 2021.....	197
EBAU Extraordinaria 2020.....	211
EBAU Ordinaria 2020.....	224
EBAU Extraordinaria 2019.....	236
EBAU Ordinaria 2019.....	251
EBAU Extraordinaria 2018.....	263
EBAU Ordinaria 2018.....	277
EBAU Extraordinaria 2017.....	292
EBAU Ordinaria 2017.....	306



PAU Extraordinaria 2026
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2025–2026

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Convocatoria: JULIO

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

1. En un instituto se hace una encuesta a todos los alumnos de dos clases (50 estudiantes) y resulta que 39 de ellos no tienen ni hermanos ni hermanas.
- a) **(1 punto)** A partir de esa muestra, calcula un intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos.
- b) **(1 punto)** ¿Nos basta esa muestra para calcular la proporción de hijos únicos con un error menor de 0,05? Razona tu respuesta y si es negativa, calcula el tamaño que debería tener.

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

2. Una empresa de logística tiene una sección en cada una de las provincias de las Islas Canarias. Se han estudiado los beneficios de cada una de las secciones en los últimos 21 años y se ha encontrado que siguen las funciones siguientes, donde t se mide en años y el beneficio se expresa en millones de euros:
- $B_1(t) = t^3 - 30t^2 + 225t + 150$ para la sección de Santa Cruz de Tenerife
- $B_2(t) = -2t^2 + 38t + 150$ para la sección de Las Palmas.
- a) **(1 punto)** Haciendo uso de la derivada, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios obtenidos por la delegación de Santa Cruz de Tenerife.
- b) **(0.75 puntos)** ¿Cuándo se produjeron los beneficios mínimo y máximo absolutos de la delegación de Tenerife? ¿Cuáles fueron sus importes?
- c) **(0.50 puntos)** ¿En qué periodo los beneficios de la provincia de Las Palmas superaron los 290 millones de euros?
- d) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento el beneficio fue el mismo en ambas provincias y cuál fue su valor?

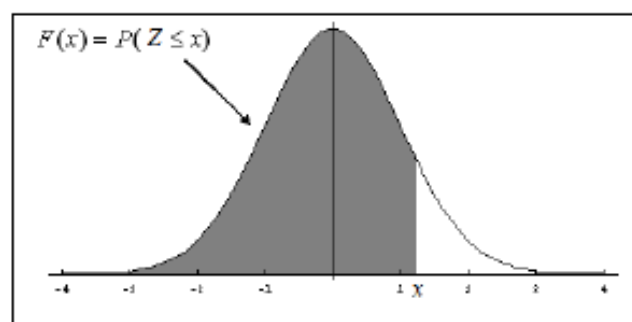
Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

- 3.1. Estudios recientes indican que en Canarias el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años sigue aproximadamente una distribución normal con una media de 1236€ y una desviación típica de 254€.
- a) **(1 punto)** Se seleccionan aleatoriamente para una entrevista 121 jóvenes canarios de ese rango de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario medio supere los 1300€? ¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?
- b) **(1 punto)** Solo se emancipan de su hogar familiar aquellos jóvenes que ganan al menos 1500€. Suponiendo que la desviación típica se mantiene igual, ¿cuánto debería subir el salario medio mensual para que al menos el 75% de los jóvenes ganen lo suficiente para emanciparse?

- 3.2.** Un reciente informe nacional revela que 2 de cada 5 jóvenes se encuentran en riesgo de dependencia digital como consecuencia del excesivo tiempo dedicado a las redes sociales. Ello deriva en frecuentes problemas de sueño, aislamiento, dificultades en el estudio y cambios de humor. Con objeto de identificar a los jóvenes en riesgo de padecer este tipo de dependencia, un equipo de investigadores de las universidades canarias ha elaborado un cuestionario psicológico. Se sabe que entre quienes realmente presentan este riesgo, el cuestionario ofrece un resultado positivo en el 95% de los casos y un resultado ambiguo en un 3%. En cambio, entre quienes no presentan riesgo, el cuestionario arroja un resultado positivo en 1 de cada 10 casos, y un resultado negativo en el 85% de los casos.
- (0,5 puntos)** Construir el correspondiente árbol de probabilidades.
 - (0,75 puntos)** Se ha pasado el cuestionario a un joven elegido aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que dé un resultado negativo?
 - (0,75 puntos)** Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, calcula la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital.

Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico

- 4.1** El Consejo Escolar de Canarias organiza una reunión de organizaciones estudiantiles en la que participan un total de 240 estudiantes elegidos entre los niveles de Primaria, ESO y el Bachillerato. El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto y por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato.
- (1,5 puntos)** Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.
 - (1 punto)** ¿Cuántos estudiantes de cada nivel asisten a la reunión?
 - (0,5 puntos)** Para trasladar al alumnado al encuentro se ha acordado con una empresa de guaguas la siguiente lista de precios: cada persona de la ESO paga una tarifa de 2.50 euros; los de Bachillerato pagan un 50% más que los de la ESO; y los de Primaria tienen un descuento del 20% sobre el precio que pagan los de la ESO. De los que van a la reunión sólo irán en guagua 25 estudiantes de primaria, 80 de la ESO y 50 estudiantes de Bachillerato. ¿Cuánto habrá que pagar en total?
- 4.2.** Una inmobiliaria quiere promover una pequeña urbanización destinada principalmente a compradores jóvenes. Para ello va a construir dos tipos de viviendas: de tipo A, más asequibles y de menor tamaño, y de tipo B, más caras y de mayor tamaño. La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra. El coste de construcción de cada vivienda es de 100.000€ para las del tipo A y 200.000€ para las del tipo B. El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas y la normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B. La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B. El beneficio una vez descontado el coste de construcción es de 20.000 € por cada vivienda del tipo A y 32.000€ por cada una del tipo B. Se desea determinar cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para que el beneficio sea máximo.
- (1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente al enunciado.
 - (1 punto)** Representar gráficamente la región factible.
 - (0,5 puntos)** Determinar, razonadamente, el número de viviendas de cada tipo que debe construir la inmobiliaria para maximizar el beneficio. Calcular el beneficio máximo obtenido.
 - (0,5 puntos)** Del presupuesto inicial de 4.400.000€ con que contaba la empresa, solo un 20% procedía de fondos propios y el resto se pensaba conseguir mediante un préstamo bancario. Sin embargo, justo antes de empezar la obra, se produce una recesión económica en el país, como consecuencia de la cual el banco comunica a la inmobiliaria que solo puede concederle un préstamo del 70% del presupuesto inicial; además el coste de fabricación por vivienda se incrementa en un 15%. Ante esta situación la inmobiliaria decide finalmente construir 24 viviendas tipo A y 5 tipo B. ¿Le alcanzará el presupuesto?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

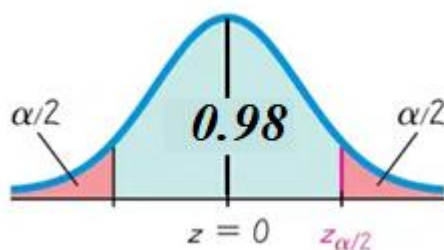
SOLUCIONES

1. En un instituto se hace una encuesta a todos los alumnos de dos clases (50 estudiantes) y resulta que 39 de ellos no tienen ni hermanos ni hermanas.
- a) (1 punto) A partir de esa muestra, calcula un intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos.
- b) (1 punto) ¿Nos basta esa muestra para calcular la proporción de hijos únicos con un error menor de 0,05? Razona tu respuesta y si es negativa, calcula el tamaño que debería tener.

a) El tamaño de la muestra es $n = 50$. La proporción muestral es $p = \frac{39}{50} = 0.78$.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 98%.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.78 \cdot 0.22}{50}} \approx 0.1362$$

El intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.78 - 0.1362, 0.78 + 0.1362) = (0.6438, 0.9162)$$

- b) El error en la muestra del apartado a) es de 0.1362 mayor que 0.05. No nos sirve la muestra anterior. Determinamos el tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 0.05.

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.78 \cdot 0.22}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{2.325} = \sqrt{\frac{0.1716}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{2.325} \right)^2 = \frac{0.1716}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1716}{\left(\frac{0.05}{2.325} \right)^2} \approx 371.0421$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 372 estudiantes.

2. Una empresa de logística tiene una sección en cada una de las provincias de las Islas Canarias. Se han estudiado los beneficios de cada una de las secciones en los últimos 21 años y se ha encontrado que siguen las funciones siguientes, donde t se mide en años y el beneficio se expresa en millones de euros:

$$B_1(t) = t^3 - 30t^2 + 225t + 150 \text{ para la sección de Santa Cruz de Tenerife}$$

$$B_2(t) = -2t^2 + 38t + 150 \text{ para la sección de Las Palmas.}$$

- a) **(1 punto)** Haciendo uso de la derivada, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios obtenidos por la delegación de Santa Cruz de Tenerife.
- b) **(0.75 puntos)** ¿Cuándo se produjeron los beneficios mínimo y máximo absolutos de la delegación de Tenerife? ¿Cuáles fueron sus importes?
- c) **(0.50 puntos)** ¿En qué periodo los beneficios de la provincia de Las Palmas superaron los 290 millones de euros?
- d) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento el beneficio fue el mismo en ambas provincias y cuál fue su valor?

a) Hallamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$B_1(t) = t^3 - 30t^2 + 225t + 150 \Rightarrow B_1'(t) = 3t^2 - 60t + 225$$

$$B_1'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 60t + 225 = 0 \Rightarrow t^2 - 20t + 75 = 0 \Rightarrow$$

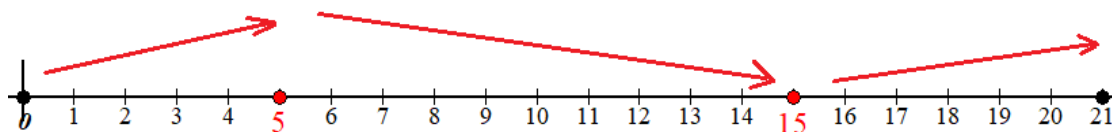
$$\Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 75}}{2} = \frac{20 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{20+10}{2} = 15 = t \\ \frac{20-10}{2} = 5 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0, 5)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $B_1'(1) = 3 \cdot 1^2 - 60 \cdot 1 + 225 = 168 > 0$. La función crece en $[0, 5)$.
- En el intervalo $(5, 15)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B_1'(10) = 3 \cdot 10^2 - 60 \cdot 10 + 225 = -75 < 0$. La función decrece en $(5, 15)$.
- En el intervalo $(15, 21]$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale $B_1'(20) = 3 \cdot 20^2 - 60 \cdot 20 + 225 = 225 > 0$. La función crece en $(15, 21]$.

Los beneficios crecen en $[0, 5) \cup (15, 21]$ y decrecen en $(5, 15)$.

b) Por lo estudiado en el apartado a) podemos decir que la función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $t = 5$ y un mínimo relativo en $t = 15$.

Valoramos la función en estos años y en los extremos del intervalo de estudio $[0, 21]$.

$$B_1(0) = 0^3 - 30 \cdot 0^2 + 225 \cdot 0 + 150 = 150 \text{ Mínimo}$$

$$B_1(5) = 5^3 - 30 \cdot 5^2 + 225 \cdot 5 + 150 = 650$$

$$B_1(15) = 15^3 - 30 \cdot 15^2 + 225 \cdot 15 + 150 = 150 \text{ Mínimo}$$

$$B_1(21) = 21^3 - 30 \cdot 21^2 + 225 \cdot 21 + 150 = 906 \text{ Máximo}$$

El beneficio mínimo se consigue al inicio y en el año 15. Siendo este importe mínimo de 150 millones de euros.

El beneficio máximo se consigue en el año 21. Siendo este importe máximo de 906 millones de euros.

c) Averiguamos cuando el beneficio es de 290.

$$B_2(t) = 290 \Rightarrow -2t^2 + 38t + 150 = 290 \Rightarrow -2t^2 + 38t - 140 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 19t + 70 = 0 \Rightarrow t = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 70}}{2} = \frac{19 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{19+9}{2} = 14 = t \\ \frac{19-9}{2} = 5 = t \end{cases}$$

Comprobamos cuando el beneficio supera los 290 millones.

- En el intervalo $[0, 5)$ tomamos $t = 1$ y los beneficios son $B_2(1) = -2 \cdot 1^2 + 38 \cdot 1 + 150 = 186$.

El beneficio es menor de 290 millones en $[0, 5)$.

- En el intervalo $(5, 14)$ tomamos $t = 10$ y los beneficios son

$$B_2(10) = -2 \cdot 10^2 + 38 \cdot 10 + 150 = 330. \text{ El beneficio supera los 290 millones en } (5, 14).$$

- En el intervalo $(14, 21]$ tomamos $t = 15$ y los beneficios son

$$B_2(15) = -2 \cdot 15^2 + 38 \cdot 15 + 150 = 270. \text{ El beneficio es menor de 290 millones en } (14, 21].$$

El beneficio en la empresa de Las Palmas supera los 290 millones de euros del año 5 al año 14.

d) Averiguamos cuando $B_1(t) = B_2(t)$.

$$B_1(t) = B_2(t) \Rightarrow t^3 - 30t^2 + 225t + 150 = -2t^2 + 38t + 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^3 - 28t^2 + 187t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 28t + 187) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 28t + 187 = 0 \rightarrow t = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 187}}{2} = \frac{28 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{28+6}{2} = 17 = t \\ \frac{28-6}{2} = 11 = t \end{cases} \end{cases}$$

Los beneficios son los mismos en tres momentos:

Al inicio del estudio, con $t = 0$ siendo los beneficios de 150 millones de euros.

En el año 11 siendo los beneficios $B_2(11) = -2 \cdot 11^2 + 38 \cdot 11 + 150 = 326$ millones de euros.

En el año 17 siendo los beneficios $B_2(17) = -2 \cdot 17^2 + 38 \cdot 17 + 150 = 218$ millones de euros.

3.1. Estudios recientes indican que en Canarias el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años sigue aproximadamente una distribución normal con una media de 1236€ y una desviación típica de 254€.

- a) **(1 punto)** Se seleccionan aleatoriamente para una entrevista 121 jóvenes canarios de ese rango de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario medio supere los 1300€? ¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?
- b) **(1 punto)** Solo se emancipan de su hogar familiar aquellos jóvenes que ganan al menos 1500€. Suponiendo que la desviación típica se mantiene igual, ¿cuánto debería subir el salario medio mensual para que al menos el 75% de los jóvenes ganen lo suficiente para emanciparse?

a) Consideramos la variable aleatoria X = el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años de Canarias. $X = N(1236, 254)$.

La distribución de las muestras de tamaño 121 sigue una distribución normal con la misma media 1236 € y con desviación típica $\sigma = \frac{254}{\sqrt{121}} = \frac{254}{11} \approx 23.1$. $\overline{X}_{121} = N\left(1236, \frac{254}{11}\right)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{121} > 1300)$.

$$P(\overline{X}_{121} > 1300) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{121} - 1236}{254/11} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{1300 - 1236}{254/11}\right) = P(Z > 2.77) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.77) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9972 = \boxed{0.0028}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
1,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
1,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
1,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
1,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
1,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
1,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
1,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
1,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
1,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
2	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
2,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
2,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
2,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
2,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
2,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
2,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
2,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
2,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
2,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
3	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
3,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
3,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
3,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
3,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932
3,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949
3,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962
3,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972

La probabilidad de que el salario medio de una muestra de 121 jóvenes supere los 1300€ vale 0.0028.

¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?

Hallamos la probabilidad de que el salario mensual de un joven canario supere los 1300 euros.

$$P(X > 1300) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 1236}{254} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{1300 - 1236}{254}\right) = P(Z > 0.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5987 = \boxed{0.4013}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368

Multiplicamos la probabilidad obtenida por el número de jóvenes de la muestra: $0.4013 \cdot 121 = 48.55$. Se espera que de una muestra de 121 jóvenes sean 49 los que superen el salario mensual de 1300 €.

b) X = el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años de Canarias. $X = N(\mu, 254)$.

Queremos que $P(X > 1500) = 0.75$.

$$P(X > 1500) = 0.75 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{1500 - \mu}{254}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ 0.75 > 0.5 \rightarrow \frac{1500 - \mu}{254} < 0 \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{1500 - \mu}{254}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\mu - 1500}{254}\right) = 0.75 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mu - 1500}{254} = 0.675 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu - 1500 = 0.675 \cdot 254 \Rightarrow \boxed{\mu = 1500 + 171.45 = 1671.45 \text{ €}}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517

Para que se cumpla lo pedido el sueldo medio mensual debe subir hasta 1671.45 euros.

3.2. Un reciente informe nacional revela que 2 de cada 5 jóvenes se encuentran en riesgo de dependencia digital como consecuencia del excesivo tiempo dedicado a las redes sociales. Ello deriva en frecuentes problemas de sueño, aislamiento, dificultades en el estudio y cambios de humor. Con objeto de identificar a los jóvenes en riesgo de padecer este tipo de dependencia, un equipo de investigadores de las universidades canarias ha elaborado un cuestionario psicológico. Se sabe que entre quienes realmente presentan este riesgo, el cuestionario ofrece un resultado positivo en el 95% de los casos y un resultado ambiguo en un 3%. En cambio, entre quienes no presentan riesgo, el cuestionario arroja un resultado positivo en 1 de cada 10 casos, y un resultado negativo en el 85% de los casos.

- a) **(0,5 puntos)** Construir el correspondiente árbol de probabilidades.
 b) **(0,75 puntos)** Se ha pasado el cuestionario a un joven elegido aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que dé un resultado negativo?
 c) **(0,75 puntos)** Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, calcula la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital.

Llamamos R al suceso “el joven se encuentra en riesgo de dependencia digital”, C+ a “el cuestionario da resultado positivo”, Ca a “el cuestionario da un resultado ambiguo” y C- a “el cuestionario arroja un resultado negativo”.

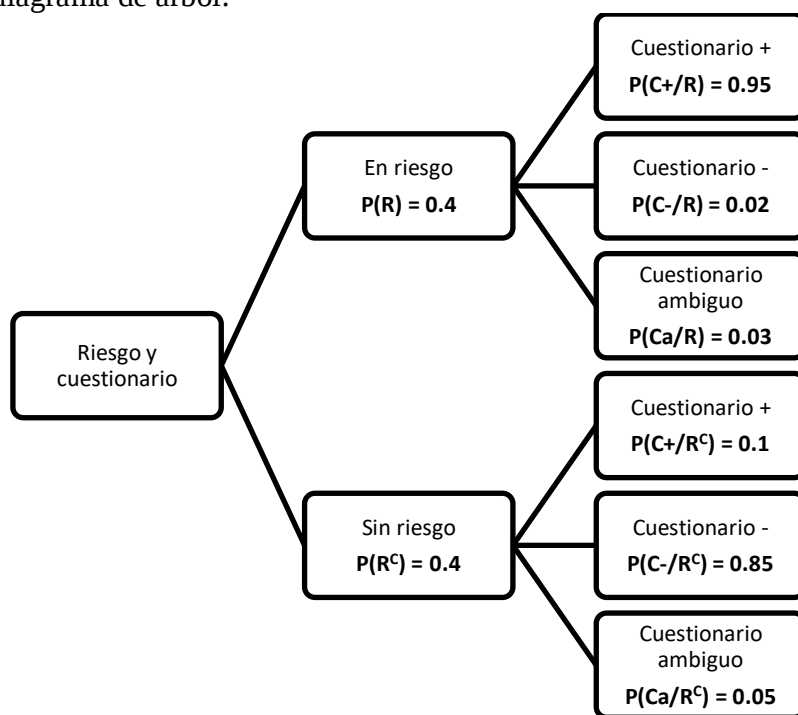
Las probabilidades que se desprenden de los datos del problema son:

$$P(R) = \frac{2}{5} = 0.4; P(C+/R) = 0.95; P(Ca/R) = 0.03; P(C+/\bar{R}) = \frac{1}{10} = 0.1; P(C-/\bar{R}) = 0.85$$

Con estas probabilidades podemos deducir que:

$$P(\bar{R}) = 1 - 0.4 = 0.6; P(C-/R) = 1 - 0.03 - 0.95 = 0.02; P(Ca/\bar{R}) = 1 - 0.1 - 0.85 = 0.05$$

- a) Construimos un diagrama de árbol.



- b) Debemos calcular $P(C-)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C-) = P(R)P(C-/R) + P(\bar{R})P(C-/\bar{R}) = 0.4 \cdot 0.02 + 0.6 \cdot 0.85 = \boxed{0.518}$$

La probabilidad de que un joven elegido al azar al pasar el cuestionario dé un resultado negativo vale 0.518.

c) Debemos calcular $P(R/C+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/C+) = \frac{P(R \cap C+)}{P(C+)} = \frac{P(R)P(C+/R)}{P(R)P(C+/R) + P(\bar{R})P(C+/\bar{R})} =$$
$$= \frac{0.4 \cdot 0.95}{0.4 \cdot 0.95 + 0.6 \cdot 0.1} = \boxed{\frac{19}{22} \approx 0.8636}$$

Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital vale 0.8636.

4.1 El Consejo Escolar de Canarias organiza una reunión de organizaciones estudiantiles en la que participan un total de 240 estudiantes elegidos entre los niveles de Primaria, ESO y el Bachillerato. El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto y por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato.

- a) **(1,5 puntos)** Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.
 b) **(1 punto)** ¿Cuántos estudiantes de cada nivel asisten a la reunión?
 c) **(0,5 puntos)** Para trasladar al alumnado al encuentro se ha acordado con una empresa de guaguas la siguiente lista de precios: cada persona de la ESO paga una tarifa de 2.50 euros; los de Bachillerato pagan un 50% más que los de la ESO; y los de Primaria tienen un descuento del 20% sobre el precio que pagan los de la ESO. De los que van a la reunión sólo irán en guagua 25 estudiantes de primaria, 80 de la ESO y 50 estudiantes de Bachillerato. ¿Cuánto habrá que pagar en total?

- a) Llamamos “x” al número de estudiantes de Primaria, “y” al número de estudiantes de ESO y “z” al número de estudiantes de Bachillerato que acuden a la reunión.

Participan un total de 240 estudiantes $\rightarrow x + y + z = 240$

El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto $\rightarrow x = \frac{y+z}{5}$.

Por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ ESO} \longrightarrow 2 \text{ Bachillerato} \\ y \longrightarrow z \end{array} \right\} \Rightarrow 3z = 2y.$$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ x = \frac{y+z}{5} \\ 3z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 5x = y + z \\ 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 5x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 5x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 5x - z = y \\ 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5x - z + z = 240 \\ 2(5x - z) - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x = 240 \\ 10x - 2z - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{240}{6} = 40 \\ 10x - 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 \cdot 40 - 5z = 0 \Rightarrow 5z = 400 \Rightarrow z = \frac{400}{5} = 80 \Rightarrow y = 5 \cdot 40 - 80 = 120$$

En la reunión hay 40 estudiantes de primaria, 120 de ESO y 80 de bachillerato.

- c) Cada alumno de ESO paga 2.50 y los 80 alumnos de ESO deben pagar $80 \cdot 2.5 = 200$ €. Cada alumno de primaria paga el 80% de 2.5 €, es decir, $0.8 \cdot 2.5 = 2$ €. Los 25 alumnos de primaria deben pagar $25 \cdot 2 = 50$ €. Cada alumno de bachillerato paga un 50% más que un alumno de ESO (2.5 €), es decir, paga $1.5 \cdot 2.5 = 3.75$ €. Los 50 alumnos de bachillerato deben pagar $50 \cdot 3.75 = 187.5$. El coste total del transporte es de $200 + 50 + 187.5 = 437.5$ €.

4.2. Una inmobiliaria quiere promover una pequeña urbanización destinada principalmente a compradores jóvenes. Para ello va a construir dos tipos de viviendas: de tipo A, más asequibles y de menor tamaño, y de tipo B, más caras y de mayor tamaño. La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra. El coste de construcción de cada vivienda es de 100.000€ para las del tipo A y 200.000€ para las del tipo B. El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas y la normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B. La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B. El beneficio una vez descontado el coste de construcción es de 20.000 € por cada vivienda del tipo A y 32.000€ por cada una del tipo B. Se desea determinar cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para que el beneficio sea máximo.

- a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente al enunciado.
 b) **(1 punto)** Representar gráficamente la región factible.
 c) **(0,5 puntos)** Determinar, razonadamente, el número de viviendas de cada tipo que debe construir la inmobiliaria para maximizar el beneficio. Calcular el beneficio máximo obtenido.
 d) **(0,5 puntos)** Del presupuesto inicial de 4.400.000€ con que contaba la empresa, solo un 20% procedía de fondos propios y el resto se pensaba conseguir mediante un préstamo bancario. Sin embargo, justo antes de empezar la obra, se produce una recesión económica en el país, como consecuencia de la cual el banco comunica a la inmobiliaria que solo puede concederle un préstamo del 70% del presupuesto inicial; además el coste de fabricación por vivienda se incrementa en un 15%. Ante esta situación la inmobiliaria decide finalmente construir 24 viviendas tipo A y 5 tipo B. ¿Le alcanzará el presupuesto?

- a) Llamamos x = número de viviendas tipo A e y = número de viviendas tipo B.
 Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Coste	Beneficio
Nº viviendas A (x)	$100000x$	$20000x$
Nº viviendas B (y)	$200000y$	$32000y$
	$100000x + 200000y$	$20000x + 32000y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 20000x + 32000y$ sometidos a las restricciones siguientes.

La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra $\rightarrow$
 $100000x + 200000y \leq 4400000$

El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas $\rightarrow x + y \leq 36$

La normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B $\rightarrow x \geq 2y$.

La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B $\rightarrow y \geq 4$

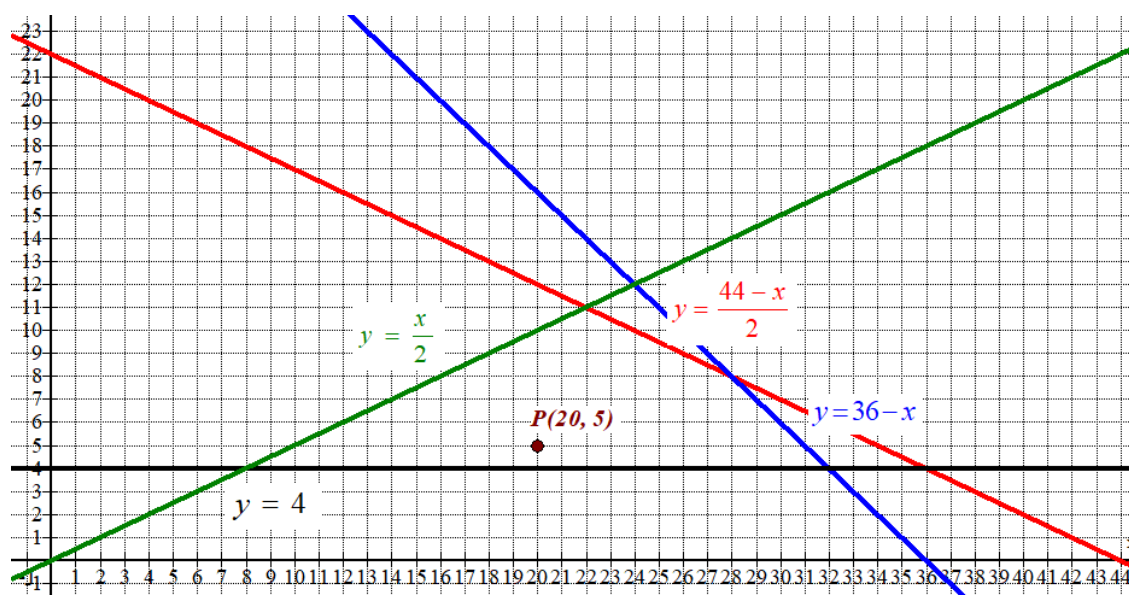
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100000x + 200000y \leq 4400000 \\ x + y \leq 36 \\ x \geq 2y \\ y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 44 \\ y \leq 36 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq \frac{44 - x}{2} \\ y \leq 36 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$y = \frac{44-x}{2}$		$y = 36-x$		$y = \frac{x}{2}$		$y = 4$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = \frac{44-x}{2}$	x	$y = 36-x$	x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = 4$	
0	22	0	36	8	4	8	4	Primer cuadrante
22	11	28	8	22	11	32	4	
28	8	32	4	32	16	40	4	
44	0	36	0	40	20			



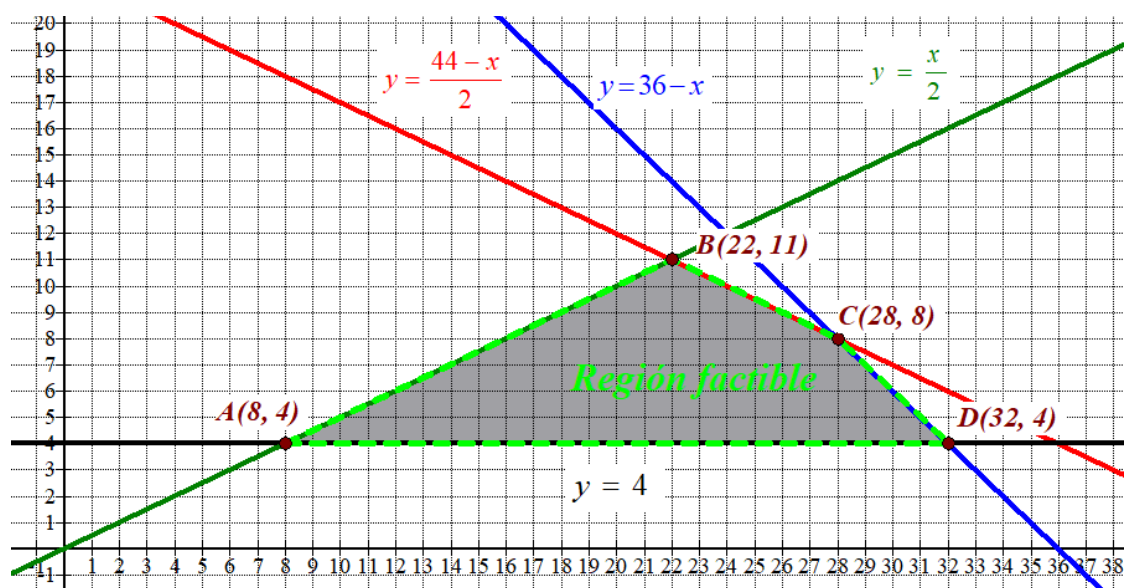
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} y \leq \frac{44-x}{2} \\ y \leq 36-x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja, y por encima de la recta horizontal negra. Comprobamos que el punto $P(20, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \leq \frac{44-20}{2} \\ 5 \leq 36-20 \\ 5 \leq \frac{20}{2} \\ 5 \geq 4 \\ 20 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20000x + 32000y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(8, 4) \rightarrow B(8, 4) = 20000 \cdot 8 + 32000 \cdot 4 = 288000$$

$$B(22, 11) \rightarrow B(22, 11) = 20000 \cdot 22 + 32000 \cdot 11 = 792000$$

$$C(28, 8) \rightarrow B(28, 8) = 20000 \cdot 28 + 32000 \cdot 8 = 816000 \text{ Máximo}$$

$$D(32, 4) \rightarrow B(32, 4) = 20000 \cdot 32 + 32000 \cdot 4 = 768000$$

El beneficio máximo es de 816 000 € y se consigue en el vértice $C(28, 8)$, que significa que deben hacerse 28 viviendas del tipo A y 8 del tipo B para conseguir un beneficio máximo de 816000 euros.

d) La empresa disponía de sus propios fondos con $0.20 \cdot 4400000 = 880000$ € para la construcción de las viviendas. El banco le concede un préstamo de $0.7 \cdot 4400000 = 3080000$ €. En total la empresa dispone de $3080000 + 880000 = 3960000$ €.

El coste de las viviendas ha subido un 15%, por lo que la construcción de una vivienda del tipo A cuesta $1.15 \cdot 100000 = 115000$ € y una del tipo B pasa a costar su construcción $1.15 \cdot 200000 = 230000$ €.

La construcción de 24 viviendas del tipo A cuesta $24 \cdot 115000 = 2760000$ € y la construcción de 5 viviendas del tipo B cuesta $5 \cdot 230000 = 1150000$.

La construcción de 24 viviendas del tipo A y 5 del tipo B cuesta $2760000 + 1150000 = 3910000$ €.

Como se dispone de 3960000 € le alcanza para la construcción de las viviendas, sobrando 50000 euros.



PAU Extraordinaria Reserva 2026
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2025–2026

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (1)

Convocatoria:

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

1. En Santa Cruz de Tenerife el precio mensual de alquiler de apartamentos tipo estudio de una habitación sigue una distribución aproximadamente normal de media 780€ y desviación típica 90€.
 - a) **(1 punto)** ¿Cuál es el precio mensual a partir del cual se encuentra el 10% de los apartamentos más caros?
 - b) **(1 punto)** Se considera que un alquiler es difícil de asumir si su precio mensual supera el 40% de los ingresos familiares. Para una familia donde solo trabaja una persona, que cobra el Salario Mínimo Interprofesional (1221€). ¿Cuál es la probabilidad de que el alquiler de un estudio de 1 habitación en Santa Cruz de Tenerife sea difícil de asumir?

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

2. Una empresa agrícola para supervisar una explotación contrata los servicios de un operador de drones durante una jornada de 8 horas. El rendimiento del dron, medido en hectáreas revisadas por hora, viene dado por la función:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7 & \text{si } 2 \leq t < 6 \\ 5 - \frac{1}{2}(t-6) & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la jornada.

- a) **(1 punto)** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante la jornada contratada.
- b) **(0,75 puntos)** Estudiar, utilizando derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuál fue el valor máximo de rendimiento que se alcanzó y en qué momento?
- c) **(0,75 puntos)** Con la información obtenida en los apartados anteriores, representa gráficamente la función rendimiento del dron.
- d) **(0,5 puntos)** Determinar en qué instante el dron alcanza un rendimiento de 6,5 hectáreas por hora.

Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

- 3.1. Ante un próximo examen tipo test de 100 preguntas, que sabe que es bastante difícil, un estudiante se plantea si realmente le compensa estudiar o si, por el contrario, podría aprobar contestando al azar. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, pero solo una es correcta. Para aprobar el examen es necesario responder correctamente más de 30 preguntas.

- a) **(0.50 puntos)** Si responde al azar, ¿cuál es el número esperado de respuestas correctas?

- b) **(0.75 puntos)** El estudiante decide que si la probabilidad de aprobar contestando al azar es mayor que 0.4 se presentará al examen sin estudiar; en caso contrario se preparará bien la asignatura antes de ir al examen. ¿Qué hará definitivamente el estudiante? Justifica la respuesta.
- c) **(0.75 puntos)** Si responde al azar ¿qué probabilidad hay de que falle entre 70 y 85 respuestas?

3.2. En el curso de un estudio para estudiar la adicción a redes sociales se ha seleccionado una muestra de estudiantes de las islas. El 35% de los sujetos de la muestra procedía de la Isla de Tenerife, el 40% de Gran Canaria y el resto de las islas no capitalinas. Las proporciones de estudiantes que manifestaron tener dependencia de las redes sociales fueron del 85%, 80% y 65% respectivamente.

- a) **(0.50 puntos)** Hacer el diagrama de árbol correspondiente a la situación descrita.
- b) **(0.75 puntos)** Si se elige a una persona al azar de esta muestra ¿qué probabilidad hay de que se reconozca dependiente de las redes sociales?
- c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que una persona se declara dependiente de las redes sociales, ¿Qué probabilidad hay de que sea de una isla capitalina?

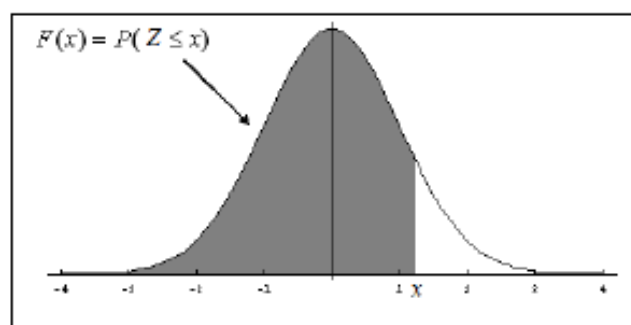
Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico

4.1 Una empresa se dedica a montar algunos componentes en carcasas de ordenador. En concreto montan puertos usb y salidas de vídeo. Lo hacen sobre dos tipos de carcasas: Lite que llevan 3 puertos usb y una salida de vídeo, y Pro con 5 puertos y 2 salidas de vídeo. Los costes de producción (comprar e instalar) los componentes son de 1,5 y 1,1 euros respectivamente para los puertos y los conectores de vídeo, respectivamente. La empresa cobra a sus clientes 10 euros por cada carcasa Lite montada, y 17 por cada Pro. El montaje de cada componente (puerto y salida de vídeo) lleva 5 minutos. Para esta semana dispone de 300 puertos usb y 110 salidas de vídeo. De igual manera puede contar con dos trabajadores que pueden dedicar entre los dos un total de 40 horas al montaje.

- a) **(1 punto)** Formula el correspondiente problema de programación lineal para decidir la producción de esa semana si quiere obtener el máximo beneficio tras pagar el precio de los componentes.
- b) **(1 punto)** Representa la región factible.
- c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas carcasas de cada tipo debe producir para obtener el beneficio máximo?
- d) **(0.5 puntos)** La empresa ha recibido un pedido de 100 carcasas Lite y 50 carcasas Pro. Antes de poder servir el pedido el inicio de un conflicto bélico hace subir los costes de producción en un 10%. Si no puede subir los precios ¿en qué porcentaje se reduce su beneficio?

4.2. En una instalación de acuicultura los peces son alimentados con una combinación de piensos de tres tipos, A, B y C. El coste por kg de cada pienso es de 3 euros para el tipo A, 2 euros para el B y 4 euros para el C. Un día determinado, para la toma de la mañana, uno de los empleados recuerda que por cada 2 kg del pienso B se usaron 3 kg del pienso A, y que la cantidad de pienso C empleado fue 5 kg menos que el total de los dos tipos restantes. Además, el empleado anotó en el registro de gastos un total de 112 euros para esa toma.

- a) **(1,5 puntos)** Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- b) **(1 punto)** ¿Cuántos kg de cada tipo se prepararon para la toma de esa mañana?
- c) **(0,5 puntos)** Se sabe que cada kg del pienso A contiene 4 unidades de proteínas y 2 unidades de grasas; cada kg del B contiene 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas; cada kg del C contiene 2 unidades de proteínas y 3 unidades de grasas. Para una alimentación equilibrada, se recomienda que en cada toma se incluyan: entre 95 y 110 unidades de proteínas; entre 70 y 80 unidades de grasas. Determinar, justificando la respuesta, si la alimentación suministrada en la toma de la tarde cumple las recomendaciones indicadas sabiendo que para dicha toma se usaron 13 kg del pienso A, 8 kg del B y 13 kg del C.



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. En Santa Cruz de Tenerife el precio mensual de alquiler de apartamentos tipo estudio de una habitación sigue una distribución aproximadamente normal de media 780€ y desviación típica 90€.
- a) (1 punto) ¿Cuál es el precio mensual a partir del cual se encuentra el 10% de los apartamentos más caros?
- b) (1 punto) Se considera que un alquiler es difícil de asumir si su precio mensual supera el 40% de los ingresos familiares. Para una familia donde solo trabaja una persona, que cobra el Salario Mínimo Interprofesional (1221€). ¿Cuál es la probabilidad de que el alquiler de un estudio de 1 habitación en Santa Cruz de Tenerife sea difícil de asumir?

- a) Consideramos la variable aleatoria X = el precio mensual de alquiler de apartamentos tipo estudio de una habitación en Santa Cruz de Tenerife. $X = N(780, 90)$.

Debemos hallar el precio “a” tal que $P(X \geq a) = 0.10$.

$$P(X \geq a) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 780}{90} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 780}{90}\right) = 0.10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 780}{90}\right) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 780}{90}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a - 780}{90} = \frac{1.28 + 1.29}{2} \Rightarrow a - 780 = 115.2 \Rightarrow \boxed{a = 895.2}$$

Hemos visto que 895.2 es el precio mensual a partir del cual se encuentra el 10% de los apartamentos más caros.

- b) El 40% de 1221 € es $0.4 \cdot 1221 = 488.4$ €.

Nos piden hallar $P(X \geq 488.4)$.

$$P(X \geq 488.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 780}{90} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{488.4 - 780}{90}\right) = P(Z \geq -3.24) =$$

$$= P(Z \leq 3.24) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.994}$$

La probabilidad de que el alquiler de un estudio de 1 habitación en Santa Cruz de Tenerife sea difícil de asumir es de 0.9994.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994

2. Una empresa agrícola para supervisar una explotación contrata los servicios de un operador de drones durante una jornada de 8 horas. El rendimiento del dron, medido en hectáreas revisadas por hora, viene dado por la función:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7 & \text{si } 2 \leq t < 6 \\ 5 - \frac{1}{2}(t-6) & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la jornada.

- a) **(1 punto)** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante la jornada contratada.
 b) **(0,75 puntos)** Estudiar, utilizando derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuál fue el valor máximo de rendimiento que se alcanzó y en qué momento?
 c) **(0,75 puntos)** Con la información obtenida en los apartados anteriores, representa gráficamente la función rendimiento del dron.
 d) **(0,5 puntos)** Determinar en qué instante el dron alcanza un rendimiento de 6,5 hectáreas por hora.

- a) La función $R(t)$ en cada intervalo tiene una expresión polinómica y por tanto, es continua en $[0, 2) \cup (2, 6) \cup (6, 8]$. Estudiamos la continuidad en $t = 2$ y $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} R(2) &= \frac{5}{2} \cdot 2 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{5}{2}t = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7 = -\frac{1}{2}(2-4)^2 + 7 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} R(t) = R(2) = 5$$

$$\left. \begin{aligned} R(6) &= 5 - \frac{1}{2}(6-6) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7 = -\frac{1}{2}(6-4)^2 + 7 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} 5 - \frac{1}{2}(t-6) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 6^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} R(t) = R(6) = 5$$

La función es continua en $t = 2$ y $t = 6$. La función es continua en todo su dominio $[0, 8]$.

La función es derivable en $[0, 2) \cup (2, 6) \cup (6, 8]$, siendo su derivada:

$$R'(t) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{2} \cdot 2(t-4) = 4-t & \text{si } 2 < t < 6 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 6 < t \leq 8 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t = 2$ y en $t = 6$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} R'(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \\ f'(2^+) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} R'(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} 4 - t = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = \frac{5}{2} \neq 2 = f'(2^+)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(6^-) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} R'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} 4 - t = 4 - 6 = -2 \\ f'(6^+) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} R'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(6^-) = -2 \neq -\frac{1}{2} = f'(6^+)$$

La función no es derivable ni en $t = 2$ ni en $t = 6$.

La función es derivable en $[0, 2) \cup (2, 6) \cup (6, 8]$.

b) La derivada de la función tiene la expresión $R'(t) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 4 - t & \text{si } 2 < t < 6 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 6 < t \leq 8 \end{cases}$.

- En el intervalo $[0, 2)$ la derivada es $R'(t) = \frac{5}{2} > 0$, que es positiva en todo el intervalo. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 6)$ la derivada es $R'(t) = 4 - t$, que se anula para $t = 4$. La derivada es positiva para $t \in (2, 4)$ y negativa para $t \in (4, 6)$. La función crece en $(2, 4)$ y decrece en $(4, 6)$.
- En el intervalo $(6, 8]$ la derivada es $R'(t) = -\frac{1}{2} < 0$, que es negativa en todo el intervalo. La función decrece en $(6, 8]$.

Conclusión: Como la función es continua, podemos decir que la función crece en $[0, 4)$ y decrece en $(4, 8]$. La función tiene un máximo absoluto en $t = 4$. El rendimiento máximo es de

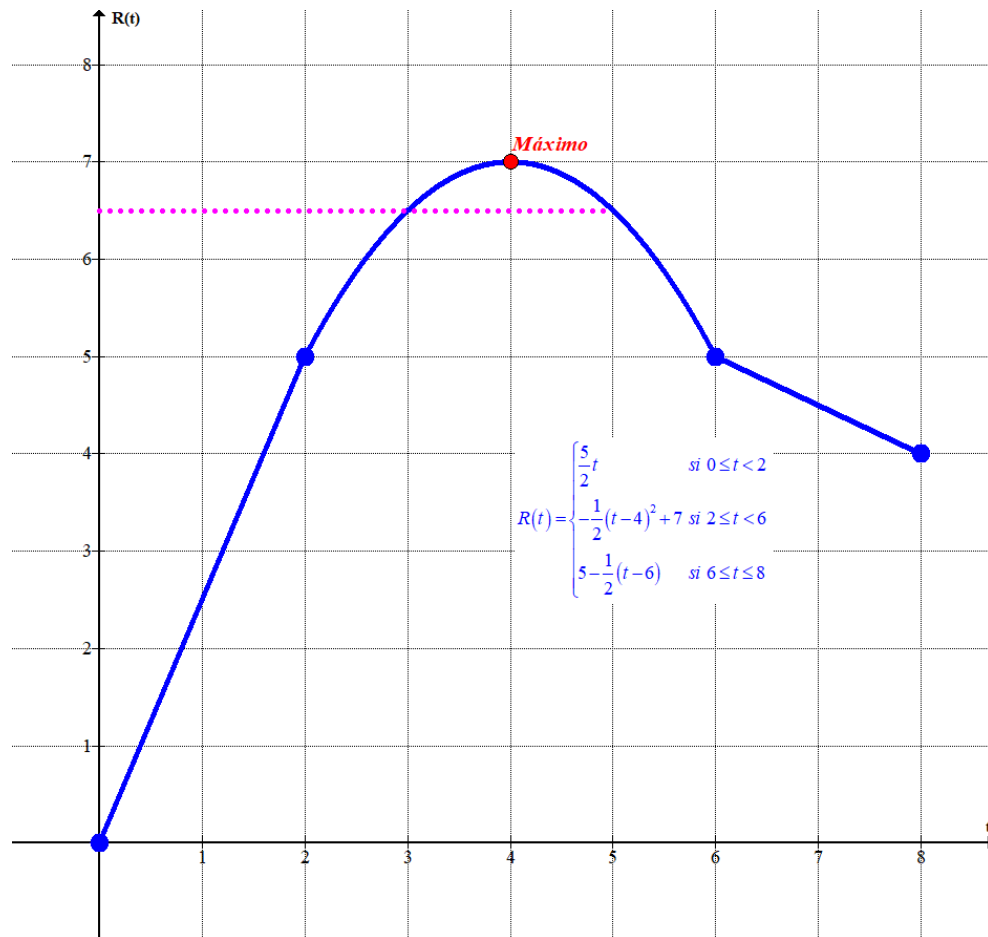
$$R(4) = -\frac{1}{2}(4-4)^2 + 7 = 7 \text{ hectáreas revisadas por hora y se alcanza al cabo de 4 horas.}$$

c) Hacemos una tabla y dibujamos la gráfica del rendimiento del dron.

t	$R(t) = \frac{5}{2}t$
0	2
1	2.5

t	$R(t) = -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7$
2	5
5	6.5

t	$R(t) = 5 - \frac{1}{2}(t-6)$
6	5
8	4



d) Resolvemos la igualdad $R(t) = 6.5$.

$$R(t) = 6.5 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}t = 6.5 \rightarrow 5t = 13 \rightarrow t = \frac{13}{5} = 2.6 \notin [0, 2) \\ -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 7 = 6.5 \rightarrow -\frac{1}{2}(t-4)^2 = -0.5 \rightarrow (t-4)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases} \\ 5 - \frac{1}{2}(t-6) = 6.5 \rightarrow -\frac{1}{2}(t-6) = 1.5 \rightarrow t-6 = -3 \rightarrow t = 3 \notin (6, 8] \end{cases}$$

El dron alcanza un rendimiento de 6,5 hectáreas por hora al cabo de 3 y 5 horas.

3.1. Ante un próximo examen tipo test de 100 preguntas, que sabe que es bastante difícil, un estudiante se plantea si realmente le compensa estudiar o si, por el contrario, podría aprobar contestando al azar. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, pero solo una es correcta. Para aprobar el examen es necesario responder correctamente más de 30 preguntas.

- a) **(0.50 puntos)** Si responde al azar, ¿cuál es el número esperado de respuestas correctas?
 b) **(0.75 puntos)** El estudiante decide que si la probabilidad de aprobar contestando al azar es mayor que 0.4 se presentará al examen sin estudiar; en caso contrario se preparará bien la asignatura antes de ir al examen. ¿Qué hará definitivamente el estudiante? Justifica la respuesta.
 c) **(0.75 puntos)** Si responde al azar ¿qué probabilidad hay de que falle entre 70 y 85 respuestas?

- a) Consideramos la variable aleatoria X = el número de respuestas elegidas al azar y acertadas en un test de 100 preguntas. Esta variable es una binomial donde el número de repeticiones es $n = 100$ y la probabilidad de acertar una pregunta respondiendo al azar es $p = \frac{1}{4} = 0.25$.

$$X = B(100, 0.25).$$

El número esperado de respuestas correctas es la media de la distribución $100 \cdot 0.25 = 25$.

- b) Calculamos la probabilidad de aprobar el examen contestando a todas las preguntas al azar, es decir, la probabilidad de responder correctamente más de 30 preguntas $P(X > 30)$.

El número de repeticiones es muy alto y aproximamos esta binomial a una variable Y normal de media $np = 100 \cdot 0.25 = 25$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.33$.

$$Y = N(25, 4.33)$$

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 30.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 25}{4.33} \end{array} \right\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{30.5 - 25}{4.33}\right) = P(Z \geq 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8980 = \boxed{0.102} \end{aligned}$$

La probabilidad de aprobar respondiendo al azar a todas las preguntas es de $0.102 < 0.4$. Por lo que debe prepararse bien la asignatura antes de ir al examen, la probabilidad de aprobar sin estudiar es muy baja.

- c) Para que falle entre 70 y 85 respuestas debe responder correctamente entre 15 y 30 preguntas (incluidos los extremos). Hallamos $P(15 \leq X \leq 30)$.

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 30) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(14.5 \leq Y \leq 30.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 25}{4.33} \end{array} \right\} = \\ &= P\left(\frac{14.5 - 25}{4.33} \leq Z \leq \frac{30.5 - 25}{4.33}\right) = P(-2.42 \leq Z \leq 1.27) = \end{aligned}$$

$$= P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -2.42) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \geq 2.42) =$$

$$= P(Z \leq 1.27) - [1 - P(Z \leq 2.42)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8980 - 1 + 0.9922 = \boxed{0.8902}$$

	0	0.01	0.02
0	0,5000	0,5040	0,5080
0.1	0,5398	0,5438	0,5478
0.2	0,5793	0,5832	0,5871
0.3	0,6179	0,6217	0,6255
0.4	0,6554	0,6591	0,6628
0.5	0,6915	0,6950	0,6985
0.6	0,7257	0,7291	0,7324
0.7	0,7580	0,7611	0,7642
0.8	0,7881	0,7910	0,7939
0.9	0,8159	0,8186	0,8212
1	0,8413	0,8438	0,8461
1.1	0,8643	0,8665	0,8686
1.2	0,8849	0,8869	0,8888
1.3	0,9032	0,9049	0,9066
1.4	0,9192	0,9207	0,9222
1.5	0,9332	0,9345	0,9357
1.6	0,9452	0,9463	0,9474
1.7	0,9554	0,9564	0,9573
1.8	0,9641	0,9649	0,9656
1.9	0,9713	0,9719	0,9726
2	0,9772	0,9778	0,9783
2.1	0,9821	0,9826	0,9830
2.2	0,9861	0,9864	0,9868
2.3	0,9893	0,9896	0,9898
2.4	0,9918	0,9920	0,9922

La probabilidad de que falle entre 70 y 85 respuestas es de 0.8902.

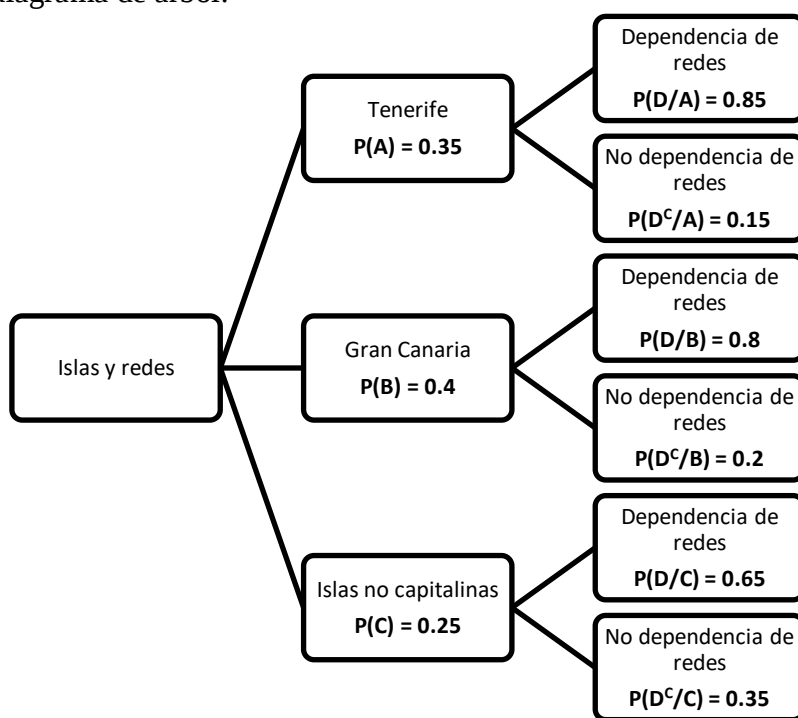
- 3.2.** En el curso de un estudio para estudiar la adicción a redes sociales se ha seleccionado una muestra de estudiantes de las islas. El 35% de los sujetos de la muestra procedía de la Isla de Tenerife, el 40% de Gran Canaria y el resto de las islas no capitalinas. Las proporciones de estudiantes que manifestaron tener dependencia de las redes sociales fueron del 85%, 80% y 65% respectivamente.
- a) **(0.50 puntos)** Hacer el diagrama de árbol correspondiente a la situación descrita.
- b) **(0.75 puntos)** Si se elige a una persona al azar de esta muestra ¿qué probabilidad hay de que se reconozca dependiente de las redes sociales?
- c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que una persona se declara dependiente de las redes sociales, ¿Qué probabilidad hay de que sea de una isla capitalina?

Llamamos A, B y C a los sucesos “el estudiante procede de Tenerife, Gran Canaria o de las islas no capitalinas, respectivamente” y D a “el estudiante manifiesta tener dependencia de las redes sociales”. Las probabilidades que se desprenden de los datos del problema son:

$$P(A) = 0.35; P(B) = 0.40; P(C) = 1 - 0.35 - 0.4 = 0.25; P(D/A) = 0.85;$$

$$P(D/B) = 0.80 \text{ y } P(D/C) = 0.65$$

- a) Construimos un diagrama de árbol.



- b) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.85 + 0.4 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.65 = \boxed{0.78}$$

La probabilidad de que el estudiante elegido al azar se reconozca dependiente de las redes sociales vale 0.78.

- c) Hallamos la probabilidad del suceso contrario: Si se sabe que una persona se declara dependiente de las redes sociales, hallamos la probabilidad de que no sea de una isla capitalina. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.65}{0.78} = \boxed{\frac{5}{24} \approx 0.2083}$$

Si se sabe que una persona se declara dependiente de las redes sociales, la probabilidad de que sea de una isla no capitalina vale 0.2083 y de que sea de una isla capitalina vale $1 - 0.2083 = 0.7917$.

4.1 Una empresa se dedica a montar algunos componentes en carcasas de ordenador. En concreto montan puertos usb y salidas de vídeo. Lo hacen sobre dos tipos de carcasas: Lite que llevan 3 puertos usb y una salida de vídeo, y Pro con 5 puertos y 2 salidas de vídeo. Los costes de producción (comprar e instalar) los componentes son de 1,5 y 1,1 euros respectivamente para los puertos y los conectores de vídeo, respectivamente. La empresa cobra a sus clientes 10 euros por cada carcasa Lite montada, y 17 por cada Pro. El montaje de cada componente (puerto y salida de vídeo) lleva 5 minutos. Para esta semana dispone de 300 puertos usb y 110 salidas de vídeo. De igual manera puede contar con dos trabajadores que pueden dedicar entre los dos un total de 40 horas al montaje.

- a) **(1 punto)** Formula el correspondiente problema de programación lineal para decidir la producción de esa semana si quiere obtener el máximo beneficio tras pagar el precio de los componentes.
 b) **(1 punto)** Representa la región factible.
 c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas carcasas de cada tipo debe producir para obtener el beneficio máximo?
 d) **(0.5 puntos)** La empresa ha recibido un pedido de 100 carcasas Lite y 50 carcasas Pro. Antes de poder servir el pedido el inicio de un conflicto bélico hace subir los costes de producción en un 10%. Si no puede subir los precios ¿en qué porcentaje se reduce su beneficio?

- a) Llamamos x = número de carcasas Lite montadas e y = número de carcasas Pro montadas.
 Los componentes necesarios para montar una carcasa Lite cuestan $1.5 \cdot 3 + 1.1 = 5.6$ €.
 Los componentes necesarios para montar una carcasa Pro cuestan $1.5 \cdot 5 + 1.1 \cdot 2 = 9.7$ €.
 Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Puertos	Salidas	Coste	Montaje (m)	Beneficios
Carcasas Lite (x)	$3x$	x	$5.6x$	$5 \cdot 4x$	$10x - 5.6x = 4.4x$
Carcasas Pro (y)	$5y$	$2y$	$9.7y$	$5 \cdot 7y$	$17y - 9.7y = 7.3y$
TOTALES	$3x + 5y$	$x + 2y$		$20x + 35y$	$4.4x + 7.3y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 4.4x + 7.3y$ sometidos a las restricciones siguientes.

Dispone de 40 horas para el montaje $\rightarrow 20x + 35y \leq 40 \cdot 60 \rightarrow 20x + 35y \leq 2400$

Dispone de 300 puertos usb y 110 salidas de vídeo $\rightarrow 3x + 5y \leq 300; x + 2y \leq 110$

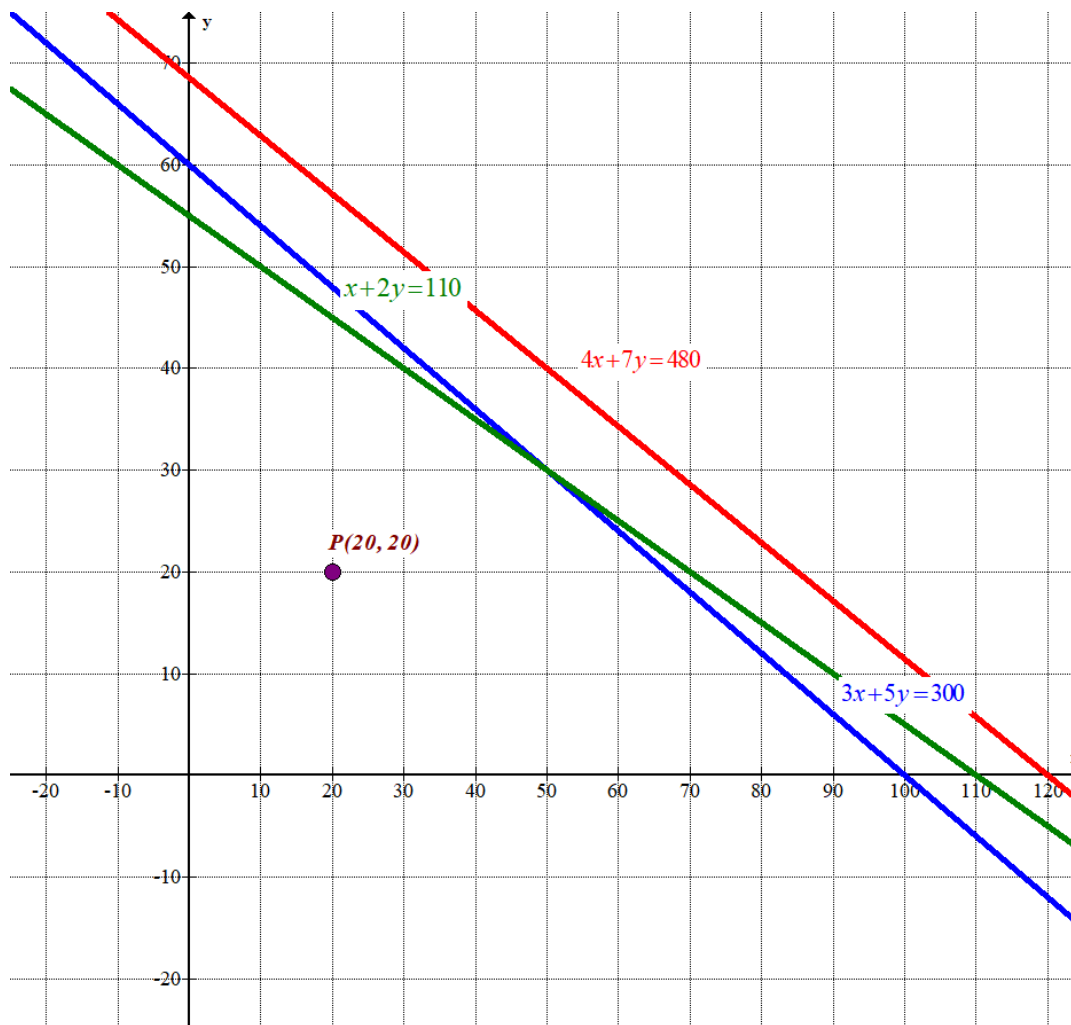
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 35y \leq 2400 \\ 3x + 5y \leq 300 \\ x + 2y \leq 110 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 7y \leq 480 \\ 3x + 5y \leq 300 \\ x + 2y \leq 110 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$4x + 7y = 480$		$3x + 5y = 300$		$x + 2y = 110$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = \frac{480 - 4x}{7}$	x	$y = \frac{300 - 3x}{5}$	x	$y = \frac{110 - x}{2}$	
15	60	0	60	0	55	
50	40	50	30	50	30	
120	0	100	0	110	0	



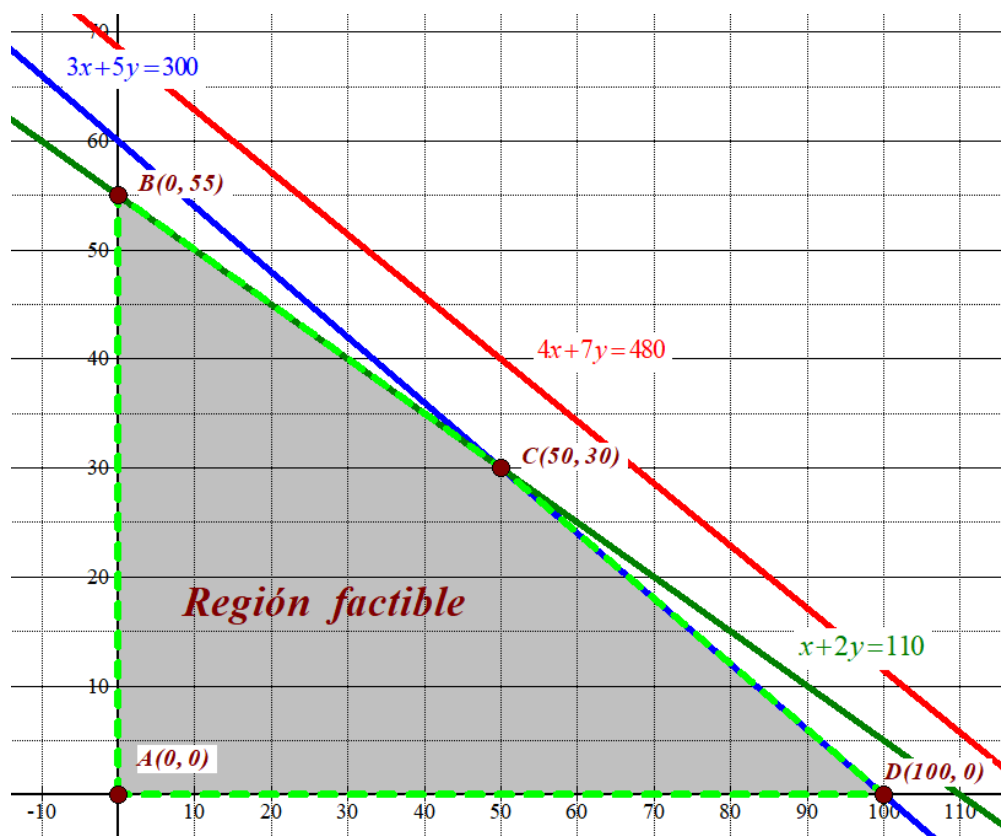
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 4x + 7y \leq 480 \\ 3x + 5y \leq 300 \\ x + 2y \leq 110 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 20 + 7 \cdot 20 \leq 480 \\ 3 \cdot 20 + 5 \cdot 20 \leq 300 \\ 20 + 2 \cdot 20 \leq 110 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 80 + 140 \leq 480 \\ 60 + 100 \leq 300 \\ 20 + 40 \leq 110 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 4.4x + 7.3y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 55) \rightarrow B(0, 55) = 4.4 \cdot 0 + 7.3 \cdot 55 = 401.5$$

$$C(50, 30) \rightarrow B(50, 30) = 4.4 \cdot 50 + 7.3 \cdot 30 = 439$$

$$D(100, 0) \rightarrow B(100, 0) = 4.4 \cdot 100 + 7.3 \cdot 0 = 440 \text{ Máximo}$$

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 440 € y se obtiene en el vértice $C(50, 30)$, que significa que deben montarse 50 carcassas Lite y 30 Pro para conseguir un beneficio máximo de 440 euros.

c) Con 100 carcassas Lite y 50 carcassas Pro consigue unos ingresos de $10 \cdot 100 + 17 \cdot 50 = 1850$ €. El coste del material sin subida es $5.6 \cdot 100 + 9.7 \cdot 50 = 1045$ € y con el aumento del 10% el coste del material es de $1045 \cdot 1.1 = 1149.5$ €.

Su beneficio sin la subida de precios es de $1850 - 1045 = 805$ €.

Su beneficio con la subida de precios es de $1850 - 1149.5 = 700.5$ €

El porcentaje es $\frac{700.5}{805} \approx 0.87$. El beneficio se ha reducido en un $100 - 87 = 13\%$.

4.2. En una instalación de acuicultura los peces son alimentados con una combinación de piensos de tres tipos, A, B y C. El coste por kg de cada pienso es de 3 euros para el tipo A, 2 euros para el B y 4 euros para el C. Un día determinado, para la toma de la mañana, uno de los empleados recuerda que por cada 2 kg del pienso B se usaron 3 kg del pienso A, y que la cantidad de pienso C empleado fue 5 kg menos que el total de los dos tipos restantes. Además, el empleado anotó en el registro de gastos un total de 112 euros para esa toma.

- a) **(1,5 puntos)** Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
 b) **(1 punto)** ¿Cuántos kg de cada tipo se prepararon para la toma de esa mañana?
 c) **(0,5 puntos)** Se sabe que cada kg del pienso A contiene 4 unidades de proteínas y 2 unidades de grasas; cada kg del B contiene 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas; cada kg del C contiene 2 unidades de proteínas y 3 unidades de grasas. Para una alimentación equilibrada, se recomienda que en cada toma se incluyan: entre 95 y 110 unidades de proteínas; entre 70 y 80 unidades de grasas. Determinar, justificando la respuesta, si la alimentación suministrada en la toma de la tarde cumple las recomendaciones indicadas sabiendo que para dicha toma se usaron 13 kg del pienso A, 8 kg del B y 13 kg del C.

- a) Llamamos “x”, “y”, “z” a los kilos de pienso que se incluyen en el alimento de los peces de cada uno de los tipos A, B y C, respectivamente.

El coste por kg de cada pienso es de 3 euros para el tipo A, 2 euros para el B y 4 euros para el C y el empleado anotó en el registro de gastos un total de 112 euros para esa toma. $\rightarrow$
 $3x + 2y + 4z = 112$

Por cada 2 kg del pienso B se usaron 3 kg del A $\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} 2\text{kg de B} \rightarrow 3\text{kg de A} \\ y \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3y$.

La cantidad de pienso C empleado fue 5 kg menos que el total de los dos tipos restantes $\rightarrow$
 $z = x + y - 5$.

$$\text{Reunimos estas ecuaciones en un sistema: } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 112 \\ 2x = 3y \\ z = x + y - 5 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 112 \\ 2x = 3y \\ z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 4(x + y - 5) = 112 \\ 2x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 4x + 4y - 20 = 112 \\ 2x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 6y = 132 \\ x = \frac{3y}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \cdot \frac{3y}{2} + 6y = 132 \Rightarrow 21y + 12y = 264 \Rightarrow 33y = 264 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{264}{33} = 8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12} \Rightarrow \boxed{z = 12 + 8 - 5 = 15}$$

Para la toma de la mañana se usaron 12 kg del pienso A, 8 del B y 15 del C.

c) Con 13 kg del pienso A se consiguen $13 \cdot 4 = 52$ unidades de proteínas y $13 \cdot 2 = 26$ unidades de grasas.

Con 8 kg del pienso B se consiguen $8 \cdot 3 = 24$ unidades de proteínas y $8 \cdot 1 = 8$ unidades de grasas.

Con 13 kg del pienso C se consiguen $13 \cdot 2 = 26$ unidades de proteínas y $13 \cdot 3 = 39$ unidades de grasas.

La toma de la tarde aporta $52 + 24 + 26 = 102$ unidades de proteínas y $26 + 8 + 39 = 73$ unidades de grasas.

Como $95 < 102 < 110$ y $70 < 73 < 80$ se cumplen las recomendaciones indicadas para una alimentación equilibrada.



PAU Ordinaria 2026
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2025–2026

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Convocatoria: JUNIO

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

1. Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos ha realizado un estudio que indica que la duración media de las baterías se encuentra entre 171 y 201 minutos, con una confianza del 98%. Además, de acuerdo con los datos técnicos del fabricante, la desviación típica de la duración de las baterías es de 42,7 minutos.

- a) (0,75 puntos) Calcula el tamaño de la muestra utilizada.
- b) (0,75 puntos) Para tener más información la empresa decide hacer un nuevo estudio. Para ello escoge una muestra de 50 patinetes, obteniendo una duración media de 190 minutos. Suponiendo que se mantiene la desviación típica dada por el fabricante, calcula el nuevo intervalo de confianza para la duración media de las baterías con una confianza del 95%.
- c) (0,5 puntos) Si suponemos que la media poblacional coincide con el valor medio del apartado anterior, calcula la probabilidad de que la duración media de las baterías de una muestra de 50 patinetes supere las 3 horas.

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

2. Se ha medido el aprendizaje de vocabulario de una lengua extranjera que se obtiene con un nuevo método de enseñanza. El número de palabras aprendidas viene dado por la función $V(t)$, donde t son las horas de ejercitación, y tiene la siguiente expresión:

$$V(t) = \begin{cases} 27t, & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ 300 \left(1 - \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \geq 10 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) ¿Es continua esta función? ¿Y derivable? Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) (0,5 puntos) Dibuja la función.
- c) (0,75 puntos) Si un estudiante se ejercita cinco horas semanales, ¿cuántas palabras nuevas aprende durante la cuarta semana? ¿Existe un máximo de palabras a retener con este nuevo método?
- d) (0,5 puntos) ¿En qué momento supera las 280 palabras?

Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

3.1. Durante los primeros meses de 2026 las Islas Canarias registraron un número de días con lluvia superior a lo habitual, lo que dio lugar al desbordamiento del 40% de las presas y embalses situadas en los barrancos de las islas.

- a) (1 punto) En la provincia de Santa Cruz de Tenerife hay registradas un total de 90 presas/embalses. Si el año que viene vuelve a llover como este año, ¿cuál es la probabilidad de que se desborden entre 30 y 40 presas/embalses?
- b) (1 punto) Aparte de las presas/embalses, las islas cuentan con numerosos estanques de tamaño mediano donde se recoge agua para uso agrícola. En una muestra aleatoria de 200 estanques se encontró que 54 de ellos se habían llenado este año hasta su capacidad máxima. Estima la proporción de estanques que no alcanzaron su capacidad máxima este año utilizando un intervalo de confianza al 99%.

3.2. El Gobierno de Canarias a través del Bono Joven de Alquiler ofrece una ayuda de hasta 250€ al mes durante dos años para pagar el alquiler de la vivienda habitual, siempre que el precio no supere los 900€ en municipios del ámbito A (capitales de provincia y zonas tensionadas), los 750€ en municipios del ámbito B (ciudades medianas) y los 600€ en municipios del ámbito C (resto de municipios). En un estudio realizado por el Consejo de la Juventud de Canarias se ha encontrado que en la actualidad el 45% de los anuncios de alquiler ofrecen viviendas en el ámbito A, el 35% en el ámbito B y el resto en el ámbito C. Asimismo, de acuerdo con los precios ofertados, solo pueden acogerse al Bono Joven un 24% de los alquileres del ámbito A, un 46% de los del B y un 66% de los del C.

- a) **(1 punto)** Se elige un anuncio al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda acogerse a la ayuda del Bono Joven?
- b) **(1 punto)** Sabiendo que un anuncio no permite acogerse al Bono Joven, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un municipio del ámbito A?

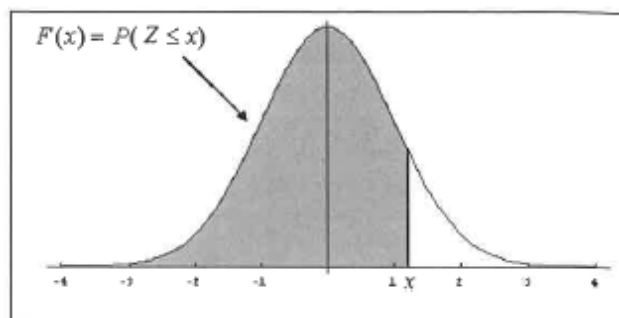
Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico

4.1 Una empresa informática fabrica placas base de tres categorías: Lite, Estándar y Gaming. El coste de producción por unidad de cada categoría es de 50, 80 y 110 euros respectivamente, con precios de venta al público (antes de impuestos) de 75, 120 y 190 euros. Un cliente ha realizado un pedido que incluye placas de las tres categorías, y en el que las placas Gaming representan una quinta parte del total. La empresa ha gastado un total de 12 350€ en la fabricación de este pedido. Por su parte, el cliente ha pagado 20 758 €, cantidad que incluye el precio de venta más el 7% de IGIC aplicado sobre dicho precio.

- a) **(1,5 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones para encontrar la composición del pedido.
- b) **(1 punto)** ¿Cuántas placas de cada tipo incluye el pedido?
- c) **(0,5 puntos)** La mano de obra supone un 70% del coste de fabricación de las placas. Del importe destinado a mano de obra, el 15 % se retiene e ingresa en Hacienda en concepto de IRPF de los trabajadores. Asimismo, el impuesto sobre sociedades asciende al 23 % del importe de los beneficios obtenidos en esta operación (precio de venta sin IGIC menos coste). Determina el importe total de los tributos asociados a esta operación (IGIC + IRPF retenido + Impuesto de Sociedades) y calcula qué porcentaje representa sobre la cantidad final pagada por el cliente.

4.2 Una empresa organiza excursiones nocturnas a las Cañadas del Teide para observar el cielo. Atendiendo a las condiciones de su flota de guaguas y al personal disponible, la empresa ofrece dos tipos de excursiones: el tipo A, con 75 plazas básicas (solo transporte) y 100 plazas “estrella” (con un guía especializado en astronomía), y el tipo B, también con 75 plazas básicas y solo 50 plazas estrella. El beneficio que reporta cada tipo de excursión es de 240€ para las del tipo A y de 180€ para las del tipo B. Para la campaña de verano se pueden ofertar, como mucho, un total de 3750 plazas básicas y 4000 plazas estrella. Asimismo, de acuerdo con la experiencia de otros años, el número de excursiones tipo A debe ser menor o igual que el doble de excursiones del tipo B. La empresa desea maximizar su beneficio.

- a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente.
- b) **(1.5 puntos)** Representa la región factible y determina cuántas excursiones del tipo A y cuántas del tipo B deberían hacerse para obtener el beneficio máximo.
- c) **(0.5 puntos)** Supongamos que finalmente se realizan 28 excursiones del tipo A y 14 del tipo B, y que con respecto a la previsión inicial el beneficio que reporta cada tipo de excursión se incrementa en un 10% para las del tipo A y en un 15% para las del tipo B. ¿Cuál es el beneficio final que obtiene la empresa en este caso?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos ha realizado un estudio que indica que la duración media de las baterías se encuentra entre 171 y 201 minutos, con una confianza del 98%. Además, de acuerdo con los datos técnicos del fabricante, la desviación típica de la duración de las baterías es de 42,7 minutos.

a) **(0,75 puntos)** Calcula el tamaño de la muestra utilizada.

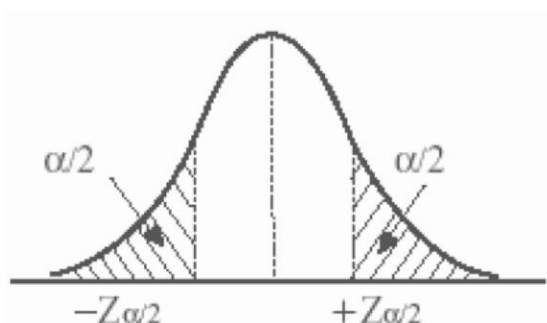
b) **(0,75 puntos)** Para tener más información la empresa decide hacer un nuevo estudio. Para ello escoge una muestra de 50 patinetes, obteniendo una duración media de 190 minutos. Suponiendo que se mantiene la desviación típica dada por el fabricante, calcula el nuevo intervalo de confianza para la duración media de las baterías con una confianza del 95%.

c) **(0,5 puntos)** Si suponemos que la media poblacional coincide con el valor medio del apartado anterior, calcula la probabilidad de que la duración media de las baterías de una muestra de 50 patinetes supere las 3 horas.

a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos da la duración de las baterías en minutos. Nos dicen que $X = N(\mu, 42.7)$.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 98%.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901

El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud: $\frac{201-171}{2} = 15$ minutos.

Utilizamos la fórmula del error para obtener n .

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 15 = 2.325 \frac{42.7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.325 \cdot 42.7}{15} \Rightarrow n = \left(\frac{2.325 \cdot 42.7}{15} \right)^2 \approx 43.8$$

El tamaño de la muestra es de 44 baterías.

b) El tamaño de la muestra es $n = 50$. La media muestral es $\bar{x} = 190$ minutos.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{42.7}{\sqrt{50}} \approx 11.836$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (190 - 11.836, 190 + 11.836) = (178.164, 201.836)$$

c) Suponemos $X = N(190, 42.7)$. Nos piden calcular $P(\bar{X}_{50} > 180)$.

Si $X = N(190, 42.7)$ entonces la distribución de muestras de tamaño 50 $\bar{X}_{50}$ tiene la misma media y su desviación típica es $\frac{42.7}{\sqrt{50}}$. $\bar{X}_{50} = N\left(190, \frac{42.7}{\sqrt{50}}\right)$.

$$P(\bar{X}_{50} > 180) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\bar{X}_{50} - 190}{42.7 / \sqrt{50}} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{180 - 190}{42.7 / \sqrt{50}}\right) = P(Z > -1.66) =$$

$$= P(Z \leq 1.66) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9515}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608

2. Se ha medido el aprendizaje de vocabulario de una lengua extranjera que se obtiene con un nuevo método de enseñanza. El número de palabras aprendidas viene dado por la función $V(t)$, donde t son las horas de ejercitación, y tiene la siguiente expresión:

$$V(t) = \begin{cases} 27t, & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ 300\left(1 - \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \geq 10 \end{cases}$$

- a) **(1,25 puntos)** ¿Es continua esta función? ¿Y derivable? Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 b) **(0.5 puntos)** Dibuja la función.
 c) **(0,75 puntos)** Si un estudiante se ejercita cinco horas semanales, ¿cuántas palabras nuevas aprende durante la cuarta semana? ¿Existe un máximo de palabras a retener con este nuevo método?
 d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momento supera las 280 palabras?

- a) La función en el intervalo $[0,10)$ es una función polinómica que es continua.

La función en el intervalo $(10, +\infty)$ es una función racional pero no se anula en el intervalo de definición, pues $t = 0 \notin (10, +\infty)$.

La función es continua en $[0,10) \cup (10, +\infty)$. Estudiamos la continuidad en $t = 10$.

$$\left. \begin{aligned} V(10) &= 300\left(1 - \frac{1}{10}\right) = 270 \\ \lim_{t \rightarrow 10^-} V(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^-} 27t = 270 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} V(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^+} 300\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(10) = \lim_{t \rightarrow 10^-} V(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} V(t) = 270$$

La función es continua en $t = 10$ y por tanto, es continua en todo su dominio $[0, +\infty)$.

La función en $[0,10) \cup (10, +\infty)$ es derivable, siendo su derivada:

$$V'(t) = \begin{cases} 27 & 0 \leq t < 10 \\ 300\left(0 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{300}{t^2} & t > 10 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en $t = 10$.

$$\left. \begin{aligned} V'(10^-) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} V'(t) = \lim_{x \rightarrow 10^-} 27 = 27 \\ V'(10^+) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} V'(t) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \frac{300}{t^2} = \frac{300}{100} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V'(10^-) = 27 \neq 3 = V'(10^+)$$

La función no es derivable en $t = 10$. La función es derivable en $[0,10) \cup (10, +\infty)$.

La derivada de la función es $V'(t) = \begin{cases} 27 & 0 \leq t < 10 \\ \frac{300}{t^2} & t > 10 \end{cases}$. Esta expresión siempre es positiva, por

lo que la función siempre es creciente.

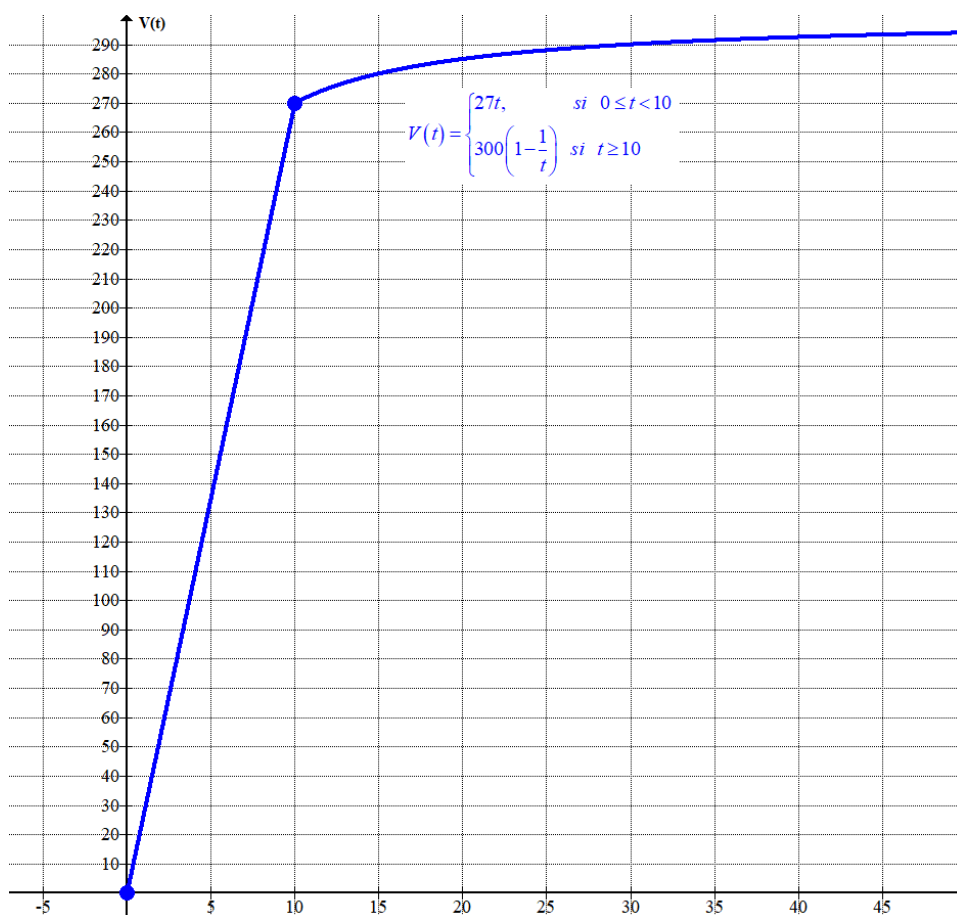
- b) Realizamos una tabla de valores y representamos la función.

$$0 \leq t < 10$$

t	$V(t) = 27t$
0	0
5	135
9	243

$$t \geq 10$$

t	$V(t) = 300\left(1 - \frac{1}{t}\right)$
10	270
20	285
30	290



c) Como $V(5) = 27 \cdot 5 = 135$ las palabras que aprende son 135.

Se observa en la gráfica que la función al principio crece muy rápido (con el aumento de horas de ejercitación de 0 a 10 el número de palabras aprendidas aumenta rápido), pero a partir de 10 horas el aumento de palabras es muy lento. Calculamos el límite de $V(t)$ cuando t tiende a $+\infty$ para obtener ese número máximo de palabras que se pueden aprender.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 300\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 300\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = 300(1 - 0) = 300$$

El máximo de palabras que se puede retener con este nuevo método es de 300 palabras.

d) De 0 a 10 la función crece alcanzando como valor más alto 270. A partir de $t = 10$ sigue creciendo la función. Averiguamos cuando se alcanzan los 280.

$$V(t) = 280 \Rightarrow 300\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 280 \Rightarrow 300 - \frac{300}{t} = 280 \Rightarrow 20 = \frac{300}{t} \Rightarrow t = \frac{300}{20} = 15$$

Con 15 horas de ejercitación se aprenden 280 palabras nuevas.

3.1. Durante los primeros meses de 2026 las Islas Canarias registraron un número de días con lluvia superior a lo habitual, lo que dio lugar al desbordamiento del 40% de las presas y embalses situadas en los barrancos de las islas.

- a) **(1 punto)** En la provincia de Santa Cruz de Tenerife hay registradas un total de 90 presas/embalses. Si el año que viene vuelve a llover como este año, ¿cuál es la probabilidad de que se desborden entre 30 y 40 presas/embalses?
- b) **(1 punto)** Aparte de las presas/embalses, las islas cuentan con numerosos estanques de tamaño mediano donde se recoge agua para uso agrícola. En una muestra aleatoria de 200 estanques se encontró que 54 de ellos se habían llenado este año hasta su capacidad máxima. Estima la proporción de estanques que no alcanzaron su capacidad máxima este año utilizando un intervalo de confianza al 99%.

- a) Consideramos la variable aleatoria $X = \text{Número de desbordamientos de presas y embalses}$. Esta variable es una binomial donde $n = \text{número de repeticiones} = 90 \text{ presas/embalses}$ y $p = \text{probabilidad de desbordamiento} = 0.40$. $X = B(90, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(30 \leq X \leq 40)$.

Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de la probabilidad pedida usamos una aproximación a una variable Y normal con media $np = 90 \cdot 0.4 = 36$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{90 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \frac{6\sqrt{15}}{5} \approx 4.6476. \quad Y = N\left(36, \frac{6\sqrt{15}}{5}\right). \text{ Esta aproximación es buena}$$

pues $np = 36 > 5$ y $nq = 90 \cdot 0.6 = 54 > 5$.

$$P(30 \leq X \leq 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(29.5 < Y < 40.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 36}{6\sqrt{15}/5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{29.5 - 36}{6\sqrt{15}/5} < Z < \frac{40.5 - 36}{6\sqrt{15}/5}\right) = P(-1.4 < Z < 0.97) =$$

$$= P(Z < 0.97) - P(Z < -1.4) = P(Z < 0.97) - P(Z > 1.4) =$$

$$= P(Z < 0.97) - [1 - P(Z < 1.4)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.834 - 1 + 0.9192 = \boxed{0.7532}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8314	0.8340
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418

b) Tamaño de la muestra = $n = 200$. La proporción de embalses que no alcanzaron su capacidad máxima = $\frac{200 - 54}{200} = 0.73$.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2.5	0,9939	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.575 \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{200}} \approx 0.081$$

El intervalo de confianza es

$$(p - Error, p + Error) = (0.73 - 0.081, 0.73 + 0.081) = (0.649, 0.811)$$

La proporción de estanques que no alcanzaron su capacidad máxima este año está entre el 64.9% y el 81.1%, con un nivel de confianza del 99%.

3.2. El Gobierno de Canarias a través del Bono Joven de Alquiler ofrece una ayuda de hasta 250€ al mes durante dos años para pagar el alquiler de la vivienda habitual, siempre que el precio no supere los 900€ en municipios del ámbito A (capitales de provincia y zonas tensionadas), los 750€ en municipios del ámbito B (ciudades medianas) y los 600€ en municipios del ámbito C (resto de municipios). En un estudio realizado por el Consejo de la Juventud de Canarias se ha encontrado que en la actualidad el 45% de los anuncios de alquiler ofrecen viviendas en el ámbito A, el 35% en el ámbito B y el resto en el ámbito C. Asimismo, de acuerdo con los precios ofertados, solo pueden acogerse al Bono Joven un 24% de los alquileres del ámbito A, un 46% de los del B y un 66% de los del C.

- a) **(1 punto)** Se elige un anuncio al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda acogerse a la ayuda del Bono Joven?
- b) **(1 punto)** Sabiendo que un anuncio no permite acogerse al Bono Joven, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un municipio del ámbito A?

Llamamos A, B y C al suceso la vivienda en alquiler pertenece al ámbito A, B o C, respectivamente y D a recibir la ayuda del Bono Joven.

Nos dicen que $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 1 - 0.45 - 0.35 = 0.2$, $P(D/A) = 0.24$, $P(D/B) = 0.46$ y $P(D/C) = 0.66$.

- a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\ &= 0.45 \cdot 0.24 + 0.35 \cdot 0.46 + 0.2 \cdot 0.66 = \boxed{0.401} \end{aligned}$$

- b) Debemos calcular $P(A/\bar{D})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(A/\bar{D}) &= \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A)P(\bar{D}/A)}{1 - P(D)} = \frac{P(A)[1 - P(D/A)]}{1 - P(D)} = \\ &= \frac{0.45 \cdot [1 - 0.24]}{1 - 0.401} = \boxed{\frac{342}{599} \approx 0.571} \end{aligned}$$

4.1 Una empresa informática fabrica placas base de tres categorías: Lite, Estándar y Gaming. El coste de producción por unidad de cada categoría es de 50, 80 y 110 euros respectivamente, con precios de venta al público (antes de impuestos) de 75, 120 y 190 euros. Un cliente ha realizado un pedido que incluye placas de las tres categorías, y en el que las placas Gaming representan una quinta parte del total. La empresa ha gastado un total de 12 350€ en la fabricación de este pedido. Por su parte, el cliente ha pagado 20 758 €, cantidad que incluye el precio de venta más el 7% de IGIC aplicado sobre dicho precio.

- a) **(1,5 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones para encontrar la composición del pedido.
 b) **(1 punto)** ¿Cuántas placas de cada tipo incluye el pedido?
 c) **(0,5 puntos)** La mano de obra supone un 70% del coste de fabricación de las placas. Del importe destinado a mano de obra, el 15 % se retiene e ingresa en Hacienda en concepto de IRPF de los trabajadores. Asimismo, el impuesto sobre sociedades asciende al 23 % del importe de los beneficios obtenidos en esta operación (precio de venta sin IGIC menos coste). Determina el importe total de los tributos asociados a esta operación (IGIC + IRPF retenido + Impuesto de Sociedades) y calcula qué porcentaje representa sobre la cantidad final pagada por el cliente.

- a) Llamamos “x” al número de placas Lite del pedido, “y” al número de placas Estándar y “z” al número de placas Gaming.

La empresa ha gastado un total de 12 350€ en la fabricación de este pedido →

$$50x + 80y + 110z = 12350$$

El cliente ha pagado 20 758 €, cantidad que incluye el precio de venta más el 7% de IGIC aplicado sobre dicho precio → $1.07(75x + 120y + 190z) = 20758$.

Las placas Gaming representan una quinta parte del total → $z = \frac{1}{5}(x + y + z)$.

Reunimos estas ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 80y + 110z = 12350 \\ 1.07(75x + 120y + 190z) = 20758 \\ z = \frac{1}{5}(x + y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y + 11z = 1235 \\ 75x + 120y + 190z = \frac{20758}{1.07} = 19400 \\ 5z = x + y + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 8y + 11z = 1235 \\ \Rightarrow 15x + 24y + 38z = 3880 \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 8y + 11z = 1235 \\ 15x + 24y + 38z = 3880 \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 15x + 24y + 38z = 3880 \\ -15x - 24y - 33z = -3705 \\ \hline 5z = 175 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} 5x + 8y + 11z = 1235 \\ \Rightarrow 5z = 175 \Rightarrow \boxed{z = \frac{175}{5} = 35} \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y + 11 \cdot 35 = 1235 \\ x + y - 4 \cdot 35 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y = 850 \\ x + y = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y = 850 \\ x = 140 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 5(140 - y) + 8y = 850 \Rightarrow 700 - 5y + 8y = 850 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 3y = 150 \Rightarrow \boxed{y = 50} \Rightarrow \boxed{x = 140 - 50 = 90}
 \end{aligned}$$

En el pedido se incluyen 90 placas Lite, 50 Estándar y 35 Gaming.

- c) La mano de obra supone un 70% del coste de fabricación de las placas $\rightarrow 0.70 \cdot 12350 = 8645$ €
gasta la empresa en mano de obra.

El 15 % del coste de la mano de obra se retiene e ingresa en Hacienda en concepto de IRPF de los trabajadores $\rightarrow 0.15 \cdot 8645 = 1296.75$ euros en IRPF.

El precio de venta con IGIC del 7% es de 20758 €. El precio de venta sin IGIC es $\frac{20758}{1.07} = 19400$ euros.

Los beneficios obtenidos en esta operación (precio de venta sin IGIC menos coste) son $19400 - 12350 = 7050$ €.

El impuesto sobre sociedades asciende al 23 % del importe de los beneficios obtenidos $\rightarrow 0.23 \cdot 7050 = 1621.5$ €.

El IGIC que se ha pagado vale $20758 - 19400 = 1358$ €.

Resumiendo: Se han pagado 1296.75 € de IRPF, 1358 € de IGIC y 1621.5 € de impuesto de sociedades. Esto supone un total de $1296.75 + 1358 + 1621.5 = 4276.25$ €.

El cliente pagó 20758 € y los impuestos tienen un importe de 4276.25 €. Los impuestos suponen un $\frac{4276.25}{20758} \approx 0.206 = 20.6\%$ de lo que ha pagado el cliente.

4.2 Una empresa organiza excursiones nocturnas a las Cañadas del Teide para observar el cielo. Atendiendo a las condiciones de su flota de guaguas y al personal disponible, la empresa ofrece dos tipos de excursiones: el tipo A, con 75 plazas básicas (solo transporte) y 100 plazas “estrella” (con un guía especializado en astronomía), y el tipo B, también con 75 plazas básicas y solo 50 plazas estrella. El beneficio que reporta cada tipo de excursión es de 240€ para las del tipo A y de 180€ para las del tipo B. Para la campaña de verano se pueden ofertar, como mucho, un total de 3750 plazas básicas y 4000 plazas estrella. Asimismo, de acuerdo con la experiencia de otros años, el número de excursiones tipo A debe ser menor o igual que el doble de excursiones del tipo B. La empresa desea maximizar su beneficio.

- a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente.
 b) **(1.5 puntos)** Representa la región factible y determina cuántas excursiones del tipo A y cuántas del tipo B deberían hacerse para obtener el beneficio máximo.
 c) **(0.5 puntos)** Supongamos que finalmente se realizan 28 excursiones del tipo A y 14 del tipo B, y que con respecto a la previsión inicial el beneficio que reporta cada tipo de excursión se incrementa en un 10% para las del tipo A y en un 15% para las del tipo B. ¿Cuál es el beneficio final que obtiene la empresa en este caso?

- a) Llamamos x = número de excursiones tipo A e y = número de excursiones tipo B. Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Plazas básicas	Plazas estrella	Beneficio
Nº excursiones A (x)	$75x$	$100x$	$240x$
Nº excursiones B (y)	$75y$	$50y$	$180y$
	$75x + 75y$	$100x + 50y$	$240x + 180y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 240x + 180y$ sometidos a las restricciones siguientes.

Para la campaña de verano se pueden ofertar, como mucho, un total de 3750 plazas básicas y 4000 plazas estrella $\rightarrow 75x + 75y \leq 3750$; $100x + 50y \leq 4000$

El número de excursiones tipo A debe ser menor o igual que el doble de excursiones del tipo B $\rightarrow x \leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 75x + 75y \leq 3750 \\ 100x + 50y \leq 4000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$$x + y = 50$$

$$2x + y = 80$$

$$x = 2y$$

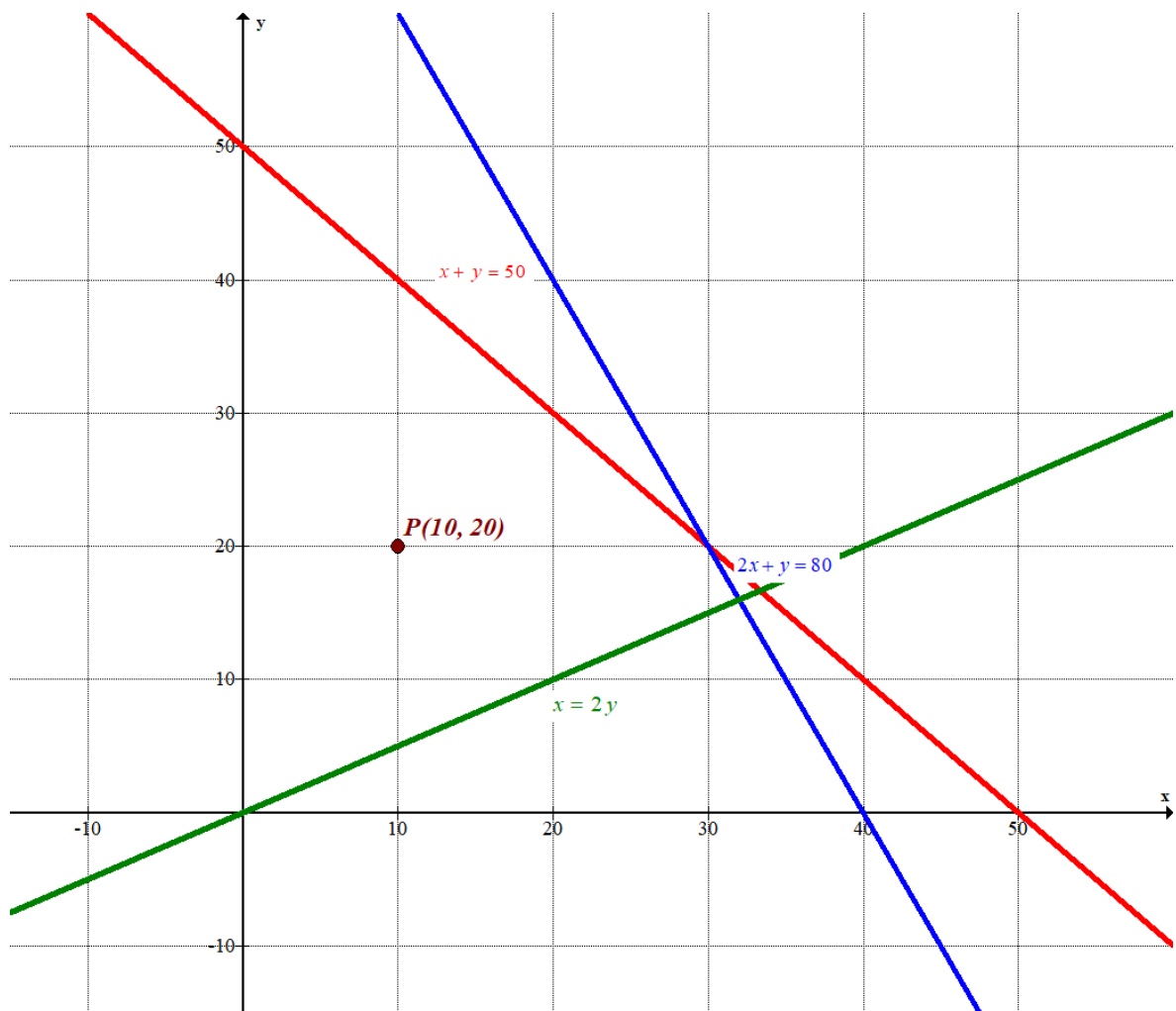
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 50 - x$
0	50
30	20
50	0

x	$y = 80 - 2x$
20	40
32	16
30	20

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
32	16
40	20

Primer
cuadrante



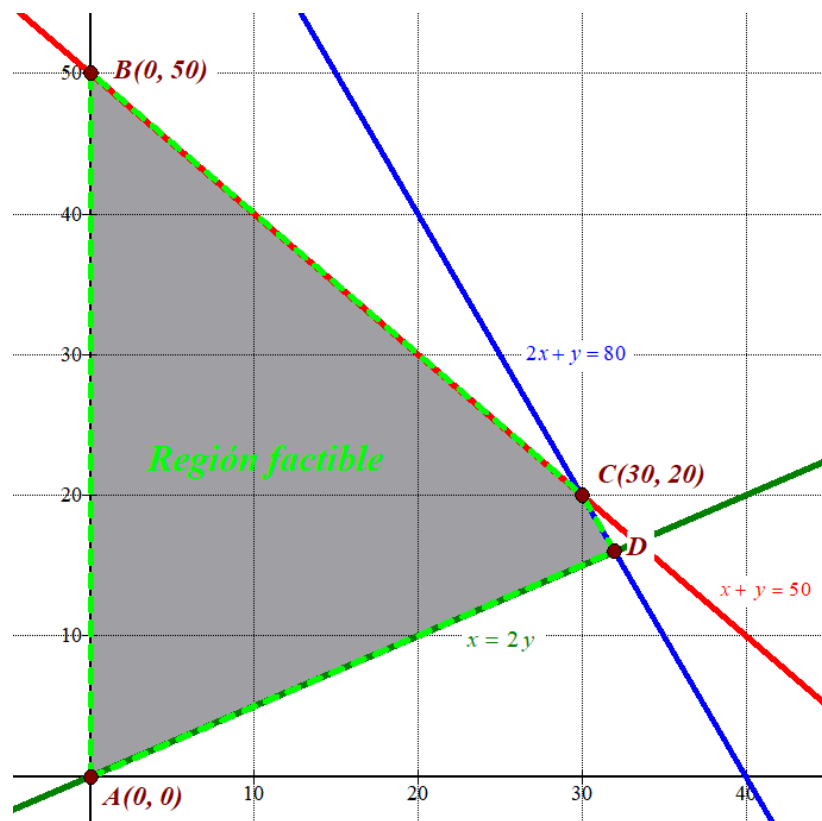
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 20)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 50 \\ 2 \cdot 10 + 20 \leq 80 \\ 10 \leq 2 \cdot 20 \\ 10 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 2y + y = 80 \Rightarrow 5y = 80 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow x = 2 \cdot 16 = 32 \Rightarrow \boxed{D(32, 16)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 240x + 180y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 240 \cdot 0 + 180 \cdot 50 = 9000$$

$$C(30, 20) \rightarrow B(30, 20) = 240 \cdot 30 + 180 \cdot 20 = 10800 \text{ Máximo}$$

$$D(32, 16) \rightarrow B(32, 16) = 240 \cdot 32 + 180 \cdot 16 = 10560$$

El beneficio máximo es de 10 800 € y se consigue en el vértice $C(30, 20)$, que significa que deben hacerse 30 excursiones tipo A y 20 tipo B para conseguir un beneficio máximo de 10800 euros.

- c) Si aumentan un 10% el beneficio de la excursión de tipo A el nuevo beneficio es de $1.1 \cdot 240 = 264$ euros. Si aumentan un 15% el beneficio de cada excursión de tipo B el nuevo beneficio es de $1.15 \cdot 180 = 207$ euros.

Con 28 excursiones del tipo A y 14 del tipo B se obtiene un beneficio de

$$B(28, 14) = 264 \cdot 28 + 207 \cdot 14 = 10290$$

El beneficio es de 10290 euros.



PAU Extraordinaria 2025
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2024–2025

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CC SS (4)

Convocatoria:

Instrucciones: La pregunta 1 es **obligatoria**. Se deberá además resolver un máximo de 3 preguntas eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €:

- a) Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**
- b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**
- c) Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

2A. En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.

- a) Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**
- b) Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**
- c) De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

2B. Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

- a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**
- b) Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**
- c) Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**

3A. Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t) = \begin{cases} 12 - t(t-2), & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t+12}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses.

- (a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**
- (b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**
- (c) Dibujar la gráfica de la función $A(t)$. A la vista de la información proporcionada por la función $A(t)$, y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

3B. El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje x y de 0 a 90 en el eje y . La silueta del lago sigue la función

$$y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70 \text{ (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta } y = x + 10$$

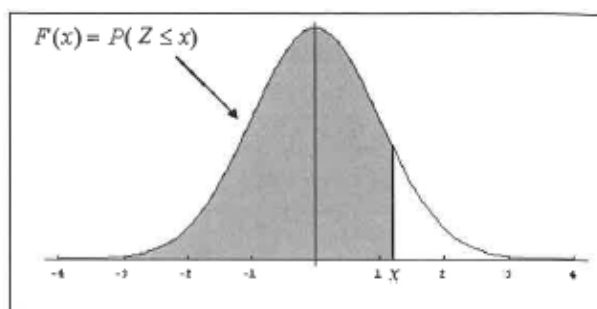
- a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**
- b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**
- c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m², la zona de flores 180 €/m² y la zona de césped 110 €/m². **(0,75 puntos)**

4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.
- b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
- c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

4B. En la cafetería “*Desayuna como un mencey*” ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
- b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €:

- Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**
- Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**
- Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

X = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. $X = N(\mu, 250)$.

a) La muestra es de tamaño $n = 625$ trabajadores. La media muestral es $\bar{x} = 1480$ €

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} = 19.6 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error) = (1480 - 19.6, 1480 + 19.6) = (1460.4, 1499.6)$$

b) Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9923

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} < 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 250 < 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{581.25}{15} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left(\frac{581.25}{15} \right)^2 \Rightarrow \boxed{n > 1501.5625}$$

El tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir es de 1502 trabajadores.

c) X = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. $X = N(1480, 250)$.

Calculamos $P(X \geq 1500)$.

$$P(X \geq 1500) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{1500 - 1480}{250}\right) = P(Z \geq 0.08) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.08) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5319 = \boxed{0.4681}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5238	0.5276	0.5319
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714

La probabilidad de que un trabajador gane más de 1500 € es de 0.4681. Si se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 € vale $0.4681 \cdot 0.4681 = 0.2191$.

2A. En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**
- Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**
- De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

a) La proporción muestral de los cruceristas alemanes que visitan las Islas Canarias es

$$p = \frac{34}{196} = \frac{17}{98} \approx 0.1735.$$

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9923

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 98 - 17^2}{98 \cdot 196}} \approx 0.0629$$

El error máximo en la estimación sería de 0.0629.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1735 - 0.0629, 0.1735 + 0.0629) = (0.1106, 0.2364)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Utilizamos la fórmula del error para despejar “n” siendo el error de 0.02.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2 = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n} \Rightarrow n = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{\left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2} = 1377
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1377 cruceristas.

- c) Llamamos X = Número de cruceristas alemanes de un grupo de 5. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 5$ y $p = \frac{17}{98}$. $X = B\left(5, \frac{17}{98}\right)$

Debemos calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{17}{98}\right)^0 \cdot \left(\frac{81}{98}\right)^5 = 1 - \left(\frac{81}{98}\right)^5 = 0.5724$$

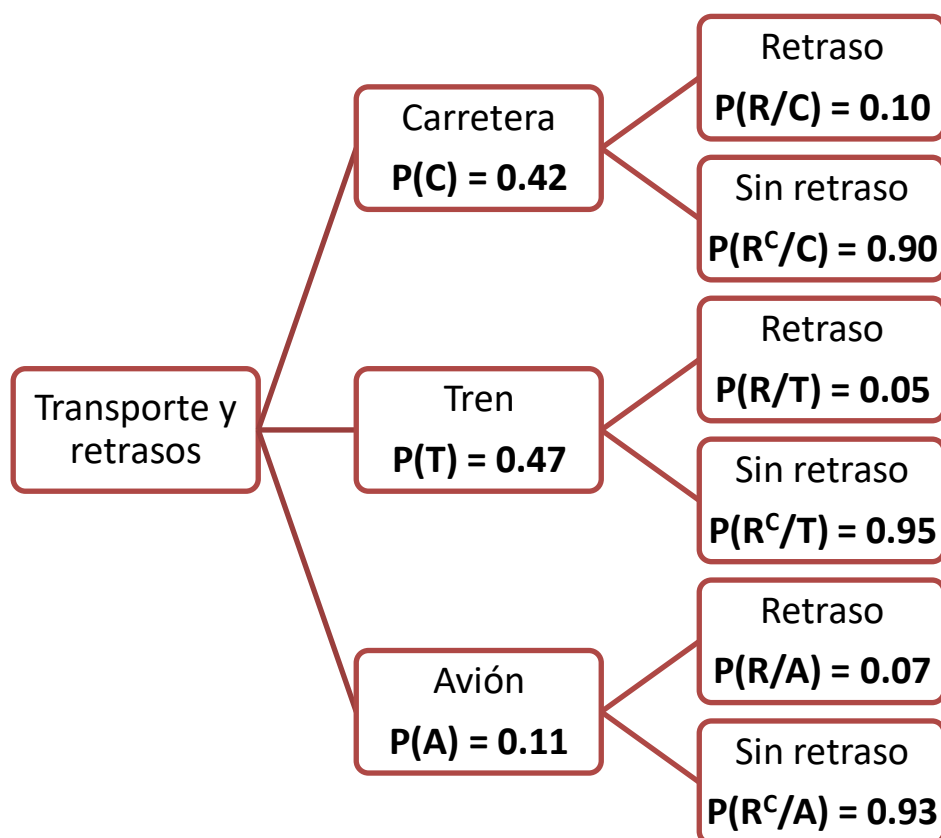
La probabilidad de que en un grupo de 5 cruceristas haya al menos un alemán es de 0.5724.

2B. Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**

c) Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**



b) Nos piden calcular $P(R^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(R^c) &= P(C)P(R^c/C) + P(T)P(R^c/T) + P(A)P(R^c/A) = \\
 &= 0.42 \cdot 0.9 + 0.47 \cdot 0.95 + 0.11 \cdot 0.93 = \boxed{0.9268}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(T/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)P(R/T)}{1 - P(R^c)} = \frac{0.47 \cdot 0.05}{1 - 0.9268} = \boxed{\frac{235}{732} = 0.321}$$

3A. Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t) = \begin{cases} 12 - t(t - 2), & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t + 12}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses.

- (a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**
- (b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**
- (c) Dibujar la gráfica de la función $A(t)$. A la vista de la información proporcionada por la función $A(t)$, y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

- a) En el intervalo $[0, 3)$ la función tiene la expresión $A(t) = 12 - t(t - 2) = 12 - t^2 + 2t$, que es una función polinómica y por tanto es continua y derivable.

En el intervalo $(3, 6]$ la función tiene la expresión $A(t) = \frac{5t + 12}{3} = \frac{5}{3}t + 4$, que es una función

polinómica y por tanto es continua y derivable.

Estudiamos la continuidad en $t = 3$.

$$\left. \begin{aligned} A(3) &= 12 - 3(3 - 2) = 9 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} A(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{5t + 12}{3} = \frac{15 + 12}{3} = 9 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} A(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 12 - t(t - 2) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 3^+} A(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} A(t) = A(3) = 9$$

La función es continua en $t = 3$. La función es continua en $[0, 6]$.

La derivada de la función en $[0, 3) \cup (3, 6]$ es $A'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t < 3 \\ \frac{5}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$.

Comprobamos si la función es derivable en $t = 3$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} A'(3^-) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} A'(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} -2t + 2 = -2 \cdot 3 + 2 = -4 \\ A'(3^+) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} A'(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'(3^-) = -4 \neq \frac{5}{3} = A'(3^+)$$

La función no es derivable en $t = 3$. La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 6]$.

- b) La derivada de la función es $A'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t < 3 \\ \frac{5}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$. Averiguamos cuando se anula la

derivada de la función.

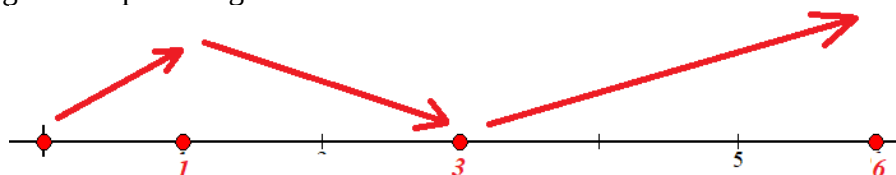
$$A'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 \rightarrow -2t = -2 \rightarrow \boxed{t=1} \in [0,3) \\ \frac{5}{3} = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t=1$ y $t=3$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t=0.5$ y la derivada vale $A'(0.5) = -2 \cdot 0.5 + 2 = 1 > 0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ consideramos $t=2$ y la derivada vale $A'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,6)$ la derivada es $A'(t) = \frac{5}{3} > 0$. La función crece en $(3,6)$.

La función crece en $[0,1) \cup (3,6]$ y decrece en $(1,3)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función alcanza un máximo relativo en $t=1$ y un mínimo relativo en $t=3$.

Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 12 - 0(0-2) = 12 \\ A(1) &= 12 - 1(1-2) = 13 \\ A(3) &= 9 \text{ Mínimo} \\ A(6) &= \frac{5 \cdot 6 + 12}{3} = 14 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

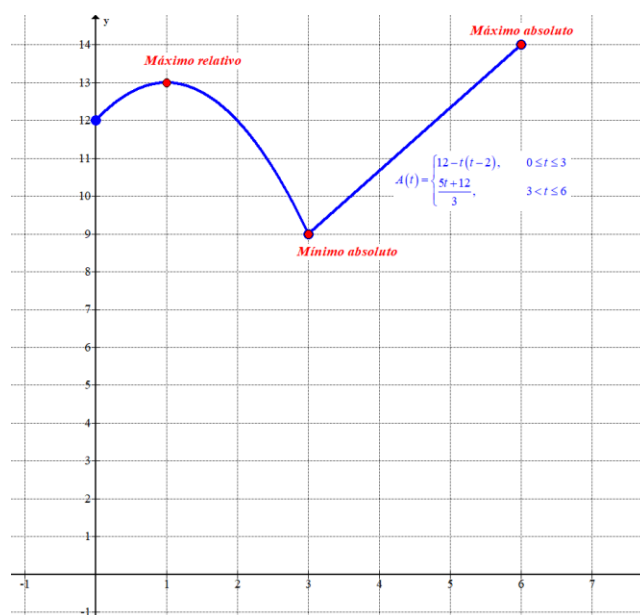
El valor mínimo de unidades vendidas se produce a los 3 meses y es de 9000 unidades.

El valor máximo de unidades vendidas se produce a los 6 meses y es de 14000 unidades.

- c) Representamos la gráfica de la función usando todos los datos obtenidos.

A la vista de la gráfica las ventas crecieron durante el primer mes, lo que indica que se hizo una campaña de publicidad previa al lanzamiento.

Como las ventas bajaron en los siguientes meses tuvo que realizar un refuerzo para que las ventas volvieran a crecer a partir del tercer mes.



3B. El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje x y de 0 a 90 en el eje y . La silueta del lago sigue la función $y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70$ (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta $y = x + 10$

- a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**
 b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**
 c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m², la zona de flores 180 €/m² y la zona de césped 110 €/m². **(0,75 puntos)**

- a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

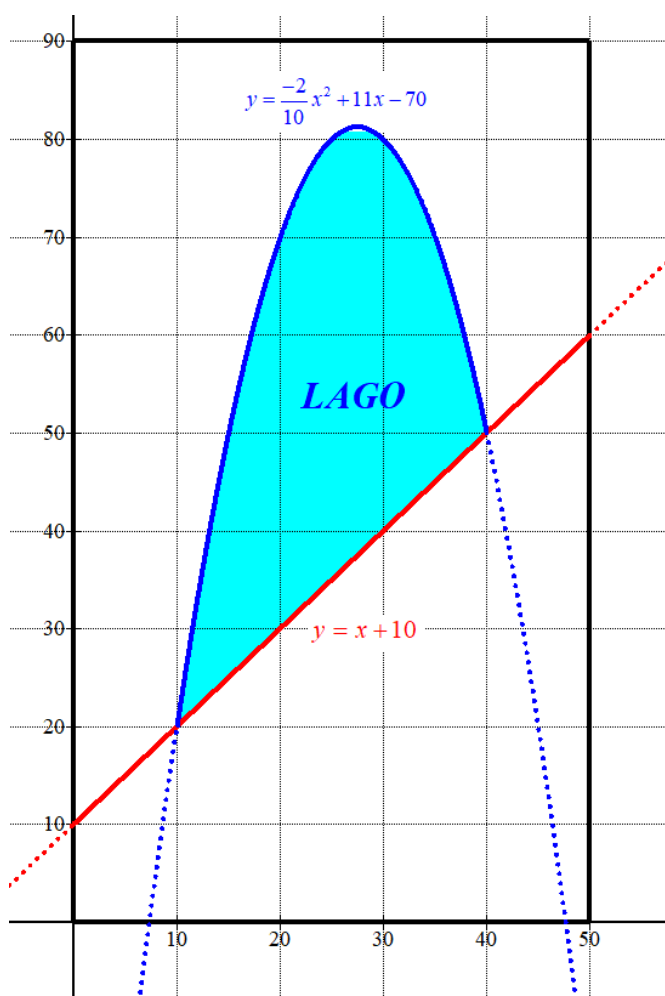
$$\frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70 = x + 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}x^2 + 10x - 80 = 0 \Rightarrow x^2 - 50x + 400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 400}}{2} = \frac{50 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{50+30}{2} = 40 = x \\ \frac{50-30}{2} = 10 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

x	$y = x + 10$
0	10
10	20
40	50
50	60

x	$y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70$
0	-70
10	20
40	50
50	-20

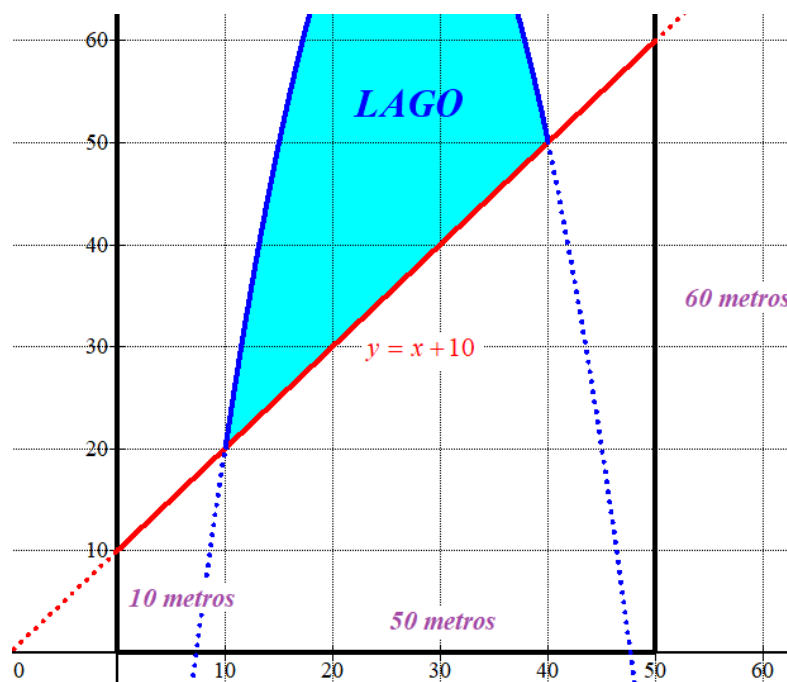


- b) Hallamos la superficie del lago calculando la integral definida entre 10 y 40 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Superficie} &= \int_{10}^{40} \left(\frac{-1}{5}x^2 + 11x - 70 - (x + 10) \right) dx = \int_{10}^{40} \left(\frac{-1}{5}x^2 + 10x - 80 \right) dx = \\ &= \left[\frac{-x^3}{15} + 5x^2 - 80x \right]_{10}^{40} = \left[\frac{-40^3}{15} + 5 \cdot 40^2 - 80 \cdot 40 \right] - \left[\frac{-10^3}{15} + 5 \cdot 10^2 - 80 \cdot 10 \right] = \\ &= \frac{-64000}{15} + 8000 - 3200 + \frac{1000}{15} - 500 + 800 = \boxed{900 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

La zona dedicada al lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados.

- c) El parque tiene forma rectangular y una superficie de $90 \cdot 50 = 4500$ metros cuadrados. El sendero lo divide en dos partes. Calculamos la superficie de la parte inferior.



$$\text{Superficie} = \frac{60+10}{2} \cdot 50 = 1750 \text{ metros cuadrados.}$$

Esta parte del parque situada al sur del sendero se cubre con césped que cuesta a 110 €/m^2 , lo que supone un coste de $110 \cdot 1750 = 192500 \text{ €}$.

El lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados cuya construcción cuesta a 1000 €/m^2 , lo que supone un coste de $900 \cdot 1000 = 900000 \text{ €}$.

La parte norte fuera del lago tiene una superficie de $4500 - 900 - 1750 = 1850$ metros cuadrados. Esta zona la cubrimos con flores a un precio de 180 €/m^2 , lo que supone un coste de $180 \cdot 1850 = 333000 \text{ €}$.

El coste total de la renovación es $192500 + 900000 + 333000 = 1.425.500 \text{ €}$.

4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.
 b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
 c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

- c) Llamamos x = número de aparatos A que repara e y = número de aparatos B que repara. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº componentes	Horas de trabajo	Beneficios
Nº de aparatos A (x)	$3x$	$4x$	$80x$
Nº de aparatos B (y)	$5y$	$6y$	$130y$
TOTAL	$3x + 5y$	$4x + 6y$	$80x + 130y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 80x + 130y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

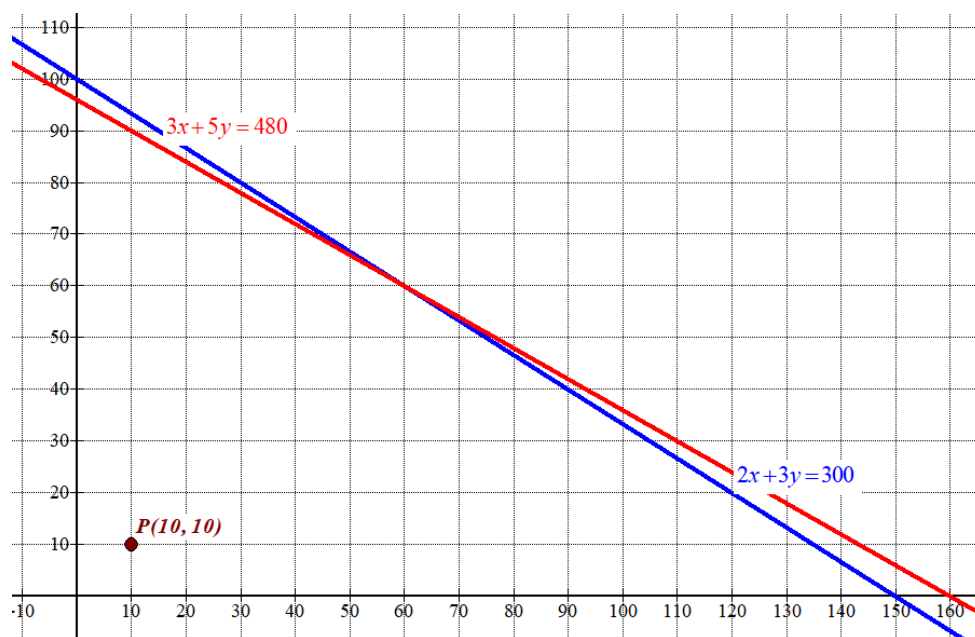
“El taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo” $\rightarrow 3x + 5y \leq 480; 4x + 6y \leq 600$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 4x + 6y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- d) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x + 5y = 480$		$2x + 3y = 300$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = \frac{480 - 3x}{5}$	x	$y = \frac{300 - 2x}{3}$	
0	96	0	100	Primer cuadrante
60	60	60	60	
160	0	150	0	



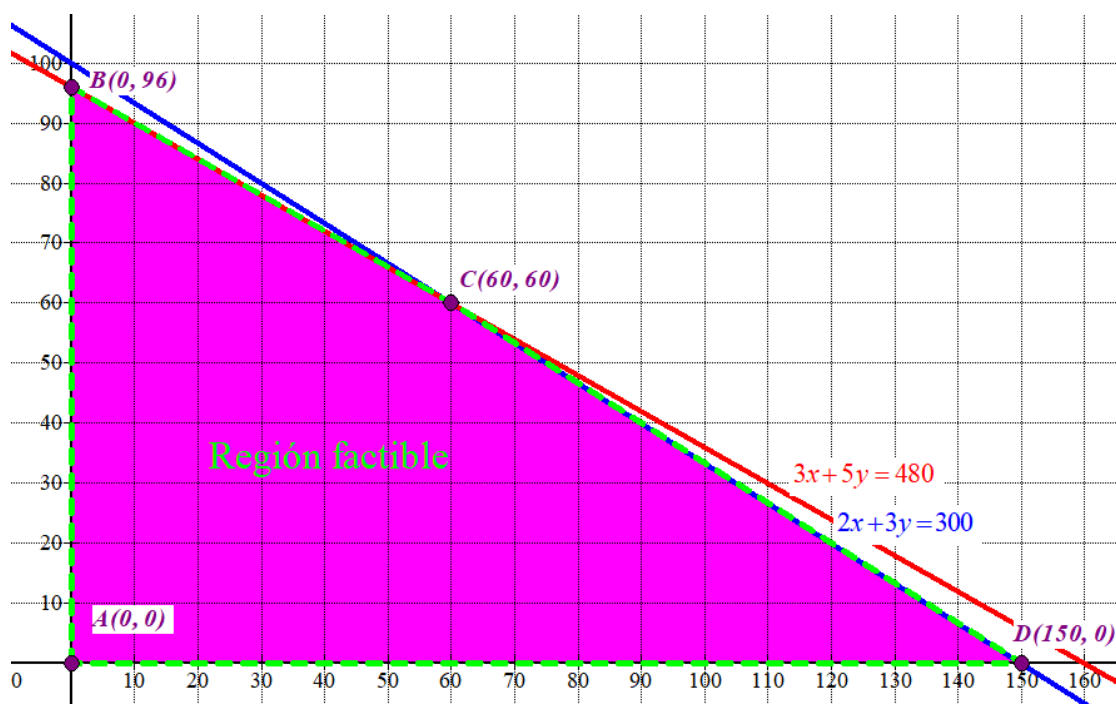
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 50 \leq 480 \\ 20 + 30 \leq 300 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las restricciones. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas $A(0, 0)$, $B(0, 96)$, $C(60, 60)$ y $D(150, 0)$.

Las coordenadas del vértice C las obtenemos resolviendo el sistema siguiente.

$$\left. \begin{array}{l} -2x \rightarrow 3x + 5y = 480 \\ 3x \rightarrow 2x + 3y = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6x - 10y = -960 \\ 6x + 9y = 900 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\hline -y = -60 \Rightarrow y = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 300 = 480 \Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow \boxed{C(60, 60)}$$

e) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 80x + 130y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 96) \rightarrow B(0, 96) = 80 \cdot 0 + 130 \cdot 96 = 12480$$

$$C(60, 60) \rightarrow B(60, 60) = 80 \cdot 60 + 130 \cdot 60 = \mathbf{12600 \text{ Máximo}}$$

$$D(150, 0) \rightarrow B(150, 0) = 80 \cdot 150 + 130 \cdot 0 = 12000$$

El máximo beneficio se consigue en el vértice $C(60, 60)$.

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 12600 euros con la reparación de 60 aparatos tipo A y otros 60 del tipo B.

4B. En la cafetería “Desayuna como un mencey” ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**

a) Llamamos “x” al precio de un batido de frutas, “y” al precio de un yogur con cereales y “z” al precio de una tortita.

“El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros” $\rightarrow 2x + y + z = 12.25$.

“Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% (pagan el 80%) y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros” $\rightarrow 3 \cdot 0.8 \cdot z + 2x = 13.9$

“Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas” $\rightarrow 3x + 3y = 2x + 2y + 2z - 1$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 3 \cdot 0.8 \cdot z + 2x = 13.9 \\ 3x + 3y = 2x + 2y + 2z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \\ y = -x + 2z - 1 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \\ y = -x + 2z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - x + 2z - 1 + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 13.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 13.25 - 3z \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.4z + 2(13.25 - 3z) = 13.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4z + 26.5 - 6z = 13.9 \Rightarrow -3.6z = -12.6 \Rightarrow \boxed{z = \frac{12.6}{3.6} = 3.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13.25 - 3 \cdot 3.5 = 2.75} \Rightarrow \boxed{y = -2.75 + 2 \cdot 3.5 - 1 = 3.25}$$

Un batido de frutaas cuesta 2.75 €, un yogur con cereales vale 3.25 € y por una tortita debemos pagar 3.5 €.



PAU Ordinaria 2025
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2024–2025

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CC SS II

Convocatoria: JUNIO_VIERNES_6

Instrucciones: La pregunta 1 es **obligatoria**. Además, **elegir un máximo de 3 preguntas**, eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.
- a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**
- b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**
- c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.

- a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**
- b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**
- c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

- a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**
- b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**
- c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 - 96t + 736, & 0 \leq t < 4 \\ t^3 - 30t^2 + 288t, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

- a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en $t=4$? **(0,75 puntos)**
- b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? **(0,75 puntos) (1 punto)**
- c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t=6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y = 3x^2 - 5x + 3, \quad y = x + 3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

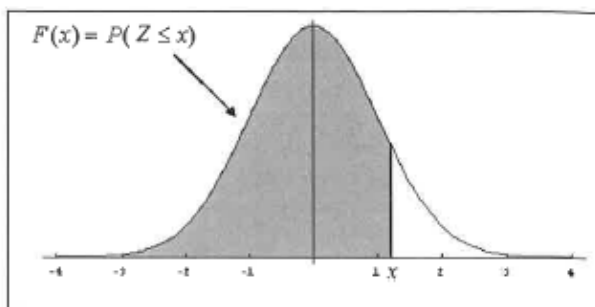
- a) Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**
- b) ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**
- c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m². Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m², siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m². A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

- a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**
- b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
- c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
- b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.
- a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**
- b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**
- c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad. $X = N(\mu, \sigma)$.

- a) La muestra es de tamaño $n = 400$ pisos.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{1174,25 + 1225,75}{2} = 1200$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1225,75 - 1174,25}{2} = 25.75$$

Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9955	0.9956

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 25.75 = 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \Rightarrow \frac{25.75}{2.575} = \frac{\sigma}{20} \Rightarrow \sigma = 200$$

La desviación típica tiene un valor de $\sigma = 200$ euros.

- b) Y = Los gastos de gestión en el alquiler de un piso de dos habitaciones de una gran ciudad. Como la desviación típica del precio del alquiler es 200 entonces la desviación típica de los gastos de gestión es el 10%: $0.10 \cdot 200 = 20$. $Y = N(\mu, 20)$.

La muestra es de tamaño $n = 400$ pisos.

La media muestral es el 10% de la muestra de la variable X: $\bar{y} = 0.10 \cdot \bar{x} = 0.10 \cdot 1200 = 120$

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9432	0.9445	0.9457	0.9469	0.9495	0.9505

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{400}} = 1.645$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error) = (120 - 1.645, 120 + 1.645) = (118.355, 121.645)$$

- c) X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad.

La media muestral es $\bar{x} = 1200$. $X = N(1200, 200)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (1200) y con desviación típica $\sigma = \frac{200}{\sqrt{25}} = 40$. $\bar{X}_{25} = N(1200, 40)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{25} \geq 1250)$.

$$P(\bar{X}_{25} \geq 1250) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{1250 - 1200}{40}\right) = P(Z \geq 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

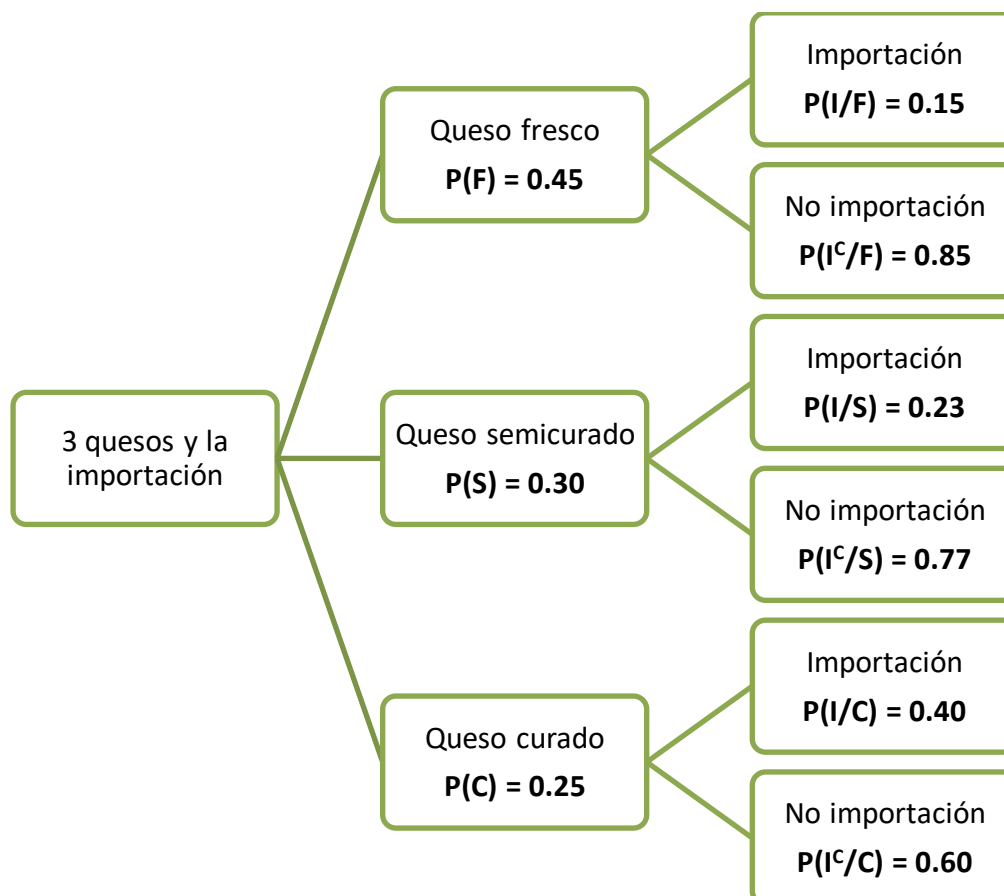
2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.

a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**

c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

a) Llamamos F a “Queso fresco”, S a “Queso semicurado”, C a “Queso curado” e I a “Queso de Importación”.



b) Nos piden calcular $P(I^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(I^c) &= P(F)P(I^c/F) + P(S)P(I^c/S) + P(C)P(I^c/C) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.85 + 0.3 \cdot 0.77 + 0.25 \cdot 0.6 = \boxed{0.7635}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(C/I)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C)P(I/C)}{1 - P(I^c)} = \frac{0.25 \cdot 0.4}{1 - 0.7635} = \boxed{\frac{200}{473} \approx 0.4228}$$

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

- a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**
- b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**
- c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

α) Ηα προπορχι Γν μνεστραλ δε λοσ χλιεντεσ θυε χονσιδεραν θυε εστε νυεπο σιστεμα αψ υδα α ρεδυχιρ ελ τιεμπο δε εσπερα εσ $p = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$.

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{210}} \approx 0.0756$$

El error máximo en la estimación sería de 0.0756.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6667 - 0.0756, 0.6667 + 0.0756) = (0.5911, 0.7423)$$

b) Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Utilizamos la fórmula del error:

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.055} = \sqrt{\frac{2}{9n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2 = \frac{2}{9n} \Rightarrow 9n \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2 = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{9 \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2} \approx 586.53
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 587 clientes.

- c) Llamamos X = Número de clientes de un grupo de 9 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 1/3$.

$$X = B\left(9, \frac{1}{3}\right)$$

Debemos calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\
 &= 1 - \left[\binom{9}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right] = 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right] = \boxed{0.857}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera es de 0.857.

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 - 96t + 736, & 0 \leq t < 4 \\ t^3 - 30t^2 + 288t, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

- a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en $t=4$? **(0,75 puntos)**
 b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? (0,75 puntos) **(1 punto)**
 c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t=6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

a) En el intervalo $[0, 4)$ la función tiene la expresión $f(t) = 24t^2 - 96t + 736$, que es una función polinómica y por tanto es continua.

En el intervalo $(4, 12]$ la función tiene la expresión $f(t) = t^3 - 30t^2 + 288t$, que es una función polinómica y por tanto es continua.

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$f(4) = 4^3 - 30 \cdot 4^2 + 288 \cdot 4 = 736$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} t^3 - 30t^2 + 288t = 736$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} 24t^2 - 96t + 736 = 24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 736 = 736$$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 736 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = 736 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = 736 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = f(4) = 736$$

La función es continua en $t = 4$. La función es continua en $[0, 12]$.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{4\}$ es $f'(t) = \begin{cases} 48t - 96, & 0 \leq t < 4 \\ 3t^2 - 60t + 288, & 4 < t \leq 12 \end{cases}$.

Comprobamos si la función es derivable en $t = 4$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f'(4^-) = \lim_{t \rightarrow 4^-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} 48t - 96 = 48 \cdot 4 - 96 = 96 \\ f'(4^+) = \lim_{t \rightarrow 4^+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} 3t^2 - 60t + 288 = 3 \cdot 4^2 - 60 \cdot 4 + 288 = 96 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(4^-) = f'(4^+) = 96$$

La función es derivable en $t = 4$.

- b) La derivada de la función es $f'(t) = \begin{cases} 48t - 96, & 0 \leq t < 4 \\ 3t^2 - 60t + 288, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

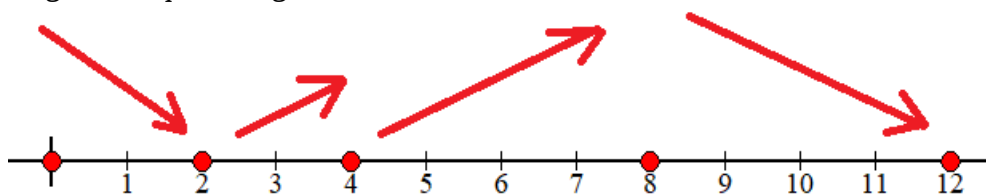
$$f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 48t - 96 = 0 \rightarrow 48t = 96 \rightarrow t = \frac{96}{48} = 2 \in [0, 4) \\ 3t^2 - 60t + 288 = 0 \rightarrow t^2 - 20t + 96 = 0 \rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 96}}{2} = \\ = \frac{20 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{20+4}{2} = 12 \in (4, 12] \\ \frac{20-4}{2} = 8 \in (4, 12] \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores críticos obtenidos, añadiendo el momento de cambio de definición.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 48 \cdot 1 - 96 = -48 < 0$. La función decrece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 48 \cdot 3 - 96 = 48 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 8)$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 + 288 = 63 > 0$. La función crece en $(4, 8)$.
- En el intervalo $(8, 12)$ consideramos $t = 10$ y la derivada vale $f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 600 + 288 = -12 < 0$. La función decrece en $(8, 12)$.

La función decrece en $[0, 2) \cup (8, 12]$ y crece en $(2, 8)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función alcanza un mínimo relativo en $t = 2$ y un máximo relativo en $t = 8$.

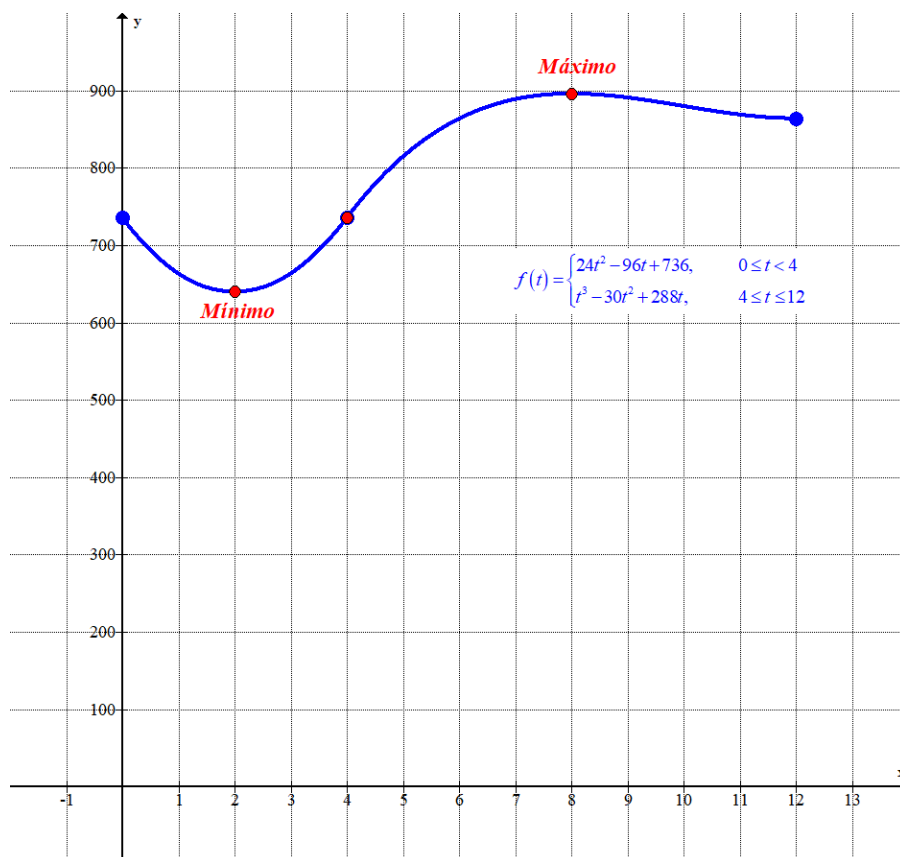
Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 24 \cdot 0^2 - 96 \cdot 0 + 736 = 736 \\ f(2) &= 24 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 736 = 640 \text{ Mínimo} \\ f(8) &= 8^3 - 30 \cdot 8^2 + 288 \cdot 8 = 896 \text{ Máximo} \\ f(12) &= 12^3 - 30 \cdot 12^2 + 288 \cdot 12 = 864 \end{aligned} \right\}$$

El valor mínimo de actividad cerebral se produce a las 2 horas y tiene un valor de $640 \mu V$.

El valor máximo de actividad cerebral se produce a las 8 horas y tiene un valor de $896 \mu V$.

- c) Representamos la gráfica de la función usando todos los puntos de la gráfica obtenidos en los apartados anteriores.



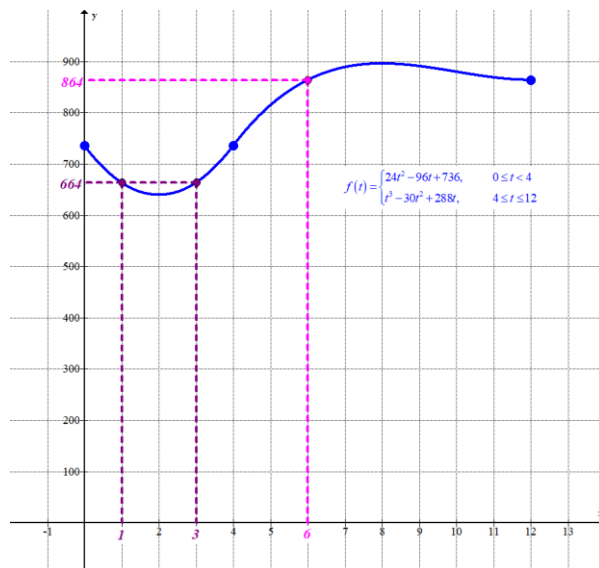
Para $t=6$ la función vale $f(6) = 6^3 - 30 \cdot 6^2 + 288 \cdot 6 = 864$. La actividad cerebral es de 864 microvoltios.

Buscamos cuando antes de la sexta hora la actividad cerebral es $864 - 200 = 664$ micovolitos. En la gráfica de la función se aprecia que este valor se alcanza antes de $t=4$.

$$f(t) = 664 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 24t^2 - 96t + 736 = 664 \Rightarrow 24t^2 - 96t + 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \\ t \in (0, 4) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1 = t \\ \frac{4+2}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Una actividad cerebral de $664 \mu V$ se consigue en la hora 1 y en la hora 3.



3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y = 3x^2 - 5x + 3, \quad y = x + 3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

a) Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**

b) ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**

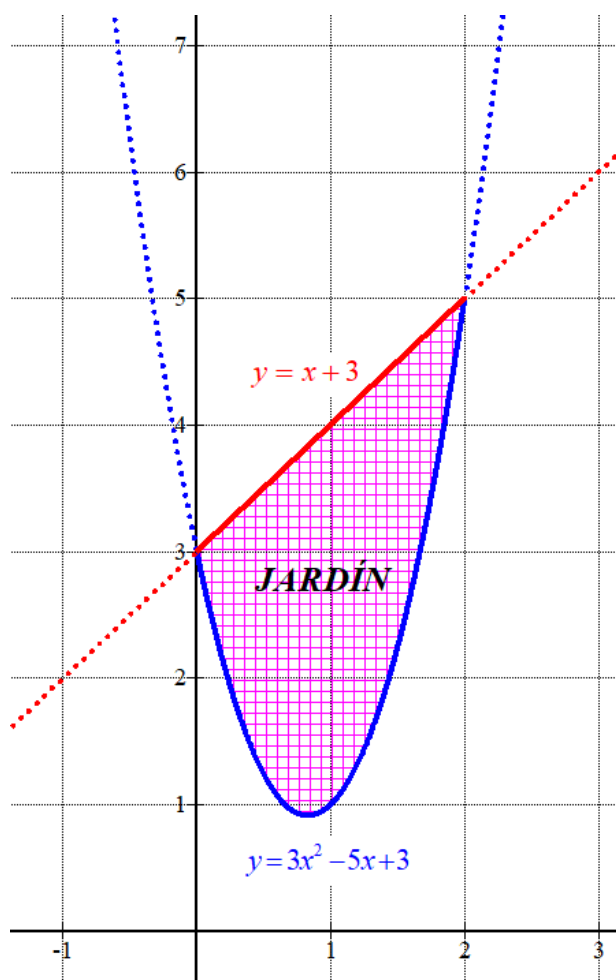
c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m². Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m², siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m². A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$3x^2 - 5x + 3 = x + 3 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

x	$y = 3x^2 - 5x + 3$	x	$y = x + 3$
0	3	0	3
1	1	1	4
2	5	2	5



- b) Hallamos la superficie del jardín calculando la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Superficie} &= \int_0^2 x + 3 - (3x^2 - 5x + 3) dx = \int_0^2 x + 3 - 3x^2 + 5x - 3 dx = \\ &= \int_0^2 -3x^2 + 6x dx = \left[-x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = \left[-2^3 + 3 \cdot 2^2 \right] - \left[-0^3 + 3 \cdot 0^2 \right] = -8 + 12 = \boxed{4 m^2} \end{aligned}$$

La zona dedicada al jardín tiene una superficie de 4 metros cuadrados.

- c) El césped artificial necesario tiene un coste de $25,99 \text{ €/m}^2 \cdot 4 = 103.96 \text{ €}$.

El material adicional cuesta $18 \cdot 4 = 72 \text{ €}$.

Todos los materiales cuestan $103.96 + 72 = 175.96 \text{ €}$.

El coste de la mano de obra es $20 \cdot 4 = 80 \text{ €}$.

El impuesto cuesta $0.07 \cdot 175.96 + 80 \cdot 0.04 = 15.5172$.

Sumamos el coste del material, la mano de obra y los impuestos para obtener el coste total.

$$175.96 + 80 + 15.5172 = 271.4772 \text{ €}$$

El coste total de la obra es de 271.4772 €.

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

a) Llamamos x = número de discos SATA e y = número de discos SSD.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº ordenadores	Tb	Coste
Nº de discos SATA (x)	$100x$	$9.6x$	$200x$
Nº de discos SSD (y)	$50y$	$1.2y$	$100y$
TOTAL	$100x + 50y$	$9.6x + 1.2y$	$200x + 100y$

La función que deseamos maximizar la capacidad de almacenamiento $C(x, y) = 9.6x + 1.2y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€” $\rightarrow 200x + 100y \leq 4000$.

“Deben conectarse 700 ordenadores” $\rightarrow 100x + 50y \geq 700$.

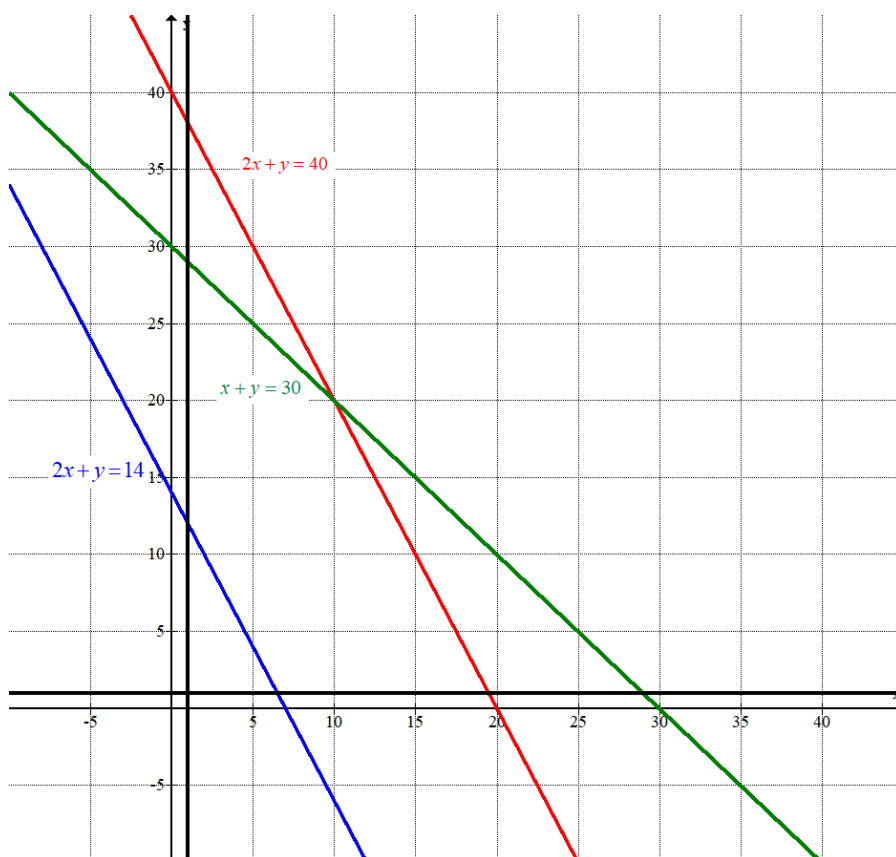
“Será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco” $\rightarrow x + y \geq 30, x \geq 1; y \geq 1$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 100y \leq 4000 \\ 100x + 50y \geq 700 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 40 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

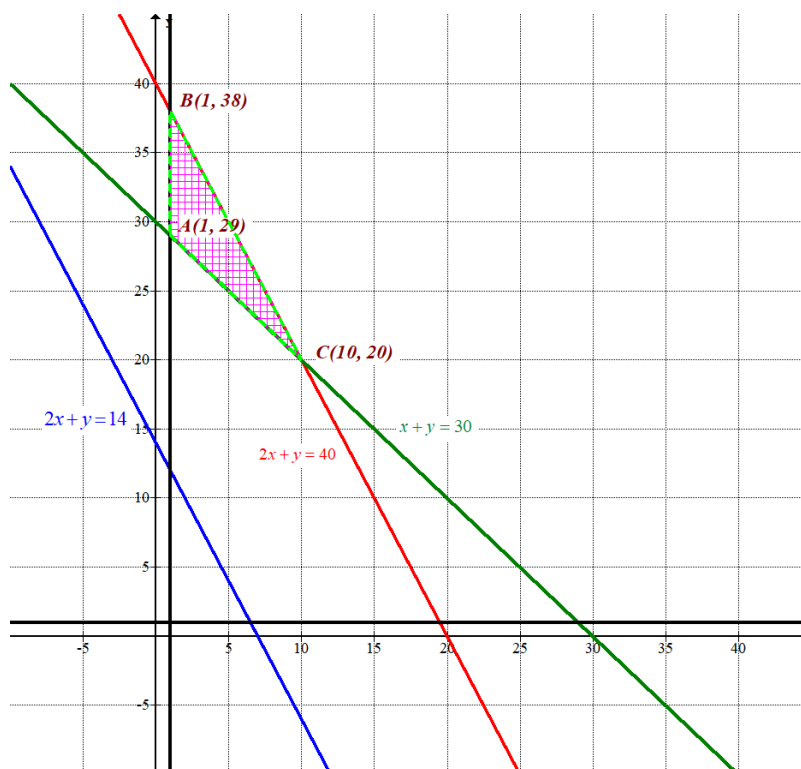
$2x + y = 40$		$2x + y = 14$		$x + y = 30$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 40 - 2x$	x	$y = 14 - 2x$	x	$y = 30 - x$	
0	40	0	14	1	29	Primer cuadrante
10	20	5	4	10	20	
20	0	7	0	29	1	



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 40 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de la recta **roja**, por encima de la recta **azul** y **verde**, a la derecha de la recta vertical negra. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(1, 29), B(1, 38) y C(10, 20).

- c) Valoramos la función capacidad de almacenamiento $C(x, y) = 9.6x + 1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(1, 29) \rightarrow C(1, 29) = 9.6 \cdot 1 + 1.2 \cdot 29 = 44.4$$

$$B(1, 38) \rightarrow C(1, 38) = 9.6 \cdot 1 + 1.2 \cdot 38 = 55.2$$

$$C(10, 20) \rightarrow C(10, 20) = 9.6 \cdot 10 + 1.2 \cdot 20 = \mathbf{120 \text{ Máximo}}$$

El almacenamiento máximo es de 120 Tb y se consigue en el vértice C(10, 20), que significa instalar 10 discos SATA y 20 discos SSD.

La capacidad media es de $\frac{120}{700} = \frac{6}{35}$ Tb por ordenador.

LA RECTA AZUL NO PINTA MUCHO ¡ALGO NO CUADRA!

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**

a) Llamamos “x” al número de clientes en SA, “y” al número de clientes en AD y “z” al número de clientes en TI.

“El número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento” $\rightarrow z = 2x$.

“Por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3y$$

“Si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido” $\rightarrow z - 39 = x + y$.

$$\left. \begin{array}{l} z = 2x \\ \text{Reunimos las ecuaciones en un sistema: } 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ 2x - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = y + 39 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(y + 39) = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 78 = 3y \Rightarrow \boxed{78 = y} \Rightarrow \boxed{x = 78 + 39 = 117} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 117 = 234}$$

Hay 117 clientes en Solo Alojamiento, 78 en Alojamiento y Desayuno, 234 en Todo Incluido.



EBAU Extraordinaria 2024
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (4)

Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

- a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)
- b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)
- c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)
- b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)
- c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

- a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)
- b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)
- c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

- a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

- b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 & t \leq 4 \\ \frac{t+111}{5t+3} & t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

- a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)
b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)
c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = -x + 4$.

- a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)
b) Calcula el área. (1 punto)
c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)
b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

- a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)
b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

SOLUCIONES

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

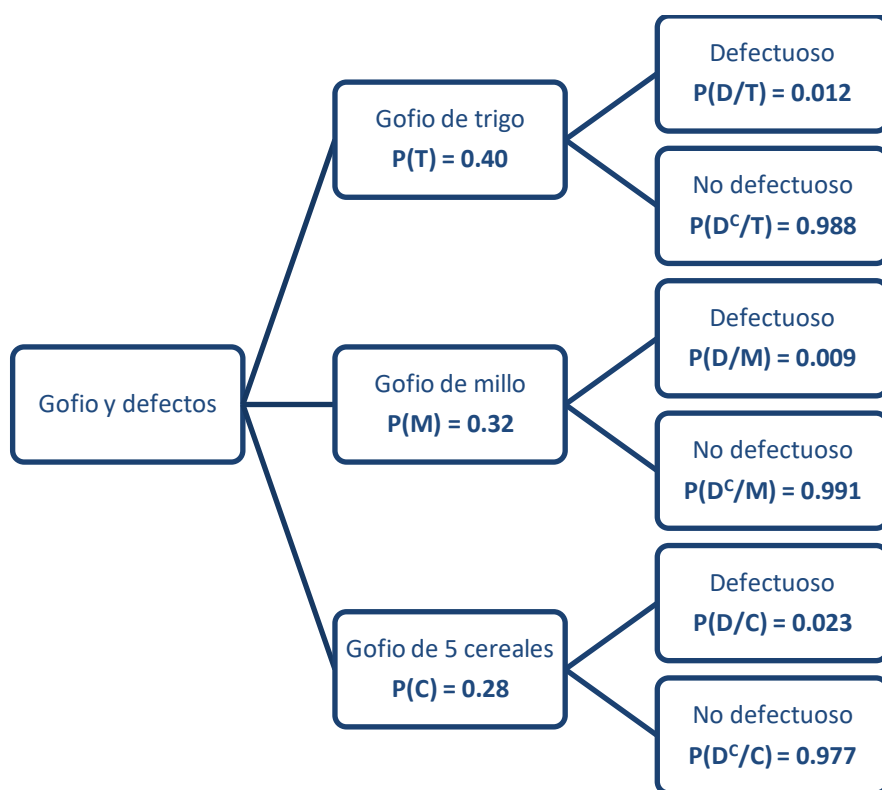
b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos?

(1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo?

(1 punto)

a) Llamamos T al suceso “el gofio es de trigo”, M al suceso “el gofio es de millo”, C al suceso “el gofio es de cinco cereales” y D al suceso “el paquete presenta un defecto”.



b) Nos piden calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D^c) &= P(T)P(D^c/T) + P(M)P(D^c/M) + P(C)P(D^c/C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.988 + 0.32 \cdot 0.991 + 0.28 \cdot 0.977 = \boxed{0.98588}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un paquete no presente defectos es de 0.98588.

c) Nos piden calcular $P(M/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M)P(D/M)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.32 \cdot 0.009}{1 - 0.98588} = \frac{72}{353} \cong 0.204$$

Si el paquete presenta algún defecto la probabilidad de que el gofio sea de millo tiene un valor aproximado de 0.204.

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)
- b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)
- c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos da el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones. $X = N(725, 50)$

Nos piden calcular $P(X \leq 700)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 700) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{700 - 725}{50}\right) = P(Z \leq -0.5) = \\ &= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el precio de alquiler mensual no supere los 700 euros es de 0.3085.

- b) La distribución de la media de los precios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (725 €) y con desviación típica $\sigma = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$ euros.

$$\overline{X}_{25} = N(725, 10).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{25} > 730)$.

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_{25} > 730) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{730 - 725}{10}\right) = P(Z > 0.5) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros es de 0.3085.

- c) Calculamos la probabilidad de que un piso cueste menos de 710 €: $P(X < 710)$.

$$\begin{aligned} P(X < 710) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{710 - 725}{50}\right) = P(Z \leq -0.3) = \\ &= P(Z \geq 0.3) = 1 - P(Z \leq 0.3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6179 = \boxed{0.3821} \end{aligned}$$

Multiplicamos esta probabilidad por 25 y obtenemos $25 \cdot 0.3821 = 9.5525$.

El número de pisos que se espera cuesten menos de 710 € cada mes de un grupo de 25 está entre 9 y 10 pisos.

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

- a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)
- b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)
- c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

- a) Llamamos X = “la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular”.
 X es una variable normal de media 1200 km y desviación típica 230 km. $X = N(1200, 230)$
 Debemos calcular $P(X > 1000)$.

$$P(X > 1000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1000 - 1200}{230}\right) = P(Z > -0.87) =$$

$$= P(Z < 0.87) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8078}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599

La probabilidad de que un coche recorra en un mes más de 1000 km es de 0.8078.

- b) La distribución de la media de las distancias recorridas de muestras de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (1200 km) y con desviación típica

$$\sigma = \frac{230}{\sqrt{36}} = \frac{115}{3} \approx 38.33 \text{ kilómetros. } \overline{X}_{36} = N(1200, 115/3).$$

Nos piden calcular $P(1150 \leq \overline{X}_{36} \leq 1250)$.

$$P(1150 \leq \overline{X}_{36} \leq 1250) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{1150 - 1200}{115/3} \leq Z \leq \frac{1250 - 1200}{115/3}\right) =$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \leq -1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \geq 1.3) =$$

$$= P(Z \leq 1.3) - [1 - P(Z \leq 1.3)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9032 - [1 - 0.9032] = \boxed{0.8064}$$

	0	
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,6
0,2	0,5793	0,7
0,3	0,6179	0,8
0,4	0,6554	0,9
0,5	0,6915	1,0
0,6	0,7257	1,1
0,7	0,7580	1,2
0,8	0,7881	1,3
0,9	0,8159	1,4
1	0,8413	
1,1	0,8643	
1,2	0,8849	
1,3	0,9032	
1,4	0,9192	

La probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km es de 0.8064.

c) Calculamos la probabilidad de que un coche recorra más de 1300 km: $P(X > 1300)$.

$$P(X > 1300) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{1300 - 1200}{230}\right) = P(Z > 0.43) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.43) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6664 = \boxed{0.3336}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0

Multiplicamos esta probabilidad por 36 y obtenemos $36 \cdot 0.3336 = 12.0096$.

El número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km es de 12.

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

- a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)
- b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). $X = N(\mu, 4)$.

El tamaño de la muestra es $n = 200$ pedidos, con una media muestral $\bar{x} = \frac{18.16 + 16.84}{2} = 17.5$ minutos.

- a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza. Lo hemos obtenido y es de 17.5 minutos.

El error de la estimación es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{18.16 - 16.84}{2} = 0.66 \text{ minutos.}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.66 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.66 \cdot \sqrt{200}}{4} \approx 2.33$$

Buscamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 2.33 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9901 = 0.0099 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0099 = 0.0198 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.0198 = \boxed{0.9802}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9899	0,9901	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,

El nivel de confianza es del 98 %.

b) X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). $X = N(17.5, 4)$.

La muestra es de tamaño $n = 425$ pedidos. La distribución de la media muestral es una normal de

la misma media (17.5 minutos) y desviación típica $\sigma = \frac{4}{\sqrt{425}} = \frac{4\sqrt{17}}{85} \approx 0.194$ minutos.

$$\overline{X}_{425} = N\left(17.5, \frac{4\sqrt{17}}{85}\right).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{425} > 18)$.

$$P(\overline{X}_{425} > 18) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{18-17.5}{4\sqrt{17}/85}\right) = P(Z > 2.58) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.58) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9951 = \boxed{0.0049}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963

La probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos en una muestra de 425 pedidos es de 0.0049.

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 & t \leq 4 \\ \frac{t+111}{5t+3} & t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

- a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)
- b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)
- c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

a) La función en el intervalo $[0, 4)$ es una función polinómica que es continua.

La función en el intervalo $(4, +\infty)$ es una función racional pero no se anula en el intervalo.

$$5t + 3 = 0 \Rightarrow 5t = -3 \Rightarrow t = \frac{-3}{5} = -0.6 \notin (4, +\infty)$$

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$\left. \begin{aligned} R(4) &= -\frac{1}{2}4^2 + 3 \cdot 4 + 1 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^-} -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{t+111}{5t+3} = \frac{4+111}{5 \cdot 4 + 3} = \frac{115}{23} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R(4) = \lim_{t \rightarrow 4^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} R(t) = 5$$

La función es continua en $t = 4$ y por tanto, es continua en todo su dominio.

b) La función en los intervalos $[0, 4)$ y $(4, +\infty)$ es derivable.

La derivada de la función en $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ tiene la expresión:

$$R'(t) = \begin{cases} -t + 3 & t < 4 \\ \frac{1 \cdot (5t+3) - 5(t+111)}{(5t+3)^2} = \frac{5t+3-5t-555}{(5t+3)^2} = \frac{-552}{(5t+3)^2} & t > 4 \end{cases}$$

Buscamos los puntos críticos de la función $R(t)$.

$$R'(t) = \begin{cases} -t + 3 & t < 4 \\ \frac{-552}{(5t+3)^2} & t > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t + 3 = 0 \rightarrow t = 3 \in [0, 4) \\ \frac{-552}{(5t+3)^2} = 0 \rightarrow \text{¡Im posible!} \end{cases}$$

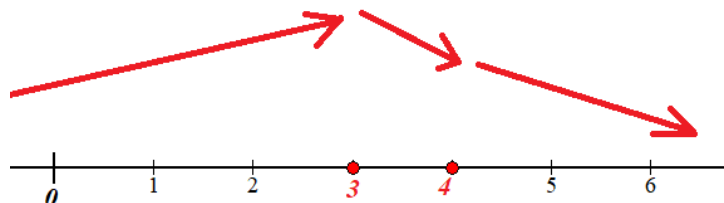
$R'(t) = 0$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[0, 3)$. Tomamos $t = 0$ y la derivada vale $R'(0) = -0 + 3 = 3 > 0$. La función crece en $[0, 3)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(3, 4)$. Tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale $R'(3.5) = -3.5 + 3 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(3, 4)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(4, +\infty)$. Tomamos $t = 5$ y la derivada vale $R'(5) = \frac{-552}{(5 \cdot 5 + 3)^2} = -0.7 < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

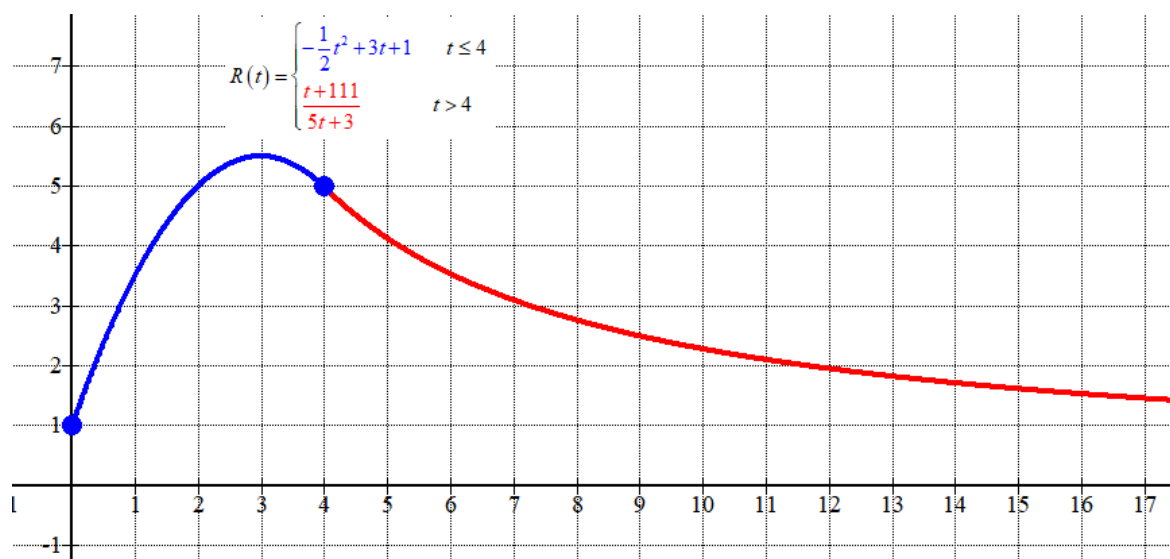


Como la función es continua podemos afirmar que la función crece de 0 a 3 años y decrece a partir del tercer año.

La rentabilidad máxima se alcanza en el tercer año. Como $R(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 5.5$ la rentabilidad máxima es de 5.5 %.

Realizamos una tabla de valores y representamos la función.

t	$R(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$	t	$R(t) = \frac{t+111}{5t+3}$
0	1	5	4.14
1	3.5	6	3.54
2	5	7	3.1
3	5.5	8	2.7
4	5	10	2.28



c) Averiguamos el valor de la función para $t = 25$.

$$R(25) = \frac{25+111}{5 \cdot 25+3} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

Para una inversión que dure 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625 %, superior al 0.2 %. Hallamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t}{t} + \frac{111}{t}}{\frac{5t}{t} + \frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{111}{t}}{5 + \frac{3}{t}} = \frac{1 + \frac{111}{\infty}}{5 + \frac{3}{\infty}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

El rendimiento a los 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625%, el rendimiento decrece, pero no baja del 0.2%.

Es cierta la afirmación del ejercicio y se puede garantizar un retorno superior al 0.2 % a partir de 25 años e incluso antes.

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = -x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

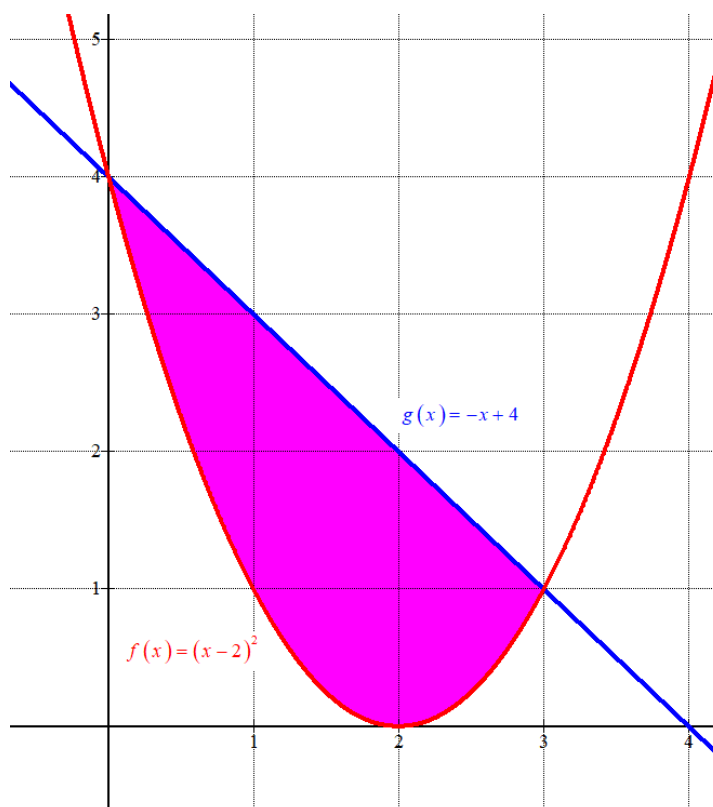
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x-2)^2 \\ g(x) = -x+4 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow (x-2)^2 = -x+4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto encerrado entre ellas.

x	$f(x) = (x-2)^2$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

x	$g(x) = -x+4$
-1	5
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0



b) Hallamos el área de la región encerrada entre las dos gráficas como la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_0^3 g(x) - f(x) dx = \int_0^3 -x + 4 - (x-2)^2 dx = \int_0^3 -x + 4 - (x^2 + 4 - 4x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 -x + 4 - x^2 - 4 + 4x dx = \int_0^3 -x^2 + 3x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = \boxed{4.5 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas tiene un valor de 4.5 hectáreas.

- c) Se producen $4.5 \cdot 45000 = 202500$ kg de plátanos. Se desecha el 1.5% por lo que se recibe subvención por el 98.5 % de la producción, es decir, $202500 \cdot 0.985 = 199462.5$ kg. Multiplicamos estos kilos subvencionados por 0.33 y tenemos la subvención.

$$199462.5 \cdot 0.33 = 65822.625 \text{ €}$$

La subvención que se recibe es de 65 822.625 €.

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

a) Llamamos x = número de teléfonos móviles, y = número de tablets y z = número de ordenadores portátiles vendidos.

“El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos” $\rightarrow 300x + 400y + 800z = 28000$.

“El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas” $\rightarrow x = 2y$.

“Por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil” $\rightarrow y = 2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 300x + 400y + 800z = 28000 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 8z = 280 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 8z = 280 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4 \cdot 2z + 8z = 280 \\ x = 2 \cdot 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 8z + 8z = 280 \\ x = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z + 8z + 8z = 280 \Rightarrow 28z = 280 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{280}{28} = 10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 4 \cdot 10 = 40} \\ \boxed{y = 2 \cdot 10 = 20} \end{array} \right.$$

Se vendieron 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

- a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)
 b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
 c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

a) Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Kilos de fruta	Kilos de verduras	Recaudación
Nº de lotes A (x)	$2x$	$3x$	$18x$
Nº de lotes B (y)	$3y$	$3y$	$20y$
TOTAL	$2x + 3y$	$3x + 3y$	$18x + 20y$

La función que deseamos maximizar es la recaudación $R(x, y) = 18x + 20y$ sometida a las restricciones siguientes.

“Se dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras” $\rightarrow$
 $2x + 3y \leq 1500$; $3x + 3y \leq 1755$.

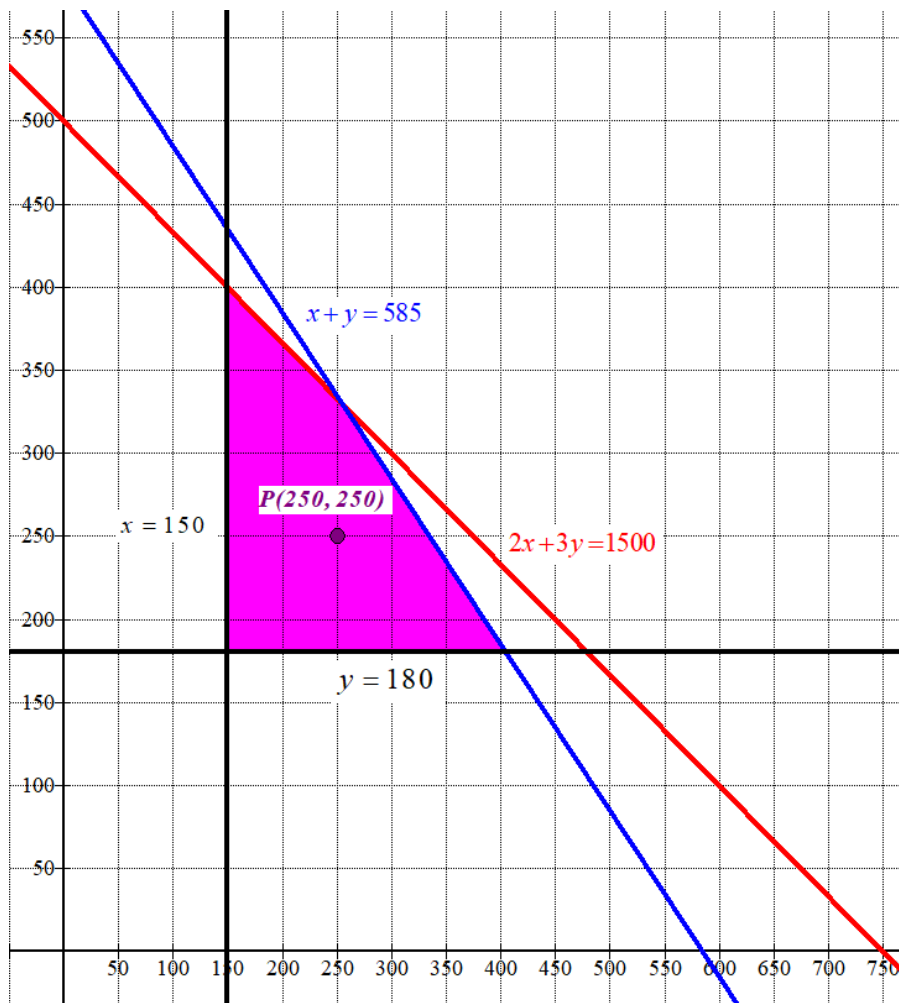
“Ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B” $\rightarrow x \geq 150$; $y \geq 180$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 1500 \\ 3x + 3y \leq 1755 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 585 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x + 3y = 1500$		$x + y = 585$		$x = 150$		$y = 180$	
x	$y = \frac{1500 - 2x}{3}$	x	$y = 585 - x$	$x = 150$	y	x	$y = 180$
0	500	0	585	150	0	0	180
150	400	405	180	150	400	405	180
750	0	585	0				



Como las restricciones son

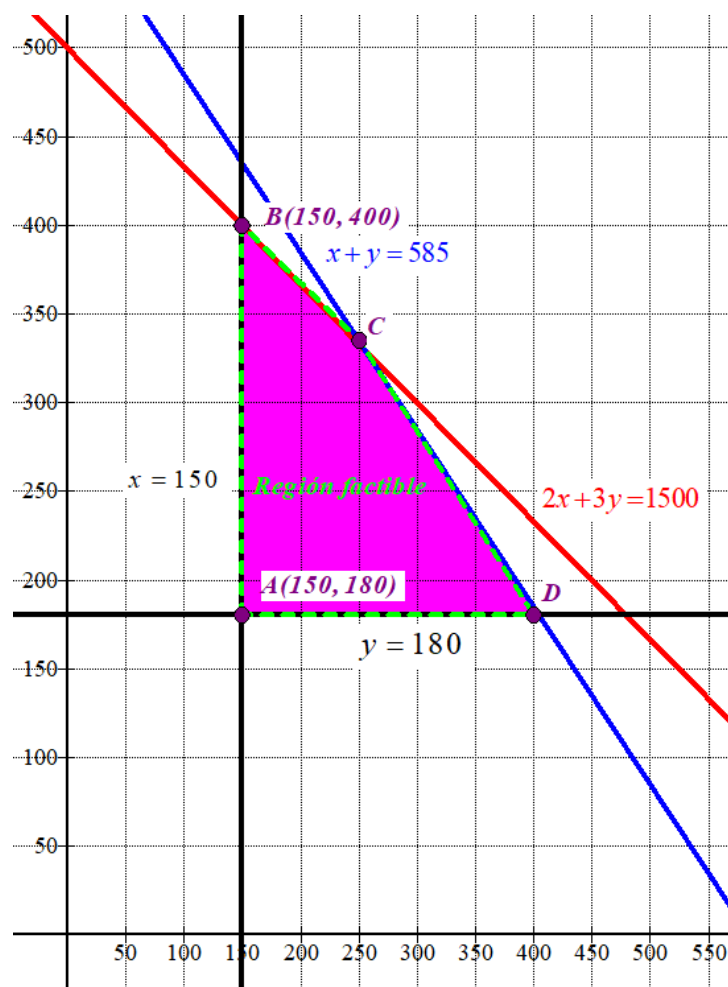
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 585 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas **roja** y **azul**, por encima de la recta horizontal y a la derecha de la recta vertical.

Comprobamos que el punto $P(250, 250)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 250 + 3 \cdot 250 \leq 1500 \\ 250 + 250 \leq 585 \\ 250 \geq 150 \\ 250 \geq 180 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas de los puntos C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} x + y = 585 \\ 2x + 3y = 1500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 585 - x \\ 2x + 3y = 1500 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3(585 - x) = 1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 1755 - 3x = 1500 \Rightarrow -x = -255 \Rightarrow x = 255 \Rightarrow y = 585 - 255 = 330 \Rightarrow C(255, 330)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x + y = 585 \\ y = 180 \end{cases} \Rightarrow x + 180 = 585 \Rightarrow x = 405 \Rightarrow D(405, 180)$$

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(150, 180), B(150, 400), C(255, 330) y D(405, 180).

c) Valoramos la función recaudación $R(x, y) = 18x + 20y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(150, 180) \rightarrow R(150, 180) = 18 \cdot 150 + 20 \cdot 180 = 6300$$

$$B(150, 400) \rightarrow R(150, 400) = 18 \cdot 150 + 20 \cdot 400 = 10700$$

$$C(255, 330) \rightarrow R(255, 330) = 18 \cdot 255 + 20 \cdot 330 = 11190 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(405, 180) \rightarrow R(405, 180) = 18 \cdot 405 + 20 \cdot 180 = 10890$$

La recaudación máxima es de 11190 € y se consigue en el vértice C(255, 330), que significa fabricar 255 lotes A y 330 lotes B.



EBAU Ordinaria 2024
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (1)

Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

- a) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)
- c) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

- a) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)
- c) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

- a) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)
- b) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)
- c) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

- a) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)

- b) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO₂ emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO₂? (1 punto)
- c) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) & \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \frac{3}{25}(-7t+126) & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

- a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)
- b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)
- c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por

$$y \leq \frac{-x^2 + 9}{3}, \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0, \quad (\text{las unidades se miden en metros}).$$

- a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)
- b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)
- c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).
- b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
- c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

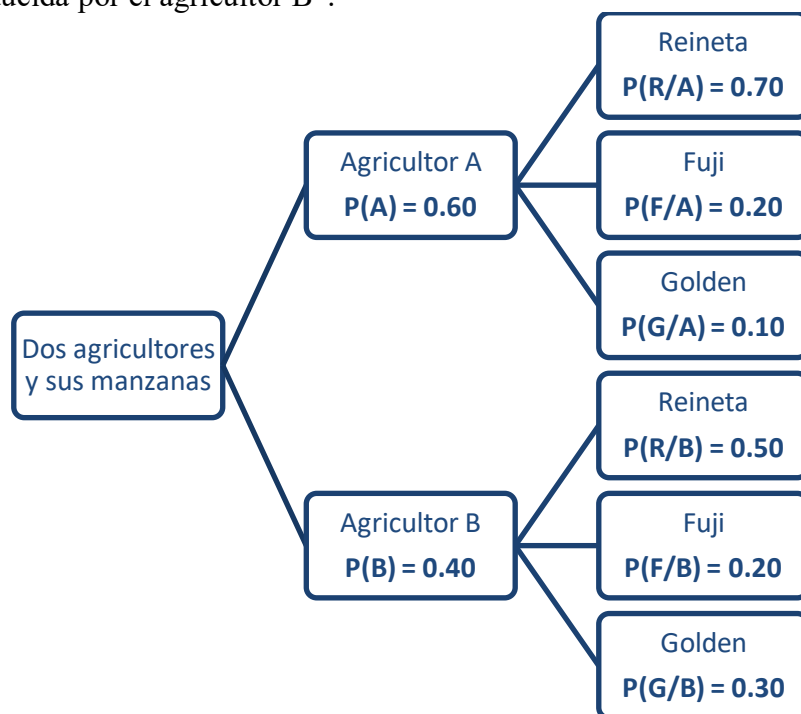
- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)
- b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

SOLUCIONES

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

- Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)
- Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

- Llamamos R al suceso “la manzana es reineta”, F al suceso “la manzana es fuji”, G al suceso “la manzana es golden”, A al suceso “la manzana es producida por el agricultor A” y B al suceso “la manzana es producida por el agricultor B”.



- Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.5 = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta es de 0.62.

- Nos piden calcular $P(A/\bar{R})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{R}) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(A)P(\bar{R}/A)}{1 - P(R)} = \frac{0.6 \cdot (0.2 + 0.1)}{1 - 0.62} = \boxed{\frac{9}{19} \cong 0.4737}$$

Si la manzana elegida no es de la variedad reineta la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A es de 0.4737.

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

- Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)
- ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)
- Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que no han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.

X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor no haya utilizado la IA es $p = 1 - 0.73 = 0.27$. $X = B(30, 0.27)$.

Calculamos $P(10 \leq X \leq 15)$.

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 15) &= P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + \\ &+ P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{30}{10} 0.27^{10} \cdot 0.73^{20} + \binom{30}{11} 0.27^{11} \cdot 0.73^{19} + \\ &+ \binom{30}{12} 0.27^{12} \cdot 0.73^{18} + \binom{30}{13} 0.27^{13} \cdot 0.73^{17} + \binom{30}{14} 0.27^{14} \cdot 0.73^{16} + \binom{30}{15} 0.27^{15} \cdot 0.73^{15} = \boxed{0.2736} \end{aligned}$$

La probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores es de 0.2736.

- b) Llamamos Y a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.

Y es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es $p = 0.73$. $Y = B(30, 0.73)$.

Nos piden calcular $P(Y < 10)$. Esta probabilidad es muy costosa de calcular utilizando la variable binomial y sus fórmulas. Usamos la aproximación de la variable binomial Y a la variable normal Y' de media $\mu = np = 30 \cdot 0.73 = 21.9$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0.73 \cdot 0.27} \approx 2.4317$.

$Y = B(30, 0.73)$ se aproxima con $Y' = N(21.9, 2.4317)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 21.9 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0.27 = 8.1 > 5$.

$$\begin{aligned} P(Y < 10) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y' \leq 9.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \leq \frac{9.5 - 21.9}{2.4317}\right) = P(Z \leq -5.1) = P(Z \geq 5.1) = 1 - P(Z \leq 5.1) = \\ &= \{\text{No aparece en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

La probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA es prácticamente 0.

Usando la binomial sería:

$$\begin{aligned}P(Y < 10) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + \\&+ P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) = \\&= \binom{30}{0} 0.73^0 \cdot 0.27^{30} + \binom{30}{1} 0.73^1 \cdot 0.27^{29} + \binom{30}{2} 0.73^2 \cdot 0.27^{28} + \binom{30}{3} 0.73^3 \cdot 0.27^{27} + \\&+ \binom{30}{4} 0.73^4 \cdot 0.27^{26} + \binom{30}{5} 0.73^5 \cdot 0.27^{25} + \binom{30}{6} 0.73^6 \cdot 0.27^{24} + \binom{30}{7} 0.73^7 \cdot 0.27^{23} + \\&+ \binom{30}{8} 0.73^8 \cdot 0.27^{22} + \binom{30}{9} 0.73^9 \cdot 0.27^{21} = 0.0000000000000000008 + \dots + 0.0000009 \simeq 0\end{aligned}$$

c) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 80 profesores.

X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 80$ y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es $p = 0.73$. $X = B(80, 0.73)$

El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es el valor de la media.

$$Media = np = 80 \cdot 0.73 = 58.4$$

El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es de aproximadamente 58 profesores.

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

- En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)
- En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)
- Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

- a) Llamamos X = “número de despedidos de un grupo de 10 trabajadores”.

X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 10$ y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es $p = 0.10$. $X = B(10, 0.1)$.

Debemos calcular $P(X \leq 3)$.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^8 + \binom{10}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^7 = \boxed{0.9872}$$

La probabilidad de que, a lo sumo, 3 empleados sean despedidos es de 0.9872.

- b) Llamamos X = “número de despedidos de un grupo de 300 trabajadores”.

X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 300$ y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es $p = 0.10$. $X = B(300, 0.1)$.

El número de repeticiones es muy alto y debemos aproximar las probabilidades de la variable X a las probabilidades de una normal Y de media $\mu = np = 300 \cdot 0.1 = 30$ despidos y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0.1 \cdot 0.9} \approx 5.1962 \text{ despidos. } Y = N(30, 5.1962)$$

Para que al menos 280 conserven su empleo deben ser despedidos 20 empleados o menos. Debemos calcular $P(X \leq 20)$.

$$P(X \leq 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 20.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{20.5 - 30}{5.1962}\right) = P(Z \leq -1.828) = P(Z \geq 1.828) = 1 - P(Z \leq 1.828) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9664 = \boxed{0.0336}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.63
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.82
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.90
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.93
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.94
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.95
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.97

La probabilidad de que al menos 280 empleados conserven su empleo tiene un valor aproximado de 0.0336.

- c) La proporción muestral de los trabajadores a distancia que optan por un despido voluntario incentivado es de $p = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} = 0.125$.

Con un nivel de confianza del 97 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{400}} = 0.036$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.125 - 0.036; 0.125 + 0.036) = (0.089; 0.161)$$

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO₂) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO₂ emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

- Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO₂ emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)
- Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO₂ emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO₂? (1 punto)
- Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

X = cantidad de emisiones de dióxido de carbono (CO₂) por vehículo en una ciudad medida en g/km. $X = N(\mu, 25)$.

La muestra es de tamaño $n = 100$ vehículos, con una media muestral $\bar{x} = 25$ g/km

- a) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,6
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,7
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,8
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,9
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	1,0
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	1,1
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	1,2
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	1,3
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	1,4
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	1,5
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	1,6
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	1,7
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	1,8
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	1,9
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	2,0
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	2,1
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	2,2
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	2,3
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	2,4
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	2,5

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.9 \text{ g/km}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (150 - 4.9; 150 + 4.9) = (145.1; 154.9)$$

- b) Con un nivel de confianza de 0,9 calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.9 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Utilizamos la fórmula del error y hacemos que sea de 3.5 g/km.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5 = 1.645 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5\sqrt{n} = 1.645 \cdot 25 \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 25}{3.5} \right)^2 = 138.0625$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 139 vehículos.

c) Con un nivel de confianza del 86 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.86 \rightarrow \alpha = 0.14 \rightarrow \alpha/2 = 0.07 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.93 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.47 + 1.48}{2} = 1.475$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429

Si se obtuviera el mismo intervalo de confianza del apartado a) tendría el mismo error, que tenía un valor de 4.9 g/km.

$$\left. \begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 4.9 \end{array} \right\} \Rightarrow 4.9 = 1.475 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{75}} \Rightarrow \sigma = \frac{4.9 \cdot \sqrt{75}}{1.475} \approx 28.77$$

La desviación típica es de 28.77 g/km.

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) & \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \frac{3}{25}(-7t+126) & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

- a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)
 b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)
 c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

- a) La función en los intervalos $[7,14]$ y $(14,18]$ son funciones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en $t = 14$.

$$P(14) = -\frac{4}{25}(14-7)(14-17) = 3.36$$

$$\lim_{t \rightarrow 14^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 14^-} -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) = 3.36$$

$$\lim_{t \rightarrow 14^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 14^+} \frac{3}{25}(-7t+126) = \frac{3}{25}(-7 \cdot 14 + 126) = 3.36$$

Como $P(14) = \lim_{t \rightarrow 14^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 14^+} P(t) = 3.36$ la función es continua en $t = 14$.

La función es continua en $[7, 18]$.

La función en los intervalos $[7,14]$ y $(14,18]$ son funciones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función en $[7,14] \cup (14,18]$ tiene la expresión:

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) = -\frac{4}{25}(t^2 - 24t + 119) & \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \frac{3}{25}(-7t+126) & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(2t-24) & \text{si } 7 \leq t < 14 \\ \frac{3}{25}(-7) = \frac{-21}{25} & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $t = 14$ y comparamos su valor.

$$P'(14^-) = \lim_{t \rightarrow 14^-} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 14^-} -\frac{4}{25}(2t-24) = -\frac{4}{25}(28-24) = \frac{-16}{25}$$

$$P'(14^+) = \lim_{t \rightarrow 14^+} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 14^+} \frac{-21}{25} = \frac{-21}{25}$$

Como las derivadas laterales tienen valores distintos la función no es derivable en $t = 14$.

La función es derivable en $[7,14) \cup (14,18]$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función $P(t)$.

$$P'(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(2t-24) & \text{si } 7 \leq t < 14 \\ \frac{3}{25}(-7) = \frac{-21}{25} & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{25}(2t-24) = 0 \rightarrow 2t-24=0 \rightarrow t=12 \in [7,14) \\ \frac{3}{25}(-7) = \frac{-21}{25} = 0 \rightarrow \text{¡Im posible!} \end{cases}$$

$$P'(t) = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[7, 12)$. Tomamos $t = 10$ y la derivada vale

$$P'(10) = -\frac{4}{25}(20-24) = \frac{16}{25} > 0. \text{ La función crece en } [7, 12).$$

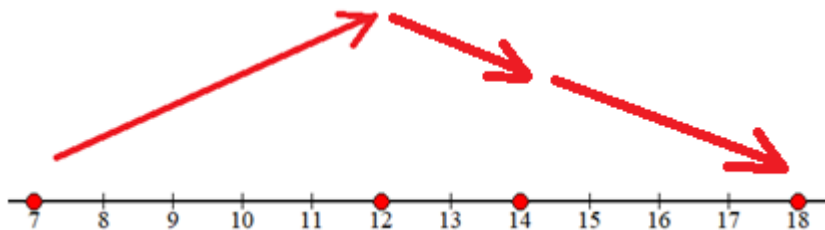
Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(12, 14)$. Tomamos $t = 13$ y la derivada vale

$$P'(13) = -\frac{4}{25}(26-24) = \frac{-8}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (12, 14).$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(14, 18)$. Tomamos $t = 15$ y la derivada vale

$$P'(15) = -\frac{21}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (14, 18).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La producción de energía crece entre las 7 y las 12 horas y decrece entre las 12 y las 18 horas. La función tiene un máximo relativo en $t = 12$. Mirando la evolución de la función este es un

máximo absoluto. Tenemos que $P(12) = -\frac{4}{25}(12-7)(12-17) = 4$.

La producción máxima de energía se produce a las 12 horas siendo esta de 4 kw.

c) Igualamos la función a 3 y buscamos el valor de t .

$$P(t) = 3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{25}(t^2 - 24t + 119) = 3 \rightarrow t^2 - 24t + 119 = \frac{-75}{4} \rightarrow t^2 - 24t + 137.75 \rightarrow \\ \rightarrow t = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(1)(137.75)}}{2} = \frac{24 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{24+5}{2} = 14.5 \notin [7,14] \\ \frac{24-5}{2} = 9.5 \in [7,14] \end{cases} \\ \frac{3}{25}(-7t + 126) = 3 \rightarrow -7t + 126 = \frac{75}{3} \rightarrow -7t = -101 \rightarrow t = \frac{101}{7} \approx 14.43 \in (14,18] \end{cases}$$

La producción de energía alcanza los 3 kw por primera vez a las 9.5 horas, como la potencia producida va creciendo hasta las 12 horas se supera a partir de las 9 horas y media.

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por

$$y \leq \frac{-x^2 + 9}{3}, \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0, \quad (\text{las unidades se miden en metros}).$$

- a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)
 b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)
 c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

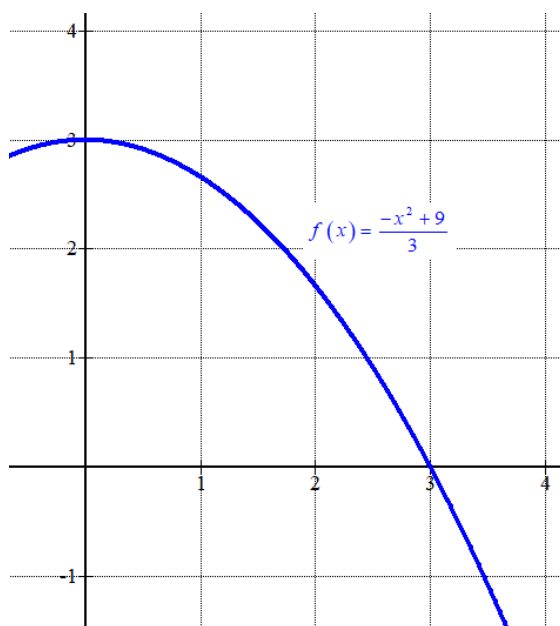
a) Dibujamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{-x^2 + 9}{3}$.

Igualamos la derivada a cero para encontrar las coordenadas del vértice de la parábola.

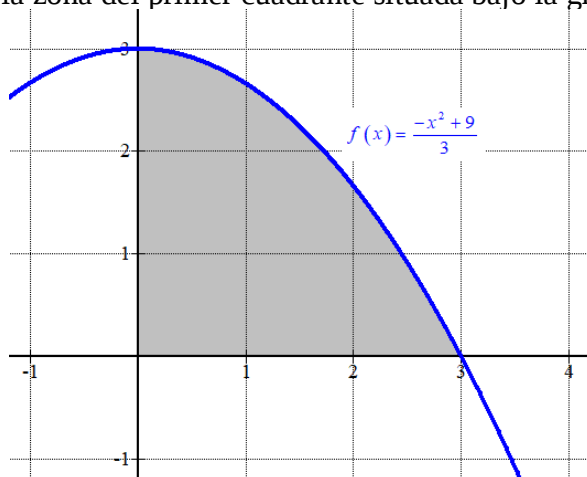
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-2x}{3} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $f'(x) = \frac{-2x}{3} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{3} \Rightarrow f''(0) = \frac{-2}{3} < 0$ la función tiene un máximo relativo en $x = 0$. Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	$f(x) = \frac{-x^2 + 9}{3}$
0	3
1	8/3
2	5/3
3	0



La superficie a cubrir es la zona del primer cuadrante situada bajo la gráfica.



b) Obtenemos el valor de la superficie a cubrir como la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{-x^2 + 9}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 -x^2 + 9 dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_0^3 = \\ &= \frac{1}{3} \left(\left[-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 9 \cdot 0 \right] \right) = \frac{18}{3} = \boxed{6m^2} \end{aligned}$$

La superficie es de 6 metros cuadrados.

- c) Se debe comprar un 15% más de lona, es decir $6 \cdot 0.15 = 0.9$ metros cuadrados más. Lo que hace que debamos comprar 6.9 metros cuadrados de lona.
El metro cuadrado de lona cuesta 20 € más los 5 euros de instalación.
Comprar y colocar la lona necesaria para cubrir la superficie cuesta $6.9 \cdot 25 = 172.5$ euros.

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).
 b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
 c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

a) Llamamos x = número de mesas e y = número de estanterías.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Metros cuadrados de madera	Horas de trabajo	Beneficios
Nº de mesas (x)	$3x$	x	$160x$
Nº de estanterías (y)	$4y$	$3y$	$225y$
TOTAL	$3x + 4y$	$x + 3y$	$160x + 225y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 160x + 225y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

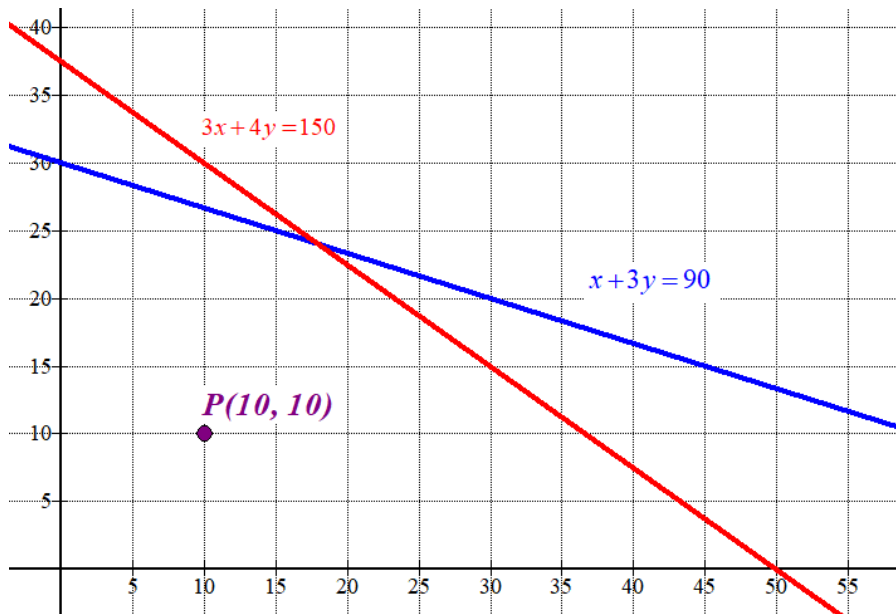
“Se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra” $\rightarrow$
 $3x + 4y \leq 150; x + 3y \leq 90$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 150 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x + 4y = 150$		$x + 3y = 90$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = \frac{150 - 3x}{4}$	x	$y = \frac{90 - x}{3}$	
10	30	0	30	Primer cuadrante
30	15	30	20	
50	0	90	0	



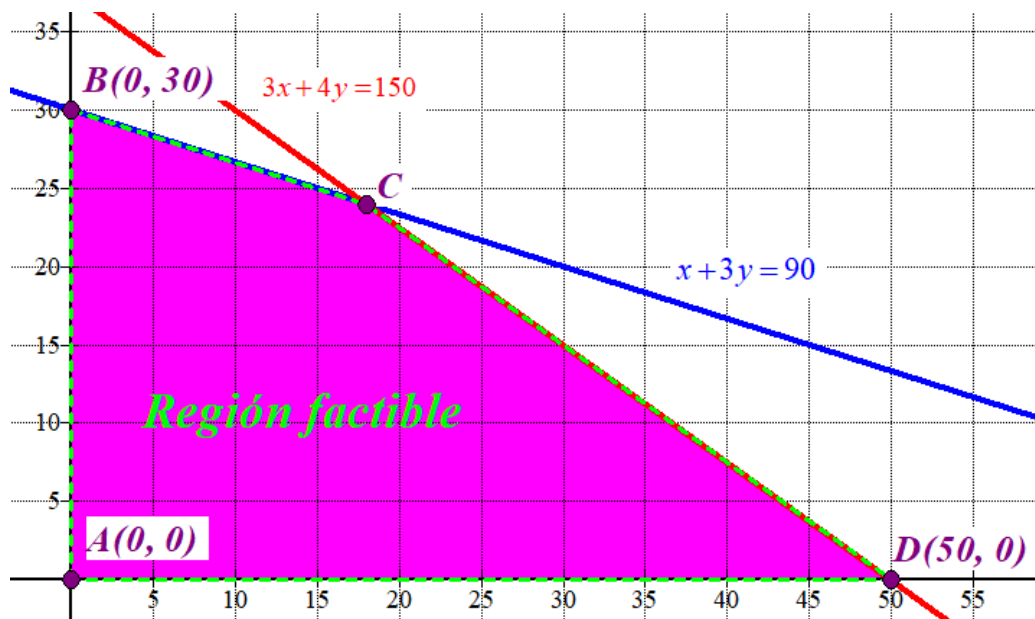
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 150 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \leq 150 \\ 10 + 3 \cdot 10 \leq 90 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 150 \\ x + 3y = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 150 \\ x = 90 - 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 3(90 - 3y) + 4y = 150 \Rightarrow 270 - 9y + 4y = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -120 \Rightarrow y = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow x = 90 - 72 = 18 \Rightarrow C(18, 24)$$

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 30), C(18, 24) y D(50, 0).

c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 160x + 225y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 160 \cdot 0 + 225 \cdot 30 = 6750$$

$$C(18, 24) \rightarrow B(18, 24) = 160 \cdot 18 + 225 \cdot 24 = \mathbf{8280 \text{ ¡Máximo!}}$$

$$D(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 160 \cdot 50 + 225 \cdot 0 = 8000$$

El beneficio máximo es de 8280 € y se consigue en el vértice C(18, 24), que significa fabricar 18 mesas y 24 estanterías.

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

a) Llamamos “x” al número de torneos locales en los que ha participado, “y” a los torneos nacionales y “z” a los torneos internacionales.

“El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales” $\rightarrow x = 2y$.

“Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado” $\rightarrow 0.30(x + y + z) = 51$.

“Por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales” $\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \text{nacionales} & & \text{internacionales} \\ 5 & \longrightarrow & 2 \\ y & \longrightarrow & z \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 5 & \longrightarrow & 2 \\ y & \longrightarrow & z \end{array}} \right\} \Rightarrow 5z = 2y$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ 0.30(x + y + z) = 51 \\ 5z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y + z = \frac{51}{0.3} = 170 \\ 5z = 2y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y + z = 170 \\ z = \frac{2}{5}y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + y + \frac{2}{5}y = 170 \Rightarrow 3.4y = 170 \Rightarrow y = \frac{170}{3.4} = 50 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 50 = 100 \\ z = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20 \end{cases}$$

La jugadora ha participado en 100 torneos locales, 50 nacionales y 20 internacionales. Esto hace un total de 170 torneos habiendo conseguido premio en el 30 %, es decir, $0.30 \cdot 170 = 51$. Los resultados parecen correctos.

EBAU Extraordinaria 2023



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2022–2023

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (4)

Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

- a) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.
- b) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.
- c) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

- a) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.
- b) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.
- c) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

- a) Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.
- b) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?
- c) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

- a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.
- b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0,04t^2 + 2,4t & \text{para } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - 320}{t} & \text{para } 40 \leq t \leq 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.
- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?
- Hacer una gráfica de $B(t)$.

B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones

$f(x) = (x - 2)^2$ y $g(x) = x + 4$. Si se mide en centímetros:

- Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?
- Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?
- Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible y determinar sus vértices.
- ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

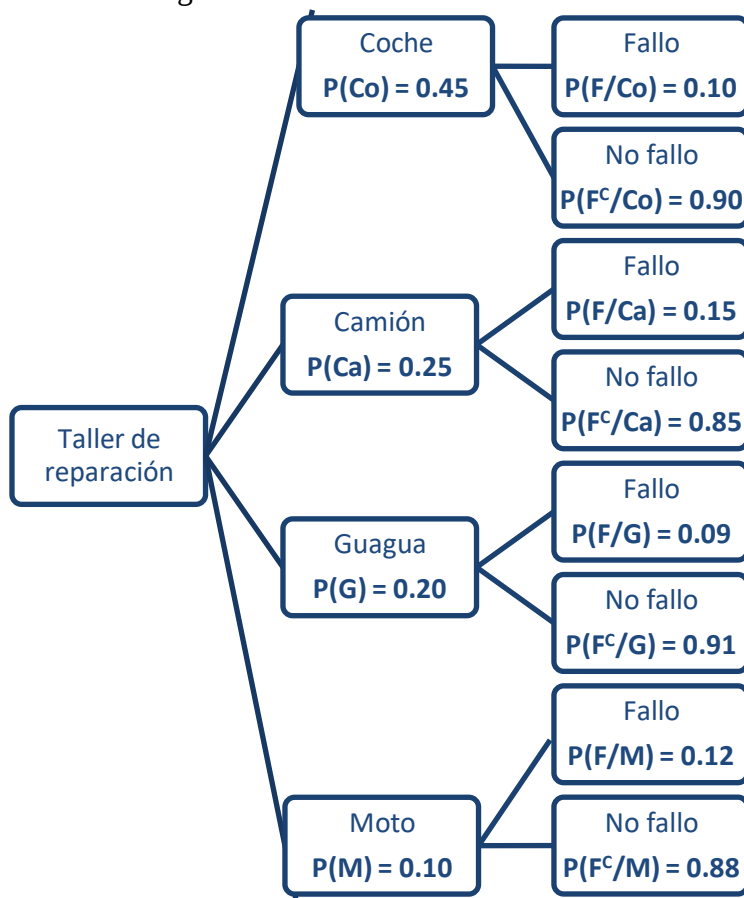
B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

SOLUCIONES

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

- Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.
- Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.
- Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

a) Llamamos Co al suceso “Entra un coche”, Ca al suceso “Entra un camión”, G al suceso “Entra una guagua” y M al suceso “Entra una moto”. Llamamos F al suceso “Tener fallos en el sistema de arranque”. Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(F^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(F^c) &= P(\text{Co})P(F^c/\text{Co}) + P(\text{Ca})P(F^c/\text{Ca}) + P(\text{G})P(F^c/\text{G}) + P(\text{M})P(F^c/\text{M}) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.9 + 0.25 \cdot 0.85 + 0.20 \cdot 0.91 + 0.10 \cdot 0.88 = \boxed{0.8875}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(M/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M)P(F/M)}{1 - P(F^c)} = \frac{0.10 \cdot 0.12}{1 - 0.8875} = \frac{8}{75} \approx 0.1067$$

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

- Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.
- Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.
- Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

La variable X cuenta el número de aves rapaces que sobreviven más de 5 años de un grupo de 10. Esta es una variable binomial, pues es dicotómica (sobrevive o no) y cada repetición es independiente entre sí.

- Como $n = 10$ y $p = P(\text{sobrevivir}) = 0.10$ tenemos que la variable es $X = B(10, 0.1)$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(X \geq 2)$ usando el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9 \right] \approx \boxed{0.2639} \end{aligned}$$

- La nueva variable binomial tiene como parámetros $n = 200$ y $p = 0.10$. $X = B(200, 0.1)$
Sus probabilidades se pueden aproximar por una normal de media $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.1 = 20$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$.
Esta aproximación es buena pues $np = 20 > 5$ y $nq = 180 > 5$.

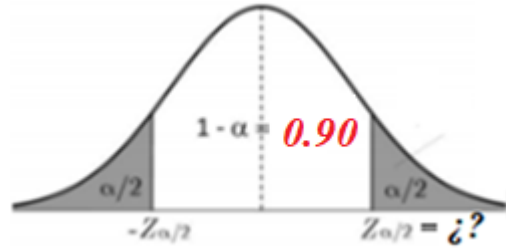
$X = B(200, 0.1)$ se aproxima con $Y = N(20, 3\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} P(10 < X < 15) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(10.5 \leq Y \leq 14.5) = \\ &= P(Y \leq 14.5) - P(Y \leq 10.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{14.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) - P\left(Z \leq \frac{10.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) = \\ &= P(Z \leq -1.30) - P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 1.3) - P(Z \geq 2.24) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1.3) - [1 - P(Z \leq 2.24)] = P(Z \leq 2.24) - P(Z \leq 1.3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \\ &= 0.9875 - 0.9032 = \boxed{0.0843} \end{aligned}$$

- En una muestra de tamaño $n = 160$ la proporción de aves que sobreviven es $p = \frac{12}{160} = 0.075$.

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.075 \cdot 0.925}{160}} \approx 0.0343$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.075 - 0.0343; \quad 0.075 + 0.0343) = (0.0407; \quad 0.1093)$$

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

- Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.
- Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?
- Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

- a) La proporción muestral de los pasajeros que en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente es de $p = \frac{225}{300} = 0.75$.

Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{300}} \approx 0.0514$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.0514; 0.75 + 0.0514) = (0.6986; 0.8014)$$

- b) Con un nivel de confianza del 92 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.75 \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.75} = \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 = \frac{0.75 \cdot 0.25}{n} \Rightarrow n \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 = 0.75 \cdot 0.25 \Rightarrow n = \frac{0.75 \cdot 0.25}{\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2} \approx 638.02$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 639 pasajeros.

- c) Sea X el número de viajeros que viaja con descuento de un grupo de 5.

Esta es una variable binomial de parámetros $n = 5$ y $p =$ probabilidad de que un pasajero viaje con descuento $= 0.75$. $X = B(5, 0.75)$

Deseamos calcular el valor de $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.75^0 \cdot 0.25^5 = \boxed{\frac{1}{1024} \approx 0.00098}$$

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

- a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.
 b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

X = Duración de un televisor en años. $X = N(\mu, 2)$.

Tamaño de la muestra = 50. Media muestral = $\bar{x} = 9.5$ años

- a) Con un nivel de confianza del 88 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \alpha/2 = 0,06 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,94 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.55 + 1.56}{2} = 1.555$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.555 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} \approx 0.44 \text{ años}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (9.5 - 0.44; 9.5 + 0.44) = (9.06; 9.94)$$

- b) Con un nivel de confianza de 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de seis meses, es decir, 0,5 años:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 2}{0.5} \right)^2 = 61.46$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 62 televisores.

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0,04t^2 + 2,4t & \text{para } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - 320}{t} & \text{para } 40 \leq t \leq 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.
- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?
- Hacer una gráfica de $B(t)$.

a) En el intervalo $[0, 40)$ la función es $B(t) = -0,04t^2 + 2,4t$. Esta función es polinómica y es continua en $[0, 40)$.

En el intervalo $(40, 50]$ la función es $B(t) = \frac{40t - 320}{t}$. Esta función no es continua en $t = 0$ pues se anula el denominador, pero este valor no pertenece a su dominio de definición. La función es continua en $(40, 50]$.

Veamos si la función es continua en $t = 40$.

$$\left. \begin{aligned} B(40) &= \frac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32 \\ \lim_{t \rightarrow 40^-} B(t) &= \lim_{t \rightarrow 40^-} -0,04t^2 + 2,4t = -0,04 \cdot 40^2 + 2,4 \cdot 40 = 32 \\ \lim_{t \rightarrow 40^+} B(t) &= \lim_{t \rightarrow 40^+} \frac{40t - 320}{t} = 32 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(40) = \lim_{t \rightarrow 40^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 40^+} B(t) = 32$$

La función es continua en $t = 40$.

La función es continua en su dominio $= [0, 50]$

La función es derivable en $[0, 40) \cup (40, 50]$ y su derivada es:

$$B'(t) = \begin{cases} -0,08t + 2,4 & \text{si } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - (40t - 320)}{t^2} = \frac{320}{t^2} & \text{si } 40 < t \leq 50 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en el cambio de definición de la función.

¿Es derivable en $t = 40$?

$$\left. \begin{aligned} B'(40^-) &= \lim_{t \rightarrow 40^-} B'(t) = \lim_{t \rightarrow 40^-} -0,08t + 2,4 = -\frac{4}{5} \\ B'(40^+) &= \lim_{t \rightarrow 40^+} B'(t) = \lim_{t \rightarrow 40^+} \frac{320}{t^2} = \frac{320}{40^2} = \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(40^-) = -\frac{4}{5} \neq \frac{1}{5} = B'(40^+)$$

La función no es derivable en $t = 40$.

La función es continua en $[0, 50]$ y derivable en $[0, 40) \cup (40, 50]$

b) Usamos la derivada.

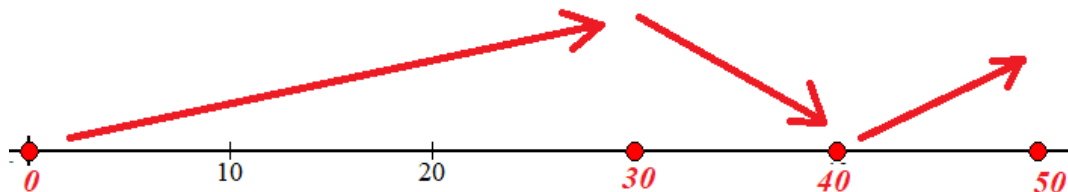
$$B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 & \text{si } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - (40t - 320)}{t^2} = \frac{320}{t^2} & \text{si } 40 < t \leq 50 \end{cases}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0.08t + 2.4 = 0 \rightarrow t = \frac{2.4}{0.08} = 30 \in [0, 40) \\ \frac{320}{t^2} = 0 \rightarrow \text{No es posible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 30 y 40.

- En el intervalo $[0, 30)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10) = -0.08 \cdot 10 + 2.4 = 1.6 > 0$. La función crece en $[0, 30)$.
- En el intervalo $(30, 40)$ tomamos $t = 35$ y la derivada vale $B'(35) = -0.08 \cdot 35 + 2.4 = -0.4 < 0$. La función decrece en $(30, 40)$.
- En el intervalo $(40, 50]$ tomamos $t = 45$ y la derivada vale $B'(45) = \frac{320}{45^2} > 0$. La función crece en $(40, 50]$.

La función sigue el esquema siguiente:



Resumiendo: La función beneficios crece los primeros 30 años y los 10 últimos y decrece entre los 30 y los 40 años.

Valoramos los beneficios en el año 30 y en el año 50.

$$\left. \begin{aligned} B(30) &= -0.04 \cdot 30^2 + 2.4 \cdot 30 = 36 \text{ ¡Máximo!} \\ B(50) &= \frac{40 \cdot 50 - 320}{50} = 33.6 \end{aligned} \right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el año 30, siendo su valor de 36000 €.

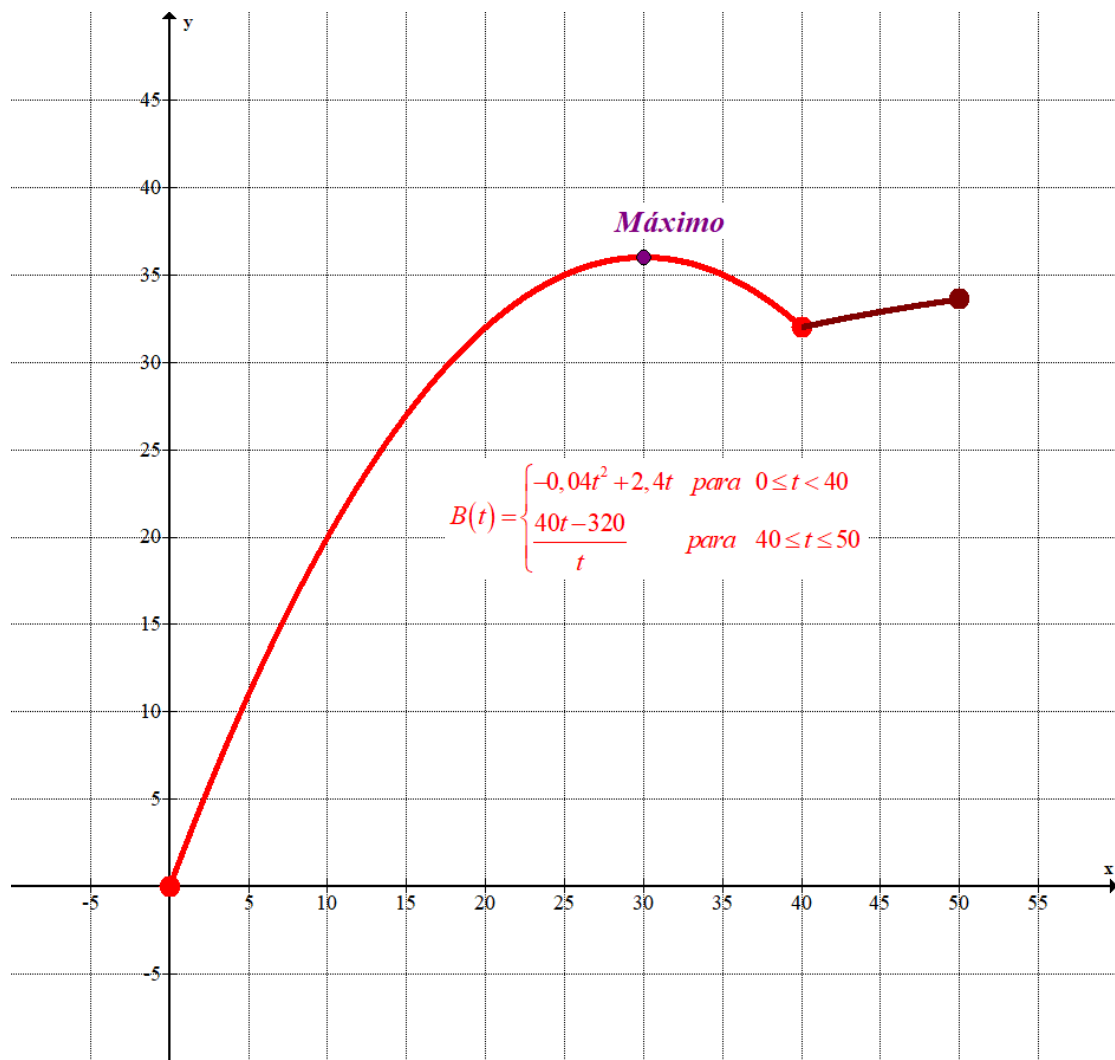
c) Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$$0 \leq t < 40$$

t	$B(t) = -0.04t^2 + 2.4t$
0	0
30	36
35	35

$$40 \leq t \leq 50$$

t	$B(t) = \frac{40t - 320}{t}$
40	32
45	32.89
50	33.6



B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones

$f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x+4$. Si se mide en centímetros:

- Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?
- Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?
- Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

a) Los márgenes los limitan una parábola y una recta.

Averiguamos donde se cortan.

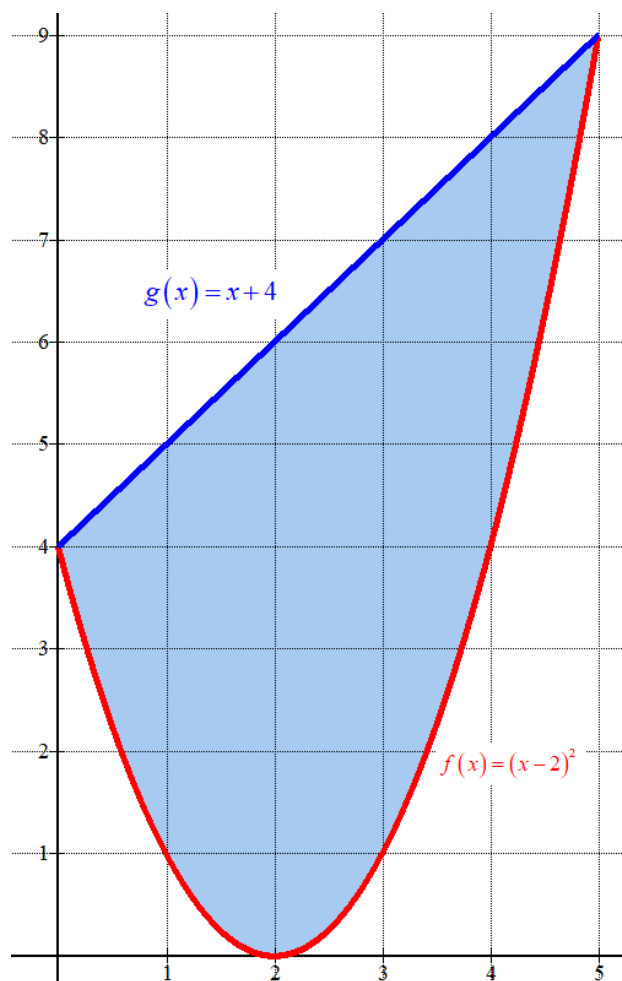
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x-2)^2 \\ g(x) = x+4 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow (x-2)^2 = x+4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x+4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Dibujamos la región limitada por ambas funciones.

x	$f(x) = (x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9

x	$g(x) = x+4$
0	4
1	5
3	7
5	9



Calculamos la superficie de la lámina como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 5.

$$\begin{aligned}\int_0^5 x+4-(x^2-4x+4)dx &= \int_0^5 x+4-x^2+4x-4dx = \int_0^5 -x^2+5xdx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left[-\frac{5^3}{3}+5\frac{5^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^3}{3}+5\frac{0^2}{2}\right] = \frac{-125}{3} + \frac{125}{2} = \boxed{\frac{125}{6} \approx 20.83 \text{ u}^2}\end{aligned}$$

La superficie de la lámina es de 20.83 cm².

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos la lámina pesa $\frac{125}{6} \cdot 2 = \frac{125}{3} \approx 41.6 \text{ gramos}$

c) Si el beneficio total debe ser de 625 € el beneficio por cada gramo debe ser:

$$625 : \frac{125}{3} = 15 \text{ € / gramo .}$$

El precio por gramo debe ser la suma del precio de adquisición y las ganancias:

$$20 + 15 = 35 \text{ €/gramo}$$

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible y determinar sus vértices.
- ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

- a) Llamamos x = número de puertas TIMANFAYA e y = número de puertas TABURIENTE. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	m ² de hierro	m ² de madrea	Beneficios
Nº puertas TIMANFAYA (x)	$2x$	$2x$	$250x$
Nº puertas TABURIENTE (y)	y	$3y$	$350y$
TOTAL	$2x + y$	$2x + 3y$	$250x + 350y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 250x + 350y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera”
 $\rightarrow 2x + y \leq 1000; 2x + 3y \leq 1500$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 1000 \\ 2x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x + y = 1000$		$2x + 3y = 1500$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 1000 - 2x$	x	$y = \frac{1500 - 2x}{3}$	
0	1000	0	500	Primer cuadrante
100	800	300	300	
500	0	750	0	



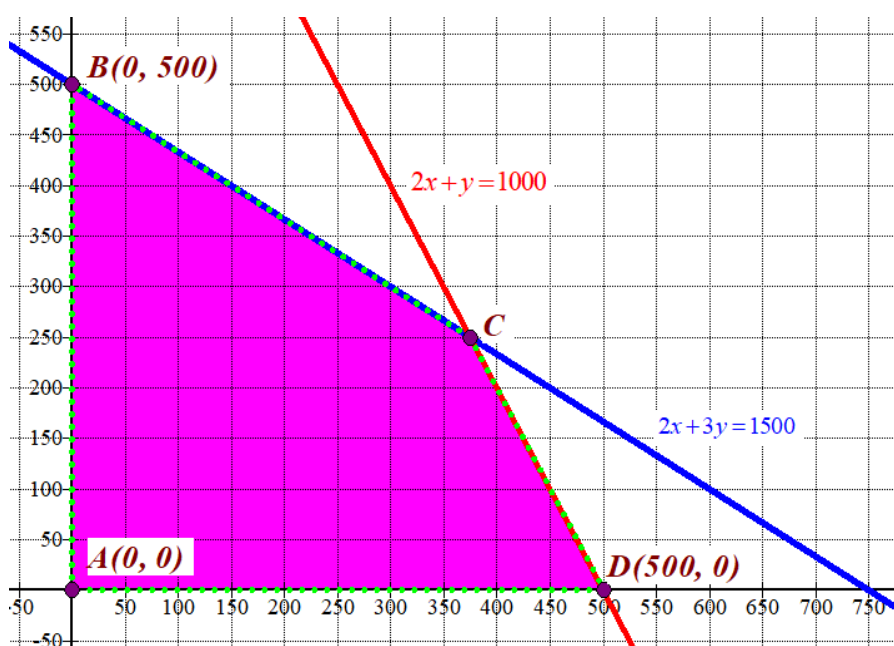
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 1000 \\ 2x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 100 \leq 1000 \\ 200 + 300 \leq 1500 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1000 \\ 2x + 3y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1000 - 2x \\ 2x + 3y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3(1000 - 2x) = 1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3000 - 6x = 1500 \Rightarrow -4x = -1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1500}{4} = 375 \Rightarrow y = 1000 - 750 = 250 \Rightarrow C(375, 250)$$

Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 500), C(375, 250) y D(500, 0)

c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 250x + 350y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 500) \rightarrow B(0, 500) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 500 = 175.000$$

$$C(375, 250) \rightarrow B(375, 250) = 250 \cdot 375 + 350 \cdot 250 = 181.250 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(500, 0) \rightarrow B(500, 0) = 250 \cdot 500 + 350 \cdot 0 = 125.000$$

El beneficio máximo es de 181250 € y se consigue en el vértice C(375, 250), que significa fabricar 375 puertas TIMANFAYA y 250 puertas TABURIENTE.

B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

Llamamos “x” al número de asientos de primera, “y” al número de asientos business y “z” al número de asientos de turista.

“El número de asientos business son el doble que los de primera clase” $\rightarrow y = 2x$

“Por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{cc} \text{Turista} & \text{Business} \\ 15 \longrightarrow & 2 \\ z \longrightarrow & y \end{array} \right\} \Rightarrow 15y = 2z$$

“El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. El importe total cobrado por los asientos fue de 31280€” $\rightarrow$

$$350x + 280y + 200z = 31280.$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 350x + 280y + 200z = 31280 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema planteado

$$\left. \begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 35x + 28(2x) + 20z = 3128 \\ 15(2x) = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 35x + 56x + 20z = 3128 \\ 30x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 91x + 20z = 3128 \\ 15x = z \end{array} \right\} \Rightarrow 91x + 20(15x) = 3128 \Rightarrow 391x = 3128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3128}{391} = 8} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 15 \cdot 8 = 120} \\ \boxed{y = 2 \cdot 8 = 16} \end{array} \right.$$

Hay 8 asientos de primera clase, 16 asientos tipo business y 120 asientos tipo turista.

EBAU Ordinaria 2023



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL
CURSO 2022–2023

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (4)

Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

A1. En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30% de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25% a NUBERIA y el resto a BRINKEN. La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5% para los de LAVOLONA, el 8% para los de NUBERIA y el 12% para los de BRINKEN.

- a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.
- b) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?
- c) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

B1. Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10%. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

- a) Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.
- b) Al menos, 435 clientes no hayan comprado.
- c) Al menos 45 clientes realicen una compra.

A2. En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

- a) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.
- b) Determinar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.
- c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

B2. En una encuesta se pregunta a 10000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

- a) Determinar un intervalo de confianza al 80% para el número medio de botellines consumidos a la semana.
- b) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes es necesario entrevistar?
- c) Si la encuesta se realizara a 8500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82%, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

A3. Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 5x + 9, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en años.

- Hacer una gráfica de $B(x)$. ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?
- ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?
- ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3000 euros?

B3. Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0.24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.

- Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20% del precio de venta?

Figura 1

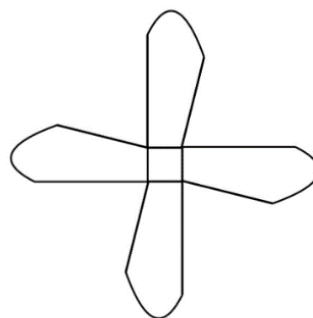
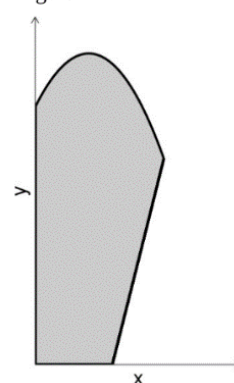


Figura 2



A4. Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.

Para maximizar el beneficio diario:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

B4. En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

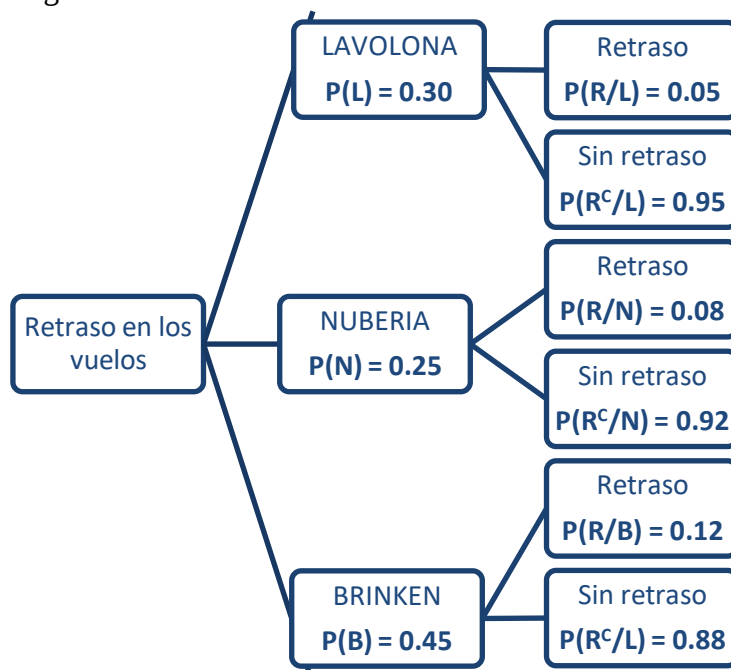
- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.
- ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

SOLUCIONES

A1. En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30% de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25% a NUBERIA y el resto a BRINKEN. La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5% para los de LAVOLONA, el 8% para los de NUBERIA y el 12% para los de BRINKEN.

- Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.
- Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?
- Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(N/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(N/R) &= \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{P(N)P(R/N)}{P(L)P(R/L) + P(N)P(R/N) + P(B)P(R/B)} = \\
 &= \frac{0.25 \cdot 0.08}{0.30 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.08 + 0.45 \cdot 0.12} = \boxed{\frac{20}{89} \approx 0.2247}
 \end{aligned}$$

- c) El suceso “alguno de ellos llegue con retraso” es el contrario de “ninguno de los dos vuelos llega con retraso”. La probabilidad de que un vuelo de BRINKEN no llegue con retraso es $P(R^c/B) = 0.88$. Calculamos la probabilidad pedida usando el suceso contrario.

$$\begin{aligned}
 P(\text{alguno llegue con retraso}) &= 1 - P(\text{ninguno llega con retraso}) = 1 - P(R_1^c/B \cap R_2^c/B) = \\
 &= \{R_1 \text{ y } R_2 \text{ son independientes}\} = 1 - P(R_1^c/B)P(R_2^c/B) = 1 - (0.88)(0.88) = \boxed{0.2256}
 \end{aligned}$$

B1. Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10%. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

- Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.
- Al menos, 435 clientes no hayan comprado.
- Al menos 45 clientes realicen una compra.

La variable X que cuenta el número de clientes que realiza una compra de un grupo de 500 es una variable binomial, pues es dicotómica (compra o no) y cada repetición es independiente entre sí. Como $n = 500$ y $p = P(\text{compra}) = 0.10$ tenemos que la variable es $X = B(500, 0.1)$.

De esta variable sus probabilidades se pueden aproximar por una normal de media $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0.1 = 50$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.1 \cdot 0.9} \approx 6.71$.

Esta aproximación es buena pues $np = 50 > 5$ y $nq = 450 > 5$.

$X = B(500, 0.1)$ se aproxima con $Y = N(50, 6.71)$

- a) Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 60)$.

$$P(40 \leq X \leq 60) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 60.5) =$$

$$= P(Y \leq 60.5) - P(Y \leq 39.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{60.5 - 50}{6.71}\right) - P\left(Z \leq \frac{39.5 - 50}{6.71}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.56) - P(Z \leq -1.56) = P(Z \leq 1.56) - P(Z \geq 1.56) =$$

$$= P(Z \leq 1.56) - [1 - P(Z \leq 1.56)] = 2P(Z \leq 1.56) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \cdot 0.9406 - 1 = \boxed{0.8812}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6065
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6444
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8341
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9368	0,9379	0,9389	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525

- b) El suceso “Al menos, 435 clientes no hayan comprado” es el mismo que “han comprado 65 clientes o menos”. $500 - 435 = 65$.

$$P(X \leq 65) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 65.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{65.5 - 50}{6.71}\right) = P(Z \leq 2.31) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9896}$$

	0	0.01	
0	0.5000	0.5040	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.
1	0.8413	0.8438	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.
1.7	0.9554	0.9564	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.
1.9	0.9713	0.9719	0.
2	0.9772	0.9778	0.
2.1	0.9821	0.9826	0.
2.2	0.9861	0.9864	0.
2.3	0.9896	0.9896	0.
2.4	0.9918	0.9920	0.

c) Nos piden calcular $P(X \geq 45)$.

$$P(X \geq 45) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 44.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{44.5 - 50}{6.71}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0.82) = P(Z \leq 0.82) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7939}$$

	0	0.01	0.02	0.
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.62
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.66
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.76
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.82
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.84

A2. En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

- Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.
- Determinar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.
- Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

- La proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual es de:

$$1 - p = q = \frac{150 - 90}{150} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

- Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{150}} = 0.103$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6 - 0.103; 0.6 + 0.103) = (0.497; 0.703)$$

- Con un nivel de confianza del 97 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6481
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7191
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7824
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8998
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887

d)

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.17 \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{450}} \approx 0.0501$$

El intervalo de confianza es:

$$(q - Error, q + Error) = (0.4 - 0.0501; 0.4 + 0.0501) = (0.3499; 0.4501)$$

B2. En una encuesta se pregunta a 10000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

- Determinar un intervalo de confianza al 80% para el número medio de botellines consumidos a la semana.
- Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes es necesario entrevistar?
- Si la encuesta se realizara a 8500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82%, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

X = número de botellines de cerveza que consumen a la semana. $X = N(5, 2)$

- a) Con un nivel de confianza del 80 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,80 \rightarrow \alpha = 0,20 \rightarrow \alpha/2 = 0,10 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.285$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} \approx 0.0257$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (5 - 0.0257; 5 + 0.0257) = (4.9743; 5.0257)$$

- b) Con un nivel de confianza de 0,9 calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de 0,25:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.25 \Rightarrow 3.29 = 0.25\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{3.29}{0.25}\right)^2 = 173.18$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 174 jóvenes.

c) Con un nivel de confianza del 82 % calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.82 \rightarrow \alpha = 0.18 \rightarrow \alpha/2 = 0.09 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.91 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.34$$

Si se obtuviera el mismo intervalo del apartado a) tendría el mismo error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.0257 = 1.34 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{8500}} \Rightarrow \sigma = \frac{0.0257 \cdot \sqrt{8500}}{1.34} \approx 1.77$$

A3. Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 5x + 9, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en años.

- Hacer una gráfica de $B(x)$. ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?
- ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?
- ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3000 euros?

a) Veamos si la función es continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} B(2) &= 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 5x + 9 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} B(x) = 3$$

La función es continua en $x = 2$.

Veamos si la función es continua en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} B(4) &= 4^2 - 5 \cdot 4 + 9 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 5x + 9 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 5 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} B(x) = 5$$

La función es continua en $x = 4$.

La función es continua en su dominio $= [0, +\infty)$

La función es derivable en $[0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$ y su derivada es:

$$B'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 5, & \text{si } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en los cambios de definición de la función.

¿Es derivable en $x = 2$?

$$\left. \begin{aligned} B'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ B'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 5 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(2^-) = \frac{3}{2} \neq -1 = B'(2^+)$$

La función no es derivable en $x = 2$.

¿Es derivable en $x = 4$?

$$\left. \begin{aligned} B'(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - 5 = 3 \\ B'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(4^-) = 3 \neq 0 = B'(4^+)$$

La función no es derivable en $x = 4$.

La función es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $[0, +\infty) - \{2, 4\}$

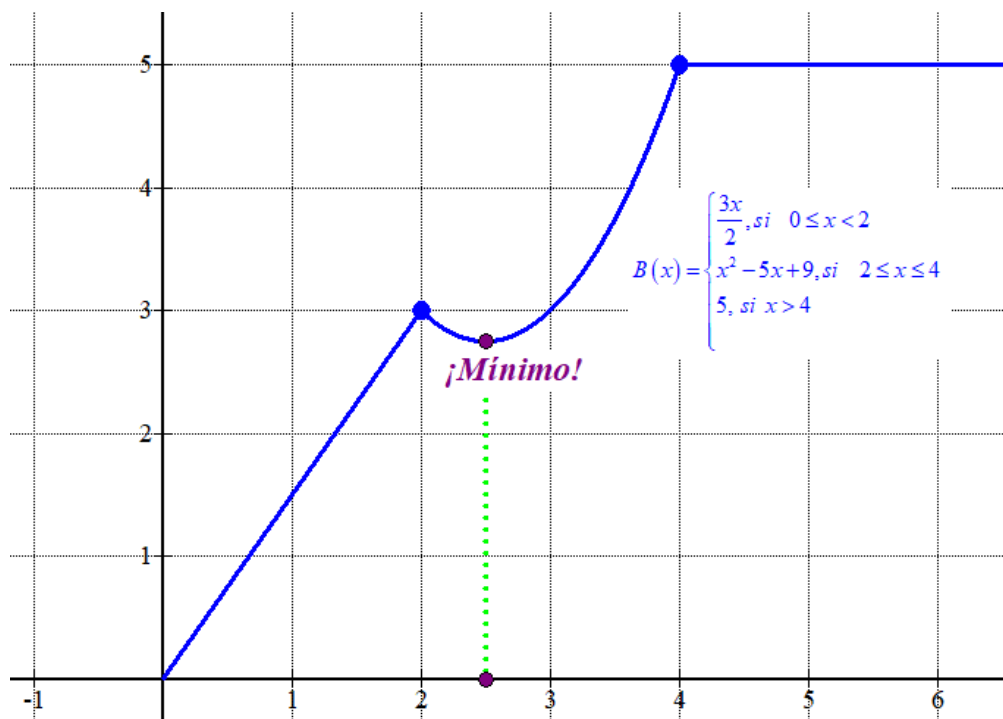
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica. Sabemos que es un trozo de recta oblicua, un trozo de parábola y un trozo de recta horizontal.

Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola.

$$\left. \begin{aligned} B'(x) &= 2x - 5 \\ B'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$B''(x) = 2 \Rightarrow B''(2.5) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2.5 \text{ es mínimo relativo}$$

$0 \leq x < 2$	$2 \leq x \leq 4$	$x > 4$
$x \mid y = \frac{3x}{2}$	$x \mid y = x^2 - 5x + 9$	$x \mid y = 5$
0 $\mid$ 0	2 $\mid$ 3	4 $\mid$ 5 (No)
2 $\mid$ 3 (No)	2.5 $\mid$ 2.75	5 $\mid$ 5
	4 $\mid$ 5	



b) Si observamos la gráfica vemos que los beneficios aumentan de 0 a 2, disminuyen de 2 a 2.5, vuelven a crecer de 2.5 a 4 y de 4 en adelante permanecen constantes.

Aumentan en $[0, 2) \cup (2.5, 4)$. Disminuyen en $(2, 2.5)$.

c) Si observamos la gráfica el beneficio es de 3000 euros en dos momentos: en $x = 2$ y en $x = 3$.

Lo comprobamos viendo cuando la función toma el valor 3.

$$B(x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = 3 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2 \text{ No válido, si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 = 3 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ 5 = 3 \rightarrow \text{¡Imposible! , si } x > 4 \end{cases}$$

El beneficio es igual a 3000 euros en el año segundo y tercero.

B3. Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0.24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.

a) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20% del precio de venta?

Figura 1

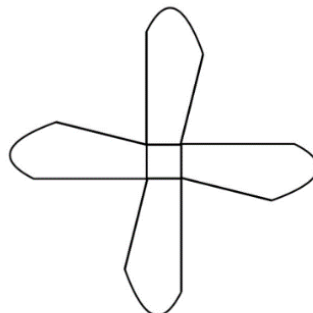
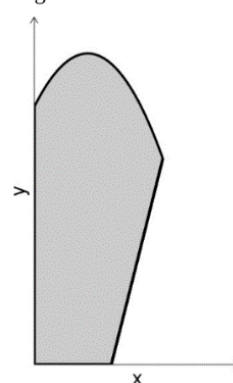
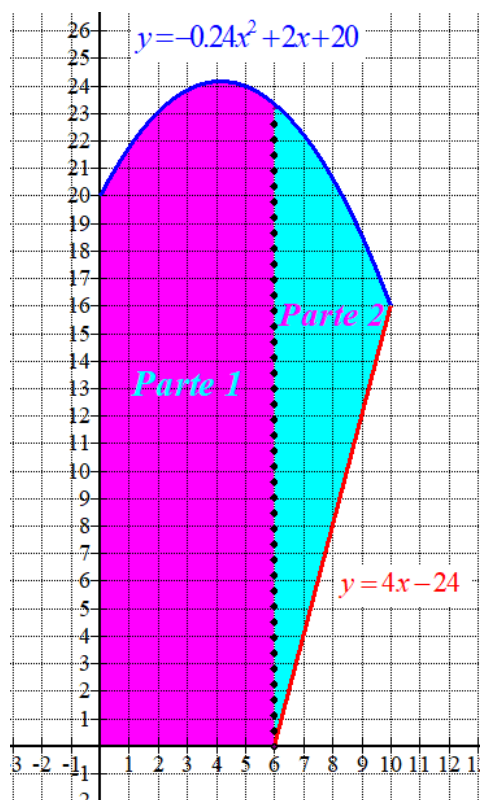


Figura 2



a) Calculamos el área de una de las aspas.



Vemos donde se cortan parábola y recta.

$$\left. \begin{array}{l} y = -0.24x^2 + 2x + 20 \\ y = 4x - 24 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.24x^2 + 2x + 20 = 4x - 24 \Rightarrow -0.24x^2 - 2x + 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-0.24)(44)}}{2(-0.24)} = \frac{2 \pm 6.8}{-0.48} = \begin{cases} \frac{2+6.8}{-0.48} = -18.3 & \text{¡No válido!} \\ \frac{2-6.8}{-0.48} = 10 = x \end{cases}$$

Vemos donde corta la recta el eje de abscisas y dividimos el área en dos partes.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x - 24 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x - 24 = 0 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Hallamos el área de la parte 1.

$$\begin{aligned} \int_0^6 -0.24x^2 + 2x + 20 dx &= \left[-0.24 \frac{x^3}{3} + x^2 + 20x \right]_0^6 = \\ &= \left[-0.24 \frac{6^3}{3} + 6^2 + 20 \cdot 6 \right] - \left[-0.24 \frac{0^3}{3} + 0^2 + 20 \cdot 0 \right] = 138.72 \end{aligned}$$

Hallamos el área de la parte 2.

$$\begin{aligned} \int_6^{10} -0.24x^2 + 2x + 20 - (4x - 24) dx &= \int_6^{10} -0.24x^2 - 2x + 44 dx = \\ &= \left[-0.24 \frac{x^3}{3} - x^2 + 44x \right]_6^{10} = \left[-0.24 \frac{10^3}{3} - 10^2 + 44 \cdot 10 \right] - \left[-0.24 \frac{6^3}{3} - 6^2 + 44 \cdot 6 \right] = 49.28 \end{aligned}$$

La superficie del aspa es de $138.72 + 49.28 = 188 \text{ cm}^2$. Como son cuatro las aspas el área de todas las aspas es de $4 \cdot 188 = 752 \text{ cm}^2$.

Como la base del cuadrado es 6 cm el área del cuadrado central es $6^2 = 36 \text{ cm}^2$.

El total del área del molinillo es $752 + 36 = 788 \text{ cm}^2$.

b) Empezamos a calcular.

1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie $\rightarrow 1.4 \cdot 788 = 1103.2$ céntimos.

20 céntimos por el palito que le sirve de soporte $\rightarrow 20$ céntimos.

El coste de distribución es de 24 céntimos por molinillo $\rightarrow 24$ céntimos.

Nos cuesta producir y poner a la venta cada molinillo $1103.2 + 20 + 24 = 1147.2$ céntimos.

Esta cantidad debe ser el 80 % del precio de venta, pues 20 % son los beneficios.

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \rightarrow x \\ 80\% \rightarrow 1147.2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1147.2 \cdot 100}{80} = 1434$$

El precio de venta debe ser de 1434 céntimos que son 14.34 euros por la venta de cada molinillo.

A4. Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.

Para maximizar el beneficio diario:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario?
¿A cuánto asciende dicho beneficio?

- a) Llamamos x = número de relojes A e y = número de relojes B.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Horas de trabajo	Beneficios
Nº relojes A (x)	$3x$	$70x$
Nº relojes B (y)	$6y$	$160y$
TOTAL	$3x + 6y$	$70x + 160y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 70x + 160y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes” $\rightarrow x + y \geq 15$

“El número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A” $\rightarrow y \leq \frac{x}{2}$

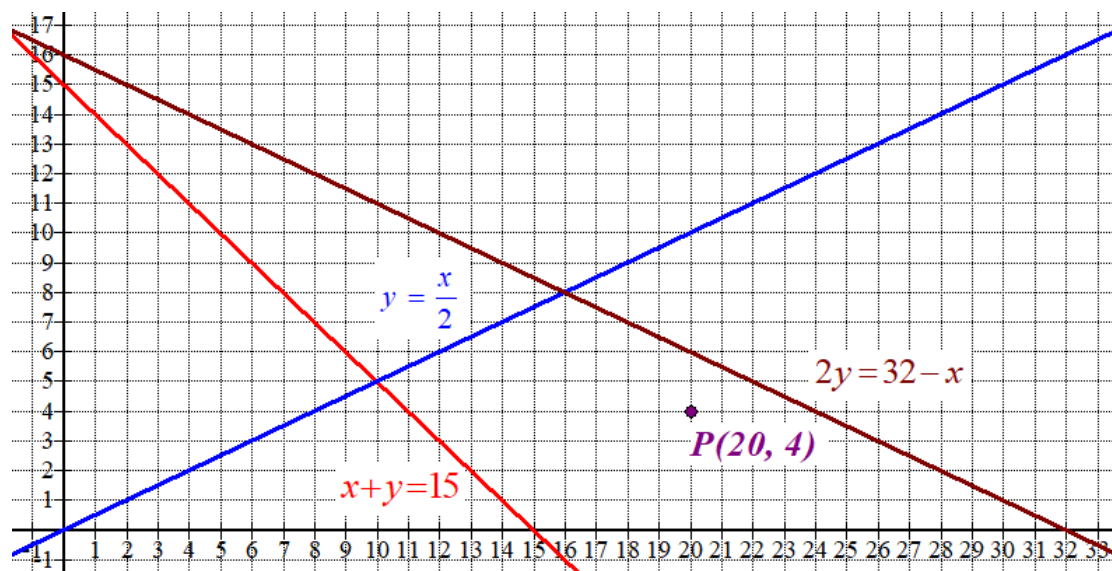
“Los trabajadores solo pueden trabajar $12 \cdot 8 = 96$ horas diarias” $\rightarrow 3x + 6y \leq 96$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 3x + 6y \leq 96 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 15 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 2y \leq 32 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x + y = 15$		$y = \frac{x}{2}$		$2y = 32 - x$	$x \geq 0; y \geq 0$	Primer cuadrante
x	$y = 15 - x$	x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = \frac{32 - x}{2}$	
0	15	0	0	0	16	
10	5	10	5	16	8	
15	0	16	8			



Como las restricciones son

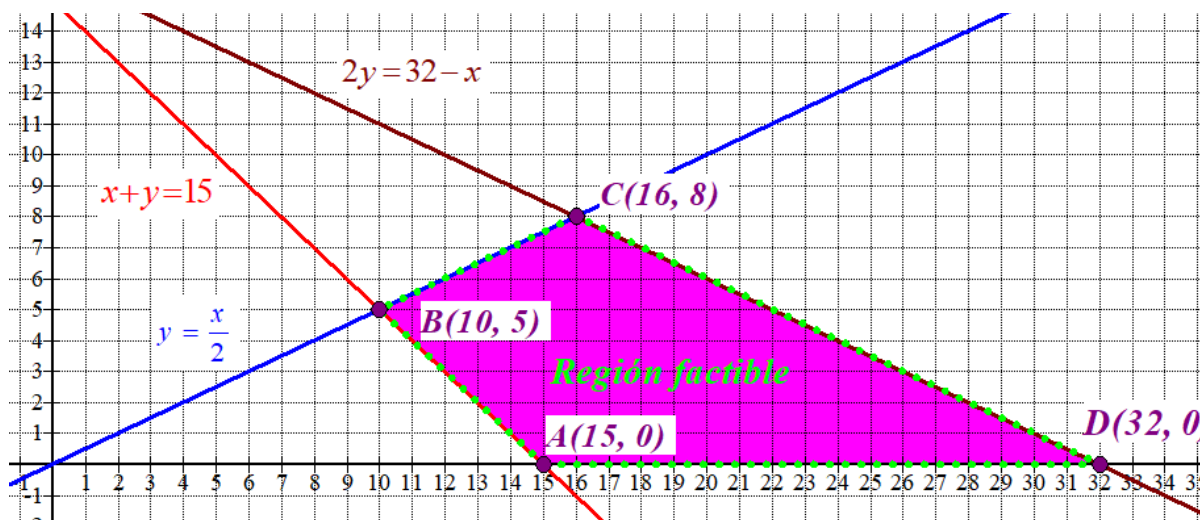
$$\left. \begin{array}{l} y \geq 15 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 2y \leq 32 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas **marrón** y **azul** y por encima de la recta **roja**.

Comprobamos que el punto $P(20, 4)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \geq 15 - 20 \\ 4 \leq \frac{20}{2} \\ 2 \cdot 4 \leq 32 - 20 \\ 20 \geq 0; 4 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 32 - x \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 32 - x \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow C(16, 8)$$

c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 70x + 160y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 70 \cdot 15 + 0 = 1050$$

$$B(10, 5) \rightarrow B(10, 5) = 700 + 800 = 1500$$

$$C(16, 8) \rightarrow B(16, 8) = 70 \cdot 16 + 160 \cdot 8 = 2400 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(32, 0) \rightarrow B(32, 0) = 70 \cdot 32 + 0 = 2240$$

El beneficio máximo es de 2400 € y se consigue en el vértice $C(16, 8)$, que significa fabricar 16 relojes tipo A y 8 de tipo B.

B4. En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.
- ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

- a) Llamamos “x” al número de niños y jóvenes, “y” al número de adultos y “z” al número de jubilados.

“En un barrio viven un total de 875 personas” $\rightarrow x + y + z = 875$

“La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes” $\rightarrow$

$$\frac{y}{4} = \frac{2x}{5}$$

“Por cada 9 jubilados hay 26 del resto” $\rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \rightarrow 26 \\ z \rightarrow x + y \end{array} \right\} \Rightarrow 9(x + y) = 26z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ \frac{y}{4} = \frac{2x}{5} \\ 9(x + y) = 26z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ 5y = 8x \\ 9x + 9y = 26z \end{array} \right\}$$

- b) Utilizamos el método de Gauss para resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ -8x + 5y = 0 \\ 9x + 9y - 26z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} + 8 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -8x + 5y = 0 \\ 8x + 8y + 8z = 7000 \\ \hline 13y + 8z = 7000 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 9 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 9x + 9y - 26z = 0 \\ -9x - 9y - 9z = -7875 \\ \hline -35z = -7875 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ 13y + 8z = 7000 \\ -35z = -7875 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ \Rightarrow 13y + 8z = 7000 \\ \boxed{z = \frac{-7875}{-35} = 225} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 225 = 875 \\ 13y + 8 \cdot 225 = 7000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 650 \\ \Rightarrow 13y = 5200 \rightarrow \boxed{y = \frac{5200}{13} = 400} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 400 = 650 \Rightarrow \boxed{x = 650 - 400 = 250}$$

- c) Hay 250 personas entre niños y jóvenes, 400 adultos y 225 jubilados.



EBAU Extraordinaria 2022
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2021–2022

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (1)

Convocatoria: JULIO

A1. Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera urna tiene 6 blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y 2 negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

- Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.
- Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.
- Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

B1. Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

- Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?
- Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.
- En una muestra de 1000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

A2. En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: “Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95% para el número medio de fotocopias ha sido $[17,9,24,1]$ ”. Según esta información:

- ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?
- ¿Cuál fue la desviación típica?
- Determinar un intervalo de confianza al 90% para el número medio de fotocopias (en miles).

B2. Se ha realizado una encuesta entre los médicos de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

- ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94% para dicha proporción en la población de médicos de las islas.
- Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02?
- ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es $[0,1905,0,2895]$?

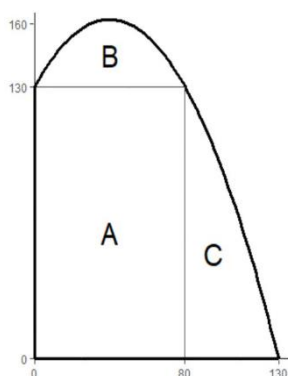
A3. De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2020, puede aproximarse mediante la función:

$$C(t) = \begin{cases} -15t^2 + 150t - 315 & 3 \leq t \leq 6,5 \\ \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} & 6,5 < t \leq 8,5 \\ -18t^2 + 360t - 1720 & 8,5 < t \leq 12 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2020.

- Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?
- Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece) ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?
- ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos activos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

B3. Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0.02x^2 + 1.6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres



parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).

- Calcular la superficie de cada parcela.
- El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22134€. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 €/m², el millo 3,5 €/m², y la cebada 2 €/m², ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

A4. Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45€. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

B4. Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30% los de la primera edición, y del 40% los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

SOLUCIONES

A1. Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera urna tiene 6 blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y 2 negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

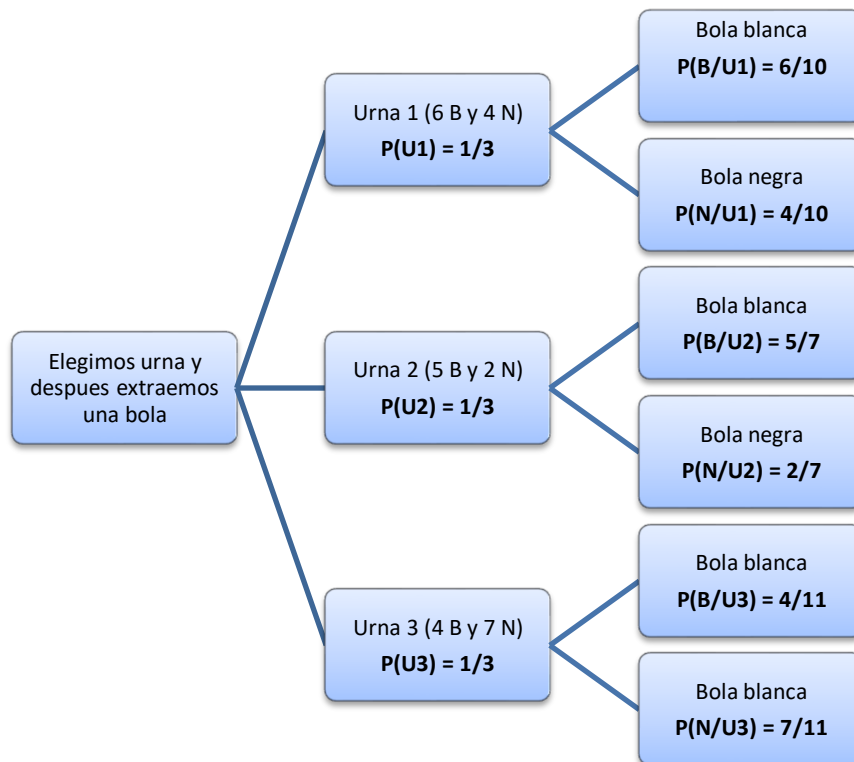
a) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

a) Llamamos U_1 = “Elegir la urna 1”, U_2 = “Elegir la urna 2”, U_3 = “Elegir la urna 3”, B = “Sacar bola blanca” y N = “Sacar bola negra”.

Realizamos un diagrama de árbol.



b) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N) = P(U_1)P(N/U_1) + P(U_2)P(N/U_2) + P(U_3)P(N/U_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} = \boxed{\frac{509}{1155} \approx 0.44}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1)P(B/U_1)}{1 - P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{1 - \frac{509}{1155}} = \boxed{\frac{231}{646} \approx 0.358}$$

B1. Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

- Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?
- Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.
- En una muestra de 1000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

X = “el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias”. $X = N(5.25, 1.25)$

- a) Nos piden calcular el valor de $P(X > 6)$.

$$P(X > 6) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X - 5.25}{1.25} > \frac{6 - 5.25}{1.25}\right) = P(Z > 0.6) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.6) = \{Miramos en la tabla N(0,1)\} = 1 - 0.7257 = \boxed{0.2743}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7

- b) Si $X = N(5.25, 1.25)$ entonces $\overline{X}_{64} = N\left(5.25, \frac{1.25}{\sqrt{64}}\right) = N\left(5.25, \frac{5}{32}\right)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} < 5)$.

$$P(\overline{X}_{64} < 5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{5 - 5.25}{5/32}\right) = P(Z < -1.6)$$

$$= P(Z > 1.6) = 1 - P(Z < 1.6) = 1 - 0.9452 = \boxed{0.0548}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.8
0.9	0.8159	0.8
1	0.8413	0.8
1.1	0.8643	0.9
1.2	0.8849	0.9
1.3	0.9032	0.9
1.4	0.9192	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	0.9452	0.9
1.7	0.9554	0.9

- c) Calculamos $P(X > 5.5)$.

$$P(X > 5.5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{5.5 - 5.25}{1.25}\right) = P(Z > 0.2) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.2) = \{Miramos en la tabla N(0,1)\} = 1 - 0.5793 = \boxed{0.4207}$$

El número de personas de un grupo de 1000 que se puede esperar que dediquen a caminar un tiempo superior a 5.5 horas es de $0.4207 \cdot 1000 = 420.7$. Aproximadamente se espera que sean unas 421 personas.

A2. En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: “Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95% para el número medio de fotocopias ha sido [17,9,24,1]”. Según esta información:

- ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?
- ¿Cuál fue la desviación típica?
- Determinar un intervalo de confianza al 90% para el número medio de fotocopias (en miles).

Estamos hablando de un intervalo de confianza a partir de una muestra de tamaño $n = 16$.

X = número de fotocopias (en miles).

El intervalo de confianza es [17.9, 24.1].

- La media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{17.9 + 24.1}{2} = 21$$

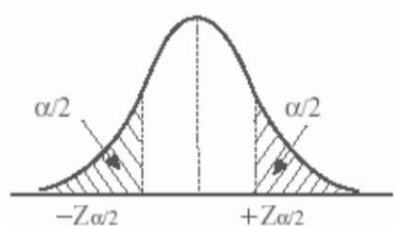
La media del número de fotocopias realizado es de 21000 fotocopias.

- El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

$$Error = \frac{24.1 - 17.9}{2} = 3.1$$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9

Utilizamos la fórmula del error.

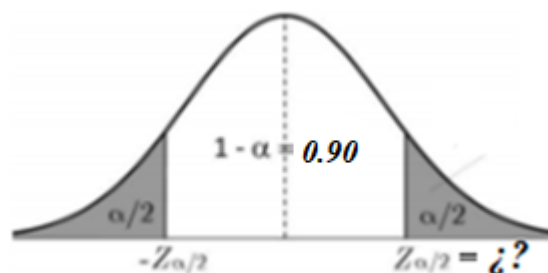
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.1 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \Rightarrow 4 \cdot 3.1 = 1.96 \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{12.4}{1.96} \approx 6.327$$

La desviación típica es de 6.327 horas.

- Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,83
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,96



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6.327}{\sqrt{16}} = 2.602$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (21 - 2.602; 21 + 2.602) = (18.398; 23.602)$$

El intervalo de confianza es entre 18398 y 23602 fotocopias por semana.

B2. Se ha realizado una encuesta entre los médicos de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

- ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94% para dicha proporción en la población de médicos de las islas.
- Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02?
- ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es [0,1905,0,2895]?

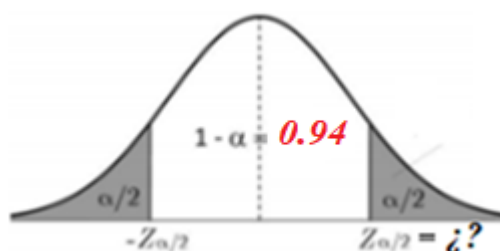
- a) En una muestra de tamaño $n = 350$ la proporción de médicos que sufrieron ansiedad es

$$p = \frac{84}{350} = 0.24.$$

Con un nivel de confianza del 94 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9439
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9648	0,9655	0,9661	0,9667	0,9673	0,9678	0,9683	0,9688	0,9691
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{350}} \approx 0.043$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.24 - 0.043; 0.24 + 0.043) = (0.197; 0.283)$$

- b) Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 0,02:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.88} = \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.88}\right)^2 = \frac{0.24 \cdot 0.76}{n} \Rightarrow n = \frac{0.24 \cdot 0.76}{\left(\frac{0.02}{1.88}\right)^2} \approx 1611.69$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 1612 médicos.

c) El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

$$\text{Error} = \frac{0.2895 - 0.1905}{2} = 0.0495$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.0495 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{350}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.0495}{\sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{350}}} \approx 2.17$$

Hallamos el nivel de confianza correspondiente al valor $z_{\alpha/2} = 2.17$

$$z_{\alpha/2} = 2.17 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \Rightarrow \alpha/2 = 1 - 0.985 = 0.015 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0
2,1	0,9821	0,9826	0,9831	0,9836	0,9841	0,9846	0,9850	0,9855	0
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0

Como $1 - \alpha = 0.97$ el nivel de confianza es del 97 %.

A3. De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2020, puede aproximarse mediante la función:

$$C(t) = \begin{cases} -15t^2 + 150t - 315 & 3 \leq t \leq 6,5 \\ \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} & 6,5 < t \leq 8,5 \\ -18t^2 + 360t - 1720 & 8,5 < t \leq 12 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2020.

- Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?
- Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece) ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?
- ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos activos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

a) Estudiamos la continuidad en $t = 6.5$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 6.5^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6.5^-} -15t^2 + 150t - 315 = -15 \cdot 6.5^2 + 150 \cdot 6.5 - 315 = 26.25 \\ \lim_{t \rightarrow 6.5^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6.5^+} \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} = \frac{53}{8} \cdot 6.5 - \frac{269}{16} = 26.25 \\ C(6.5) &= 26.25 \end{aligned} \right\}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 6.5^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6.5^+} C(t) = C(6.5) = 26.25$ la función es continua en $t = 6.5$.

Estudiamos la continuidad en $t = 8.5$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 8.5^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 8.5^-} \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} = \frac{53}{8} \cdot 8.5 - \frac{269}{16} = 39.5 \\ \lim_{t \rightarrow 8.5^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 8.5^+} -18t^2 + 360t - 1720 = -18 \cdot 8.5^2 + 360 \cdot 8.5 - 1720 = 39.5 \\ C(8.5) &= 39.5 \end{aligned} \right\}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 8.5^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 8.5^+} C(t) = C(8.5) = 39.5$ la función es continua en $t = 8.5$.

La función es continua en $[3, 12]$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$3 \leq t \leq 6,5$

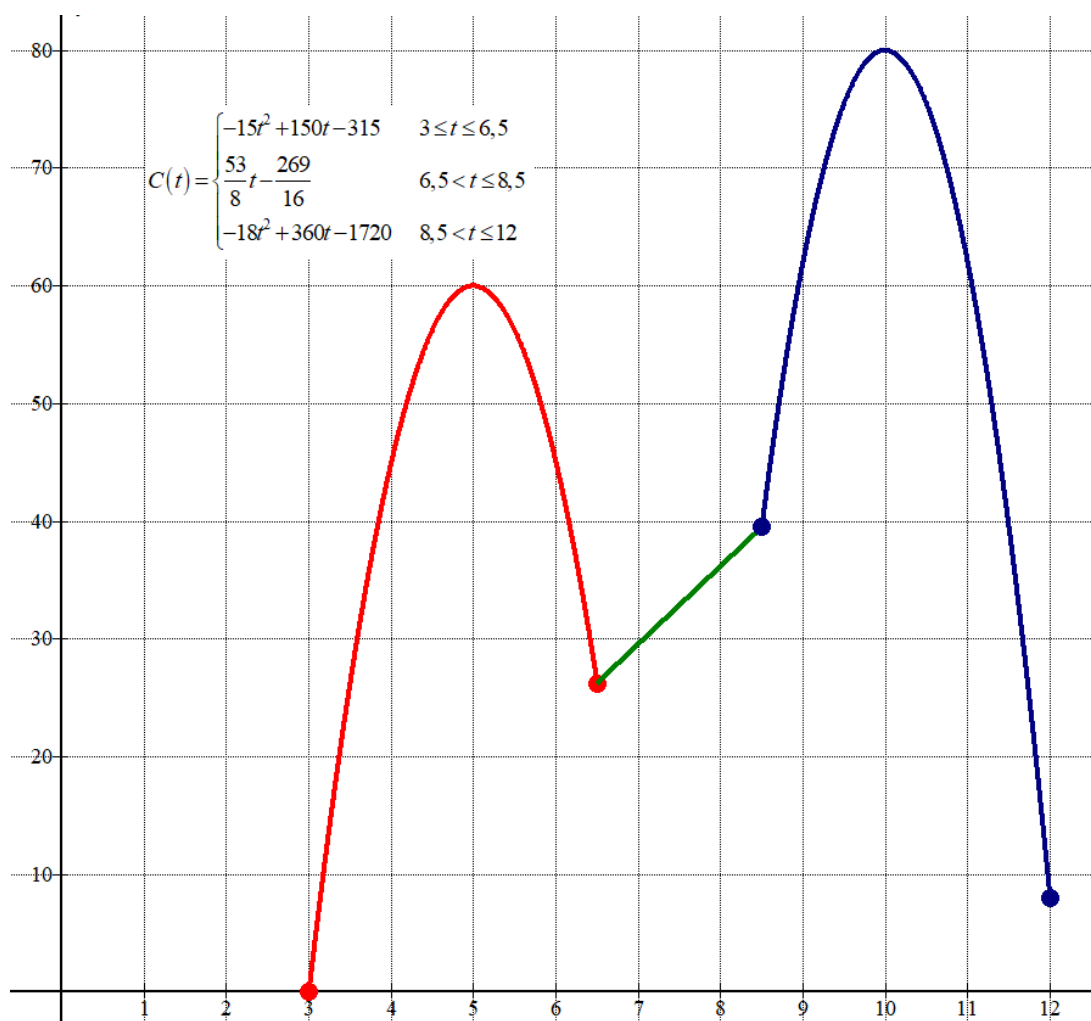
t	$C(t) = -15t^2 + 150t - 315$
3	0
5	60
6	45
6.5	26.25

$6,5 < t \leq 8,5$

t	$C(t) = \frac{53}{8}t - \frac{269}{16}$
6.5	26.25
8.5	39.5

$8,5 < t \leq 12$

t	$C(t) = -18t^2 + 360t - 1720$
8.5	39.5
9	62
10	80
12	8



- b) El primer y el tercer trozo de función son trozos de parábolas y el segundo es un trozo de recta creciente.

Hallamos su evolución usando la derivada.

$$\text{Si } 3 \leq t \leq 6,5 \Rightarrow C(t) = -15t^2 + 150t - 315 \Rightarrow C'(t) = -30t + 150$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -30t + 150 = 0 \Rightarrow 30t = 150 \Rightarrow \boxed{t = 5}$$

$$C''(t) = -30 \Rightarrow C''(5) = -30 < 0 \Rightarrow t = 5 \text{ es máximo relativo}$$

$$\text{Si } 6,5 < t \leq 8,5 \Rightarrow C(t) = \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} \Rightarrow C'(t) = \frac{53}{8} > 0 \Rightarrow \text{La función es creciente en } (6,5, 8,5)$$

$$\text{Si } 8,5 < t \leq 12 \Rightarrow C(t) = -18t^2 + 360t - 1720 \Rightarrow C'(t) = -36t + 360$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -36t + 360 = 0 \Rightarrow 36t = 360 \Rightarrow \boxed{t = 10}$$

$$C''(t) = -36 \Rightarrow C''(10) = -36 < 0 \Rightarrow t = 10 \text{ es máximo relativo}$$

La función crece entre los 3 y 5 meses, decrece entre 5 y 6.5, crece entre 6.5 y 10 meses y decrece entre 10 y 12 meses.

Los picos de casos COVID se produjeron a los 5 y a los 10 meses, es decir, en mayo y en octubre.

Como $C(5) = 60$ y $C(10) = 80$ en los picos de COVID habían 60 y 80 casos activos, respectivamente.

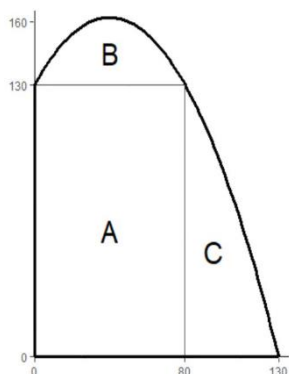
- c) Buscamos el valor de t para el cual $C(t) = 62$. Observando la gráfica solo se produce a partir del 8.5 mes.

$$C(t) = 62 \Rightarrow -18t^2 + 360t - 1720 = 62 \Rightarrow -18t^2 + 360t - 1782 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 20t + 99 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(99)}}{2} = \begin{cases} \frac{20+2}{2} = 11 = t \\ \frac{20-2}{2} = \boxed{9=t} \end{cases}$$

Por primera vez se alcanzan los 62 casos a los 9 meses, es decir, en septiembre.

B3. Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0.02x^2 + 1.6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres



parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).

a) Calcular la superficie de cada parcela.

b) El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22134€. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 €/m², el millo 3,5 €/m², y la cebada 2 €/m², ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

a) El área de la parcela A es un rectángulo de base 80 y altura 130, por lo que:

$$\text{Área A} = 80 \cdot 130 = 10400 \text{ m}^2$$

El área de la parcela B es la integral definida entre 0 y 80 de la diferencia de la parábola y la recta $y = 130$.

$$\begin{aligned} \text{Área B} &= \int_0^{80} (-0.02x^2 + 1.6x + 130 - (130)) dx = \int_0^{80} (-0.02x^2 + 1.6x) dx = \\ &= \left[-0.02 \frac{x^3}{3} + 1.6 \frac{x^2}{2} \right]_0^{80} = \\ &= \left[-0.02 \frac{80^3}{3} + 1.6 \frac{80^2}{2} \right] - \left[-0.02 \frac{0^3}{3} + 1.6 \frac{0^2}{2} \right] = \boxed{\frac{5120}{3} \approx 1706.66 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

El área de la parcela C es la integral definida entre 80 y 130 de función $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área C} &= \int_{80}^{130} (-0.02x^2 + 1.6x + 130) dx = \left[-0.02 \frac{x^3}{3} + 1.6 \frac{x^2}{2} + 130x \right]_{80}^{130} = \\ &= \left[-0.02 \frac{130^3}{3} + 1.6 \frac{130^2}{2} + 130 \cdot 130 \right] - \left[-0.02 \frac{80^3}{3} + 1.6 \frac{80^2}{2} + 130 \cdot 80 \right] = \\ &= \boxed{\frac{11000}{3} \approx 3666.66 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

b) La parcela más grande es la A por lo que ahí debe plantar lo más caro (el trigo), la siguiente en tamaño es la C, por lo que ahí debe sembrar lo siguiente en rentabilidad (el millo) y por último en la B (la parcela más pequeña) debe plantar cebada.

El beneficio total es la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$\text{Beneficio} = \left(10400 \cdot 4 + \frac{11000}{3} \cdot 3.5 + \frac{5120}{3} \cdot 2 \right) - 22134 = \boxed{\frac{107138}{3} \approx 35712.66 \text{ €}}$$

A4. Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45€. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

a) Llamamos x = número de lotes A e y = número de lotes B.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Aguacateros	Mangos	Beneficios
Nº lotes A (x)	x	$2x$	$40x$
Nº lotes B (y)	$2y$	y	$45y$
TOTAL	$x + 2y$	$2x + y$	$40x + 45y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 40x + 45y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Tenemos 350 aguacateros” $\rightarrow x + 2y \leq 350$

“Tenemos 400 mangos” $\rightarrow 2x + y \leq 400$

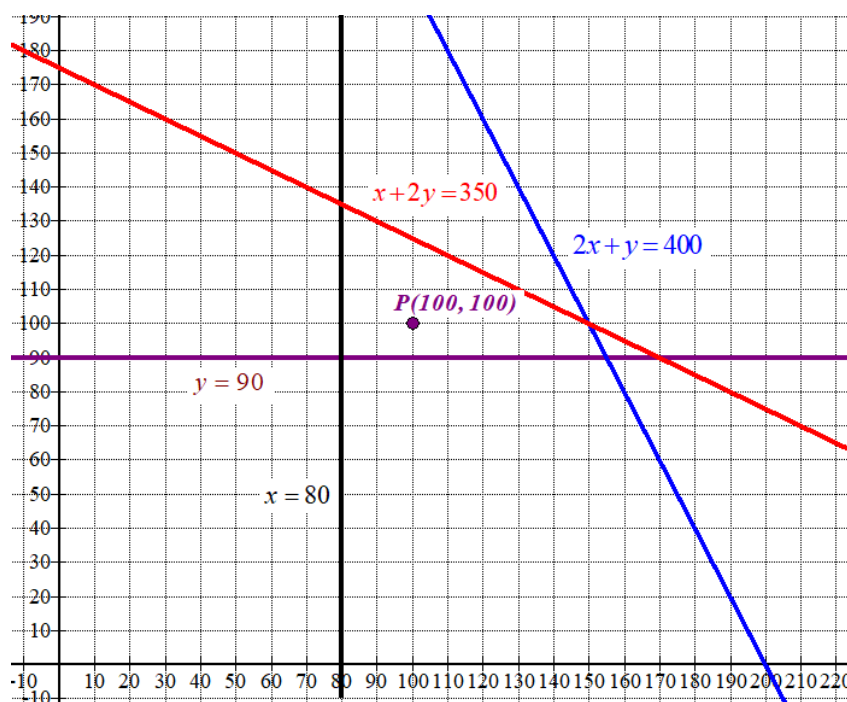
“Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B” $\rightarrow x \geq 80; y \geq 90$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 350 \\ 2x + y \leq 400 \\ x \geq 80 \\ y \geq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 350 \\ 2x + y \leq 400 \\ x \geq 80 \\ y \geq 90 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x + 2y = 350$		$2x + y = 400$		$y = 90$	$x = 80$
x	$y = \frac{350 - x}{2}$	x	$y = 400 - 2x$	x	Recta vertical
50	150	0	400	0	90
80	135	155	90	80	90
350	0	200	0		



Como las restricciones son

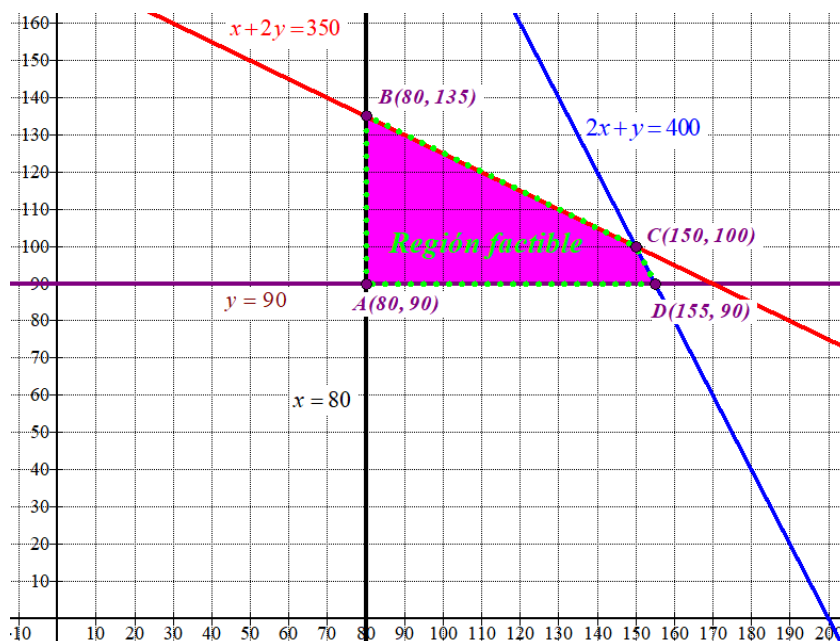
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 350 \\ 2x + y \leq 400 \\ x \geq 80 \\ y \geq 90 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja, a la derecha de la recta vertical y por encima de la recta horizontal $y = 90$.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 350 \\ 200 + 100 \leq 400 \\ 100 \geq 80 \\ 100 \geq 90 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices B y D resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$B \rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ x + 2y = 350 \end{cases} \Rightarrow 80 + 2y = 350 \Rightarrow 2y = 270 \Rightarrow y = \frac{270}{2} = 135 \Rightarrow B(80, 135)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 90 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \Rightarrow 2x + 90 = 400 \Rightarrow 2x = 310 \Rightarrow x = \frac{310}{2} = 155 \Rightarrow D(155, 90)$$

c) Valoramos la función beneficios $B(x, y) = 40x + 45y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(80, 90) \rightarrow B(80, 90) = 3200 + 4050 = 7250$$

$$B(80, 135) \rightarrow B(80, 135) = 3200 + 6075 = 9275$$

$$C(150, 100) \rightarrow B(150, 100) = 6000 + 4500 = 10500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(155, 90) \rightarrow B(155, 90) = 6200 + 4050 = 10250$$

El beneficio máximo es de 10500 € y se consigue en el vértice C(150, 100), que significa vender 150 lotes del tipo A y 100 del tipo B.

B4. Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30% los de la primera edición, y del 40% los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

Llamamos “x” al número de ejemplares de la 1ª edición vendidos, “y” a los vendidos de la 2ª edición, “z” a los vendidos de la 3ª edición.

“Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones” $\rightarrow x + y + z = 600$

“Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30% los de la primera edición, y del 40% los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición)” $\rightarrow$ Precio de la 3ª edición = 36 €, precio de la 2ª = $0.60 \cdot 36 = 21.6$ €, precio de la 1ª = $0.70 \cdot 36 = 25.2$ € $\rightarrow 36z + 21.6y + 25.2x = 19152$

“El número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición” $\rightarrow x + y = \frac{z}{2}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 36z + 21.6y + 25.2x = 19152 \\ x + y = \frac{z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 600 - z \\ 36z + 21.6y + 25.2x = 19152 \\ x + y = \frac{z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 600 - z \\ \Rightarrow 36z + 21.6y + 25.2x = 19152 \\ 600 - z = \frac{z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 600 - z \\ \Rightarrow 36z + 21.6y + 25.2x = 19152 \\ 1200 - 2z = z \rightarrow 3z = 1200 \rightarrow \boxed{z = 400} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 600 - 400 \\ 36 \cdot 400 + 21.6y + 25.2x = 19152 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 200 \\ 21.6y + 25.2x = 4752 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 200 - y \\ 21.6y + 25.2x = 4752 \end{array} \right\} \Rightarrow 21.6y + 25.2(200 - y) = 4752 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21.6y + 5040 - 25.2y = 4752 \Rightarrow 3.6y = 288 \Rightarrow \boxed{y = \frac{288}{3.6} = 80} \Rightarrow \boxed{x = 200 - 80 = 120}$$

Se han vendido 120 libros de la 1ª edición, 80 de la 2ª y 400 de la 3ª.

EBAU Ordinaria 2022



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL
CURSO 2021-2022

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (4)

Convocatoria: JUNIO

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

A1. Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40% de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35% a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4% de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6% de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9% de los que usan el servidor 3.

- Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación
- ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulte bloqueado?
- Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

B1. Una compañía de seguros tiene asegurados 2500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

- ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?
- La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

A2. Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza [128,76, 134,32] para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es 729 €²:

- ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?
- Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en el apartado (a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 €?

B2. En un periódico se lee el siguiente titular: “Un 63% de los españoles valoran positivamente el teletrabajo”.

- Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90% para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.
- Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1% y con un nivel de confianza del 88%?

A3. Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la siguiente función:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) & 0 \leq m < 10 \\ \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) & 10 \leq m \leq 15 \end{cases}$$

- Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.
- ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimos y máximos? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?
- ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros (10.000 m^3)?

B3. En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

- ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?
- El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 €, y pintar el mural ha costado en total 95€, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

A4. Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 €, 20 € y 60 € respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 € ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- ¿Cuántas personas van a cada actividad?

B4. Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

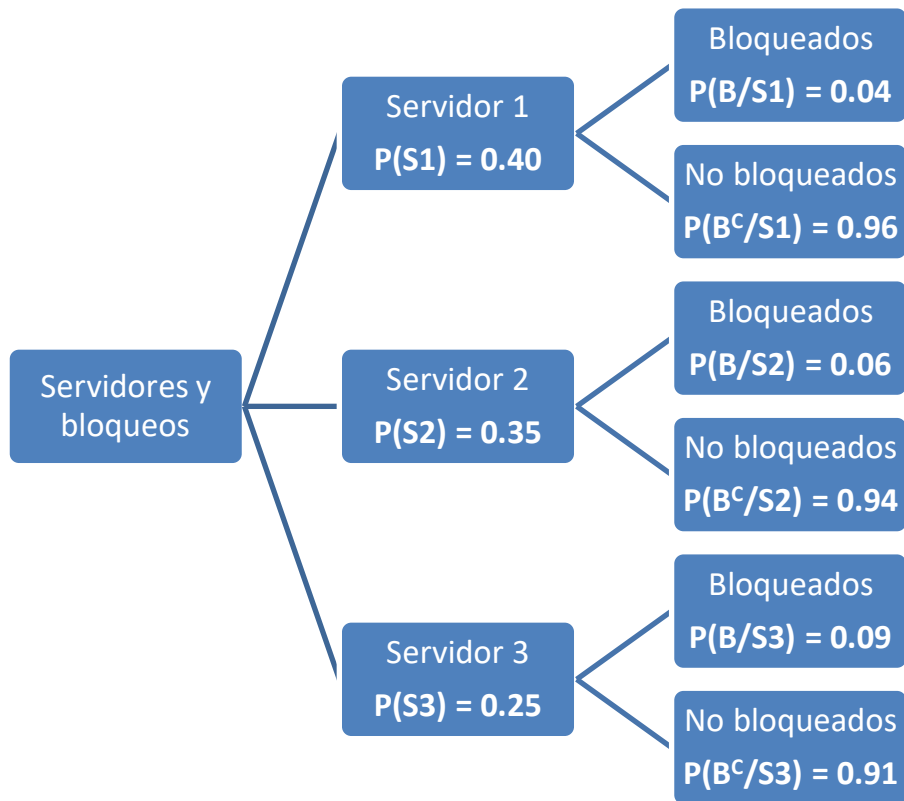
SOLUCIONES

A1. Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40% de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35% a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4% de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6% de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9% de los que usan el servidor 3.

- Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación
- ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulte bloqueado?
- Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

- Llamamos S1 a “Utilizar el servidor 1”, S2 a “Utilizar el servidor 2”, S3 a “Utilizar el servidor 3” y B a “Es bloqueado”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Utilizamos el teorema de la probabilidad total y la información del diagrama de árbol.

$$\begin{aligned}
 P(B^c) &= P(S1)P(B^c/S1) + P(S2)P(B^c/S2) + P(S3)P(B^c/S3) = \\
 &= 0.40 \cdot 0.96 + 0.35 \cdot 0.94 + 0.25 \cdot 0.91 = \boxed{0.9405}
 \end{aligned}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

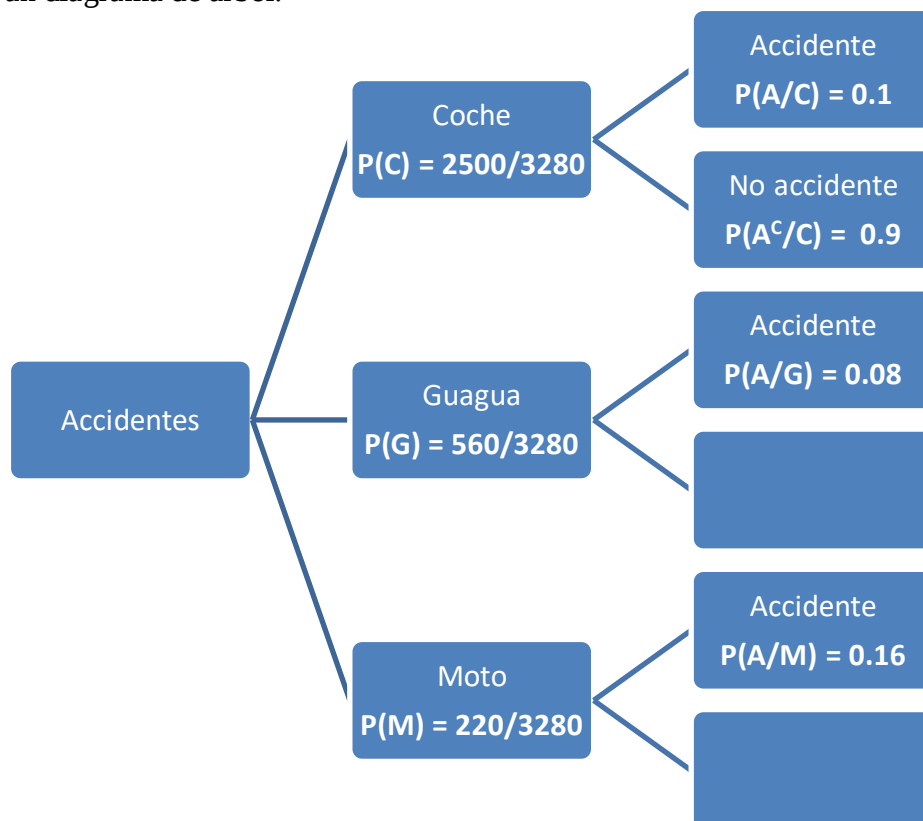
$$P(S2/B) = \frac{P(S2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(S2)P(B/S2)}{1 - P(B^c)} = \frac{0.35 \cdot 0.06}{1 - 0.9405} = \boxed{\frac{6}{17} \approx 0.353}$$

B1. Una compañía de seguros tiene asegurados 2500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

- ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?
- La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Hay un total de $2500 + 560 + 220 = 3280$ vehículos.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Calculamos la probabilidad de que un vehículo tenga un accidente.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(C)P(A/C) + P(G)P(A/G) + P(M)P(A/M) = \\
 &= \frac{2500}{3280} \cdot 0.1 + \frac{560}{3280} \cdot 0.08 + \frac{220}{3280} \cdot 0.16 = \boxed{\frac{330}{3280}}
 \end{aligned}$$

Se espera que tengan un accidente 330 vehículos de los 3280 asegurados.

- Usamos la binomial que cuenta el número de coches accidentados de los 2500 asegurados.

$X = N^{\circ}$ de coches accidentados. $n = 2500$, $p = 0.1$

$X = B(2500, 0.1)$

Como el número de repeticiones es muy alto y además nos piden la probabilidad de que sean 270 o más los vehículos accidentados debemos de aproximarlos con una normal.

$n \cdot p = 250 > 5$; $n \cdot q = 2500 \cdot 0.92250 > 5$. La aproximación es adecuada.

La aproximamos con una normal de media $n \cdot p = 250$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 15$.

$Y = N(250, 15)$

Nos piden calcular $P(X \geq 270)$. Lo hacemos usando la aproximación a la normal.

$$P(X \geq 270) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 269.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{Y - 250}{15} \geq \frac{269.5 - 250}{15}\right) = P(Z \geq 1.3) = 1 - P(Z \leq 1.3) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9032 = \boxed{0.0968}$$

	0	0.1
0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1	0.8413	0.84
1.1	0.8643	0.86
1.2	0.8849	0.88
1.3	0.9032	0.90
1.4	0.9192	0.92
1.5	0.9332	0.93

c) Es una binomial $X = N^\circ$ de guaguas de un grupo de 10 vehículos.

El número de repeticiones es $n = 10$.

La probabilidad de que un vehículo sea una guagua es de $p = P(G) = 560/3280 = 7/41$.

El valor de $q = 1 - p = 1 - 7/41 = 34/41$.

$X = B(10, 7/41)$

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \left(\frac{7}{41}\right)^0 \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{7}{41}\right)^1 \left(\frac{34}{41}\right)^9 \right] \approx \boxed{0.53}$$

- A2.** Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128,76, 134,32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es 729 €^2 :
- a) ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?
- b) Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en el apartado (a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 € ?

Estamos hablando de un intervalo de confianza a partir de una muestra de tamaño $n = 289$.

X = gasto anual en electricidad en un hogar canario.

Varianza = $729 \rightarrow$ Desviación típica es $\sigma = \sqrt{729} = 27 \text{ €}$

$X = N(\mu, 27)$

El intervalo de confianza es $[128,76, 134,32]$.

- a) La media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{128,76 + 134,32}{2} = 131,54 \text{ €}$$

La media del gasto anual en electricidad por hogar es $131,54 \text{ €}$.

El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

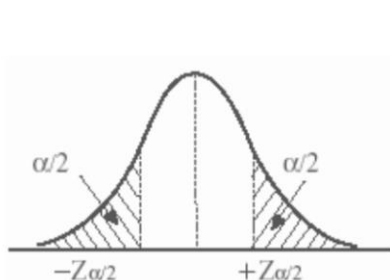
$$\text{Error} = \frac{134,32 - 128,76}{2} = 2,78 \text{ €}$$

Para hallar el nivel de confianza utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2,78 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{27}{\sqrt{289}} \Rightarrow 17 \cdot 2,78 = z_{\alpha/2} \cdot 27 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{17 \cdot 2,78}{27} = 1,75$$

Si $z_{\alpha/2} = 1,75$ obtenemos el nivel de confianza

$$z_{\alpha/2} = 1,75 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9599 \rightarrow \alpha/2 = 0,0401 \rightarrow \alpha = 0,0802 \rightarrow 1 - \alpha = 0,9198$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,83
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9590	0,9599	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,97

Redondeamos a 0,92 y el nivel de confianza es del 92 %

b) Si $\mu = 131.54$ entonces la distribución del gasto es $X = N(131.54, 27)$

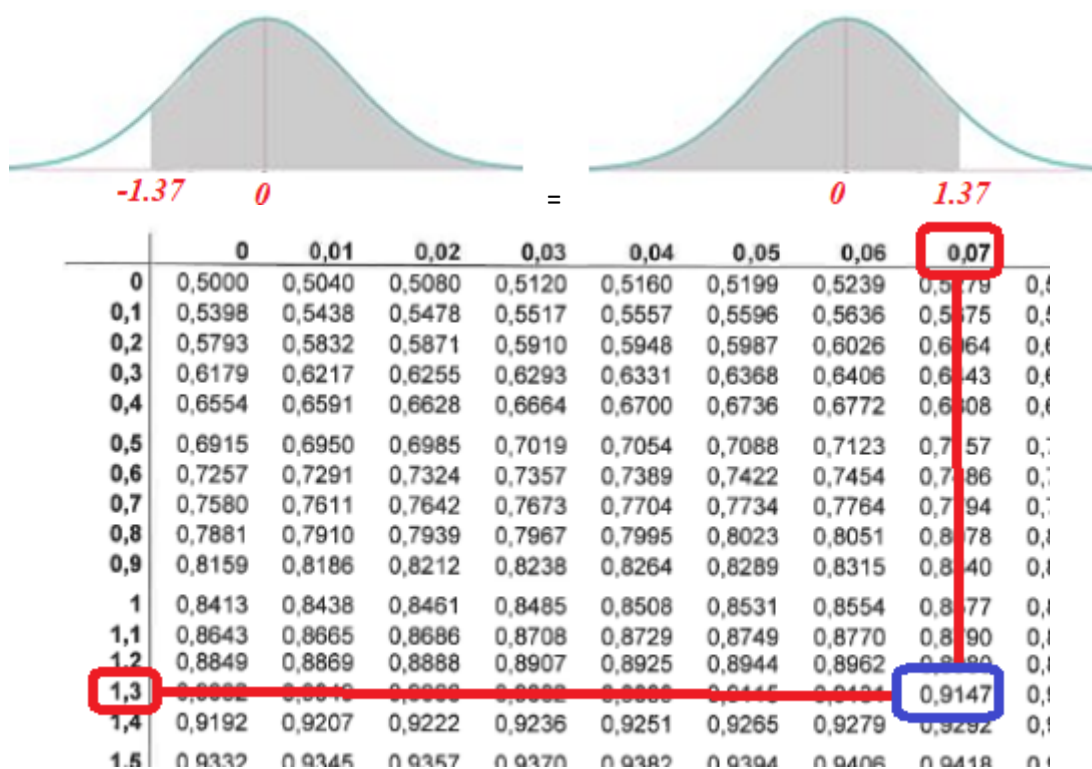
Entonces la media gasto anual de 576 hogares sigue una distribución

$$\overline{X}_{576} = N\left(131.54, \frac{27}{\sqrt{576}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{576} = N(131.54, 1.125).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{576} \geq 130)$.

$$P(\overline{X}_{576} \geq 130) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{576} - 131.54}{1.125} \geq \frac{130 - 131.54}{1.125}\right) = P(Z \geq -1.37) =$$

$$= P(Z \leq 1.37) = \{\text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \boxed{0.9147}$$



B2. En un periódico se lee el siguiente titular: “Un 63% de los españoles valoran positivamente el teletrabajo”.

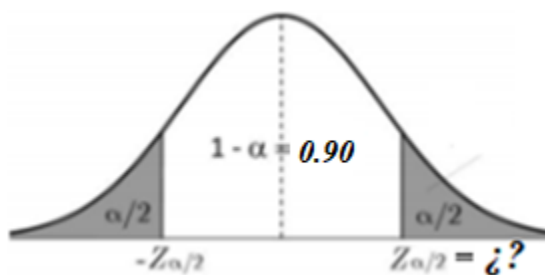
- a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90% para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.
- b) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1% y con un nivel de confianza del 88%?

- a) En una muestra de tamaño $n = 800$ la proporción de personas que valoran positivamente el teletrabajo es $p = 0.63$

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,83
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,96



Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.63 \cdot 0.37}{800}} \approx 0.028$$

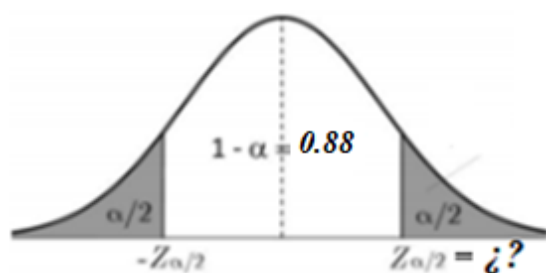
El intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.63 - 0.028; 0.63 + 0.028) = (0.602; 0.658)$$

- b) Con un nivel de confianza del 88 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \alpha/2 = 0,06 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,94 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.55 + 1.56}{2} = 1.555$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,83
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,96



Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de 0,01:

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.01 = 1.555 \cdot \sqrt{\frac{0.63 \cdot 0.37}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{1.555} = \sqrt{\frac{0.63 \cdot 0.37}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.01}{1.555} \right)^2 = \frac{0.63 \cdot 0.37}{n} \Rightarrow n = \frac{0.63 \cdot 0.37}{\left(\frac{0.01}{1.555} \right)^2} \approx 5636.42 \end{aligned}$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 5637 personas.

A3. Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la siguiente función:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) & 0 \leq m < 10 \\ \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) & 10 \leq m \leq 15 \end{cases}$$

- a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.
 b) ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimos y máximos? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?
 c) ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros (10.000 m^3)?

a) Para que sea continua debe serlo en $m = 10$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 10^-} c(m) &= \lim_{m \rightarrow 10^-} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = \frac{1}{10}(10^2 - 90 + 30) = 4 \\ \lim_{m \rightarrow 10^+} c(m) &= \lim_{m \rightarrow 10^+} \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = \frac{1}{5}(10^2 - 250 + 170) = 4 \\ c(10) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow 10^-} c(m) = \lim_{m \rightarrow 10^+} c(m) = c(10) = 4$$

La función es continua en $[0, 15]$.

Usamos la derivada para estudiar su crecimiento o decrecimiento.

$$c'(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(2m - 9) & 0 \leq m < 10 \\ \frac{1}{5}(2m - 25) & 10 < m \leq 15 \end{cases}$$

$$c'(m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{10}(2m - 9) = 0 \rightarrow 2m - 9 = 0 \rightarrow m = 4.5 & 0 \leq m < 10 \\ \frac{1}{5}(2m - 25) = 0 \rightarrow 2m - 25 = 0 \rightarrow m = 12.5 & 10 < m \leq 15 \end{cases}$$

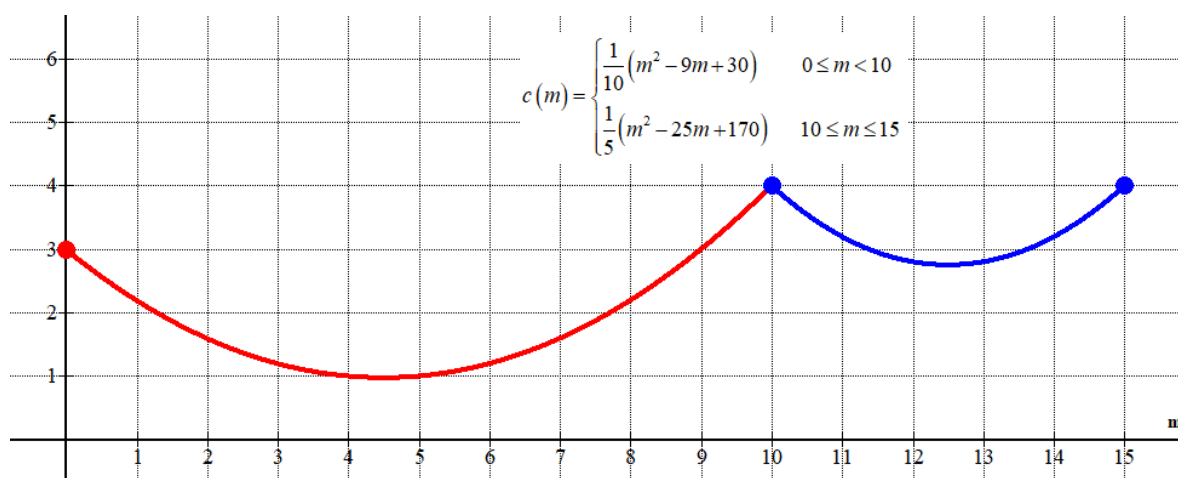
- En el intervalo $[0, 4.5)$ tomamos $m = 2$ y la derivada vale $c'(2) = \frac{1}{10}(-5) < 0$. La función decrece en el intervalo $[0, 4.5)$.
- En el intervalo $(4.5, 10)$ tomamos $m = 5$ y la derivada vale $c'(5) = \frac{1}{10}(1) > 0$. La función crece en el intervalo $(4.5, 10)$.
- En el intervalo $(10, 12.5)$ tomamos $m = 11$ y la derivada vale $c'(11) = \frac{1}{5}(-3) < 0$. La función decrece en el intervalo $(10, 12.5)$.

- En el intervalo $(12.5, 15]$ tomamos $m = 13$ y la derivada vale $c'(13) = \frac{1}{5}(1) > 0$. La función crece en el intervalo $(12.5, 15]$.

Resumiendo: La función decrece en $[0, 4.5) \cup (10, 12.5)$ y crece en $(4.5, 10) \cup (12.5, 15]$.

Dibujamos la gráfica de la función que son dos trozos de dos parábolas. Hacemos una tabla de valores para cada rama de la función.

m	$c(m) = \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30)$	m	$c(m) = \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170)$
0	3	10	4
5	1	12	2.8
10	4 No se incluye	15	4



- b) Por el estudio realizado del crecimiento y decrecimiento y observando la gráfica el consumo mínimo se produce en $m = 4.5$ siendo dicho consumo mínimo de:

$$c(4.5) = \frac{1}{10}(4.5^2 - 9 \cdot 4.5 + 30) = 0.975, \text{ es decir, de 9750 metros cúbicos.}$$

El consumo máximo se produjo a los 10 meses y a los 15, siendo este consumo máximo de $c(10) = c(15) = 4$, es decir, de 40000 metros cúbicos.

- c) Nos preguntan el valor de m para el que $c(m) = 1$.

Mirando la gráfica solo ocurre entre 0 y 10. Buscamos ese valor de m .

$$c(m) = 1 \Rightarrow \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = 1 \Rightarrow m^2 - 9m + 30 = 10 \Rightarrow m^2 - 9m + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 = m \\ \frac{9-1}{2} = 4 = m \end{cases}$$

Se produce en los meses 4º y 5º.

B3. En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

a) ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

b) El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 €, y pintar el mural ha costado en total 95€, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

a) Nos piden calcular el área encerrada entre la parábola $y = x^2 - 1$, la recta $y = 11 - x$ y el eje OX.

Averiguamos donde se cortan las dos gráficas.

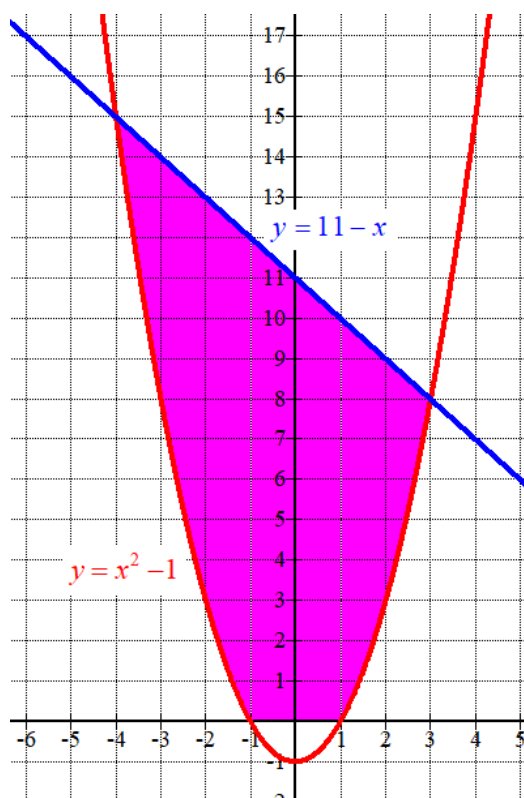
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 11 - x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 1 = 11 - x \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 = x \\ \frac{-1-7}{2} = -4 = x \end{cases}$$

Dibujamos la región.

x	$y = x^2 - 1$
-4	15
-2	3
0	-1
1	0
3	8

x	$y = 11 - x$
-4	15
0	11
3	8



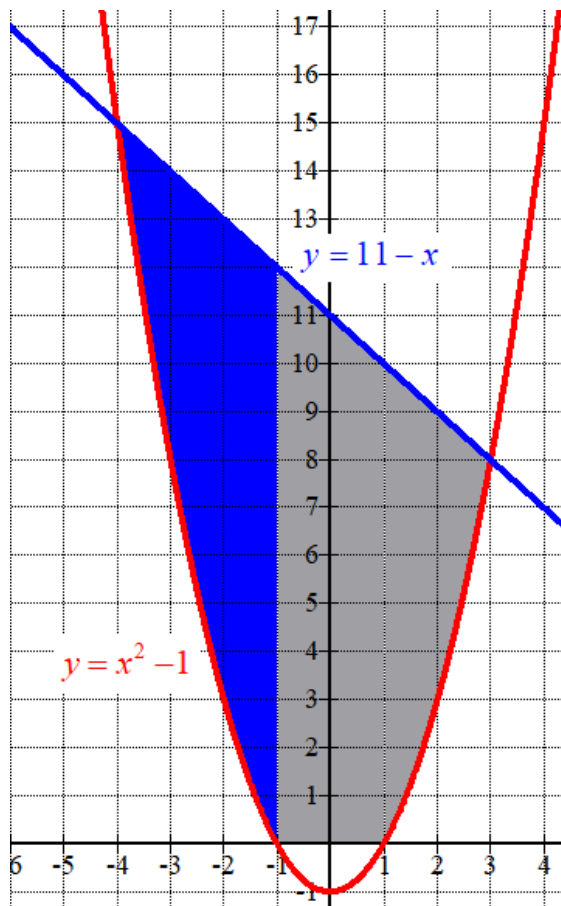
Hallamos el área de la región encerrada entre las dos gráficas y le restamos el área de la región limitada por la parábola y el eje OX entre -1 y 1.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-4}^3 (11 - x) - (x^2 - 1) dx = \int_{-4}^3 -x^2 - x + 12 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^3 = \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4) \right] = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_{-1}^1 x^2 - 1 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 \right| = \left| \left[\frac{1^3}{3} - 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right] \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{343}{6} - \frac{4}{3} = \frac{335}{6} \approx 55.83 m^2}$$

b) Volvemos a dibujar la región, ahora de los colores indicados.



Hallamos el área de la zona azul.

$$\begin{aligned} \text{Área azul} &= \int_{-4}^{-1} (11 - x) - (x^2 - 1) dx = \int_{-4}^{-1} -x^2 - x + 12 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^{-1} \\ &= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 12 \cdot (-1) \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4) \right] = \frac{45}{2} m^2 \end{aligned}$$

La zona azul tiene un tamaño de $22.5 m^2$, la zona gris tendrá un área de $\frac{335}{6} - \frac{45}{2} = \frac{100}{3} m^2$

Como la zona azul cuesta 2 € cada m^2 la zona azul cuesta 45 €.

Todo costó 95 € por lo que la zona gris ha costado $95 - 45 = 50$ €.

Dividimos y obtenemos el precio del m^2 : $\frac{50}{\frac{100}{3}} = 1.5 \text{ €} / m^2$

A4. Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 €, 20 € y 60 € respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 € ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

a) Llamamos “x” al número de personas que eligen paddle surf, “y” al número de personas que eligen kayak, “z” al número de personas que eligen moto acuática.

“Ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática” $\rightarrow$
 $x + y + z = 45$

“Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 €, 20 € y 60 € respectivamente, recaudando un total de 1700 € ese día” $\rightarrow 40x + 20y + 60z = 1700$

“Por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf” $\rightarrow x = 3y$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ 40x + 20y + 60z = 1700 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x = 3y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y + z = 45 \\ 2(3y) + y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 45 \\ 6y + y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 45 \\ 7y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 45 - 4y \\ 7y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow 7y + 3(45 - 4y) = 85 \Rightarrow 7y + 135 - 12y = 85 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 = 5y \Rightarrow \boxed{y = 10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 3 \cdot 10 = 30} \\ \boxed{z = 45 - 4 \cdot 10 = 5} \end{array} \right.$$

Acuden 30 personas a paddle surf, 10 a kayak y 5 a moto acuática.

B4. Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

- a) Llamamos x = número de tarrinas pequeñas e y = número de tarrinas grandes.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Gramos de turrón	Gramos de pistachos	Beneficios
Nº tarrinas pequeñas (x)	$200x$	$150x$	$2x$
Nº tarrinas grandes (y)	$500y$	$300y$	$4.5y$
TOTAL	$200x + 500y$	$150x + 300y$	$2x + 4.5y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 2x + 4.5y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Tenemos 400 kilos de turrón” $\rightarrow 200x + 500y \leq 400000$

“Tenemos 255 kilos de pistachos” $\rightarrow 150x + 300y \leq 255000$

“Debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas” $\rightarrow x \geq 200$

“Debe producir semanalmente al menos 50 tarrinas grandes” $\rightarrow y \geq 50$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 500y \leq 400000 \\ 150x + 300y \leq 255000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 50 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 4000 \\ x + 2y \leq 1700 \\ x \geq 200 \\ y \geq 50 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x + 5y = 4000$

x	$y = \frac{4000 - 2x}{5}$
0	800
500	600
2000	0

$x + 2y = 1700$

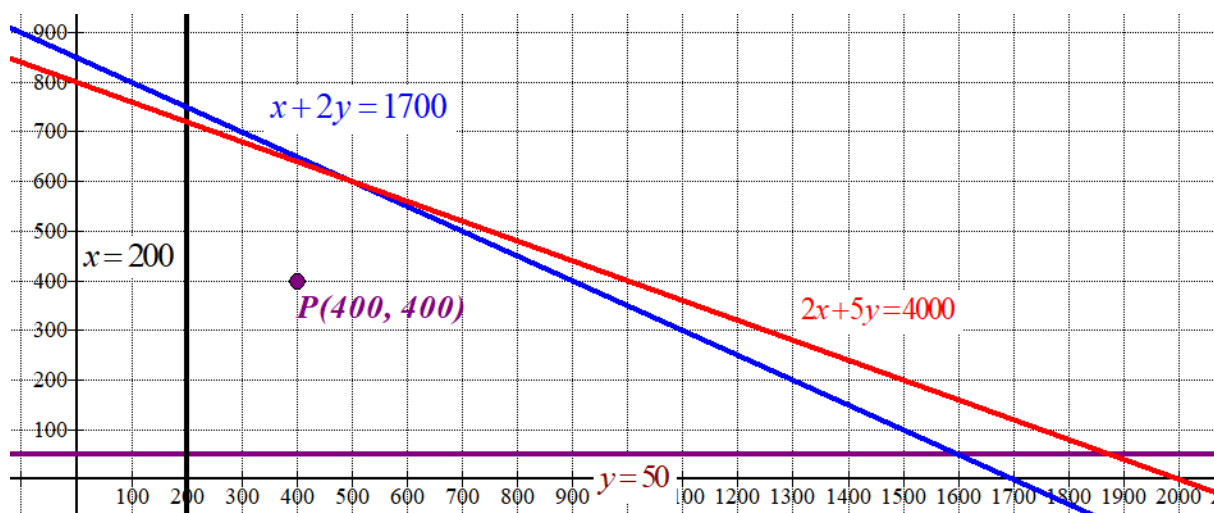
x	$y = \frac{1700 - x}{2}$
0	850
500	600
1700	0

$y = 50$

x	$y = 50$
0	50
20	50

$x = 200$

Recta vertical



Como las restricciones son

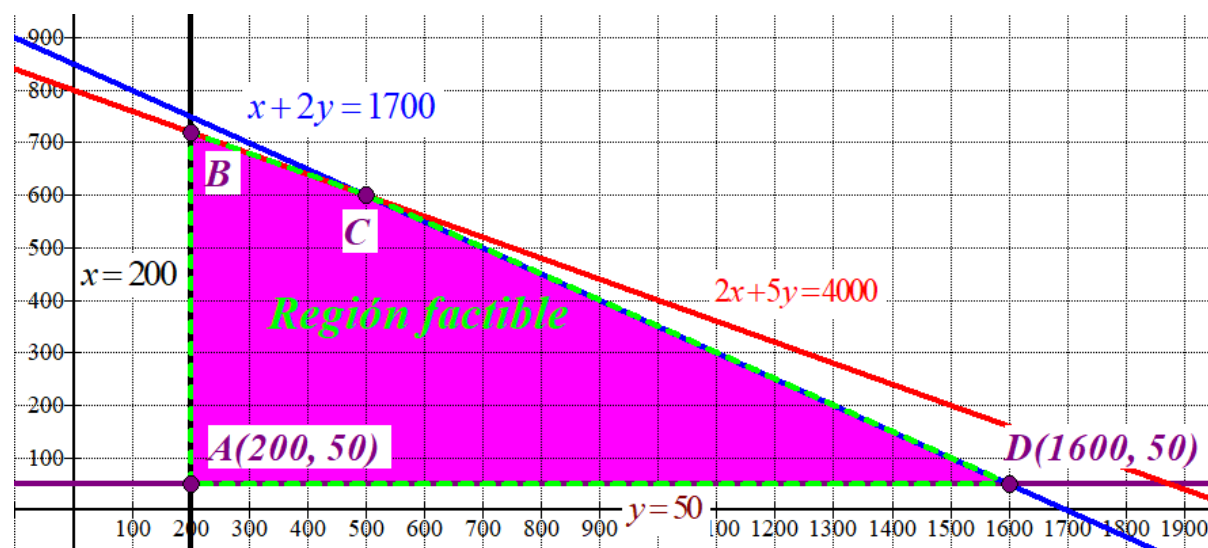
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 4000 \\ x + 2y \leq 1700 \\ x \geq 200 \\ y \geq 50 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja, a la derecha de la recta vertical y por encima de la recta horizontal $y = 50$.

Comprobamos que el punto $P(400, 400)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 800 + 2000 \leq 4000 \\ 400 + 800 \leq 1700 \\ 400 \geq 200 \\ 400 \geq 50 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices B y C resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 200 \\ 2x + 5y = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow 400 + 5y = 4000 \Rightarrow 5y = 3600 \Rightarrow y = \frac{3600}{5} = 720 \Rightarrow B(200, 720)$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 1700 \\ 2x + 5y = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1700 - 2y \\ 2x + 5y = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1700 - 2y) + 5y = 4000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3400 - 4y + 5y = 4000 \Rightarrow y = 600 \Rightarrow x = 1700 - 1200 = 500 \Rightarrow C(500, 600)$$

c) Valoramos la función beneficios en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(200, 50) \rightarrow B(200, 50) = 400 + 225 = 625$$

$$B(200, 720) \rightarrow B(200, 720) = 400 + 3240 = 3640$$

$$C(500, 600) \rightarrow B(500, 600) = 1000 + 2700 = \mathbf{3700 \text{ ¡Máximo!}}$$

$$D(1600, 50) \rightarrow B(1600, 50) = 3200 + 225 = 3425$$

El beneficio máximo es de 3700 € y se consigue en el vértice C(500, 600), que significa envasar 500 tarrinas pequeñas y 600 grandes.

EBAU Extraordinaria 2021



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (3)

Convocatoria: JULIO

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. En una clínica veterinaria el 40% de los animales que acuden a consulta son perros, el 30% gatos, el 20% aves y el resto otros animales. El 70% de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entre los gatos, el 60% viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10% de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

- Construir el árbol de probabilidades para este problema.
- De todos los animales que vienen con cita previa, ¿Qué porcentaje son perros?
- ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

A2. En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

- Probabilidad de aprobar el examen.
- Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.
- Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

A3. Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{3} + 4 & , t \in [0, 4] \\ \frac{18-t}{2} & , t \in (4, 10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

- ¿Es continua $C(t)$?
- ¿Cuándo $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?
- ¿Cuándo alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

A4. Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

- Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal
- Representar la región factible e indicar sus vértices
- Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

OPCIÓN B

B1. Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniendo un peso medio de 1123 kg con una desviación típica de 190 kg.

- a) Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97% para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.
- b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99%?
- c) Sabiendo que el 10% de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

B2. Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2500 personas, de las que 1500 manifiestan su intención de votar.

- a) Con un 95% de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?
- b) ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98%?
- c) Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1,5% y con una confianza del 99%?

B3. La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones:

$$y = (x - 2)^2, \quad y = 2x + 4$$

- a) Hacer un dibujo de dicha superficie.
- b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.
- c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 €, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

B4. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

- a) Plantear el sistema de ecuaciones.
- b) Resolver correctamente.
- c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

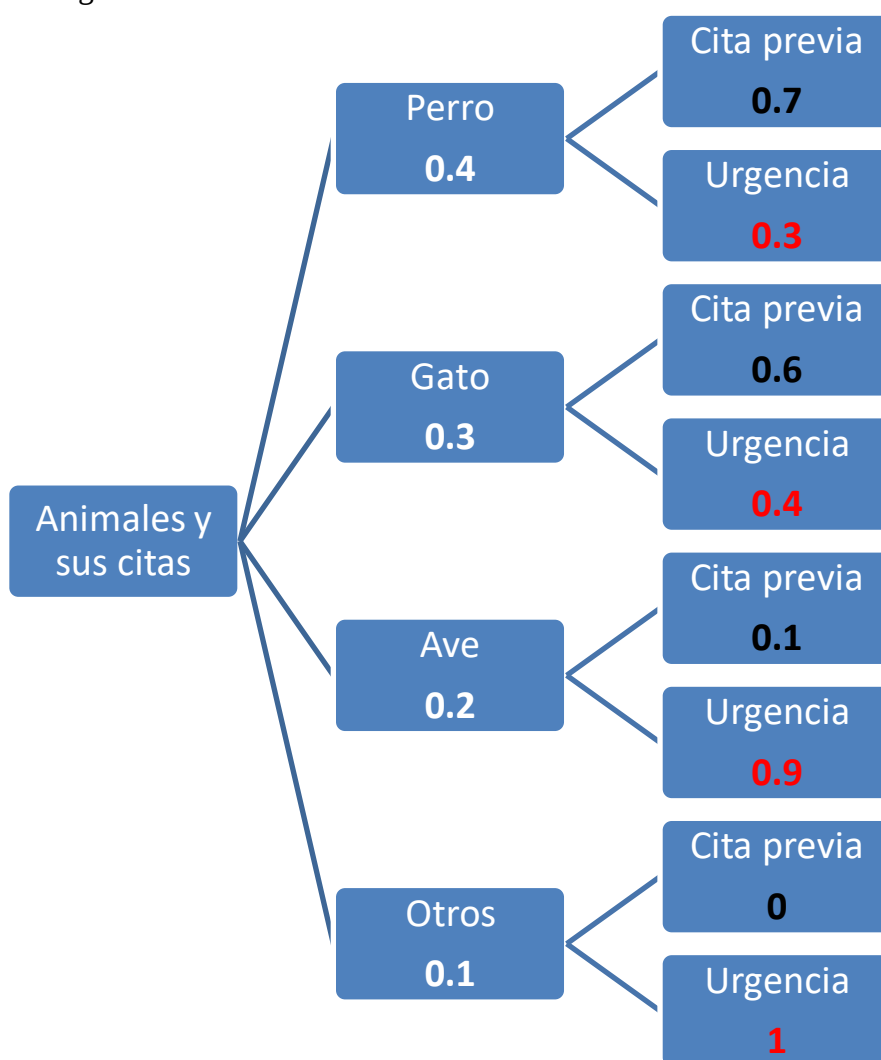
A1. En una clínica veterinaria el 40% de los animales que acuden a consulta son perros, el 30% gatos, el 20% aves y el resto otros animales. El 70% de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entre los gatos, el 60% viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10% de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

a) Construir el árbol de probabilidades para este problema.

b) De todos los animales que vienen con cita previa, ¿Qué porcentaje son perros?

c) ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



b) Vamos a resolver el ejercicio sin probabilidades.

Supongamos que acuden a consulta 100 animales, de ellos 40 son perros, 30 gatos, 20 aves y 10 son otros animales.

De los 40 perros el 70 % acuden con cita previa, es decir, $0.7 \cdot 40 = 28$ perros acuden con cita previa y los restantes $40 - 28 = 12$ perros como urgencia.

De los 30 gatos el 60 % acuden con cita previa, es decir, $0.6 \cdot 30 = 18$ gatos acuden con cita previa y los restantes $30 - 18 = 12$ gatos acuden como urgencia.

De las 20 aves el 90 % acude con cita previa, es decir, $0.9 \cdot 20 = 18$ aves acuden cita previa y las restantes $20 - 18 = 2$ aves acuden como urgencia.

De los otros 10 animales ninguno acude con cita previa y los 10 acuden como urgencia.

Si sumamos todos los animales con cita previa son $28 \text{ perros} + 18 \text{ gatos} + 18 \text{ aves} + 0 \text{ otros} = 64$ animales con cita previa.

Calculamos el porcentaje de perros con cita previa respecto del total de animales con cita previa:

$$\frac{28 \text{ perros con cita previa}}{64 \text{ animales con cita previa}} = \frac{7}{16} = 0.4375 = \boxed{43.75 \%}$$

c) Seguimos utilizando los cálculos del apartado anterior.

Tenemos 100 animales que acuden a consulta y acuden como urgencia 12 perros, 12 gatos, 2 aves y 10 animales de otro tipo. Lo cual hace un total de $12 + 12 + 2 + 10 = 36$ consultas como urgencia de las 100, esto representa un 36 %.

A2. En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

- Probabilidad de aprobar el examen.
- Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.
- Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

- a) Es una variable binomial que cuenta el número de preguntas acertadas, siendo la probabilidad de acertar una pregunta del 50 % y el número de repeticiones del experimento de 90.

$X = \text{N}^\circ$ de preguntas acertadas. $p = P(\text{Acertar una pregunta}) = 0.5$. $n = 90$ preguntas.

$$X = B(90, 0.5)$$

Nos piden la probabilidad de acertar 50 preguntas o más.

$$P(X \geq 50) = \dots$$

Debemos de aproximarla por una normal, pues es complejo hacerlo calculando y sumando las probabilidades de cada caso puntual.

$$X = B(90, 0.5) \rightarrow \mu = n \cdot p = 90 \cdot 0.5 = 45. \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{90 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

La variable X se aproxima a una normal $Y = N\left(45, \frac{3\sqrt{10}}{2}\right)$

Calculamos la probabilidad pedida con la aproximación de la normal.

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &= P(Y \geq 49.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{49.5 - 45}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}\right) = P(Z \geq 0.95) = \\ &= 1 - P(Z < 0.95) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.8289 = \boxed{0.1711} \end{aligned}$$

- b) Utilizando la aproximación del apartado anterior.

$$\begin{aligned} P(51 < X < 60) &= P(52 \leq X \leq 59) = P(51.5 \leq Y \leq 59.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(\frac{51.5 - 45}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} \leq Z \leq \frac{59.5 - 45}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}\right) = P(1.37 \leq Z \leq 3.06) = \\ &= P(Z \leq 3.06) - P(Z \leq 1.37) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.9989 - 0.9147 = \boxed{0.0842} \end{aligned}$$

- c) Utilizando la aproximación del apartado anterior.

$$\begin{aligned} P(X \leq 40) &= P(Y \leq 40.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{40.5 - 45}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}\right) = P(Z \leq -0.95) = \\ &= P(Z \geq 0.95) = \{\text{Calculado en apartado a)}\} = \boxed{0.1711} \end{aligned}$$

A3. Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{3} + 4 & , t \in [0, 4] \\ \frac{18-t}{2} & , t \in (4, 10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

- a) ¿Es continua $C(t)$?
 b) ¿Cuándo $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?
 c) ¿Cuándo alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

- a) En $[0, 4)$ la función es una parábola que es continua, en $(4, 10]$ es una recta que también es continua. Falta ver si es continua en $x = 4$ que es el cambio de definición.

$$\left. \begin{aligned} C(4) &= \frac{(4-1)^2}{3} + 4 = 7 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{(t-1)^2}{3} + 4 = 7 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{18-t}{2} = \frac{18-4}{2} = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) = C(4) = 7$$

La función es continua en $[0, 10]$

- b) $C(t)$ es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$ y su derivada es:

$$C'(t) = \begin{cases} \frac{2(t-1)}{3} & , t \in [0, 4) \\ -\frac{1}{2} & , t \in (4, 10] \end{cases}$$

¿Es derivable en $x = 4$? Veamos si coinciden las derivadas laterales en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} C'(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} C'(t) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2(t-1)}{3} = \frac{2(4-1)}{3} = 2 \\ C'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} C'(t) = \lim_{x \rightarrow 4^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C'(4^-) \neq C'(4^+)$$

No es derivable en $x = 4$.

La función es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$

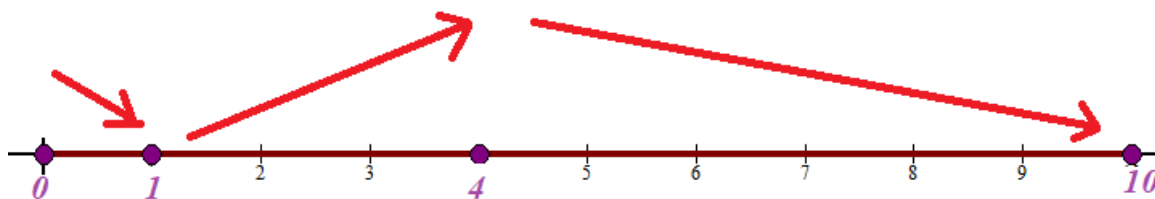
Miramos el crecimiento y decrecimiento de la función por tramos.

En $(4, 10]$ la derivada es siempre negativa.

En $[0, 4)$ la derivada es $\frac{2(t-1)}{3}$ que vale 0 para $t = 1$. Vemos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $C'(0.5) = \frac{2(0.5-1)}{3} = -\frac{1}{3} < 0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En $(1,4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3) = \frac{2(3-1)}{3} = \frac{4}{3} > 0$. La función crece en $(1,4)$.
- En $(4,10]$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $C'(5) = -\frac{1}{2} < 0$. La función decrece en $(4,10]$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $[0,1) \cup (4,10]$ y crece en $(1,4)$.

- c) Como la función es continua y sigue el esquema del dibujo anterior podemos afirmar que la función alcanza un mínimo relativo en $t = 1$ y un máximo relativo en $t = 4$. Valoramos la función en estos puntos y en los extremos del intervalo de definición y decidimos sus máximos y mínimos absolutos.

$$\left. \begin{aligned} C(0) &= \frac{(0-1)^2}{3} + 4 = \frac{13}{3} \approx 4.33 \\ C(1) &= \frac{(1-1)^2}{3} + 4 = 4 \\ C(4) &= \frac{(4-1)^2}{3} + 4 = 7 \\ C(10) &= \frac{18-10}{2} = 4 \end{aligned} \right\}$$

Los mínimos absolutos se alcanzan en $t = 1$ y en $t = 10$, siendo este valor mínimo 4.

El máximo absoluto se alcanza en $t = 4$, siendo este valor máximo de 7.

A4. Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

- Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal
- Representar la región factible e indicar sus vértices
- Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

- a) Llamamos “x” al número de plataneras de la plantación e “y” al número de naranjeros.

Las restricciones del problema son:

“Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación” $\rightarrow 5x + 2y \leq 900$

“El número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad”

$$\rightarrow \frac{y}{2} \leq x \leq 2y$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 900 \\ x \leq 2y \\ \frac{y}{2} \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 900 \\ x \leq 2y \\ y \leq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar: $B(x, y) = 15x + 8y$

- b) Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$5x + 2y = 900$$

x	y = $\frac{900 - 5x}{2}$
---	--------------------------

100	200
-----	-----

150	75
-----	----

$$x = 2y$$

x	y = $\frac{x}{2}$
---	-------------------

150	75
-----	----

0	0
---	---

$$y = 2x$$

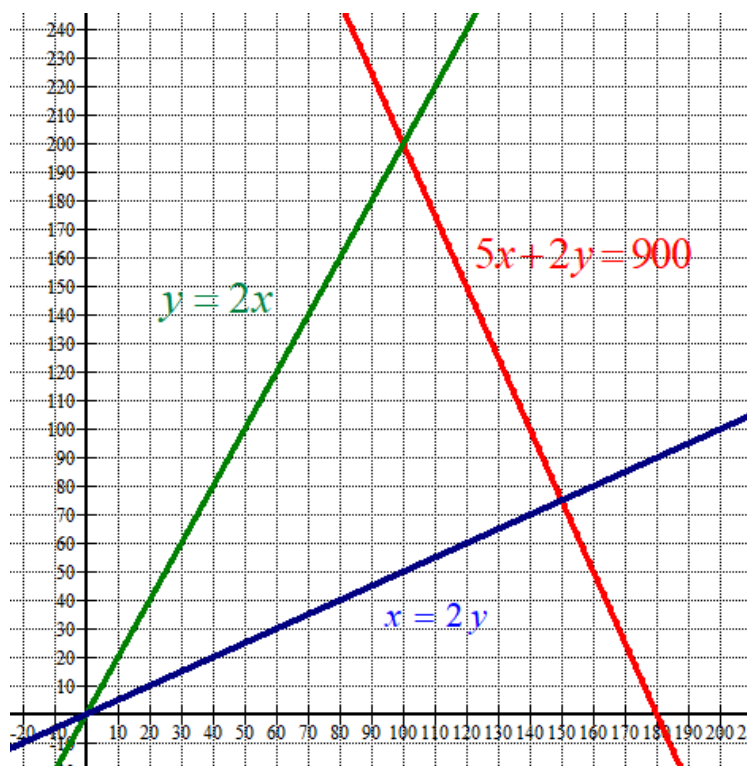
x	y = 2x
---	--------

100	200
-----	-----

0	0
---	---

$$x \geq 0; y \geq 0$$

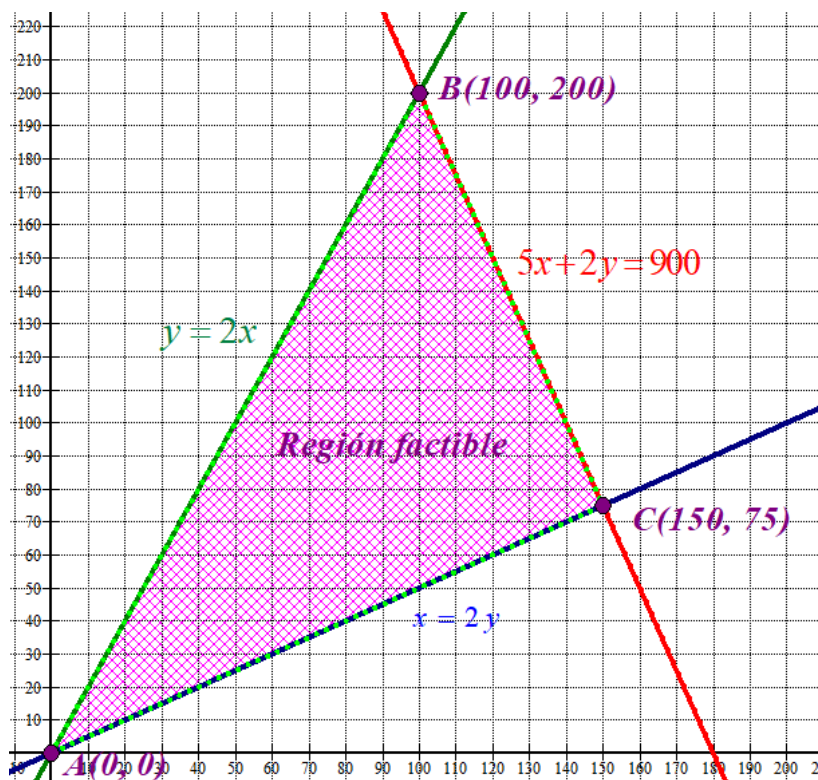
Primer cuadrante



Como las restricciones son

$5x + 2y \leq 900$	$\rightarrow$	Por debajo	} la región factible es la región del
$x \leq 2y$	$\rightarrow$	Por encima	
$y \leq 2x$	$\rightarrow$	Por debajo	
$x \geq 0; y \geq 0$		Primer cuadrante	

primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde y por encima de la recta azul. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices A y B están claras en el dibujo.

Las coordenadas del vértice C se obtienen de resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 900 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 10y + 2y = 900 \Rightarrow y = \frac{900}{12} = 75 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow \boxed{C(150, 75)}$$

Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B(100, 200)$ y $C(150, 75)$.

c) Valoramos la función Beneficio $B(x, y) = 15x + 8y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(100, 200) \rightarrow B(100, 200) = 1500 + 1600 = 3100$$

$$C(150, 75) \rightarrow B(150, 75) = 2850$$

El máximo beneficio que se puede obtener es de 3100 € y se obtiene con 100 plataneras y 200 naranjeros.

OPCIÓN B

B1. Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniendo un peso medio de 1123 kg con una desviación típica de 190 kg.

- Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97% para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.
- ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99%?
- Sabiendo que el 10% de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

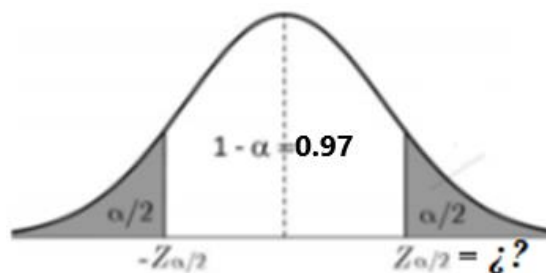
a) $X =$ Peso de un vehículo en kilos. $X = N(\mu, 190)$

Tamaño de muestra = $n = 64$. Media muestral = $\bar{x} = 1123$ kg.

Con un nivel de confianza del 97% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9851	0,9854	0,9858	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9874
2,2	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,3	0,9923	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{190}{\sqrt{64}} \approx 51.5375$$

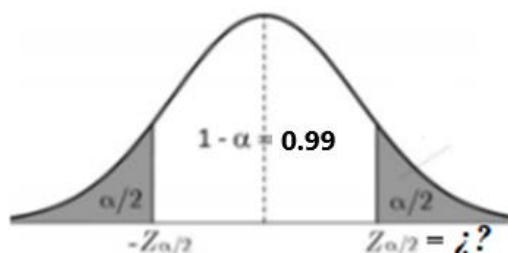
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1123 - 51.5375; 1123 + 51.5375) = (1071.4625; 1174.5375)$$

b) Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9851	0,9854	0,9858	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9874	0,9877
2,2	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,3	0,9923	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939
2,4	0,9949	0,9951	0,9953	0,9955	0,9957	0,9959	0,9961	0,9963	0,9965
2,5	0,9973	0,9975	0,9977	0,9979	0,9981	0,9983	0,9985	0,9987	0,9989



Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de 20:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 2.575 \cdot \frac{190}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{20}{2.575} = \frac{190}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{190 \cdot 2.575}{20}$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{190 \cdot 2.575}{20} \right)^2 = 598.4139$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 599 vehículos.

- c) Trabajamos con una variable binomial X = Número de todoterrenos en los 64 de la muestra.
 Probabilidad de que un vehículo sea un todoterreno = $p = 0.1$. Número de repeticiones = $n = 64$.
 $X = B(64, 0.1)$.

Como es muy grande el número de repeticiones aproximamos la distribución a una normal.

$$\left. \begin{array}{l} \mu = np = 64 \cdot 0.1 = 6.4 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 2.4 \end{array} \right\} \Rightarrow X \text{ se aproxima a } Y = N(6.4, 2.4)$$

Calculamos la probabilidad pedida.

$$P(X \geq 9) = P(Y \geq 8.5) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \geq \frac{8.5 - 6.4}{2.4}\right) = P(Z \geq 0.875) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.875) = 1 - \frac{0.8078 + 0.8106}{2} = \boxed{0.1908}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0

B2. Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2500 personas, de las que 1500 manifiestan su intención de votar.

- Con un 95% de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?
- ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98%?
- Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1,5% y con una confianza del 99%?

- a) En una muestra de tamaño $n = 2500$ la proporción de personas decididas a abstenerse es

$$p = \frac{2500 - 1500}{2500} = 0.4$$

Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{2500}} \approx 0.0192$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0192; 0.4 + 0.0192) = (0.3808; 0.4192)$$

- b) Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{2500}} \approx 0.02283$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.02283; 0.4 + 0.02283) = (0.37717; 0.42283)$$

- c) Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea del 1.5 %, es decir, de 0.015:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.015 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow \frac{0.015}{2.575} = \sqrt{\frac{0.24}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.015}{2.575}\right)^2 = \frac{0.24}{n} \Rightarrow \frac{9}{265225} = \frac{0.24}{n} \Rightarrow n = \frac{0.24 \cdot 265225}{9} \approx 7072.6$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 7073 personas.

B3. La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones:

$$y = (x-2)^2, \quad y = 2x + 4$$

- Hacer un dibujo de dicha superficie.
- Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.
- Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 €, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

a) Averiguamos sus puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-2)^2 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-2)^2 = 2x + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x + 4 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

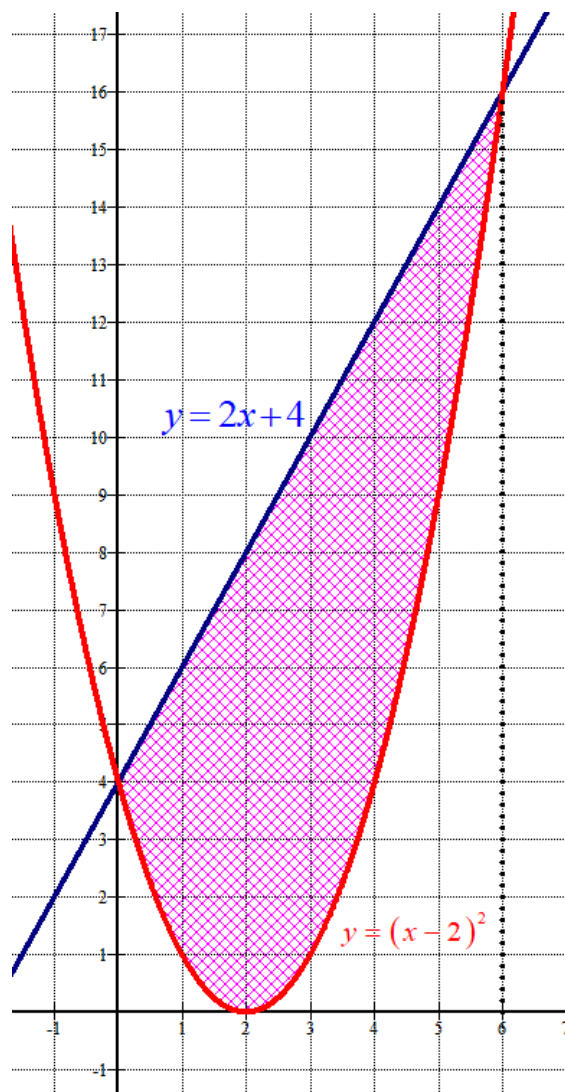
La región del plano que debemos dibujar empieza en $x = 0$ y termina en $x = 6$. Hacemos una tabla de valores y dibujamos las dos gráficas.

x	$y = (x-2)^2$
0	4
2	0
4	4
6	16

x	$y = 2x + 4$
0	4
2	8
4	12
6	16

- b) El área de la región es la integral definida entre $x = 0$ y $x = 6$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^6 2x + 4 - (x-2)^2 dx = \\ &= \int_0^6 2x + 4 - x^2 + 4x - 4 dx = \\ &= \int_0^6 6x - x^2 dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \\ &= \left[3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} \right] - \left[0 - \frac{0}{3} \right] = \boxed{36 \text{ m}^2} \end{aligned}$$



- c) Cada toldo vale $36 \cdot 4 = 144$ €, lo multiplicamos por 3 y por tanto, los tres toldos costarían $144 \cdot 3 = 432$ €.

B4. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

- Plantear el sistema de ecuaciones.
- Resolver correctamente.
- ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

- a) Llamamos a = número de pantalones tipo A, b = número de pantalones tipo B, c = número de pantalones tipo C.

“Hay 70 pantalones para vender” $\rightarrow a + b + c = 70$

“Los que tienen defecto ($b + c$) suponen el 40% de los que no lo tienen (a)” $\rightarrow b + c = 0.40 \cdot a$

“Cada pantalón tipo A cuesta 20 €, cada uno tipo B cuesta el 80 % del tipo A, es decir $0.8 \cdot 20 = 16$ €, cada uno tipo C cuesta el 40 % de uno tipo A, es decir $0.4 \cdot 20 = 8$ €. El precio total de todos ellos es de 1280 euros” $\rightarrow 20a + 16b + 8c = 1280$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b + c = 0.40 \cdot a \\ 20a + 16b + 8c = 1280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ 10b + 10c = 4a \\ 5a + 4b + 2c = 320 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ 5b + 5c = 2a \\ 5a + 4b + 2c = 320 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ -2a + 5b + 5c = 0 \\ 5a + 4b + 2c = 320 \end{array} \right\}$$

- b) Utilizamos el método de Gauss de triangulación del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ -2a + 5b + 5c = 0 \\ 5a + 4b + 2c = 320 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2a + 5b + 5c = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 140 \\ \hline 0 \quad 7b + 7c = 140 \\ \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5a + 4b + 2c = 320 \\ -5a - 5b - 5c = -350 \\ \hline 0 \quad -b - 3c = -30 \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ \Rightarrow 7b + 7c = 140 \\ -b - 3c = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b + c = 20 \\ -b - 3c = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -b - 3c = -30 \\ b + c = 20 \\ \hline 0 \quad -2c = -10 \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ \Rightarrow b + c = 20 \\ -2c = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ b + c = 20 \\ \boxed{c = 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + 5 = 70 \\ b + 5 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 65 \\ \boxed{b = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow a + 15 = 65 \Rightarrow \boxed{a = 50}$$

La solución del sistema es $a = 50$, $b = 15$ y $c = 5$.

- c) Hay 50 pantalones tipo A, 15 tipo B y 5 tipo C.



EBAU Ordinaria 2021

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
**FASE GENERAL
CURSO 2020–2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Convocatoria: JUNIO

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. Una tienda vende quesos de las marcas A (el 35%), B (el 38%) y C (el resto). Respectivamente, el 2%, el 3% y el 2,5% tienen exceso de sal.

- Determinar el árbol de probabilidades.
- Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.
- Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

A2. Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

- Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.
- Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%, calcular el tamaño de dicha muestra.

A3. El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está

limitada por las rectas $r_1 : x = 0$, $r_2 : x = 50$, $r_3 : y = 45$ y la parábola $f : y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros,

- Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua en (m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0,07 metros).
- El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/ m^2 . El precio del Kwh es de 0,13 €/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.
- Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5000 €; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor ... Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25% de los costes fijos de gestión.

A4. Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30 €, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 €. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

OPCIÓN B

B1. A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3,608 y 4,392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de $\frac{9}{5}$ horas:

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4,1 horas?

B2. Se ha realizado una encuesta a los 20000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

- Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?
- Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?
- ¿En cuántas charlas cabe esperar que haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

B3. La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) & 0 \leq x < 35 \\ \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) & 35 \leq x \leq 72 \end{cases}$$

donde x representa el trimestre.

- Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.
- ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro su mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro mínima y máxima?
- ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10% de paro?

B4. Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro.

- Plantear el sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver el sistema.
- ¿Cuánto aporta cada nieto?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1. Una tienda vende quesos de las marcas A (el 35%), B (el 38%) y C (el resto). Respectivamente, el 2%, el 3% y el 2,5% tienen exceso de sal.

a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

a) De la marca C son el $100 - 35 - 38 = 27$ % de los quesos.



Llamamos A = “Un queso es de la marca A”, B = “Un queso es de la marca B” y C = “Un queso es de la marca C”.

Y llamamos S = “Un queso tiene exceso de sal”, por lo que $\bar{S}$ = “Un queso no tiene exceso de sal”

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\bar{S}) &= P(\bar{S} \cap A) + P(\bar{S} \cap B) + P(\bar{S} \cap C) = \\
 &= P(A)P(\bar{S} / A) + P(B)P(\bar{S} / B) + P(C)P(\bar{S} / C) = \\
 &= 0.35 \cdot 0.98 + 0.38 \cdot 0.97 + 0.27 \cdot 0.975 = \boxed{0.97485}
 \end{aligned}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C / S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C)P(S / C)}{1 - P(\bar{S})} = \frac{0.27 \cdot 0.025}{1 - 0.97485} = \frac{135}{503} = 0.268$$

A2. Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

- a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.
 b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%, calcular el tamaño de dicha muestra.

- a) En una muestra de tamaño $n = 750$ la proporción de votantes a un partido es $p = \frac{300}{750} = 0.4$

Con un nivel de confianza del 97% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{750}} \approx 0.0388$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0388; 0.4 + 0.0388) = (0.3612; 0.4388)$$

- b) Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de 0,05:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{2.575} = \sqrt{\frac{0.21}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{2.575} \right)^2 = \frac{0.21}{n} \Rightarrow \frac{4}{10609} = \frac{0.21}{n} \Rightarrow n = \frac{0.21 \cdot 10609}{4} = 556.9725$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 557 votantes.

A3. El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1 : x = 0$, $r_2 : x = 50$, $r_3 : y = 45$ y la parábola $f : y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros,

- Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua en (m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0,07 metros).
- El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/ m^2 . El precio del Kwh es de 0,13 €/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.
- Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5000 €; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor ... Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25% de los costes fijos de gestión.

- a) Determinamos el vértice y hacemos una tabla de valores de la parábola $f : y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$

$$y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x \Rightarrow y' = -\frac{2}{125}x + \frac{2}{5}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{2}{125}x + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow -2x + 50 = 0 \Rightarrow x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25$$

El punto crítico $x = 25$ de la parábola es su vértice.

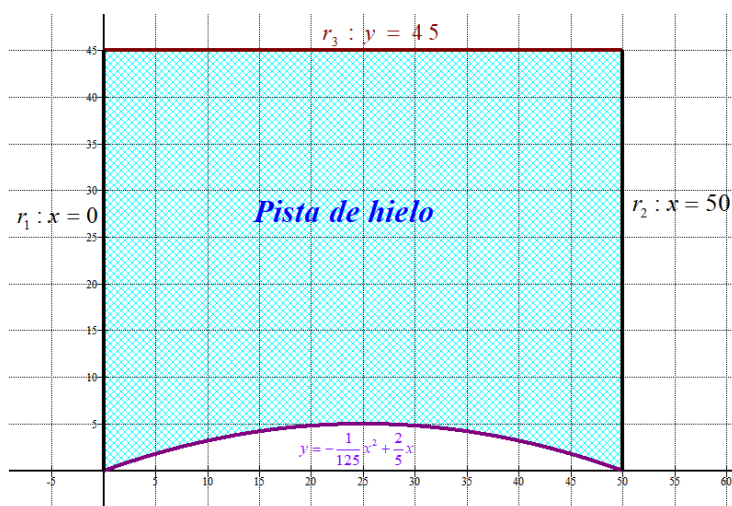
x	$-\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$
0	0
25	5
50	0

Vemos también donde se cortan la recta $r_3 : y = 45$ y la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f : y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x \\ r_3 : y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x = 45 \Rightarrow -x^2 + 50x = 1125 \Rightarrow x^2 - 50x + 1125 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1125}}{2} = \text{No existe}$$

Parábola y recta no se cortan.



El área de la pista de hielo es un rectángulo de base 50 metros de base y 45 metros de altura al que le quitamos una zona curva que se puede calcular con la integral definida de la parábola entre 0 y 50.

$$\text{Área del rectángulo} = 45 \cdot 50 = 2250 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Área a quitar} &= \int_0^{50} -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x dx = \left[-\frac{1}{125} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{50} = \left[-\frac{x^3}{375} + \frac{x^2}{5} \right]_0^{50} \\ &= \left[-\frac{50^3}{375} + \frac{50^2}{5} \right] - \left[-\frac{0^3}{375} + \frac{0^2}{5} \right] = \frac{500}{3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El área de la zona azul (pista de hielo) es $2250 - \frac{500}{3} = \frac{6250}{3} \text{ m}^2$

Multiplicamos esta área por la profundidad y obtenemos el volumen de agua.

$$\frac{6250}{3} \cdot 0.07 = \boxed{\frac{875}{6} \approx 145.833 \text{ m}^3}$$

b) Multiplicamos el consumo eléctrico por m^2 por los metros cuadrados de superficie.

$$\frac{6250}{3} \text{ m}^2 \cdot 28 \text{ Kwh} / \text{m}^2 = \frac{175000}{3} \text{ Kwh}$$

y luego por el precio del kwh.

$$\frac{175000}{3} \text{ Kwh} \cdot 0.13 \text{ €} / \text{Kwh} = \frac{22750}{3} \approx \boxed{7583.33 \text{ €}}$$

c) Los costes fijos son 5000 € y le debemos sumar los costes variables que son el 25% de 5000 lo que serían $5000 \cdot 1.25 = 6250 \text{ €}$.

Le sumamos el consumo eléctrico $\rightarrow 6250 + \frac{22750}{3} = \frac{41500}{3} \text{ €}$

Lo dividimos entre los 600 patinadores y sale una entrada por valor de:

$$\frac{41500/3}{600} = \frac{415}{18} \approx \boxed{23.055 \text{ €}}$$

A4. Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30 €, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 €. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

a) Llamamos x = número de lotes A e y = número de lotes B.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº camisas	Nº pantalones	Ganancias
Nº lotes A (x)	x	x	$30x$
Nº lotes B (y)	$2y$	y	$40y$
TOTAL	$x + 2y$	$x + y$	$30x + 40y$

La función que deseamos maximizar son las ganancias $f(x, y) = 30x + 40y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Tenemos 400 camisas” $\rightarrow x + 2y \leq 400$

“Tenemos 300 pantalones” $\rightarrow x + y \leq 300$

“Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A” $\rightarrow x \geq 40$

“Hay que ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B” $\rightarrow y \geq 20$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 40 \\ y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 40 \\ y \geq 20 \end{array} \right\}$$

- Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x + 2y = 400$

x	$y = \frac{400 - x}{2}$
0	200
200	100
400	0

$x + y = 300$

x	$y = 300 - x$
0	300
200	100
300	0

$y = 20$

x	$y = 20$
0	20
20	20

$x = 40$
Recta
vertical

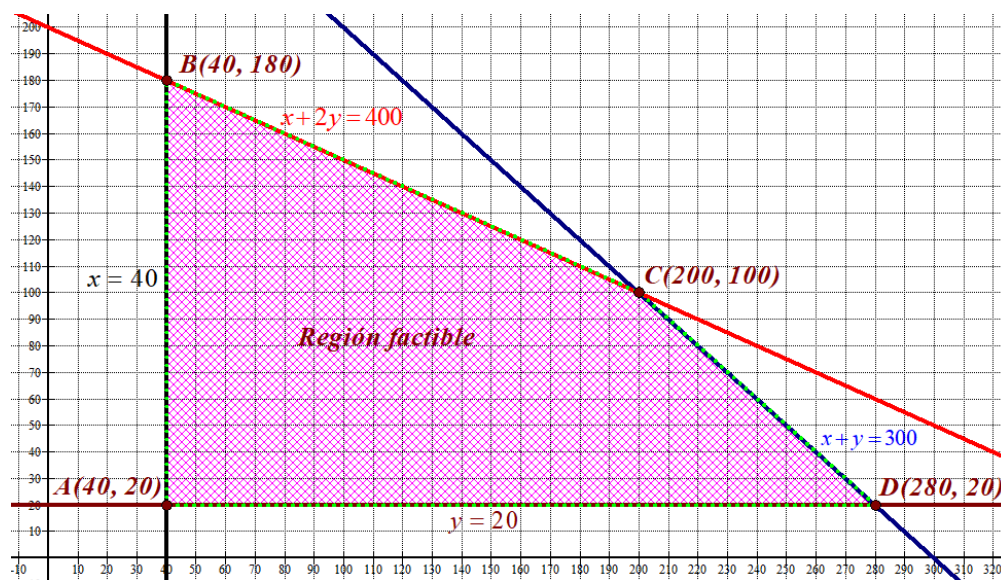


Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 40 \\ y \geq 20 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja, a la derecha de la recta vertical y por encima de la recta horizontal de color marrón.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



c) Valoramos la función ganancias en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(40, 20) \rightarrow f(40, 20) = 1200 + 800 = 2000$$

$$B(40, 180) \rightarrow f(40, 180) = 1200 + 7200 = 8400$$

$$C(200, 100) \rightarrow f(200, 100) = 6000 + 4000 = 10000$$

$$D(280, 20) \rightarrow f(280, 20) = 8400 + 800 = 9200$$

Las ganancias máximas son 10000 € y se consiguen en el vértice C(200, 100), que significa vender 200 lotes de A y 100 lotes de B.

OPCIÓN B

B1. A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3,608 y 4,392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de $\frac{9}{5}$ horas:

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4,1 horas?

Estamos hablando de un intervalo de confianza a partir de una muestra de tamaño = $n = 81$.

X = número de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio. $X = N\left(\mu, \frac{9}{5}\right)$

El intervalo de confianza es (3.608, 4.392).

- a) La media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{3.608 + 4.392}{2} = 4$$

La media muestral es 4 horas.

- b) El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud. Lo calculamos para obtener el nivel de confianza.

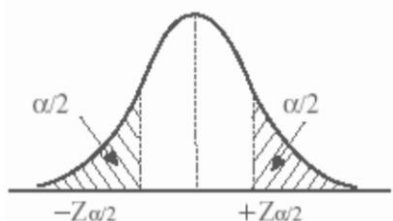
$$Error = \frac{4.392 - 3.608}{2} = 0.392$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.392 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{81}} \Rightarrow 0.392 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 5 \cdot 0.392 = 1.96$$

Si $z_{\alpha/2} = 1.96$ obtenemos el nivel de confianza

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,83
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9685	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,97
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,98

El nivel de confianza es del 95 %

c) Si $\mu = 4$ entonces la distribución de las horas es $X = N\left(4, \frac{9}{5}\right)$

Entonces la media de horas semanales de 16 adultos sigue una distribución $\overline{X}_{16} = N\left(4, \frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{16}}\right)$ La

distribución de la media es $\overline{X}_{16} = N\left(4, \frac{9}{20}\right)$.

Nos piden $P(\overline{X}_{16} \geq 4.1)$.

$$P(\overline{X}_{16} \geq 4.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{16} - 4}{\sqrt{9/20}} \geq \frac{4.1 - 4}{\sqrt{9/20}}\right) = P(Z \geq 0.222) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.222) = \{\text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1)\} = 1 - 0.5871 = \boxed{0.4129}$$

	0	0,01	0,02	0,03
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019

B2. Se ha realizado una encuesta a los 20000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

- Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?
- Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?
- ¿En cuántas charlas cabe esperar que haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

a) La proporción es $p = \frac{13200}{20000} = \frac{33}{50} = 0.66$. La Distribución Muestral de Proporciones se ajusta a

$$\text{una normal } N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \Rightarrow N\left(0.66, \sqrt{\frac{0.66(1-0.66)}{30}}\right) \Rightarrow N(0.66, 0.0865)$$

b) La proporción sería de más de $\frac{21}{30} = 0.7$.

$$P(X > 0.7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.7 - 0.66}{0.0865}\right) = P(Z > 0.46) =$$

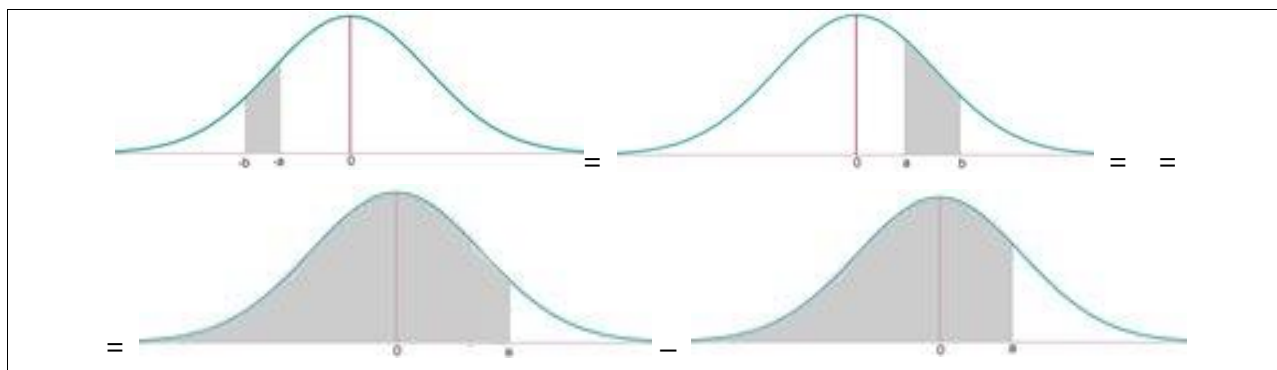
$$= 1 - P(Z \leq 0.46) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.6772 = \boxed{0.3228}$$

c) Calculamos la probabilidad de que en una charla haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón. Como $\frac{15}{30} = 0.5$ y $\frac{19}{30} \approx 0.63$ la proporción debe estar entre 0.5 y 0.63.

Nos piden calcular $P(0.5 < p < 0.63)$

$$P(0.5 < p < 0.63) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{0.5 - 0.66}{0.0865} < Z < \frac{0.633 - 0.66}{0.0865}\right) =$$

$$= P(-1.85 < Z < -0.31) = \dots$$



$$\begin{aligned} \therefore &= P(0.31 < Z < 1.85) = P(Z < 1.85) - P(Z < 0.31) \approx \\ &\approx 0.9678 - 0.6217 \approx 0.3461 \end{aligned}$$

Como $0.3461 \cdot 100 = 34.61$. Redondeando habrían 35 charlas con más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón.

B3. La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) & 0 \leq x < 35 \\ \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) & 35 \leq x \leq 72 \end{cases}$$

donde x representa el trimestre.

- Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.
- ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro su mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro mínima y máxima?
- ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10% de paro?

a) Es una función a trozos, siendo trozos de dos parábolas.

Comprobamos si es continua en $x = 35$.

$$\left. \begin{aligned} f(35) &= \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) = \frac{1}{625}(13 \cdot 35^2 - 1560 \cdot 35 + 54300) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 35^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 35^-} \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) = \frac{1}{125}(4 \cdot 35^2 - 80 \cdot 35 + 1025) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 35^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 35^+} \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(35) = \lim_{x \rightarrow 35^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 35^+} f(x) = 25$$

La función es continua.

Encontramos los vértices y los valores de las parábolas en cada uno de los extremos.

$$f(x) = \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{125}(8x - 80) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$f(x) = \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{625}(26x - 1560) = 0 \Rightarrow x = \frac{1560}{26} = 60$$

Los vértices son $x = 10$ en el primer trozo de parábola y $x = 60$ en el segundo trozo de parábola.

Realizamos una tabla de valores.

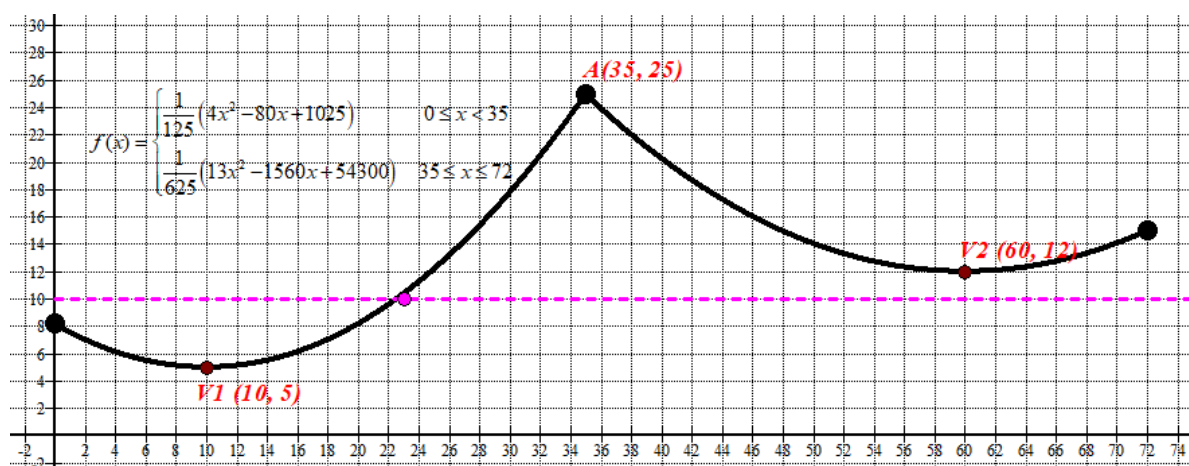
$0 \leq x < 35$	
x	$y = \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025)$
0	8.2
10	5 vértice V1
35	25

$35 \leq x \leq 72$	
x	$y = \frac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300)$
35	25
60	12 vértice V2
72	14.9952



La función es creciente en $(10, 35) \cup (60, 72)$ y decreciente en $(0, 10) \cup (35, 60)$

- b) Mirando la gráfica se observa que la tasa de paro es mínima en $x = 10$, es decir, en el trimestre 10, siendo esta tasa de 5%.
También se observa que la tasa de paro fue máxima en $x = 35$, es decir, en el trimestre 35, siendo esta tasa del 25%.
- c) Observando la gráfica se aprecia que en $x = 22$ la tasa de paro es menor que 10 y en el trimestre 23 ya se supera esta tasa de paro.



Lo comprobamos calculando la tasa de paro en dichos trimestres:

$$f(x) = \frac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) \Rightarrow \begin{cases} f(22) = \frac{1}{125}(4 \cdot 22^2 - 80 \cdot 22 + 1025) = 9.608 \\ f(23) = \frac{1}{125}(4 \cdot 23^2 - 80 \cdot 23 + 1025) = 10.408 \end{cases}$$

En el mes 23 se sobrepasa la tasa de paro del 10 % por primera vez.

B4. Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro.

- Plantear el sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver el sistema.
- ¿Cuánto aporta cada nieto?

- a) Llamamos “x” a la aportación de Luis, el mayor. “y” a la aportación de Carmen. “z” a la aportación de Pedro.

“Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela” $\rightarrow x + y + z = 60$

“Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos” $\rightarrow x = 3(y + z)$

“Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro” $\rightarrow 2y = 3z$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = 3(y + z) \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = 3y + 3z \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = 3y + 3z \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + \frac{3}{2}z + z = 60 \\ x = 3y + 3z \\ x = 3\frac{3}{2}z + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3z + 2z = 120 \\ 2x = 9z + 6z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 5z = 120 \\ 2x = 15z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15z + 5z = 120 \Rightarrow 20z = 120 \Rightarrow \boxed{z = \frac{120}{20} = 6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 15 \cdot 6 \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow \boxed{x = \frac{90}{2} = 45} \\ \boxed{y = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9} \end{array} \right.$$

La solución es $x = 45$, $y = 9$, $z = 6$.

- c) Luis aporta 45 €, Carmen 9 € y Pedro 6 €

EBAU Extraordinaria 2020



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL
CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS aplicadas a las ciencias sociales **(2)**

Convocatoria:

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:

- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

GRUPO A

A1. Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80% de los casos.

- Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?
- Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?
- ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15?

A2. Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4%, el 6% y el 5%, respectivamente.

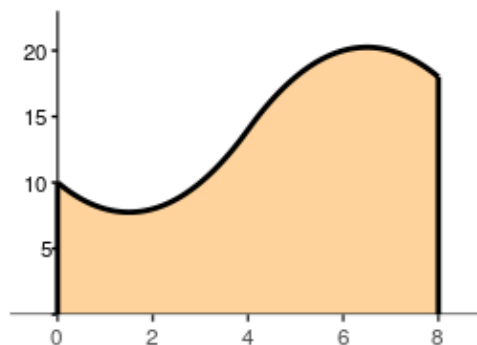
- Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.
- En un determinado envío se han repartido 4000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?
- Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

A3. Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 10 & x \in [0, 4] \\ -x^2 + 13x - 22 & x \in (4, 8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.

- Calcular cuando mide la superficie de la pared.
- Si el cartón piedra cuesta 4 €/m², la pintura 0.5 €/m² y el coste la mano de obra es igual al 70% del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?



A4. Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

- Representar la región factible y los vértices.

- b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

GRUPO B

- B1.** Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.
- a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.
- b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo $[0,826, 0,894]$. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?
- B2.** Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.
- a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.
- b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese $[128,71, 135,29]$.
- B3.** Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:
- $$D(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5, & t \in [0, 4] \\ \frac{(t-7)^2}{9} + 3, & t \in]4, 10] \end{cases}$$
- siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:
- a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.
- b) ¿Es $D(t)$ derivable?
- c) ¿Entre qué valores varía $D(t)$? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?
- B4.** En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.
- a) Plantear el correspondiente sistema.
- b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

SOLUCIONES

GRUPO A

A1. Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80% de los casos.

- Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?
- Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?
- ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15?

Utilizamos la distribución binomial, siendo 10 las repeticiones y la probabilidad de éxito = probabilidad de curarse = 0,80.

X = Número de pacientes curados de los 10 que reciben el medicamento. $X = B(10, 0,8)$

- Que como mucho 9 no se curen significa que no se curen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9.
Es lo mismo que se curen 10, 9, 8, 7, 6, ... o 1.
Calculamos esta probabilidad con el suceso contrario, es decir, que se curen 0 pacientes.

$$\begin{aligned} P(\text{A lo sumo 9 no se curen}) &= 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0,8^0 \cdot 0,2^{10} = 1 - 0,2^{10} = 1 - 0,0000001 = 0,9999999 \end{aligned}$$

Es un suceso casi seguro.

- Con una repetición tan grande aproximamos la binomial por una normal.
 X = Número de pacientes curados de los 100 que reciben el medicamento.

$$X = B(100, 0,8) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,8 = 80 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 4 \end{array} \right\} \rightarrow X \approx N(80, 4)$$

Para poder usar la aproximación a la normal hacemos la corrección de Yates y la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88 la convertimos en probabilidad de que el número de curados esté entre 75,5 y 88,5.

$$\begin{aligned} P(75,5 \leq X \leq 88,5) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{75,5 - 80}{4} \leq Z \leq \frac{88,5 - 80}{4}\right) = P(-1,125 \leq Z \leq 2,125) = \\ &= P(Z \leq 2,125) - P(Z \leq -1,125) = P(Z \leq 2,125) - P(Z \geq 1,125) = \\ &= P(Z \leq 2,125) - (1 - P(Z \leq 1,125)) = \frac{0,9830 + 0,9834}{2} - 1 + \frac{0,8686 + 0,8708}{2} = \boxed{0,8529} \end{aligned}$$

- Con una repetición tan grande aproximamos la binomial por una normal.
 X = Número de pacientes curados de los 64 que reciben el medicamento.

$$X = B(64, 0,8) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 64 \cdot 0,8 = 51,2 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 3,2 \end{array} \right\} \rightarrow X \approx N(51,2, 3,2)$$

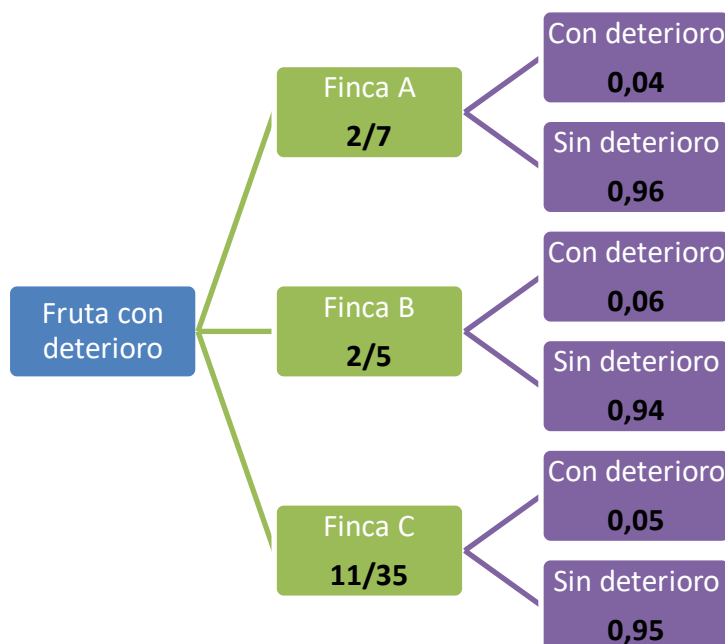
Que la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15, significa que hay $0,15 \cdot 64 = 9,6$ no curados o menos. O lo que es lo mismo $64 - 9,6 = 54,4$ curados o más.

$$\begin{aligned} P(X \geq 54,4) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{54,4 - 51,2}{3,2}\right) = P(Z \geq 1) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587} \end{aligned}$$

A2. Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4%, el 6% y el 5%, respectivamente.

- Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.
- En un determinado envío se han repartido 4000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?
- Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

a) La probabilidad de que una verdura proceda de la finca C es $1 - \frac{2}{7} - \frac{2}{5} = \frac{35-10-14}{35} = \frac{11}{35}$



b) Calculamos primero la probabilidad de que una verdura sufra deterioro.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sufrir deterioro}) &= P(\text{De finca A})P(\text{Sufrir deterioro/De finca A}) + \\
 &+ P(\text{De finca B})P(\text{Sufrir deterioro/De finca B}) + P(\text{De finca C})P(\text{Sufrir deterioro/De finca C}) = \\
 &= \frac{2}{7} \cdot 0,04 + \frac{2}{5} \cdot 0,06 + \frac{11}{35} \cdot 0,05 = \boxed{\frac{179}{3500} = 0,051}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de no sufrir deterioro es de $1 - \frac{179}{3500} = \frac{3321}{3500}$. Multiplicamos esta probabilidad por 4000 kg y tenemos que $\frac{3321}{3500} \cdot 4000 = 3795,43$ kilogramos de fruta se espera que llegue sin deterioro.

c) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

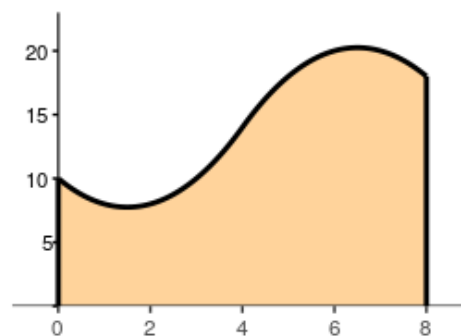
$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea de finca C / Está deteriorada}) &= \frac{P(\text{Sea de finca C} \cap \text{Está deteriorada})}{P(\text{Esté deteriorada})} = \\
 &= \frac{\frac{11}{35} \cdot 0,05}{\frac{179}{3500}} = \boxed{\frac{55}{179} = 0,307}
 \end{aligned}$$

A3. Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 10 & x \in [0, 4] \\ -x^2 + 13x - 22 & x \in (4, 8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.

- a) Calcular cuando mide la superficie de la pared.
 b) Si el cartón piedra cuesta 4 €/m², la pintura 0.5 €/m² y el coste la mano de obra es igual al 70% del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?



- a) Debemos calcular la integral de la función entre 0 y 8. La dividimos en dos y sumamos lo obtenido en cada una de ellas.

$$\begin{aligned} \int_0^4 x^2 - 3x + 10 dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 10x \right]_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 3\frac{4^2}{2} + 40 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} + 0 \right] = \\ &= \frac{64}{3} - 24 + 40 = \frac{112}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_4^8 -x^2 + 13x - 22 dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 13\frac{x^2}{2} - 22x \right]_4^8 = \left[-\frac{8^3}{3} + 13\frac{8^2}{2} - 176 \right] - \left[-\frac{4^3}{3} + 13\frac{4^2}{2} - 88 \right] = \\ &= -\frac{512}{3} + 416 - 176 + \frac{64}{3} - 104 + 88 = -\frac{448}{3} + 224 = \frac{224}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{112}{3} + \frac{224}{3} = \frac{336}{3} = 112 \text{ m}^2$$

- b) El coste de los materiales es $(4 + 0,5)112 = 504$ €. La mano de obra vale $0,70 \cdot 504 = 352,8$ €. El coste total es la suma de ambos: $504 + 352,8 = 856,8$ €.

A4. Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

a) Llamamos “x” al número de gabardinas de paño e “y” al número de gabardinas de piel.

Las restricciones para la compra se expresan con las inecuaciones siguientes:

“El comerciante dispone de 5400 €, costando la de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad”

$$\rightarrow 180x + 300y \leq 5400$$

“No precisa más de 20 unidades” $\rightarrow x + y \leq 20$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 180x + 300y \leq 5400 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 90 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$$3x + 5y = 90$$

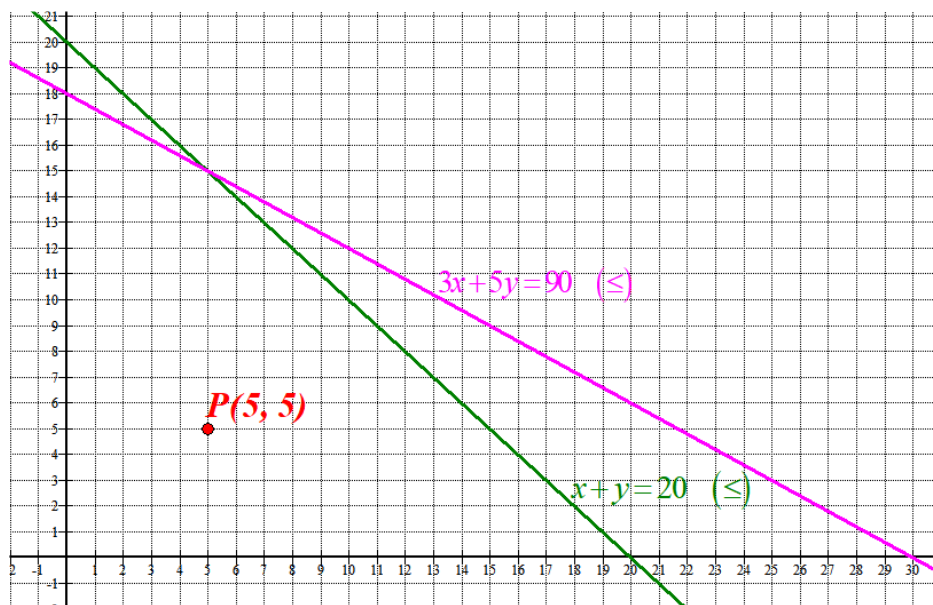
x	y = $\frac{90-3x}{5}$
30	0
0	18

$$x + y = 20$$

x	y = $20 - x$
20	0
0	20

$$x \geq 0; y \geq 0$$

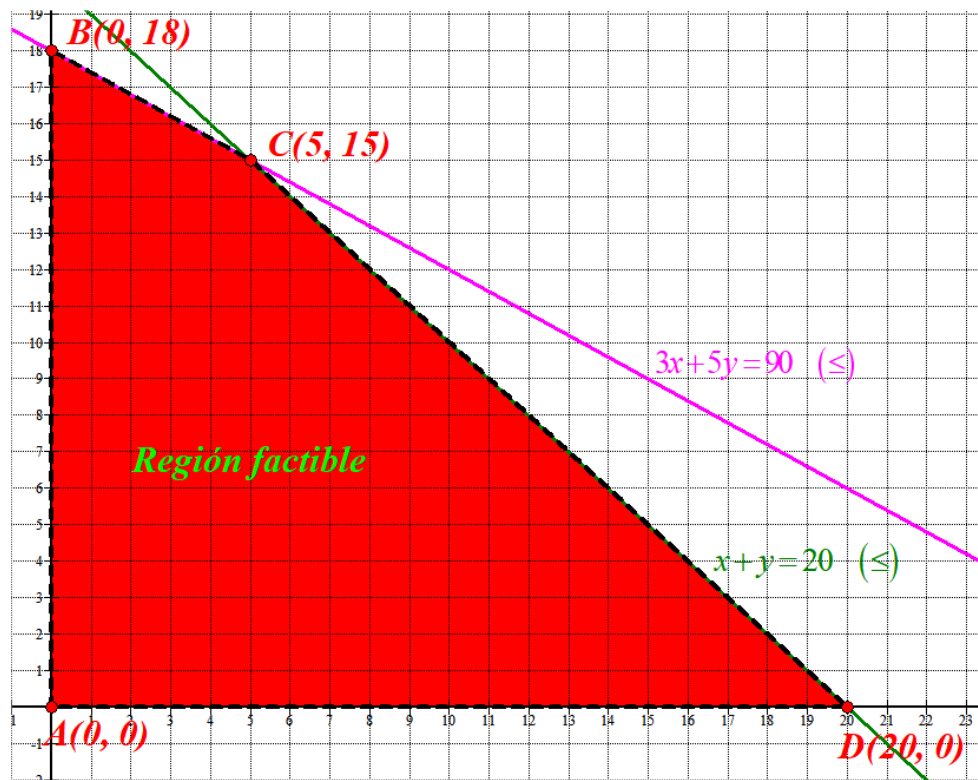
Primer cuadrante



Comprobamos si el punto P(5, 5) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 15 + 25 \leq 90 \\ 5 + 5 \leq 20 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen}$$

La región factible es la que contiene el punto P(5, 5) y que aparece coloreada de rojo en el dibujo.



b) El beneficio vendiendo “x” gabardinas de paño e “y” gabardinas de piel es de

$$B(x, y) = 99x + 156y .$$

Valoramos esta función en cada vértice buscando donde se obtiene un beneficio máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 2808$$

$$C(5, 15) \rightarrow B(5, 15) = 2835$$

$$D(20, 0) \rightarrow B(20, 0) = 1980$$

El máximo beneficio es de 2835 € y se obtiene en el vértice C(5, 15), que significa comprar 5 gabardinas de paño y 15 de piel.

GRUPO B

B1. Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

- Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.
- Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo $[0,826, 0,894]$. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

De 400 internautas 344 usan las redes sociales. 56 no usan las redes sociales.

La proporción de los internautas que no usan las redes sociales en la muestra de 400 internautas

$$\text{es } p = \frac{56}{400} = 0,14 \quad \text{y} \quad 1 - p = 1 - 0,14 = 0,86$$

- Para un nivel de confianza del 0,97



$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

El error viene dado por la fórmula $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{400}} = 0,0376$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,14 - 0,0376, 0,14 + 0,0376) = (0,1024, 0,1776).$$

- El intervalo de confianza $[0,826, 0,894]$ tiene una amplitud de $0,894 - 0,826 = 0,068$.

Y el error es la mitad de dicha amplitud $\rightarrow \text{Error} = \frac{0,068}{2} = 0,034$

Sustituimos en la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{400}} = 0,034 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,034}{\sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{400}}} = 1,96$$

Mirando en la tabla de la normal obtenemos que $1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha = 0,95$. El nivel de confianza es del 95%.

- c) Con el nivel de confianza del 95% el intervalo de confianza de la proporción de los que usan las redes es de $[0,826, 0,894]$. Por ello el número de internautas que usan las redes sociales están en el intervalo $[0,826 \cdot 400000, 0,894 \cdot 400000] = [330400, 357600]$.

Usan las redes entre 330400 y 357600.

No las usan entre $400000 - 357600 = 42400$ y $400000 - 330400 = 69600$ internautas.

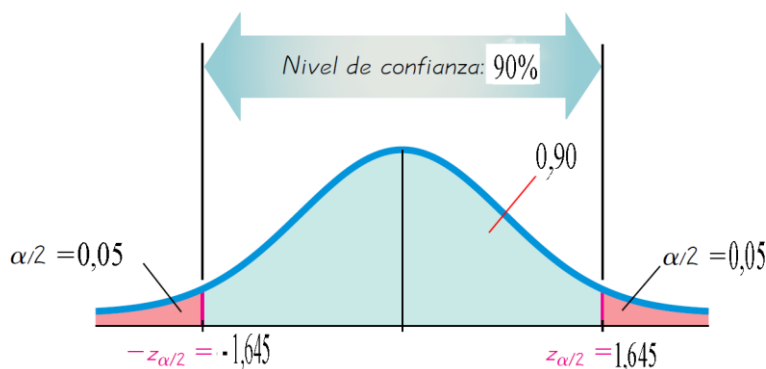
B2. Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.

- a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.
 b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71, 135,29].

a) $X =$ Gasto anual en libros y material escolar. $X \approx N(\mu, 24)$

$n = 400$ estudiantes. $\bar{x} = 132$ €

Para un nivel de confianza del 90%



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{24}{\sqrt{400}} = 1,974$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (132 - 1,974, 132 + 1,974) = (130,026, 133,974)$$

b) ¿n?

$X \approx N(\mu, 24)$

El intervalo de confianza tiene una amplitud de $135,29 - 128,71 = 6,58$

El error es la mitad de dicha amplitud $\rightarrow Error = 3,29$

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{24}{\sqrt{n}} = 3,29 \Rightarrow \frac{24}{\sqrt{n}} = \frac{3,29}{1,645} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{3,29}{1,645} \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{24 \cdot 1,645}{3,29} \Rightarrow n = \left(\frac{24 \cdot 1,645}{3,29} \right)^2 = 144$$

El tamaño de la muestra debe de ser mayor de 144 estudiantes.

B3. Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5, & t \in [0, 4] \\ \frac{(t-7)^2}{9} + 3, & t \in]4, 10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

- ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.
- ¿Es $D(t)$ derivable?
- ¿Entre qué valores varía $D(t)$? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento?
¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

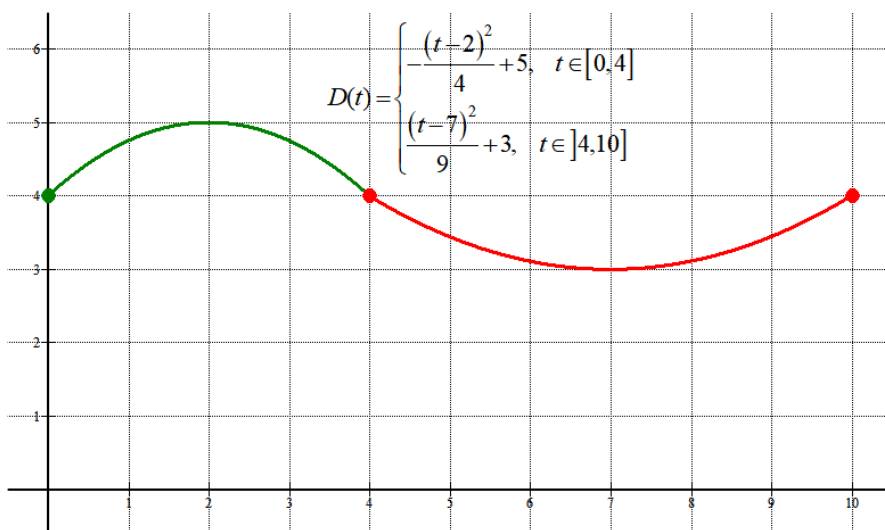
a) Para que sea continua debe serlo en $t = 4$.

- Existe $D(4) = -\frac{(4-2)^2}{4} + 5 = 4$
- Existe $\lim_{t \rightarrow 4} D(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 4^-} D(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5 = 4 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} D(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{(t-7)^2}{9} + 3 = 4 \end{cases} = 4$
- $D(4) = 4 = \lim_{t \rightarrow 4} D(t)$

La función es continua en $t = 4$ y en todo el intervalo $[0, 10]$.
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$D(t) = -\frac{(t-2)^2}{4} + 5$
0	4
1	4,75
2	5
3	4,75
4	4

t	$D(t) = \frac{(t-7)^2}{9} + 3$
5	3,44
6	3,11
8	3,11
9	3,44
10	4



b) Es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$ y la derivada es:

$$D(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5, & t \in [0, 4] \\ \frac{(t-7)^2}{9} + 3, & t \in]4, 10] \end{cases} \Rightarrow D'(t) = \begin{cases} -\frac{2(t-2)}{4}, & t \in [0, 4) \\ \frac{2(t-7)}{9}, & t \in (4, 10] \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en $t = 4$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$D'(4) = \begin{cases} D'(4^-) = -\frac{2(4-2)}{4} = -1 \\ D'(4^+) = \frac{2(4-7)}{9} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} D'(4^-) \\ D'(4^+) \end{matrix}} \right\} \text{No son iguales}$$

La función no es derivable en $t = 4$.

La función es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$

- c) Si miramos su gráfica observamos que $D(t)$ varía entre 3 y 5 millones de euros. Crece en $[0, 2) \cup (7, 10)$ y decrece en $(2, 7)$. Tiene un máximo absoluto en $(2, 5)$ y un mínimo absoluto en $(7, 3)$.

B4. En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

a) Llamamos “e” al número de turistas españoles, “a” al de alemanes e “i” al de ingleses.

“Hay 400 turistas en total” $\rightarrow e + a + i = 400$

“El número de alemanes es el 120% del número de ingleses” $\rightarrow a = 1,2i$

“Los ingleses sumados a los españoles superan en 40 a los alemanes” $\rightarrow i + e = a + 40$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} e + a + i = 400 \\ a = 1,2i \\ i + e = a + 40 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} e + a + i = 400 \\ a = 1,2i \\ i + e = a + 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sustituimos "a" por "1,2i"} \\ \text{en ecuación 1ª y 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e + 1,2i + i = 400 \\ i + e = 1,2i + 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e + 2,2i = 400 \\ e - 0,2i = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} e + 2,2i = 400 \\ -e + 0,2i = -40 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2,4i = 360 \Rightarrow i = \frac{360}{2,4} = 150 \text{ ingleses} \Rightarrow a = 1,2 \cdot 150 = 180 \text{ alemanes} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow e + 180 + 150 = 400 \Rightarrow e = 400 - 330 = 70 \text{ españoles}$$

En el hotel hay 70 turistas españoles, 150 ingleses y 180 alemanes.

EBAU Ordinaria 2020



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS aplicadas a las ciencias sociales	(3)
---	------------

Convocatoria:

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:

- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

GRUPO A

A1. Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40% de sus vehículos en España, el 35% en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

- Construye el diagrama de árbol de probabilidades.
- Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?
- Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

A2. En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1250 € con una desviación típica de 210 €.

- Calcular un intervalo de confianza al 90% para los ingresos medios mensuales.
- ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%?

A3. Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 & 0 \leq t \leq 8 \\ -\frac{36}{t} + 6 & 8 < t \leq 24 \end{cases}$$

donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

- Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?
- Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

A4. En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas

las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

- Plantear el problema y representar la región factible.
- ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

GRUPO B

B1. En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

- Estima, con una confianza del 94%, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.
- ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4% y una confianza del 90%?

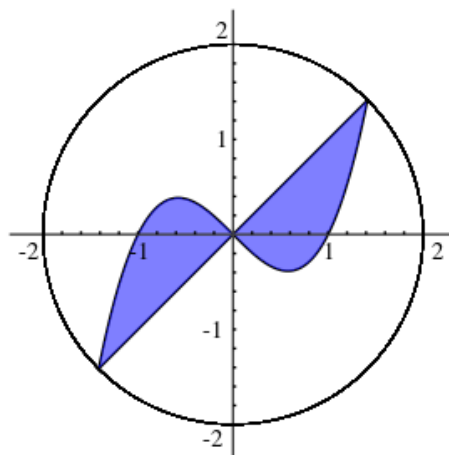
B2. El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

- Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92% para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg
- Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

B3. La empresa *XYPERIA* ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son:

$$f(x) = x^3 - x \quad g(x) = x$$

- La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?
- Teniendo en cuenta que el m² de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30% de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje *in situ* tienen un coste de fijo 270 €, ¿cuánto deberá pagar *XYPERIA* por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?



B4. Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente

SOLUCIONES

GRUPO A

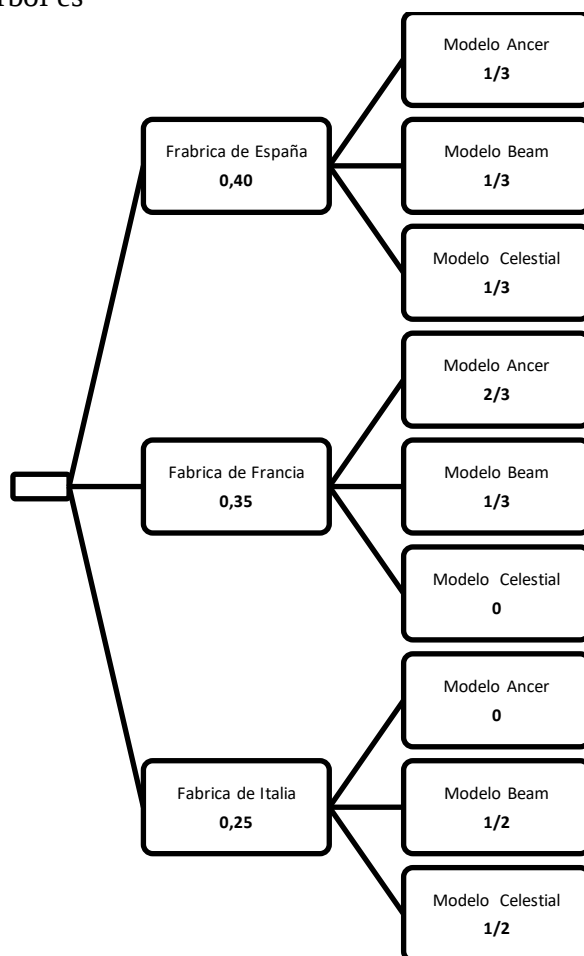
A1. Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40% de sus vehículos en España, el 35% en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.

b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

a) El diagrama de árbol es



b) $P(\text{Elegir un coche Beam}) = 0,4 \cdot \frac{1}{3} + 0,35 \cdot \frac{1}{3} + 0,25 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0,375$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos teorema de Bayes

$$P(\text{Fabricado en España} / \text{modelo Ancer}) = \frac{P(\text{Fabricado en España} \cap \text{Es un modelo Ancer})}{P(\text{Es un modelo Ancer})} =$$

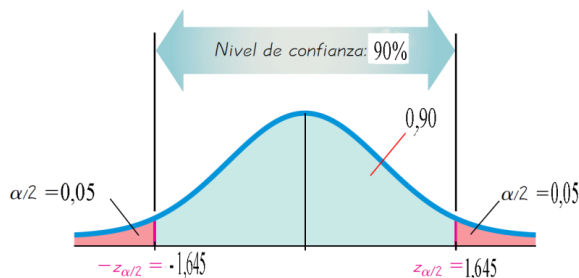
$$= \frac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{0,4 \cdot \frac{1}{3} + 0,35 \cdot \frac{2}{3} + 0,25 \cdot 0} = \frac{0,4}{1,1} = \frac{4}{11} = 0,3636$$

A2. En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1250 € con una desviación típica de 210 €.

- a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para los ingresos medios mensuales.
 b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%?

a) $X =$ Ingresos mensuales. $n = 400$ personas. $\bar{x} = 1250$ €. $X \approx N(\mu, 210)$

Para un nivel de confianza del 90% hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

Usamos la fórmula del error.

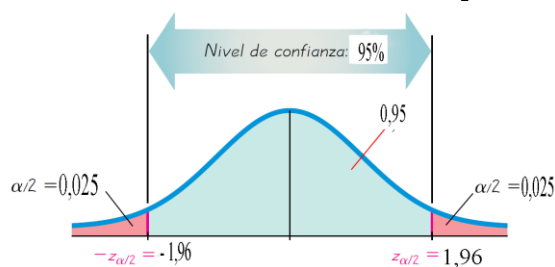
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{210}{\sqrt{400}} = 17,2725$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1250 - 17,2725, 1250 + 17,2725) = (1232,7275, 1267,2725)$$

b) $X =$ Ingresos mensuales. $X \approx N(\mu, 210)$

Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95 % hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Usamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{210}{\sqrt{n}} = 15 \Rightarrow \frac{210}{\sqrt{n}} = \frac{15}{1,96} \Rightarrow 210 = \frac{15}{1,96} \cdot \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{210 \cdot 1,96}{15} \Rightarrow n = \left(\frac{210 \cdot 1,96}{15} \right)^2 = 752,9538$$

El tamaño de la muestra debe de ser mayor de 753 personas.

A3. Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 & 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{-36}{t} + 6 & 8 < t \leq 24 \end{cases}$$

donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

- a)** Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?
- b)** Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

a) Esta función es continua, pues la rama $\frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4$ $0 \leq t \leq 8$ es una parábola y la rama $\frac{-36}{t} + 6$ $8 < t \leq 24$ es discontinua en $t = 0$ pero no está incluido en su dominio de definición.

Falta ver si es continua en $t = 8$.

- Existe $D(8) = \frac{1}{10}8^2 - \frac{6}{5}8 + 4 = 0,8$
- Existe $\lim_{t \rightarrow 8^-} D(t) = \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 = \frac{1}{10}8^2 - \frac{6}{5}8 + 4 = 0,8$
- Existe $\lim_{t \rightarrow 8^+} D(t) = \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{-36}{t} + 6 = \frac{-36}{8} + 6 = 1,5$
- Los tres valores son iguales. No es cierto, luego la función no es continua en $t = 8$

El vértice de la parábola es

$$D(t) = \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 \Rightarrow D'(t) = \frac{1}{10}2t - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}t - \frac{6}{5}$$

$$D'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}t - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6$$

Como la derivada segunda es

$$D'(t) = \frac{1}{5}t - \frac{6}{5} \Rightarrow D''(t) = \frac{1}{5} > 0$$

En $t = 6$ hay un mínimo.

La rama $D(t) = \frac{-36}{t} + 6$ tiene derivada $D'(t) = \frac{36}{t^2}$. Esta derivada es positiva siempre por lo que esta rama es siempre creciente.

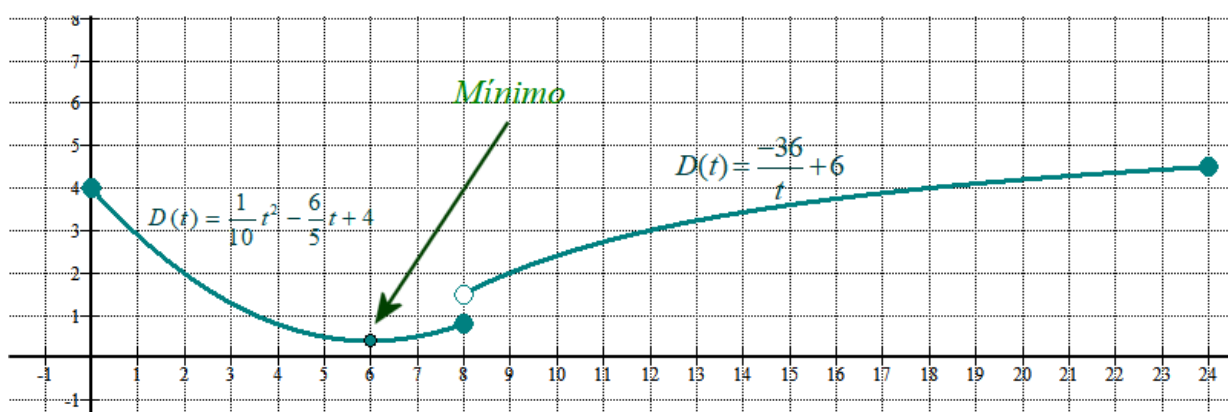
Hacemos una tabla para dibujar la función.

$$D(t) = \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 \quad 0 \leq t \leq 8$$

t	$D(t)$
0	4
1	2,9
6	0,4 Mínimo
8	0,8

$$D(t) = \frac{-36}{t} + 6 \quad 8 < t \leq 24$$

t	$D(t)$
8	1,5 No se incluye
10	2,4
20	4,2
24	4,5



¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? No, hay una discontinuidad a las 8 horas. En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

A las 8 horas hubo un salto de $1,5 - 0,8 = 0,7$ cientos de Gigabits $\rightarrow 0,7 \cdot 100 = 70$ Gigabits por segundo.

b) Se ha calculado en el apartado anterior.

A las 6 horas hay un mínimo relativo de $0,4 \cdot 100 = 40$ Gigabits. Y mirando la gráfica se aprecia que es un mínimo absoluto del consumo.

El máximo consumo se produce a las 24 horas con un consumo de $4,5 \cdot 100 = 450$ Gigabits. En el otro extremo a las 0 horas el consumo es menor, de $4 \cdot 100 = 400$ Gigabits.

A4. En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

a) Llamamos “x” al número de cajas del tipo A e “y” al número de cajas del tipo B. Hagamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Kg de fruta	Kg de verdura	Ingresos
Nº cajas tipo A (x)	3x	3x	10x
Nº cajas tipo B (y)	5y	8y	18y
	3x + 5y	3x + 8y	10x + 18y

“Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A” $\rightarrow x \geq 20$

“El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas” $\rightarrow 3x + 5y \leq 195 \quad 3x + 8y \leq 240$

El número de cajas es positivo $\rightarrow y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 195 \\ 3x + 8y \leq 240 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

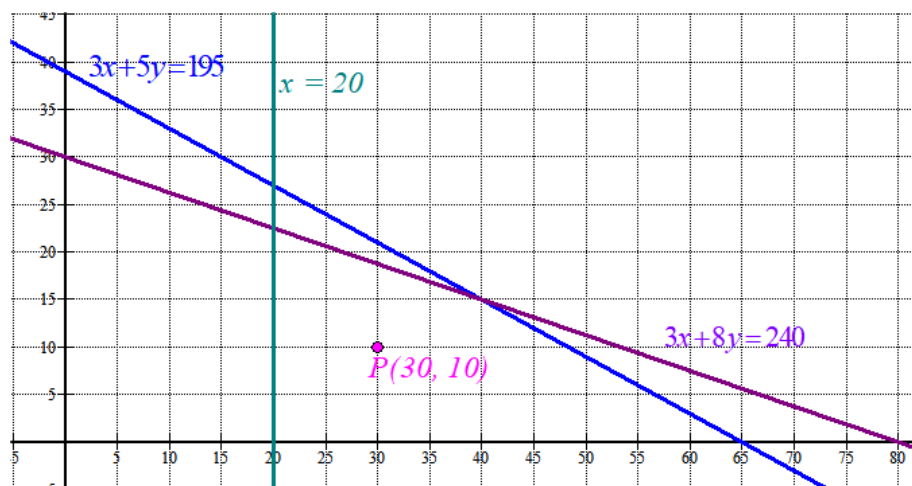
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$3x + 5y = 195$$

x	$y = \frac{195 - 3x}{5}$
0	39
10	33
50	9

$$3x + 8y = 240$$

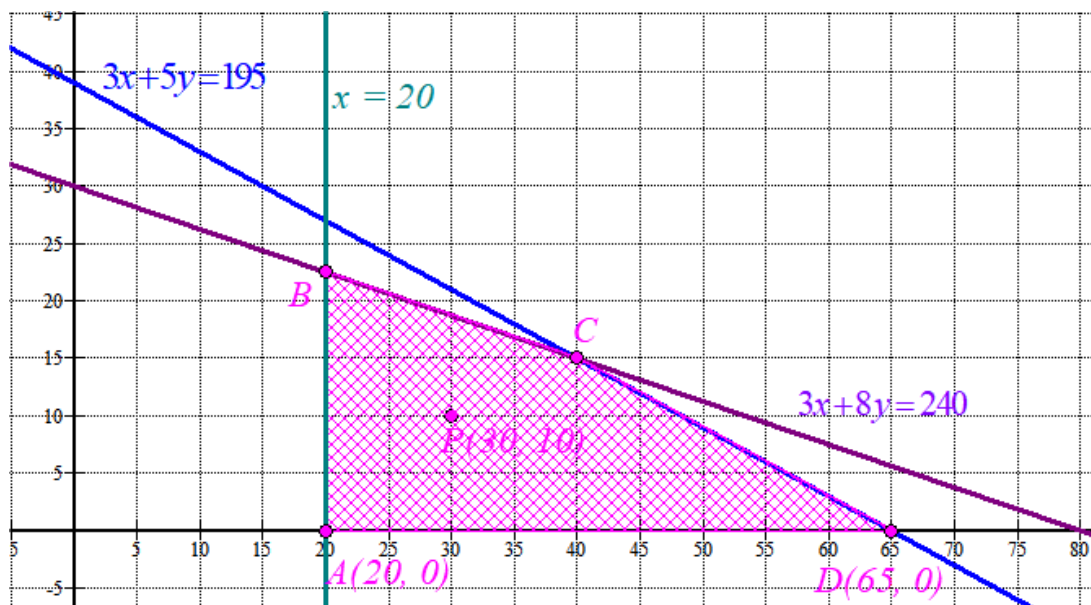
x	$y = \frac{240 - 3x}{8}$
0	30
40	15
80	0



Comprobamos si el punto P(30, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 90 + 50 \leq 195 \\ 90 + 80 \leq 240 \\ 30 \geq 20 \\ 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Si las cumple.}$$

La región factible es la zona rayada.



b) Averiguamos las coordenadas de los vértices de la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 8y = 240 \\ x = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 + 8y = 240 \Rightarrow y = \frac{240 - 60}{8} = 22.5$$

El punto B tiene coordenadas B(20, 22.5)

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 8y = 240 \\ 3x + 5y = 195 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 3x + 5y = 195 \\ -3x - 8y = -240 \\ \hline -3y = -45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 8y = 240 \\ -3y = -45 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 8y = 240 \\ y = \frac{45}{3} = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 120 = 240 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

El punto C tiene coordenadas C(40, 15)

Valoramos la función Ingresos $I(x, y) = 10x + 18y$ en cada uno de los vértices en busca de su valor máximo.

$$A(20, 0) \rightarrow I(20, 0) = 200 + 0 = 200$$

$$B(20, 22.5) \rightarrow I(20, 22.5) = 200 + 405$$

$$C(40, 15) \rightarrow I(40, 15) = 400 + 270 = 670 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(65, 0) \rightarrow I(65, 0) = 650 + 0 = 650$$

Se obtiene unos ingresos máximos en el vértice C(40, 15). Hay que preparar 40 cajas del tipo A y 15 del tipo B para maximizar los ingresos, que son 670 €.

GRUPO B

B1. En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

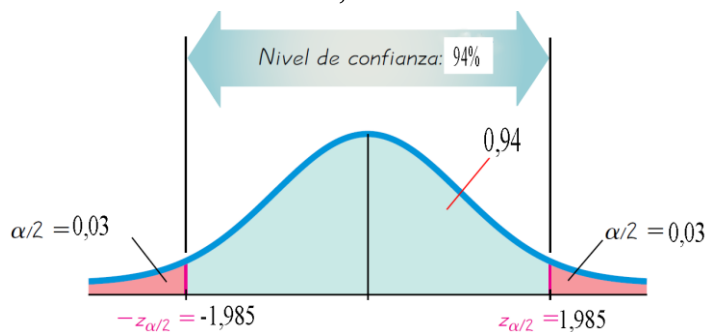
- a) Estima, con una confianza del 94%, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.
- b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4% y una confianza del 90%?

De 48 alumnos 12 no usan la cafetería y 36 si la usan.

La proporción de los estudiantes que usan la cafetería en la muestra de 48 estudiantes es

$$p = \frac{36}{48} = 0,75 \quad \text{y} \quad 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25. \quad \text{El tamaño de la muestra es } n = 48$$

- a) Para un nivel de confianza del 0,94



$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

El error viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{48}} = 0,1175$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0,75 - 0,1175, 0,75 + 0,1175) = (0,6325, 0,8675).$$

- b) Con un nivel de confianza del 0,90

$$1 - \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

Los datos son $p = 0,75$; $1 - p = 0,25$ $n = 48$

El error cometido debe ser 0,04 por lo que:

$$Error = 0,04 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{n}} = 0,04$$

$$\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{n}} = \frac{0,04}{1,645} \Rightarrow \frac{0,75 \cdot 0,25}{n} = \left(\frac{0,04}{1,645} \right)^2$$

$$0,75 \cdot 0,25 = n \left(\frac{0,04}{1,645} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0,75 \cdot 0,25}{\left(\frac{0,04}{1,645} \right)^2} = 317,11$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 318 estudiantes.

B2. El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

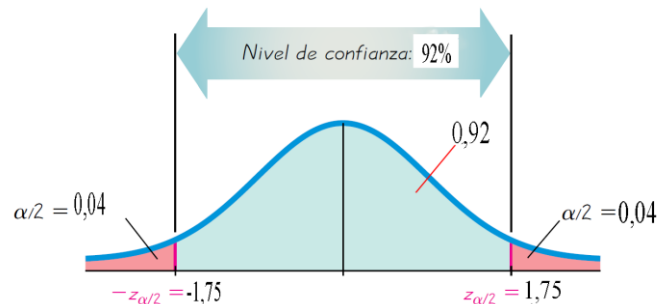
- a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92% para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg
- b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

a) X = Peso de una piña de plátanos. $X \approx N(\mu, 8)$

El error del intervalo de confianza es la mitad de la longitud del intervalo.

$$\text{Error} = 4 / 2 = 2 \text{ kg}$$

Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 92 %



$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla de} \\ \text{la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75$$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{\sqrt{n}} = \frac{2}{1,75} \Rightarrow 8 = \frac{2}{1,75} \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{8 \cdot 1,75}{2} = 7 \Rightarrow n = 7^2 = 49$$

El tamaño de la muestra debe de ser de 49 piñas de plátanos.

b) X = Peso de una piña de plátanos. $X \approx N(40, 8)$

La distribución de la media de peso de 81 piñas es una normal

$$\overline{X}_{81} \approx N\left(40, \frac{8}{\sqrt{81}}\right) = N\left(40, \frac{8}{9}\right)$$

$$P(38 \leq \overline{X}_{81} \leq 41) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{38-40}{8/9} < Z < \frac{41-40}{8/9}\right) =$$

$$= P(-2,25 < Z < 1,125) = P(Z < 1,125) - P(Z < -2,25) =$$

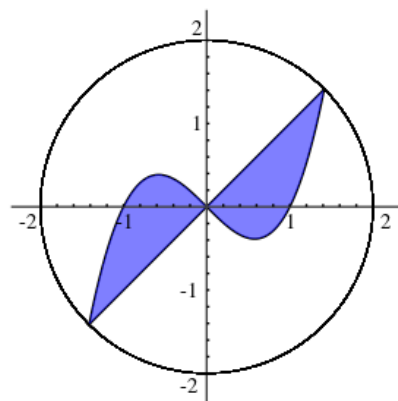
$$= P(Z < 1,125) - P(Z > 2,25) =$$

$$= P(Z < 1,125) - (1 - P(Z < 2,25)) = \frac{0,8686 + 0,8708}{2} - 1 + 0,9878 = \boxed{0,8575}$$

B3. La empresa *XYPERIA* ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son:

$$f(x) = x^3 - x \quad g(x) = x$$

- a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?
- b) Teniendo en cuenta que el m² de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30% de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje *in situ* tienen un coste de fijo 270 €, ¿cuánto deberá pagar *XYPERIA* por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?



- a) El área es una integral definida que dividiremos en dos partes. Necesitamos encontrar el punto de corte de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - x = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Los límites de integración para el cálculo del área son $-\sqrt{2}$; 0 y $+\sqrt{2}$.

Calculamos el valor de la mitad del área de la zona sombreada.

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^0 f(x) - g(x) dx &= \int_{-\sqrt{2}}^0 x^3 - x - x dx = \int_{-\sqrt{2}}^0 x^3 - 2x dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - 0^2 \right] - \left[\frac{(-\sqrt{2})^4}{4} - (-\sqrt{2})^2 \right] = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Como las funciones son simétricas respecto del origen el área rayada será el doble de lo obtenido anteriormente.

$$\text{Área de zona rayada} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$$

- b) En el coste hay que sumar el coste de fijo 270 €, el coste del cobre $2 \cdot 60 = 120$ € y el coste de mano de obra $0,30 \cdot 120 = 36$ €.
Lo sumamos y obtenemos un coste total de $270 + 120 + 36 = 426$ €.

- B4.** Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,
- a)** Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- b)** Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente

- a) Llamemos “x” al número de pendrives de 32 Gb, “y” al número de pendrives de 64 Gb, “z” al número de pendrives de 128 Gb.

“Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives” $\rightarrow x + y + z = 15$

“Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €” $\rightarrow$
 $5x + 15y + 20z = 160$

“El número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto” $\rightarrow z = \frac{x+y}{4}$

Planteamos el sistema con las 3 ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 5x + 15y + 20z = 160 \\ z = \frac{x+y}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x + 3y + 4z = 32 \\ 4z = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x + 3y + 4z = 32 \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvamos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x + 3y + 4z = 32 \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +3y \quad +4z \quad = 32 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -15 \\ \hline 2y \quad +3z \quad = 17 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad -4z \quad = 0 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -15 \\ \hline -5z \quad = -15 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 2y + 3z = 17 \\ -5z = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 2y + 3z = 17 \\ \boxed{z = 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3 = 15 \\ 2y + 9 = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 2y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ \boxed{y = 4} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 4 = 12 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Ha comprado 8 pendrives de 32 Gb, 4 pendrives de 64 Gb y 3 pendrives de 128 Gb.

EBAU Extraordinaria 2019



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019**

MATERIA: MATEMÁTICAS aplicadas a las ciencias sociales II (3)

Convocatoria: JULIO

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

PRUEBA A

1. Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50% de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40% para MacOS y un 10% para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90% de los usuarios de Windows, un 60% de los de Linux y un 75% de los de MacOS.
 - a) Construir el árbol de probabilidades.
 - b) Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario Linux?
 - c) Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinión. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea usuario Linux?
2. Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza $[0,1804, 0,2196]$, con un nivel de confianza del 95%. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:
 - a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?
 - b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?
 - c) Con un nivel de confianza del 99% y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?
3. El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado

$$\text{en meses es: } f(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 12x - 26, & 4 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

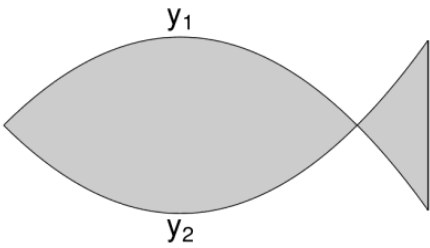
Justificando las respuestas:

- a) Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?
 - b) Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.
 - c) ¿Cuándo fue el beneficio igual a 6.000.000 €?
4. Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2,5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80€, por cada estantería un beneficio de 120€ y se tiene que satisfacer una

demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
- ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

PRUEBA B

- Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las principales ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos,
 - Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88%.
 - ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error menor de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95%?
- En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.
 - ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?
 - ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?
 - Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.
- En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5$ e $y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5$, entre $x=0$ y $x=12$. Los valores de x e y se expresan en metros.
 
 - Determinar la superficie total de la figura.
 - Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1.5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120€. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85€. Asimismo, la empresa A cobra 10€ por m^2 de piedra, mientras que la empresa B cobra 12€/m² por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?
- En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo, si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos,
 - Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
 - Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

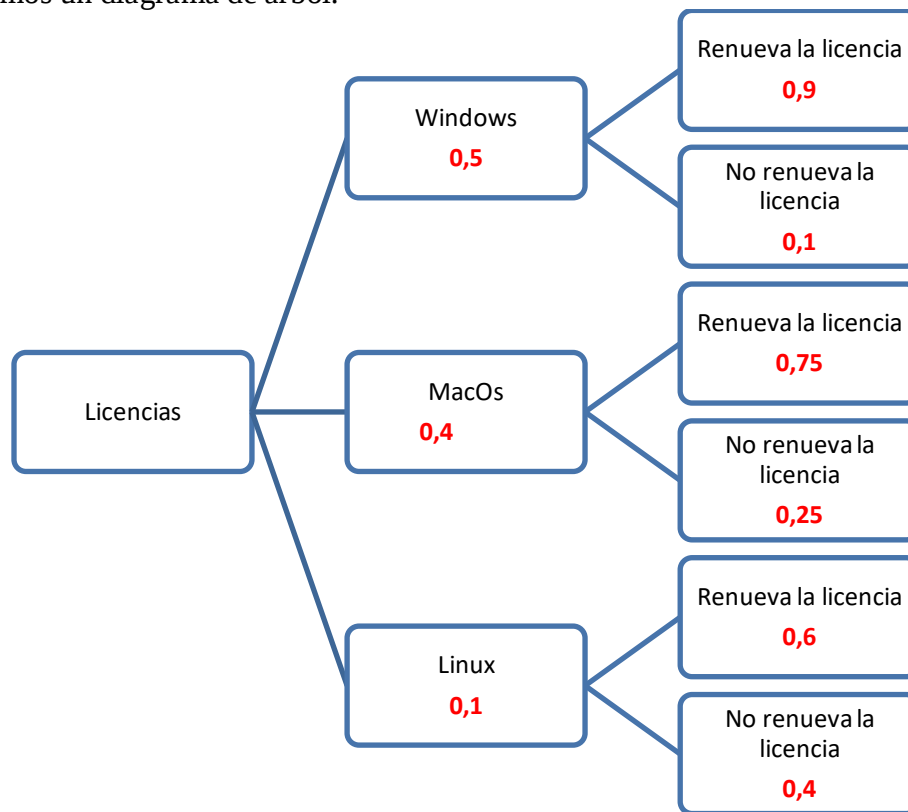
SOLUCIONES

PRUEBA A

1. Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50% de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40% para MacOS y un 10% para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90% de los usuarios de Windows, un 60% de los de Linux y un 75% de los de MacOS.

- Construir el árbol de probabilidades.
- Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario Linux?
- Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinión. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea usuario Linux?

a) Construimos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(\text{Sea Linux} / \text{Ha renovado la licencia})$.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea Linux} / \text{Ha renovado la licencia}) &= \frac{P(\text{Sea Linux y renueve la licencia})}{P(\text{Renueve la licencia})} = \\
 &= \frac{P(\text{Sea Linux}) \cdot P(\text{Renueve la licencia} / \text{Es usuario Linux})}{P(\text{Renueve la licencia})} = \boxed{\text{Continua..}}
 \end{aligned}$$

Como sabemos que:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Renueve la licencia}) &= P(\text{Sea Windows}) \cdot P(\text{Renueve la licencia} / \text{Es Windows}) + \\
 &+ P(\text{Sea MacOS}) \cdot P(\text{Renueve la licencia} / \text{Es MacOS}) + \\
 &+ P(\text{Sea Linux}) \cdot P(\text{Renueve la licencia} / \text{Es Linux}) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,81
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Continua..}} = \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,81} = \frac{0,06}{0,81} = \frac{6}{81} = \boxed{0,074}$$

c) X = Número de usuarios de Linux en 10 usuarios elegidos al azar.

X es una distribución binomial. Las repeticiones son independientes entre si y la probabilidad de éxito es siempre la misma, $p = 0,1$. $n = 10$.

$$X=B(10, 0,1)$$

$$\begin{aligned} P(\text{Al menos 1 es usuario Linux}) &= 1 - P(\text{No haya ningun usuario Linux}) = \\ &= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} = 1 - 0,9^{10} = \boxed{0,651} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Sin usar binomial.

$$P(\text{Al menos 1 es usuario Linux}) = 1 - P(\text{No haya ningun usuario Linux}) =$$

$$= 1 - P(\text{Usuario1 es no Linux}) \cdot P(\text{Usuario2 es no Linux}) \cdot \dots \cdot P(\text{Usuario10 es no Linux}) =$$

$$= 1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 1 - 0,9^{10} = \boxed{0,651}$$

2. Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza $[0,1804, 0,2196]$, con un nivel de confianza del 95%. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

- ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?
- ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?
- Con un nivel de confianza del 99% y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

- a) El intervalo de confianza para la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles es $[0,1804, 0,2196]$.

La media muestral es el centro de este intervalo.

$$p = \frac{0,1804 + 0,2196}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,2$$

- b) Para un nivel de confianza del 0,95

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El intervalo de confianza es $(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,2 - \text{Error}, 0,2 + \text{Error})$.

Entonces $0,2 + \text{Error} = 0,2196 \Rightarrow \text{Error} = 0,2196 - 0,2 = 0,0196$

Además, sabemos que $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, por lo que

$$0,0196 = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \Rightarrow \frac{0,0196}{1,96} = \sqrt{\frac{0,16}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0,0196}{1,96} \right)^2 = \frac{0,16}{n}$$

$$n = \frac{0,16}{\left(\frac{0,0196}{1,96} \right)^2} = 1600$$

El tamaño de la muestra es de 1600 individuos.

- c) Con un nivel de confianza del 0,99

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995$$

$$\rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,257 + 0,258}{2} = 0,2575$$

Los datos son $p = 0,2$; $n = 1600$

El error cometido es $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,2575 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{1600}} = 0,02575$

El intervalo de confianza para la proporción de habitantes sin dispositivos móviles es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,2 - 0,02575, 0,2 + 0,02575) = \boxed{(0,17425, 0,22575)}$$

El intervalo de confianza es de una proporción entre 17,4% y 22,6%.

3. El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado en

$$\text{meses es: } f(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 12x - 26, & 4 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

Justificando las respuestas:

- Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?
- Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.
- ¿Cuándo fue el beneficio igual a 6.000.000 €?

a) Es una función a trozos. Un trozo de recta oblicua, otro de una parábola y de otra recta horizontal.

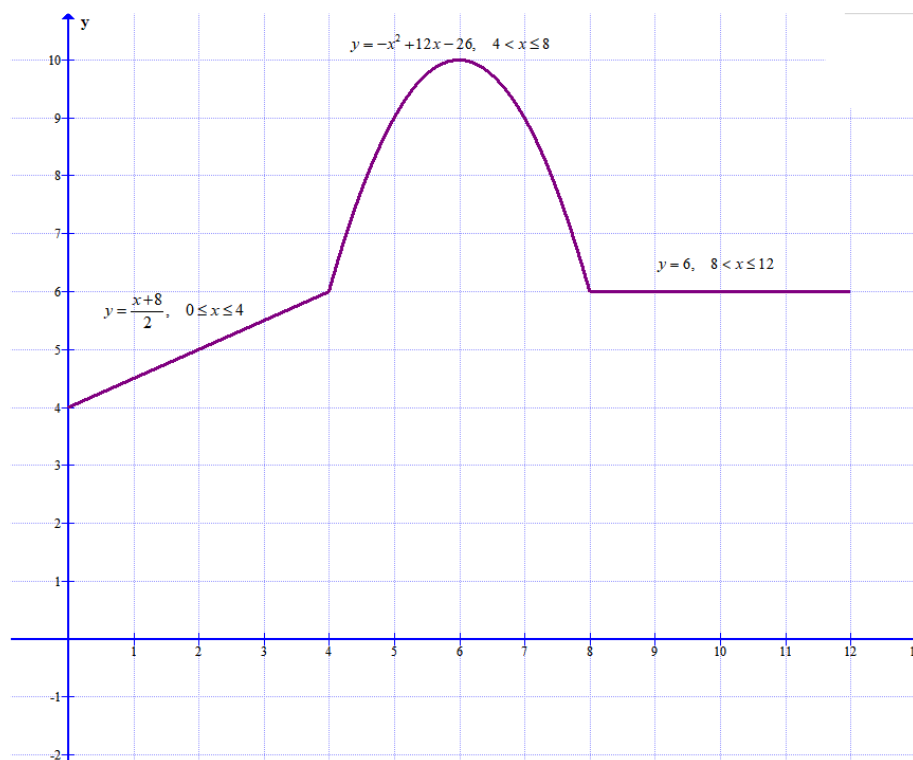
Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola.

$$y = -x^2 + 12x - 26 \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2} = 6 \Rightarrow y_v = -6^2 + 72 - 26 = 10$$

El vértice es V(6, 10).

Hacemos una tabla de valores de la función.

x	$y = \frac{x+8}{2}, \quad 0 \leq x \leq 4$	x	$y = -x^2 + 12x - 26, \quad 4 < x \leq 8$	x	$y = 6, \quad 8 < x \leq 12$
0	4	4	$-16 + 48 - 26 = 6$, no se incluye	8	6, no se incluye
2	5	6	$-36 + 72 - 26 = 10$, vértice	10	6
4	6	8	$-64 + 96 - 26 = 6$	12	6



Mirando la gráfica, la función crece desde $x = 0$ hasta $x = 6$, decrece de $x = 6$ hasta $x = 8$ y se mantiene constante de $x = 8$ a $x = 12$.

- b) El beneficio máximo es en el vértice de la parábola, en el mes 6 (comienzo de Junio) con un beneficio de 10 millones de euros. El beneficio mínimo en el mes 0 (principio de Enero) con un beneficio de 4 millones de euros.
- c) El beneficio es de 6 millones de euros en muchos puntos de la gráfica. En $x = 4$ (abril), pero también del mes 8 al mes 12 (agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre).

4. Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2.5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80€, por cada estantería un beneficio de 120€ y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

a) Llamemos x = número de mesas e y = número de armarios.

Las restricciones del problema planteado son:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas $\rightarrow x \geq 50$

Se tiene que satisfacer una demanda mínima de 60 estanterías $\rightarrow y \geq 60$

Se requieren 2.5 tableros por mesa y 6 por estantería.

$$\text{Disponemos de 740 tableros} \rightarrow 2,5x + 6y \leq 740$$

Se utilizan 10 tornillos por mesa y 60 por estantería.

$$\text{Disponemos de 6200 tornillos} \rightarrow 10x + 60y \leq 6200$$

Las restricciones quedan como el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 50 \\ y \geq 60 \\ 2,5x + 6y \leq 740 \\ 10x + 60y \leq 6200 \Rightarrow x + 6y \leq 620 \end{array} \right\}$$

La función beneficio es $B(x, y) = 80x + 120y$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una y averiguando los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 740 \\ x + 6y = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 6y = 620 \\ -2,5x - 6y = -740 \\ \hline -1,5x = -120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 740 \\ -1,5x = -120 \Rightarrow x = \frac{120}{1,5} = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 + 6y = 740 \Rightarrow 6y = 540 \Rightarrow y = \frac{540}{6} = 90$$

El punto de corte de las rectas es (80, 90).

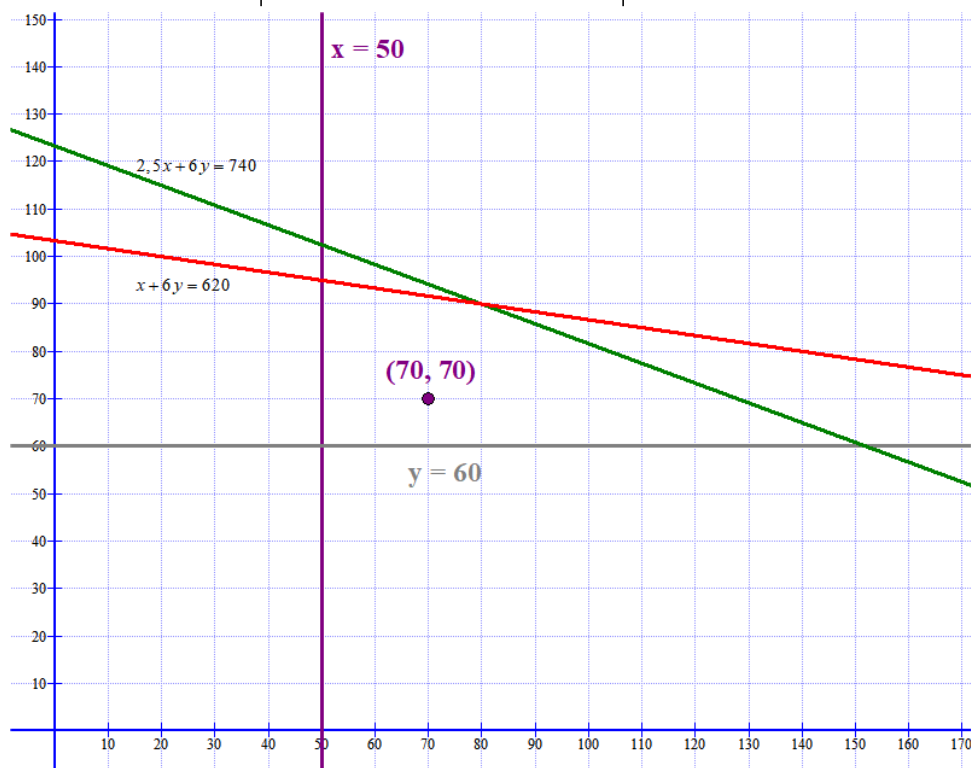
$$\left. \begin{array}{l} x + 6y = 620 \\ x = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 50 + 6y = 620 \Rightarrow 6y = 570 \Rightarrow y = \frac{570}{6} = 95$$

El punto de corte de las rectas es (50, 95).

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 740 \\ y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 2,5x + 360 = 740 \Rightarrow 2,5x = 380 \Rightarrow x = \frac{380}{2,5} = 152$$

El punto de corte de las rectas es (152, 60).

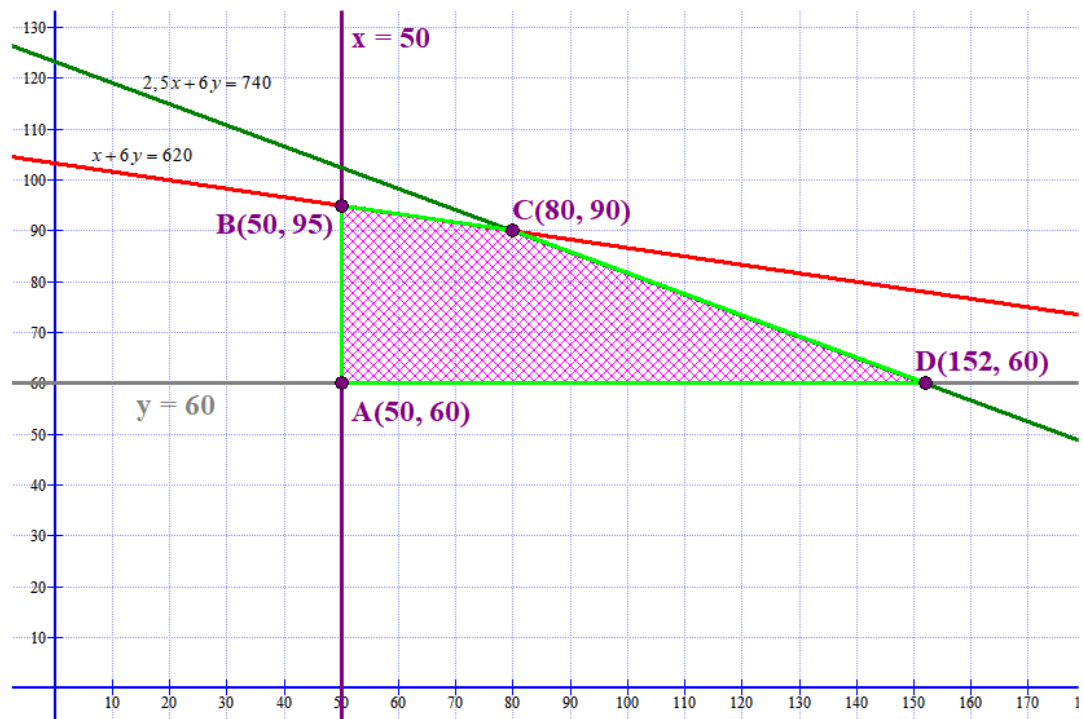
x	$y = \frac{740 - 2,5x}{6}$	x	$y = \frac{620 - x}{6}$
0	$370/3$	0	$310/3$
296	0	620	0
80	90	80	90



El punto (70, 70) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 70 \geq 0 \\ 70 \geq 0 \\ 70 \geq 50 \\ 70 \geq 60 \\ 175 + 420 \leq 740 \\ 70 + 420 \leq 620 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo, teniendo los vértices como posibles soluciones a la optimización del beneficio.



b) Valoramos el beneficio en cada hecho puntual indicado por los puntos A, B, C y D.

$$A(50, 60) \rightarrow B(50, 60) = 4000 + 7200 = 11200$$

$$B(50, 95) \rightarrow B(50, 95) = 4000 + 11400 = 15400$$

$$C(80, 90) \rightarrow B(80, 90) = 6400 + 10800 = 17200$$

$$D(152, 60) \rightarrow B(152, 60) = 12160 + 7200 = 19360$$

El máximo beneficio se obtiene en D(152, 60), que significa fabricar 152 mesas y 60 estanterías. Con un beneficio máximo de 19360 euros.

PRUEBA B

1. Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las principales ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos,

- a) Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88%.
 b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error menor de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95%?

a) $X =$ Tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores en minutos.

$$X \approx N(\mu, 12)$$

$$n = 100 \rightarrow \bar{x} = 40$$

$$1 - \alpha = 0,88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,06 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,94 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla de} \\ \text{la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1,55 + 1,56}{2} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,555$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}} = 1,866$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (40 - 1,866, 40 + 1,866) = (38.134, 41.866)$$

b) $X =$ Tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores en minutos.

$$X \approx N(\mu, 12)$$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 1,96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 12}{4} = 5,88 \Rightarrow n = (5,88)^2 = 34,5744$$

Para que el error sea menor de 4 minutos el tamaño de la muestra debe ser 35 empleados o más.

2. En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.
- a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?
- b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?
- c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

a) X = Edad de un empleado. $X = N(44, 18)$.

Nos piden calcular $P(X > 62)$.

$$P(X > 62) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 44}{18} > \frac{62 - 44}{18}\right) =$$

$$= P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

Los empleados que se espera con más de 62 años son $0,1587 \cdot 250 = 39,675$. Aproximadamente 40 empleados.

b) Calculamos $P(X < 40)$.

$$P(X < 40) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 44}{18} < \frac{40 - 44}{18}\right) = P(Z < -0,222) =$$

$$= P(Z > 0,222) = 1 - P(Z < 0,222) = 1 - 0,5871 = \boxed{0,4129}$$

Los empleados que se espera con menos de 40 años son: $0,4129 \cdot 250 = 102,225$. Aproximadamente 103 empleados.

c) Calculamos $P(18 < X < 30)$.

$$P(18 < X < 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{18 - 44}{18} < \frac{X - 44}{18} < \frac{30 - 44}{18}\right) =$$

$$= P(-1,44 < Z < -0,77) = P(Z < -0,77) - P(Z < -1,44) =$$

$$= P(Z > 0,77) - P(Z > 1,44) = 1 - P(Z < 0,77) - (1 - P(Z < 1,44)) =$$

$$= 1 - 0,7794 - (1 - 0,9251) = 0,9251 - 0,7794 = \boxed{0,1457}$$

Los empleados que se espera consigan el carnet joven de transporte son: $0,1457 \cdot 250 = 36,425$. Aproximadamente 37 empleados.

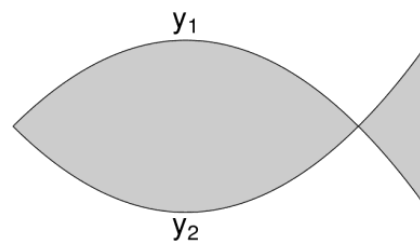
3. En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va a construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas

$$y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \text{ e } y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5, \text{ entre } x=0 \text{ y } x=12.$$

Los valores de x e y se expresan en metros.

a) Determinar la superficie total de la figura.

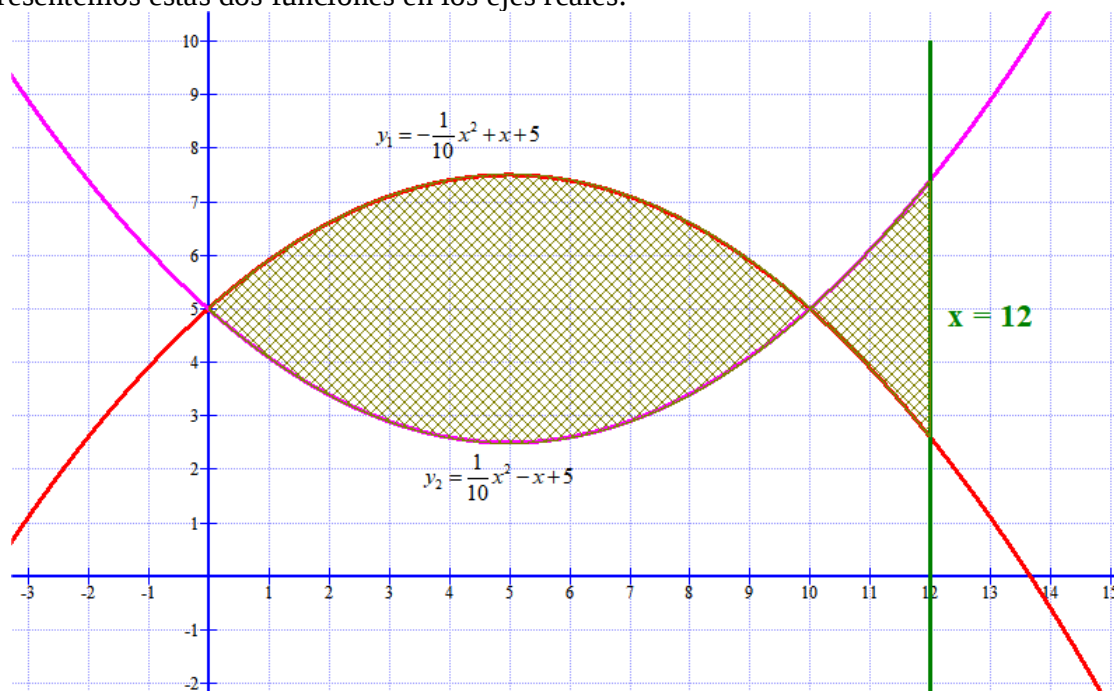
b) Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1.5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120€. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85€. Asimismo, la empresa A cobra 10€ por m^2 de piedra, mientras que la empresa B cobra 12€/m² por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?



a) Veamos donde se cortan.

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow \frac{1}{10}x^2 - x + 5 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \Rightarrow x^2 - 10x + 50 = -x^2 + 10x + 50 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 2x(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Representemos estas dos funciones en los ejes reales.



El valor del área se calcula con dos integrales definidas, ya que las gráficas se cruzan y pasan de ser inferiores a superiores y viceversa.

$$\text{Área} = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 - \left(\frac{1}{10}x^2 - x + 5 \right) \right) dx + \int_{10}^{12} \left(\frac{1}{10}x^2 - x + 5 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \right) \right) dx$$

Las calculamos por separado y luego sumamos los resultados obtenidos.

$$\int_0^{10} -\frac{1}{10}x^2 + x + 5 - \left(-\frac{1}{10}x^2 - x + 5 \right) dx = \int_0^{10} -\frac{2}{10}x^2 + 2x dx = \int_0^{10} -\frac{1}{5}x^2 + 2x dx = \left[-\frac{1}{5} \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^{10} =$$
$$= \left[-\frac{x^3}{15} + x^2 \right]_0^{10} = \left[-\frac{10^3}{15} + 10^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{15} + 0^2 \right] = -\frac{1000}{15} + 100 = \frac{500}{15}$$

$$\int_{10}^{12} \frac{1}{10}x^2 - x + 5 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \right) dx = \int_{10}^{12} \frac{2}{10}x^2 - 2x dx = \int_{10}^{12} \frac{1}{5}x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{15} - x^2 \right]_{10}^{12} =$$
$$= \left[\frac{12^3}{15} - 12^2 \right] - \left[\frac{10^3}{15} - 10^2 \right] = \frac{1728}{15} - 144 - \frac{1000}{15} + 100 = \frac{728}{15} - 44 = \frac{58}{15}$$

El área total es $\frac{500}{15} + \frac{58}{15} = \frac{558}{15} = \frac{186}{5} = 37,2 \text{ m}^2$

- b) La empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1.5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120€. Asimismo, la empresa A cobra 10€ por m^2 de piedra.
La empresa A debe cobrar $37,2 \cdot 1,5 \cdot 120 + 37,2 \cdot 10 = 7068\text{€}$

La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85€. Asimismo, la empresa B cobra 12€ por m^2 de piedra.
La empresa B debe cobrar $37,2 \cdot 2 \cdot 85 + 37,2 \cdot 12 = 6770,4\text{€}$

La empresa B es más económica.

4. En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo, si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos,

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Llamemos x = número de alumnos de ESO, y = número de alumnos de Bachillerato, z = número de alumnos de Ciclos Formativos.

- Obtenemos las ecuaciones a partir de la información proporcionada en el ejercicio.
 - El centro tiene en total 1115 alumnos $\rightarrow x + y + z = 1115$
 - Si sumamos el 20% del alumnado de ESO ($0,20x$), con el 20% del alumnado de Bachillerato ($0,20y$) y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos ($0,40z$) se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro $0,20 \cdot 1115 = 223 \rightarrow 0,20x + 0,20y + 0,40z = 223 + 42$.
 - Si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato $\rightarrow x + 0,5z = y - 40$.

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1115 \\ 0,20x + 0,20y + 0,40z = 265 \\ x - y + 0,5z = -40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicamos la ecuación 2ª por 5} \\ \text{Multiplicamos la ecuación 3ª por 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1115 \\ x + y + 2z = 1325 \\ 2x - 2y + z = -80 \end{array} \right\}$$

- Resolvamos el sistema con el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1115 \\ x + y + 2z = 1325 \\ 2x - 2y + z = -80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \text{Ecuación 3ª - 2} \cdot \text{Ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1325 \\ -x - y - z = -1115 \\ -4y - z = -2310 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1325 \\ -x - y - z = -1115 \\ -4y - z = -2310 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1115 \\ \boxed{z = 210} \\ -4y - z = -2310 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 210 = 1115 \\ -4y - 210 = -2310 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 905 \\ -4y = -2100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 905 \\ y = \frac{2100}{4} = 525 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 525 = 905 \Rightarrow \boxed{x = 905 - 525 = 380}$$

Son 380 alumnos de ESO, 525 alumnos de Bachillerato y 210 de Ciclos Formativos.

EBAU Ordinaria 2019



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS aplicadas a las ciencias sociales II (1)

Convocatoria:

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

PRUEBA A

1. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros.

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

2. Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y “subwoofer”. En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los “subwoofer” y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el “subwoofer”, con idéntica producción de cada tipo. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la española.

- Construir el árbol de probabilidades.
- Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?
- Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

3. Durante los últimos 5 años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, viene dado por la función:

$$b(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2}, & t \in]3, 5] \end{cases}$$

Siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

- ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?
- En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.
- ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500000 euros?

4. Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65 € y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 € y con 50 kgr. de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
- b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

PRUEBA B

1. Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n .
 - a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30 %. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1%.
 - b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35% de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.
2. En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:
 - a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.
 - b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.
3. Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y = (x - 3)^2$ e $y = -3x + 9$ ($x \geq 0, y \geq 0$). Si se mide en metros, se pide:
 - a) Representar la superficie.
 - b) Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desperdicia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?
4. Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.
 - a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
 - b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

SOLUCIONES

PRUEBA A

1. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros.

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

$$n = 225. \text{ Intervalo de confianza} = (407,72, 442,28) \quad \sigma = 90$$

De aquí se puede deducir la media muestral y el error.

$$a) \quad \bar{x} = \frac{407,72 + 442,28}{2} = \frac{850}{2} = \boxed{425}$$

$$b) \quad 425 + \text{Error} = 442,28 \Rightarrow \text{Error} = 442,28 - 425 = 17,28$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 17,28 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{90}{\sqrt{225}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{17,28 \cdot \sqrt{225}}{90} = 2,88$$

Determinamos el valor de $1 - \alpha$.

$$P(Z \leq 2,88) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0,998 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,002 \Rightarrow \alpha = 0,004 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,996$$

El nivel de confianza es del 99,6%

- Si $X \sim N(425, 90)$ la distribución de las medias muestrales de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X}_{25} \approx N\left(425, \frac{90}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{25} \approx N(425, 18)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{25} \geq 430)$.

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_{25} \geq 430) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{25} - 425}{18} \geq \frac{430 - 425}{18}\right) = P(Z \geq 0,28) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0,28) = 1 - 0,6103 = \boxed{0,3897} \end{aligned}$$

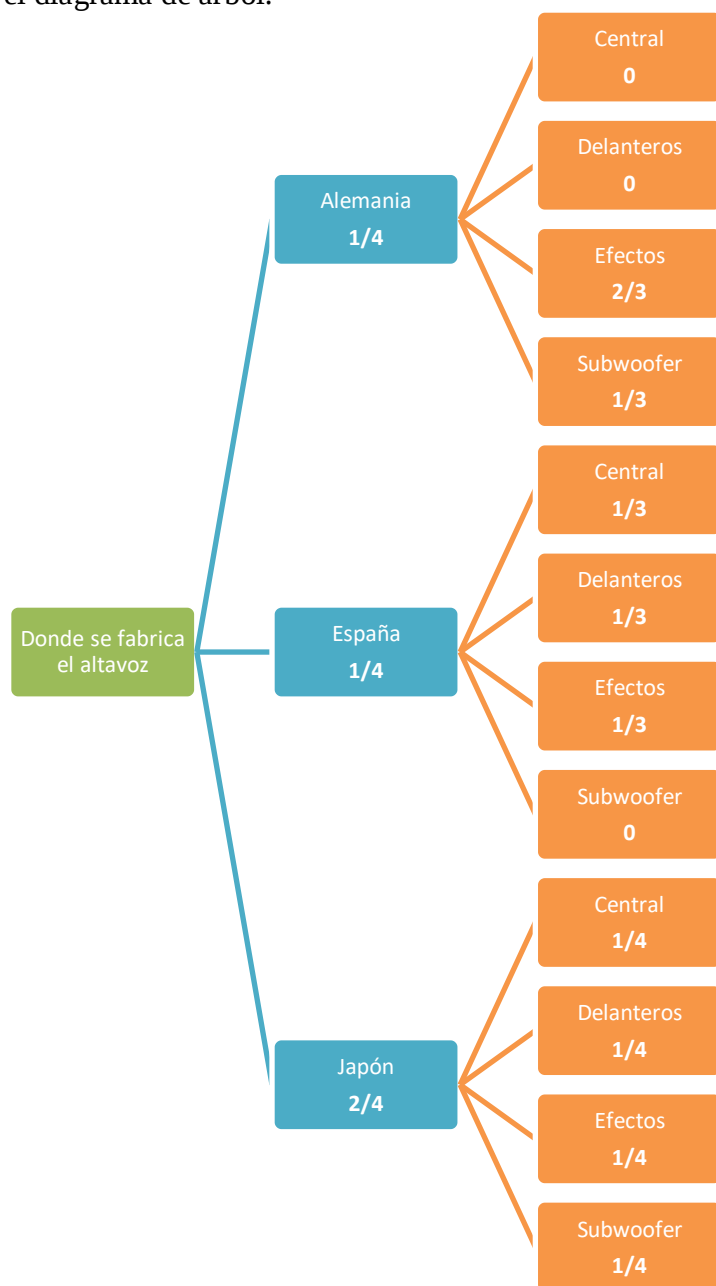
2. Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y “subwoofer”. En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los “subwoofer” y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el “subwoofer”, con idéntica producción de cada tipo. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la española.

- Construir el árbol de probabilidades.
- Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?
- Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Como se fabrica la misma cantidad en Alemania (x) que en España (x) y en Japón el doble ($2x$).
Entonces $x + x + 2x = 100\% \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = 25\%$.

En Alemania y España se fabrican el 25 % de los altavoces y en Japón el 50 % restante.

- Realizamos el diagrama de árbol.



b) Hallamos la probabilidad pedida usando el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\text{Altavoz sea central}) &= \\ &= P(\text{Se fabrique en Alemania})P(\text{Altavoz sea central} / \text{Se fabrique en Alemania}) + \\ &+ P(\text{Se fabrique en España})P(\text{Altavoz sea central} / \text{Se fabrique en España}) + \\ &+ P(\text{Se fabrique en Japón})P(\text{Altavoz sea central} / \text{Se fabrique en Japón}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{5}{24} = \boxed{0,2083} \end{aligned}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\text{Sea fabricado en España} / \text{Es un altavoz central}) &= \\ &= \frac{P(\text{Sea fabricado en España y es un altavoz central})}{P(\text{Es un altavoz central})} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{24}} = \frac{2}{5} = 0,4 \end{aligned}$$

3. Durante los últimos 5 años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, viene dado por la función:

$$b(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2}, & t \in]3, 5] \end{cases}$$

Siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

- ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?
- En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.
- ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500000 euros?

a) Hallamos la derivada de la función y estudiamos su signo.

$$b(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2}, & t \in]3, 5] \end{cases} \Rightarrow b'(t) = \begin{cases} 2 & t \in [0, 3] \\ -2 \frac{(t-3)}{2} = -t+3 & t \in]3, 5] \end{cases}$$

La función $b(t)$ crece en el intervalo $[0, 3]$ ya que su derivada es $b'(t) = 2 > 0$.

En el intervalo $]3, 5]$ la derivada es $b'(t) = -t + 3$ que es negativa en todo el intervalo ya que es 0 en $x = 3$ y a partir de ahí es negativa.

La función crece en el intervalo $[0, 3]$ y decrece en el intervalo $]3, 5]$.

b) Si igualamos a cero la derivada.

$-t + 3 = 0 \Rightarrow t = 3$, Pero este valor está en el cambio de definición de la función. Por lo que hay que valorar la función en estos extremos para saber dónde está el máximo o mínimo local.

$$t = 0 \Rightarrow b(0) = 0$$

$$t = 3 \Rightarrow b(3) = 6$$

$$\lim_{t \rightarrow 3^+} b(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} 6 - \frac{(t-3)^2}{2} = 6 - \frac{(3-3)^2}{2} = 6$$

$$t = 5 \Rightarrow b(5) = 6 - \frac{(5-3)^2}{2} = 6 - 2 = 4$$

La función tiene un mínimo local en $t = 0$ y es de 0 €. También en $t = 5$ y es de 400.000€.

La función tiene un máximo local en $t = 3$ y es de 600.000 €

c) Igualamos la función a 5.

$$b(t) = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2t = 5 \Rightarrow t = 2,5 \in [0, 3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2} = 5 \Rightarrow 1 = \frac{(t-3)^2}{2} \Rightarrow (t-3)^2 = 2 \Rightarrow t-3 = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 + \sqrt{2} = 4,4 \in]3, 5] \\ t = 3 - \sqrt{2} \notin]3, 5] \end{cases} \end{cases}$$

El beneficio es de 500.000 € a los dos años y medio y también a los 4,4 años (4 años y 3 meses aproximadamente).

4. Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65 € y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 € y con 50 kgr. de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

a) Llamamos “x” al número de plazas del tipo A e “y” al número de plazas del tipo B.

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El número de plazas máximo es 90” $\rightarrow x + y \leq 90$

“El peso de todo el equipaje es como máximo 3000 kg” $\rightarrow 30x + 50y \leq 3000$

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 30x + 50y \leq 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 3x + 5y \leq 300 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 65x + 95y$.

Averiguamos donde se cortan y representamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x \\ 3x + 5y = 300 \rightarrow y = \frac{300 - 3x}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow 90 - x = \frac{300 - 3x}{5} \Rightarrow 450 - 5x = 300 - 3x \Rightarrow 150 = 2x \Rightarrow x = 75$$

Las rectas se cortan en $x = 75$.

x	y = 90 - x	x	y = $\frac{300 - 3x}{5}$
0	90	0	60
75	15	75	15
90	0	100	0

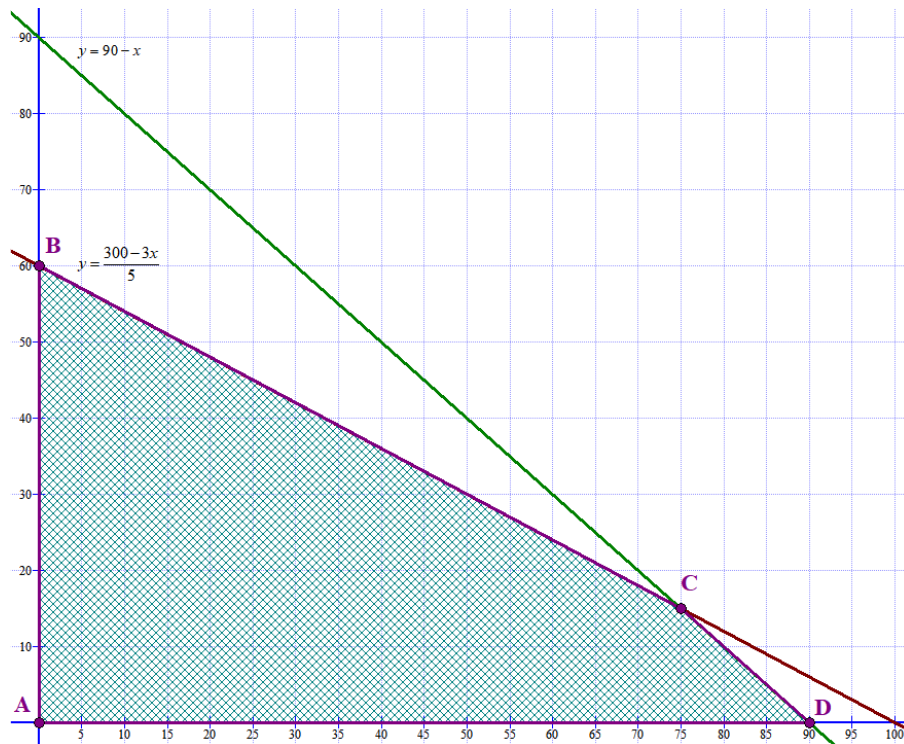
Al dibujar las rectas se comprueba el punto (10, 10) cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10 + 10 \leq 90 \\ 300 + 500 \leq 3000 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo.



b) Los puntos que son candidatos a maximizar el beneficio son los vértices de la región factible.



Valoramos la función beneficio en cada uno de ellos y determinamos el valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,60) \rightarrow B(0,60) = 0 + 5700$$

$$C(75,15) \rightarrow B(75,15) = 65 \cdot 75 + 95 \cdot 15 = 6300$$

$$D(90,0) \rightarrow B(90,0) = 65 \cdot 90 + 0 = 5850$$

El Ingreso óptimo se obtiene en el punto C(75, 15). Con 75 plazas del tipo A y 15 del B se obtiene un beneficio máximo de 6300 €.

PRUEBA B

1. Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n .

- a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30 %. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1%.
- b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35% de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

a) La proporción de daltónicos es $p = 0,3$.

Para un nivel de confianza del 0,95 hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error cometido en la estimación debe ser inferior al 3,1%.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,031 \Rightarrow 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} = 0,031 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,21}{n}} = \frac{0,031}{1,96} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{0,21}{n} &= \left(\frac{0,031}{1,96}\right)^2 \Rightarrow 0,21 = n \left(\frac{0,031}{1,96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0,21}{\left(\frac{0,031}{1,96}\right)^2} = 839,47 \end{aligned}$$

El error será inferior a 3,1% a partir de un tamaño de muestra superior a 840 individuos.

b) La proporción de daltónicos es $p = 0,35$ para una muestra de tamaño $n = 64$.

Para un nivel de confianza del 99 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$$

$$\text{El error cometido es } z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{64}} = 0,154$$

El intervalo de confianza para la proporción de daltónicos es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,35 - 0,154, 0,35 + 0,154) = \boxed{(0,196, 0,504)}$$

El intervalo de confianza es de una proporción entre 19,6% y 50,4%.

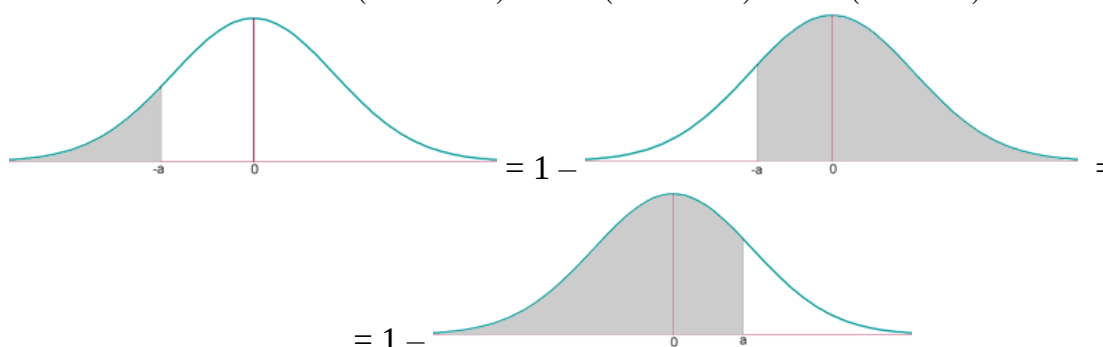
2. En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:
- El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.
 - La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

a) X = Peso de un joven que sufre diabetes tipo 2. $X = N(89, 20)$

$$P(86 \leq X \leq 100) = \{\text{tipificamos}\} = P\left(\frac{86-89}{20} \leq \frac{X-89}{20} \leq \frac{100-89}{20}\right) = P(-0,15 \leq Z \leq 0,55) =$$

$$= P(Z \leq 0,55) - P(Z \leq -0,15) = P(Z \leq 0,55) - (1 - P(Z \leq 0,15)) =$$

Justificamos la igualdad $P(Z \leq -0,15) = 1 - P(Z \geq -0,15) = 1 - P(Z \leq 0,15)$ de forma gráfica:



Esta última probabilidad la puedo buscar en la tabla y puedo seguir calculando la probabilidad pedida.

$$P(86 \leq X \leq 100) = P(Z \leq 0,55) - (1 - P(Z \leq 0,15)) =$$

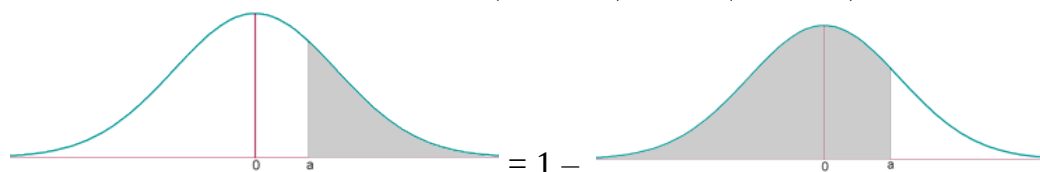
$$= \{\text{Miramos la tabla de la } N(0,1)\} = 0,7088 - (1 - 0,5596) = \boxed{0,2684}$$

b) $X = N(89, 20) \Rightarrow \overline{X}_{25} = N\left(89, \frac{20}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{25} = N(89, 4)$

$$P(\overline{X}_{25} > 90) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{25} - 89}{4} > \frac{90 - 89}{4}\right) = P(Z > 0,25) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,25) = \{\text{Miramos la tabla de la } N(0,1)\} = 1 - 0,5987 = \boxed{0,4013}$$

Justificamos la igualdad de probabilidades $P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25)$ de forma gráfica:



3. Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y = (x-3)^2$ e $y = -3x+9$ ($x \geq 0, y \geq 0$). Si se mide en metros, se pide:
- Representar la superficie.
 - Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desperdicia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?

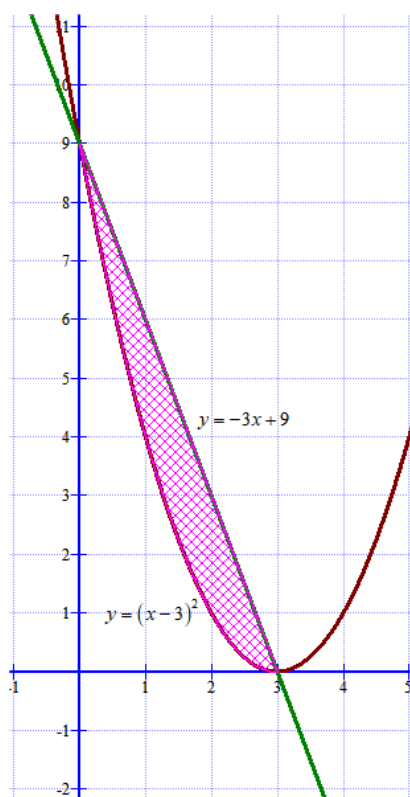
- a) Hay que dibujar una parábola y una recta. Hacemos una tabla de valores, hallando previamente los puntos de corte de ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \\ y = -3x + 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

La tabla de valores para representar las gráficas de las dos funciones la hacemos entre 0 y 3.

x	$y = (x-3)^2$
0	9
1	4
2	1
3	0

x	$y = -3x + 9$
0	9
1	6
2	3
3	0



- b) El área de la zona de color rosa la calculamos con la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_0^3 -3x + 9 - (x^2 - 6x + 9) dx &= \int_0^3 -x^2 + 3x dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Por cada 9 metros cuadrados de hormigón solo aprovecho 7 metros cuadrados. Para rellenar 1 metro cuadrado necesito comprar $\frac{9}{7}$ metros cuadrados. Para rellenar 4,5 metros cuadrados

necesito comprar $\frac{9}{7} \cdot 4,5 = \frac{81}{14}$ metros cuadrados. Como cuesta 70 euros el metro cuadrado, debo

pagar $\frac{81}{14} \cdot 70 = 405 \text{ €}$.

4. Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

a) Llamamos x = precio de un lápiz, y = precio de un impreso, z = precio de una carpeta.

- Al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas debo pagar 3 € $\rightarrow 3x + y + 2z = 3$
- El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta $\rightarrow 2x = y + z + 0,05$
- Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta $\rightarrow x + 0,05 = 2z$

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0,05 \\ x + 0,05 = 2z \end{array} \right\}$$

b) Resolvamos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0,05 \\ x + 0,05 = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0,05 \\ x = 2z - 0,05 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(2z - 0,05) + y + 2z = 3 \\ 2(2z - 0,05) = y + z + 0,05 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6z - 0,15 + y + 2z = 3 \\ 4z - 0,1 = y + z + 0,05 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8z + y = 3,15 \\ 3z - y = 0,15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 3,15 - 8z \\ 3z - y = 0,15 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z - (3,15 - 8z) = 0,15 \Rightarrow 3z - 3,15 + 8z = 0,15 \Rightarrow 11z = 3,3 \Rightarrow z = \frac{3,3}{11} = 0,3 \text{ €} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3,15 - 8z = 3,15 - 2,4 \rightarrow y = 0,75 \text{ €} \\ x = 2z - 0,05 = 0,6 - 0,05 \rightarrow x = 0,55 \text{ €} \end{array} \right.$$

Un lápiz cuesta 0,55 €, un impreso cuesta 0,75 € y una carpeta 0,30 €.

EBAU Extraordinaria 2018



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2017–2018

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales**(3)****Convocatoria:**

- Se debe elegir sólo una de las opciones (A o B)
- Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos

OPCIÓN A

1. De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

- a) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95% para la distancia media en km recorrida por un taxi en un día.
- b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99%

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

- a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.
- b) El coste del espejo es de 16,25 € el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24% de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 €, ¿a cuánto asciende el coste total?

4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

- a) Formular el correspondiente problema y representar la región factible.
- b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

OPCIÓN B

1. En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2% para la marca A, 3% para la marca B y 15% para la marca C. Se elige un yogur al azar:

- a) Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.
- b) Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.
- c) Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

2. Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre la ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

- a) Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90% la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.
- b) Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

3. En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{-3x + 30}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

- a) ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?
- b) ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?
- c) ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

4. Un kiosko vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosko la semana pasada?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de teléfonos apagados de un grupo de 400.

La probabilidad de que un teléfono esté apagado es $p = 1/10$. El número de repeticiones es $n = 400$.

$X = B(400, 0.1)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta distribución a una normal de media

$$\mu = np = 400 \cdot \frac{1}{10} = 40 \text{ y desviación típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = 6.$$

La distribución binomial X se aproxima con una normal $Y = N(40, 6)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 40 > 5$ y $nq = 400 \cdot \frac{9}{10} = 360 > 5$.

- a) Nos piden calcular $P(X \leq 40)$.

$$P(X \leq 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 40.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{40.5 - 40}{6}\right) = P(Z \leq 0.08) = \boxed{0.5319}$$

- b) Nos piden calcular $P(X = 40)$.

$$P(X = 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 40.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{39.5 - 40}{6} \leq Z \leq \frac{40.5 - 40}{6}\right) = P(-0.08 \leq Z \leq 0.08) =$$

$$= P(Z \leq 0.08) - P(Z \leq -0.08) = P(Z \leq 0.08) - P(Z \geq 0.08) =$$

$$= P(Z \leq 0.08) - [1 - P(Z \leq 0.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5319 - 1 + 0.5319 = \boxed{0.0638}$$

También podemos calcular la probabilidad sin hacer uso de la aproximación a la normal, pero dado que los números son muy grandes necesitamos usar la herramienta web Wolfram Alpha.

$$P(X = 40) = \binom{400}{40} 0.1^{40} \cdot 0.9^{360} = \{\text{Usando la web Wolfram Alpha}\} = \boxed{0.0664}$$

El valor aproximado obtenido con la normal es muy parecido al valor real.

c) Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 50)$.

$$\begin{aligned} P(40 \leq X \leq 50) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 50.5) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{39.5 - 40}{6} \leq Z \leq \frac{50.5 - 40}{6}\right) = P(-0.08 \leq Z \leq 1.75) = \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -0.08) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 0.08) = \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 0.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9599 - [1 - 0.5319] = \boxed{0.4918} \end{aligned}$$

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

- a) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95% para la distancia media en km recorrida por un taxi en un día.
 b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99%

- a) X = Número total de kilómetros recorridos por un taxi durante un día laboral.

$$X \approx N(\mu, 60)$$

$$n = 96 \rightarrow \bar{x} = 240$$

Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Calculo el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{96}} = 12.002$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (240 - 12.002, 240 + 12.002) = (227.998, 252.002)$$

- b) Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error con un valor de 10.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2.575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 60}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 60}{10} \right)^2 = 238.7025$$

Para que el error sea menor de 10 kilómetros el tamaño de la muestra debe ser 239 taxis o más.

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

- a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.
 b) El coste del espejo es de 16,25 € el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24% de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 €, ¿a cuánto asciende el coste total?

a) Determinamos el vértice de la parábola

$$y = -x^2 + 14x - 41 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-2} = 7 \Rightarrow y_v = -7^2 + 14(7) - 41 = 8$$

El vértice de la parábola es el punto V(7, 8).

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 14x - 41 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = -x^2 + 14x - 41 \Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(45)}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{14+4}{2} = 9 = x \\ \frac{14-4}{2} = 5 = x \end{cases}$$

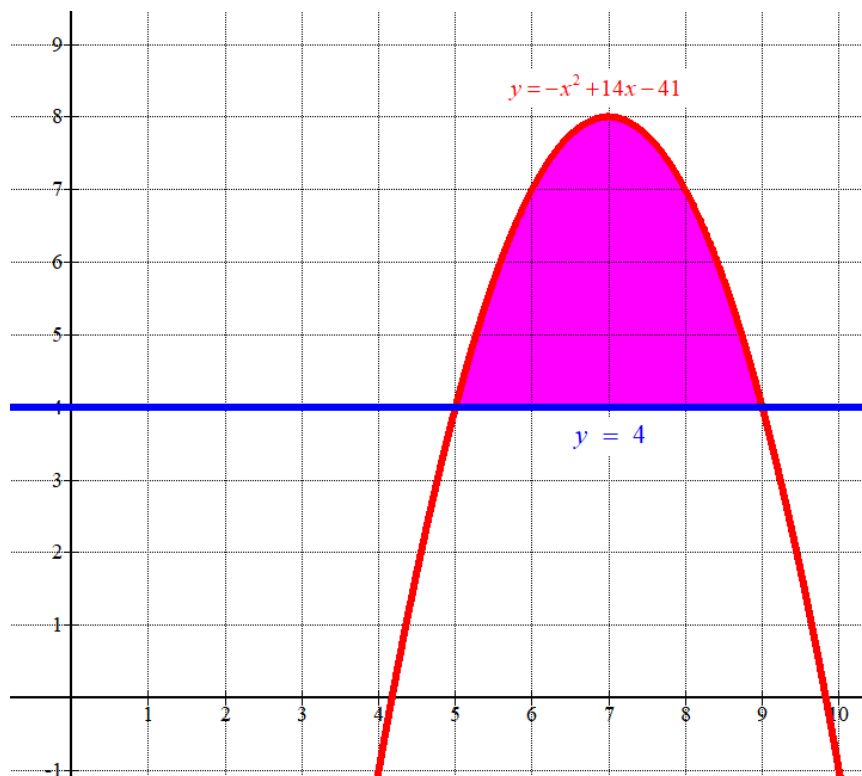
Dibujamos la gráfica de la parábola y la recta.

$$y = -x^2 + 14x - 41$$

x	y = -x ² + 14x - 41
5	4
7	8
9	4

$$y = 4$$

x	y = 4
5	4
9	4



Esta superficie tiene un área que calculamos como la integral definida entre 5 y 9 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_5^9 -x^2 + 14x - 41 - 4dx = \int_5^9 -x^2 + 14x - 45dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x^2 - 45x \right]_5^9 =$$

$$= \left[-\frac{9^3}{3} + 7 \cdot 9^2 - 45 \cdot 9 \right] - \left[-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5 \right] = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2}$$

b) El coste del material necesario para fabricar el espejo es $\frac{32}{3} \cdot 16.25 = \frac{520}{3} \approx 173.33 \text{ €}$.

La mano de obra cuesta un 24% de lo que cuesta el material: $\frac{24 \cdot \frac{520}{3}}{100} = 41.6 \text{ €}$ y el transporte tiene un coste fijo de 85 €. Sumamos todo y tenemos el coste total del espejo:

$$173.33 + 41.6 + 85 = \boxed{299.93 \text{ €}}$$

4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

- a) Formular el correspondiente problema y representar la región factible.
b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

- a) Llamemos x = número de declaraciones de la renta a personas físicas e y = número de declaraciones de la renta a pymes.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Horas recopilar información	Horas para informatizarla	Ingresos
Nº declaraciones personas (x)	$3x$	x	$120x$
Nº declaraciones pymes	$6y$	$4y$	$300y$
TOTALES	$3x + 6y$	$x + 4y$	$120x + 300y$

Las restricciones del problema planteado son:

Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones $\rightarrow x \geq 10; y \geq 20$

Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática $\rightarrow$

$$3x + 6y \leq 360; x + 4y \leq 210$$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ 3x + 6y \leq 360 \\ x + 4y \leq 210 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ x + 2y \leq 120 \\ x + 4y \leq 210 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 120x + 300y$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una y averiguando los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y = 210 \\ x + 2y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 210 \\ x = 120 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 120 - 2y + 4y = 210 \Rightarrow 2y = 90 \Rightarrow y = 45 \Rightarrow$$

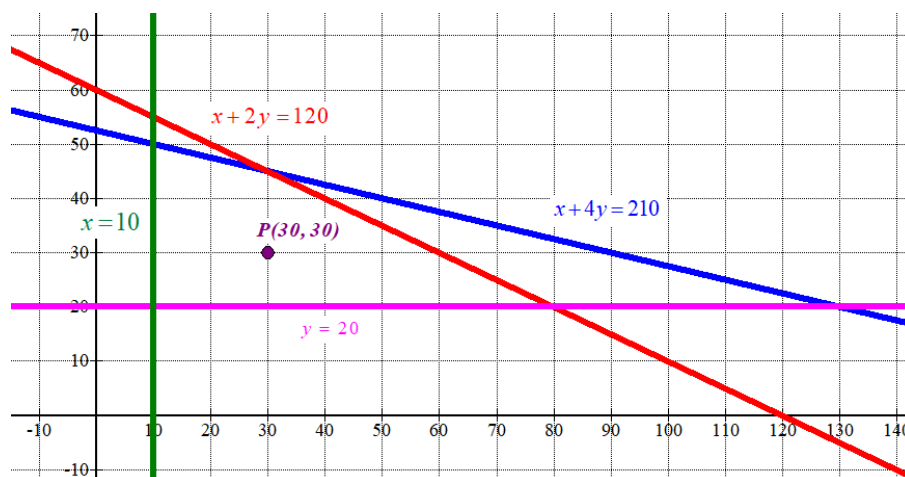
$$\Rightarrow x = 120 - 2 \cdot 45 = 30 \Rightarrow A(30, 45)$$

$$x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - x}{2}$
10	55
30	45
80	20

$$x + 4y = 210$$

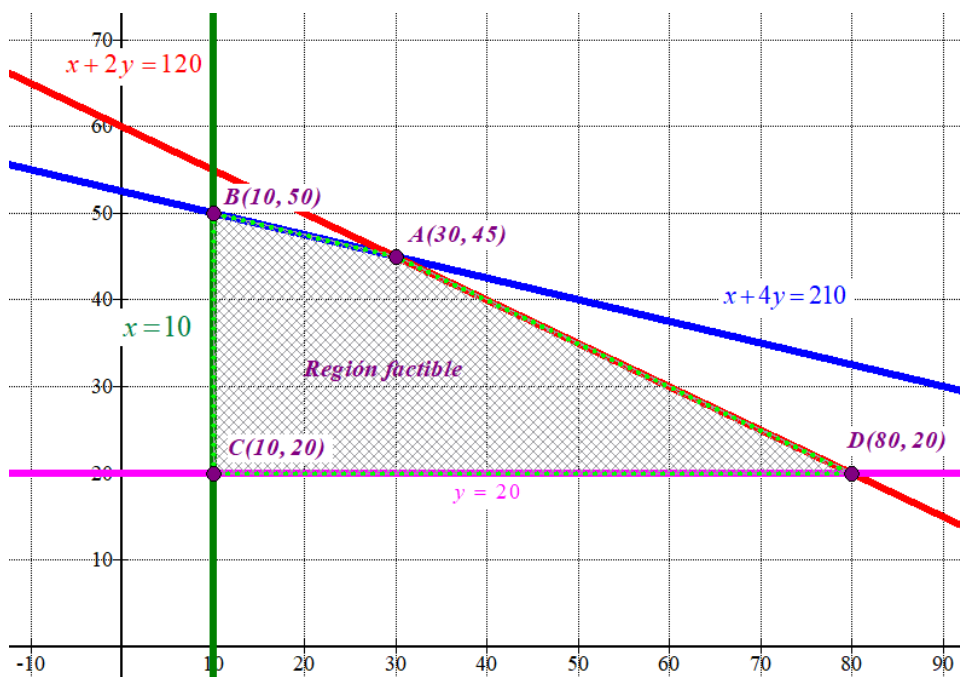
x	$y = \frac{210 - x}{4}$
10	50
30	45
130	20



Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \geq 10 \\ 30 \geq 20 \\ 30 + 2 \cdot 30 \leq 120 \\ 30 + 4 \cdot 30 \leq 210 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo. Indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoramos los ingresos en cada vértice de la región factible.

$$A(30, 45) \rightarrow I(30, 45) = 120 \cdot 30 + 300 \cdot 45 = 17100 \text{ ¡máximo!}$$

$$B(10, 50) \rightarrow I(10, 50) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 50 = 16200$$

$$C(10, 20) \rightarrow I(30, 45) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 20 = 7200$$

$$D(80, 20) \rightarrow I(80, 20) = 120 \cdot 80 + 300 \cdot 20 = 15600$$

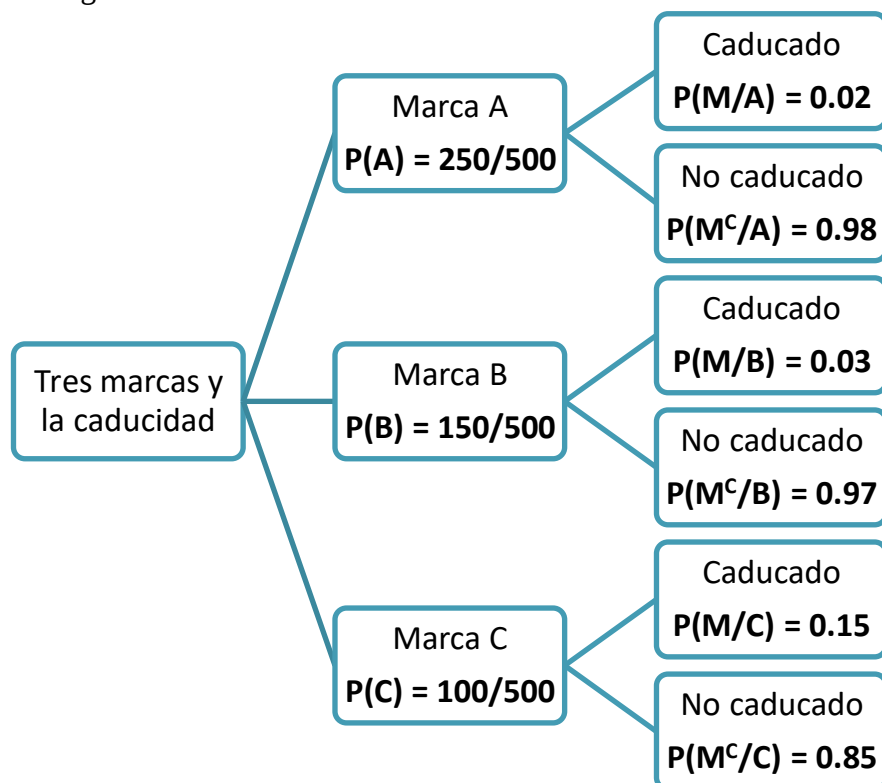
Los máximos ingresos se obtiene en $A(30, 45)$, que significa hacer 30 declaraciones a personas físicas y 45 declaraciones a pymes. Con un ingreso máximo de 17 100 euros.

OPCIÓN B

1. En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2% para la marca A, 3% para la marca B y 15% para la marca C. Se elige un yogur al azar:

- Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.
- Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.
- Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

- Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir un yogur de la marca A, B y C” respectivamente. Llamamos M al suceso “el yogur está caducado”. Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= \frac{250}{500} \cdot 0.02 + \frac{150}{500} \cdot 0.03 + \frac{100}{500} \cdot 0.15 = \boxed{0.049}$$

- Nos piden calcular $P(A/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{\frac{250}{500} \cdot 0.02}{0.049} = \boxed{\frac{10}{49} \approx 0.2041}$$

2. Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre la ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

- Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90% la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.
- Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

- a) La proporción de personas con más de 70 años en la muestra es $p = \frac{81}{225} = 0.36$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = \mathbf{1.645}$$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{225}} = 0.05264$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.36 - 0.05264, 0.36 + 0.05264) = (0.30736, 0.41264).$$

- b) Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Igualemos el error a 0.03.

$$0.03 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2304}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2 = \frac{0.2304}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0.2304}{\left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2} = 983.4496$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 984 personas.

3. En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{-3x + 30}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

- ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?
- ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?
- ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

a) La función en el intervalo $[0, 2)$ es $A(x) = x^2 + 2$ que es una función polinómica y continua.

La función en el intervalo $(2, 10]$ es $A(x) = \frac{-3x + 30}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$ que es una función polinómica y continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

- Existe $A(2) = \frac{-3 \cdot 2 + 30}{4} = 6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x + 30}{4} = \frac{-3 \cdot 2 + 30}{4} = 6$
- Los tres valores son iguales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) = A(2) = 6$

Al cumplirse las cuatro condiciones la función es continua en $x = 2$.

La función es continua en $[0, 10]$.

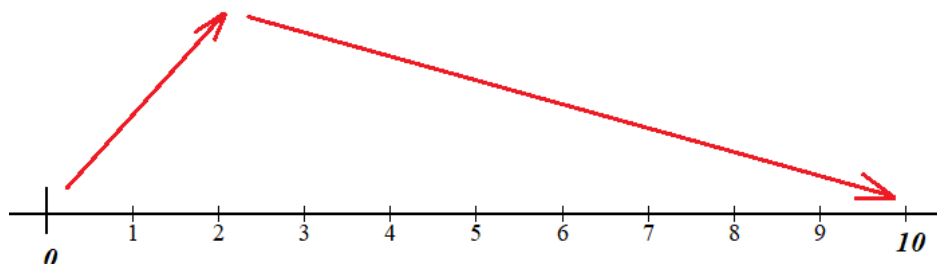
Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función utilizamos el signo de la derivada.

$$A'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -\frac{3}{4} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

$$A'(x) = 0$$

- En el intervalo $[0, 2)$ la derivada es $A'(x) = 2x$ que siempre es positiva ($A'(1) = 2 > 0$). El vértice de la parábola está en $x = 0$ que está en el extremo del intervalo de definición. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 10]$ la derivada es $A'(x) = -\frac{3}{4} < 0$ que siempre es negativa. La función decrece en $(2, 10]$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



b) Observando el esquema anterior y dado que la función es continua la función tiene un valor máximo absoluto en $x = 2$. Como $A(2) = 6$ podemos afirmar que la máxima audiencia fue en el segundo año con 60 000 personas de audiencia.

c) Como $A(0) = 0^2 + 2 = 2$. La audiencia inicial fue de 20 000 personas.

Buscamos cuando $A(x) = 1.5$.

$$A(x) = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 1.5 \rightarrow x^2 = -0.5 \rightarrow x = \sqrt{-0.5} \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-3x + 30}{4} = 1.5 \rightarrow -3x + 30 = 6 \rightarrow -3x = -24 \rightarrow x = \frac{-24}{-3} = 8 \in [2, 10] \end{cases}$$

La audiencia alcanza un valor de 15 000 personas en el octavo año, como la audiencia en el intervalo $(2, 10]$ decrece podemos decir que a partir del octavo año la audiencia baja de 15 000 personas. Se deja de emitir la serie a partir del año 8.

4. Un kiosko vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosko la semana pasada?

a) Llamamos “x” al número de periódicos vendidos, “y” al número de libros y “z” al número de revistas.

Establecemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €” $\rightarrow x + 12y + 5z = 1500$.

“Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos” $\rightarrow$

Revistas	Periódicos
z	x
3	10

$\Rightarrow 10z = 3x$.

“El importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas” $\rightarrow 12y = \frac{x + 5z}{4}$.

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 10z = 3x \\ 12y = \frac{x + 5z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 10z = 3x \\ 48y = x + 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x - 48y + 5z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x - 48y + 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x = 48y - 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 48y - 5z + 12y + 5z = 1500 \\ 3(48y - 5z) - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 60y = 1500 \\ 144y - 15z - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{1500}{60} = 25 \\ 144y - 25z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 144 \cdot 25 - 25z = 0 \Rightarrow 144 - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 144} \Rightarrow \boxed{x = 48 \cdot 25 - 5 \cdot 144 = 480}$$

La solución del sistema es $x = 480$, $y = 25$, $z = 144$.

Se han vendido 480 periódicos, 25 libros y 144 revistas.

EBAU Ordinaria 2018


**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2017–2018****MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales****(1)****Convocatoria:**

- Se debe elegir sólo una de las opciones (A o B)
- Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos

OPCIÓN A

1. A partir de una muestra de 100 usuarios del servicio de deportes, se estima que el valor medio de edad de estos usuarios está entre 22,83 y 27,17 años (ambos incluidos). Suponiendo que esta variable es normal, con una desviación típica de 10 años:

- a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- c) Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 16 usuarios del servicio de deportes sea menor o igual que 24 años?

2. El 20% de los habitantes de cierta población dice siempre la verdad y otro 20% miente siempre. El 75% de los que dicen siempre la verdad son felices; también son felices el 50% de los mentirosos y el 20% del resto de la población.

- a) Construir el árbol de probabilidades
- b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea feliz.
- c) Se ha elegido una persona al azar, que resulta ser feliz. ¿Cuál es la probabilidad de que diga siempre la verdad?

3. El rendimiento, en tanto por ciento, de un jugador de fútbol, depende de la cantidad de minutos que esté jugando. Si la duración de un partido es de 90 minutos y la función que da el rendimiento en función de esos minutos es:

$$R(t) = \frac{-1}{20}t^2 + 2t + 80$$

- a) ¿En qué momento el jugador tiene mayor rendimiento? ¿Cuál es dicho rendimiento?
- b) ¿En qué minuto el jugador tiene el mismo rendimiento que cuando comenzó el partido?
- c) Si el entrenador quiere cambiarlo cuando esté al 20% de su rendimiento, ¿en qué minuto debe cambiarlo?

4. En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80% del resto.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- b) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

OPCIÓN B

1. Un estudio realizado sobre 600 personas de una ciudad indica que 360 consultan 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas.
 - a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de personas que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas.
 - b) Si para estimar la proporción de personas que consulta 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas se obtiene el intervalo $[0,5424, 0,6576]$, ¿cuál es el nivel de confianza utilizado?
 - c) Si la población de la ciudad es de 10.000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas?

2. El tiempo que tardan en descargarse las baterías de un dispositivo electrónico es una variable con distribución normal de media 3,8 días y desviación típica 1 día. Si se manejan baterías de ese dispositivo, calcular:
 - a) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 16 baterías esté entre 4,1 y 4,3 días.
 - b) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 25 baterías no sea mayor que 3,35 días.

3. El recubrimiento de lona de una terraza tiene una zona deteriorada cuya superficie está limitada por $y = (x - 2)^2$ e $y = -4x + 8$. Si se mide en metros, se pide:
 - a) Representar la zona deteriorada.
 - b) Para repararla, se ha de utilizar lona cuyo coste (incluido trabajo de reparación) es de 18 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte de la lona adquirida, ¿cuánto costará la reparación?

4. La encargada de una floristería ha de hacer un pedido semanal de plantas de interior y plantas de exterior. Al proveedor le paga 1€ por cada planta de interior y 2€ por cada planta de exterior. Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido le supone unos costes, que son de 0,60€ por cada planta de interior y 0,80€ por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48€ de costos de transporte por cada pedido semanal. Por otro lado, la encargada recibe una prima de 0,60€ por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50€ por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido.
 - a) Si quiere minimizar el precio que le tiene que pagar al proveedor, formular el correspondiente problema. Dibujar la región factible.
 - b) Resolver el problema planteado en a) calculando también cuánto le paga al proveedor y cuánto es el gasto de transporte.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. A partir de una muestra de 100 usuarios del servicio de deportes, se estima que el valor medio de edad de estos usuarios está entre 22,83 y 27,17 años (ambos incluidos). Suponiendo que esta variable es normal, con una desviación típica de 10 años:

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 16 usuarios del servicio de deportes sea menor o igual que 24 años?

a) La media muestral es el valor central del intervalo (22.83, 27.17).

$$\bar{x} = \frac{22.83 + 27.17}{2} = 25 \text{ años}$$

b) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ a partir del error que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{27.17 - 22.83}{2} = 2.17$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.17 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2.1	0,9824	0,9828	0,9832	0,9836	0,9840	0,9844	0,9848	0,9850

Despejamos " $1 - \alpha$ "

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow 1 - 0.985 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2(1 - 0.985) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.97}$$

El nivel de confianza es del 97%.

c) Si X = edad de un usuario del servicio de deportes. $X = N(25, 10)$.

Entonces la distribución de las medias de muestras de tamaño 16 sigue una distribución normal de la misma media (25) y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.5 \text{ años}$. $\overline{X}_{16} = N(25, 2.5)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{16} \leq 24)$.

$$P(\overline{X}_{16} \leq 24) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{16} - 25}{2.5} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{24 - 25}{2.5}\right) = P(Z \leq -0.4) =$$

$$= P(Z \geq 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$

	0	
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6

2. El 20% de los habitantes de cierta población dice siempre la verdad y otro 20% miente siempre. El 75% de los que dicen siempre la verdad son felices; también son felices el 50% de los mentirosos y el 20% del resto de la población.

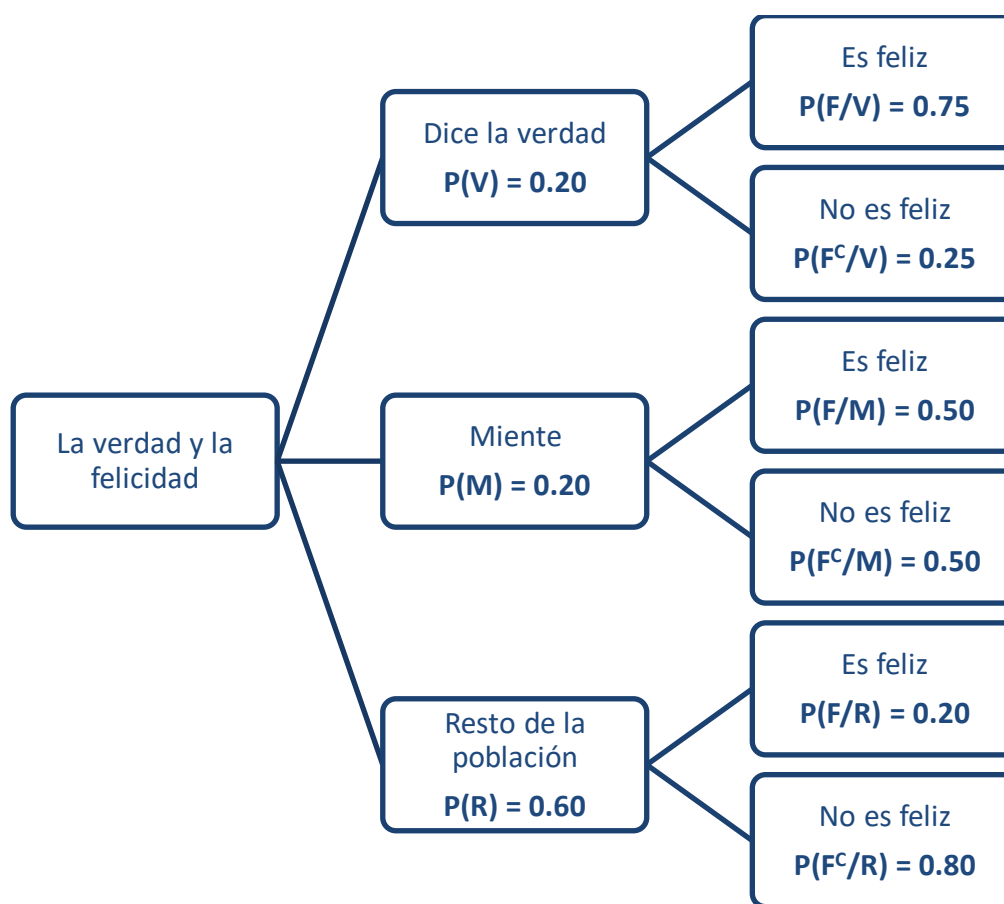
a) Construir el árbol de probabilidades

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea feliz.

c) Se ha elegido una persona al azar, que resulta ser feliz. ¿Cuál es la probabilidad de que diga siempre la verdad?

Llamamos V al suceso “El habitante dice la verdad”, M al suceso “El habitante siempre miente”, R al suceso “El habitante es del resto de la población” y F al suceso “El habitante es feliz”.

a) Hacemos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(F^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(F^c) &= P(V)P(F^c/V) + P(M)P(F^c/M) + P(R)P(F^c/R) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.8 = \boxed{0.63}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(V/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{P(V)P(F/V)}{1 - P(F^c)} = \frac{0.2 \cdot 0.75}{1 - 0.63} = \boxed{\frac{15}{37} \approx 0.4054}$$

3. El rendimiento, en tanto por ciento, de un jugador de futbol, depende de la cantidad de minutos que esté jugando. Si la duración de un partido es de 90 minutos y la función que da el rendimiento en función de esos minutos es:

$$R(t) = \frac{-1}{20}t^2 + 2t + 80$$

- a) ¿En qué momento el jugador tiene mayor rendimiento? ¿Cuál es dicho rendimiento?
 b) ¿En qué minuto el jugador tiene el mismo rendimiento que cuando comenzó el partido?
 c) Si el entrenador quiere cambiarlo cuando esté al 20% de su rendimiento, ¿en qué minuto debe cambiarlo?

a) Utilizamos la derivada.

$$R(t) = \frac{-1}{20}t^2 + 2t + 80 \Rightarrow R'(t) = \frac{-2}{20}t + 2 = \frac{-1}{10}t + 2$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{10}t + 2 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{10}t \Rightarrow \boxed{t = 20}$$

El punto crítico de la función se produce en $t = 20$. Comprobamos si es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada para $t = 20$.

$$R'(t) = \frac{-1}{10}t + 2 \Rightarrow R''(t) = \frac{-1}{10} \Rightarrow R''(20) = \frac{-1}{10} < 0$$

Como la derivada segunda es negativa el rendimiento presenta un máximo cuando $t = 20$.

Hallamos el rendimiento para este valor: $R(20) = \frac{-1}{20}20^2 + 2 \cdot 20 + 80 = 100$.

Con 20 minutos jugando se consigue un rendimiento máximo del 100 %.

- b) Hallamos el rendimiento al comienzo del partido: $R(0) = \frac{-1}{20} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 80 = 80$.

El rendimiento inicial es del 80 %.

Buscamos cuando se obtiene de nuevo un rendimiento del 80 %.

$$\frac{-1}{20}t^2 + 2t + 80 = 80 \Rightarrow \frac{-1}{20}t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t \left(\frac{-1}{20}t + 2 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t = 0} \\ \frac{-1}{20}t + 2 = 0 \rightarrow 2 = \frac{1}{20}t \rightarrow \boxed{t = 40} \end{cases}$$

El rendimiento inicial (80%) se vuelve a repetir con 40 minutos jugados.

- c) Buscamos el valor de t para el cual $R(t) = 20$.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20}t^2 + 2t + 80 = 20 &\Rightarrow \frac{-1}{20}t^2 + 2t + 60 = 0 \Rightarrow -t^2 + 40t + 1200 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-1)(1200)}}{2(-1)} = \frac{-40 \pm 80}{-2} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{-40 + 80}{-2} = -20 = t \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-40 - 80}{-2} = \boxed{60 = t} \end{cases} \end{aligned}$$

El rendimiento es del 20 % cuando juega 60 minutos.

4. En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80% del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

a) Llamamos “x” al número de estudiantes, “y” al número de empleados y “z” al número de personas sin ocupación.

“En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación” $\rightarrow x + y + z = 288$.

“Por cada cinco estudiantes hay tres empleados” $\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \text{Estudiantes} & & \text{Empleados} \\ x & \longrightarrow & y \\ 5 & \longrightarrow & 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \text{Estudiantes} & & \text{Empleados} \\ x & \longrightarrow & y \\ 5 & \longrightarrow & 3 \end{array}} \right\} \Rightarrow 3x = 5y$$

“Los sin ocupación representan el 80% del resto” $\rightarrow z = 0.80(x + y)$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 288 \\ z = 0.80(x + y) \\ 3x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 288 \\ z = 0.8x + 0.8y \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 288 \\ 10z = 8x + 8y \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 288 \\ 5z = 4x + 4y \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 288 \\ 5z = 4x + 4y \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 288 - y - z \\ 5z = 4x + 4y \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5z = 4(288 - y - z) + 4y \\ 3(288 - y - z) - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5z = 1152 - 4y - 4z + 4y \\ 864 - 3y - 3z - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9z = 1152 \\ 864 - 8y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{1152}{9} = 128 \\ 864 - 8y - 3 \cdot 128 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 864 - 8y - 3 \cdot 128 = 0 \Rightarrow -8y + 480 = 0 \Rightarrow 480 = 8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{480}{8} = 60 \\ x = 288 - 60 - 128 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Hay 100 estudiantes, 60 empleados y 128 personas sin ocupación.

OPCIÓN B

1. Un estudio realizado sobre 600 personas de una ciudad indica que 360 consultan 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas.
- a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de personas que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas.
- b) Si para estimar la proporción de personas que consulta 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas se obtiene el intervalo $[0,5424, 0,6576]$, ¿cuál es el nivel de confianza utilizado?
- c) Si la población de la ciudad es de 10.000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas?

- a) La proporción de personas que consultan menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas en la muestra es $p = \frac{600 - 360}{600} = 0.4$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97 %.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,6
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,7
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,8
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,9
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	1,0
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	1,1
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	1,2
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	1,3
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	1,4
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	1,5
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	1,6
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	1,7
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	1,8
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	1,9
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	2,0
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	2,1
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	2,2
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	2,3
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	2,4
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	2,5
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	2,6
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	2,7

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.17 \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{600}} = 0.0434$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0434, 0.4 + 0.0434) = (0.3566, 0.4434).$$

- b) La proporción de personas que consultan menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas en la muestra es $p = \frac{360}{600} = 0.6$.

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.6576 - 0.5424}{2} = 0.0576$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.0576 = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{600}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.0576}{\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{600}}} = 2.88$$

Miramos en la tabla de la $N(0, 1)$ y obtenemos $1 - \frac{\alpha}{2}$.

$$z_{\alpha/2} = 2.88 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9980 \Rightarrow 1 - 0.998 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2(0.002) \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.996}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980

El nivel de confianza es del 99.6 %.

c) La proporción de personas que consultan menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas en

$$\text{la muestra es } p = \frac{600 - 360}{600} = 0.4$$

Para un nivel de confianza del apartado b) tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.88$ y el error es 0.0576.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0576, 0.4 + 0.0576) = (0.3424, 0.4576)$$

El número de los que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas está entre 3424 y 4576.

2. El tiempo que tardan en descargarse las baterías de un dispositivo electrónico es una variable con distribución normal de media 3,8 días y desviación típica 1 día. Si se manejan baterías de ese dispositivo, calcular:

- La probabilidad de que la duración media de una muestra de 16 baterías esté entre 4,1 y 4,3 días.
- La probabilidad de que la duración media de una muestra de 25 baterías no sea mayor que 3,35 días.

Llamamos X = El tiempo que tardan en descargarse las baterías de un dispositivo electrónico.
 $X = N(3.8, 1)$.

- La distribución de medias sigue una distribución normal con la misma media (3.8 días) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$.

$$\overline{X}_{16} = N(3.8, 0.25)$$

Nos piden calcular $P(4.1 \leq \overline{X}_{16} \leq 4.3)$.

$$P(4.1 \leq \overline{X}_{16} \leq 4.3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{16} - 3.8}{0.25} \end{array} \right\} = P\left(\frac{4.1 - 3.8}{0.25} \leq Z \leq \frac{4.3 - 3.8}{0.25}\right) =$$

$$= P(1.2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1.2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9772 - 0.8849 = \boxed{0.0923}$$

- La distribución de medias sigue una distribución normal con la misma media (3.8 días) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = 0.2$.

$$\overline{X}_{25} = N(3.8, 0.2)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{25} \leq 3.35)$.

$$P(\overline{X}_{25} \leq 3.35) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{25} - 3.8}{0.2} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{3.35 - 3.8}{0.2}\right) = P(Z \leq -2.25) =$$

$$= P(Z \geq 2.25) = 1 - P(Z \leq 2.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9878 = \boxed{0.0122}$$

3. El recubrimiento de lona de una terraza tiene una zona deteriorada cuya superficie está limitada por $y = (x-2)^2$ e $y = -4x+8$. Si se mide en metros, se pide:

- a) Representar la zona deteriorada.
 b) Para repararla, se ha de utilizar lona cuyo coste (incluido trabajo de reparación) es de 18 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte de la lona adquirida, ¿cuánto costará la reparación?

a) Hallamos los puntos de intersección de las gráficas de parábola y recta.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-2)^2 \\ y = -4x+8 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-2)^2 = -4x+8 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x = -4x+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

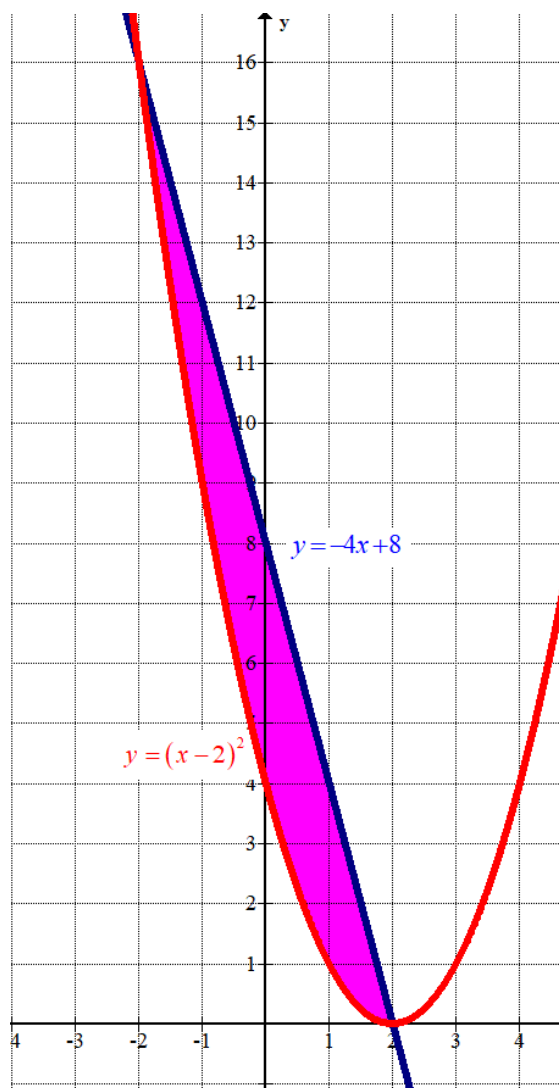
Hallamos el vértice de la parábola.

$$y = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x_v = \frac{4}{2} = 2$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la parábola y la recta. Coloreamos el recinto limitado por ambas gráficas.

x	$y = (x-2)^2$
-2	16
-1	9
0	4
1	1
2	0 vértice

x	$y = -4x+8$
-2	16
-1	12
0	8
1	4
2	0



b) Hallamos el área del recinto deteriorado.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 -4x + 8 - (x-2)^2 dx = \int_{-2}^2 -4x + 8 - x^2 + 4x - 4 dx = \\ &= \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \left[-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2) \right] = \frac{32}{3} \approx 10.667 m^2 \end{aligned}$$

Si se desperdicia la tercera parte con 2/3 partes de lo que compre debo cubrir los 32/3 metros cuadrados. Con una regla de tres averiguo cuantos metros cuadrados debo comprar.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{32}{3} m^2 \\ 1 \longrightarrow x m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{3}} = 16 m^2$$

Debo comprar 16 metros cuadrados de lona que a 18 euros por metro cuadrado nos costaría $16 \cdot 18 = 288$ €.

La reparación costará 288 €.

4. La encargada de una floristería ha de hacer un pedido semanal de plantas de interior y plantas de exterior. Al proveedor le paga 1€ por cada planta de interior y 2€ por cada planta de exterior. Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido le supone unos costes, que son de 0,60€ por cada planta de interior y 0,80€ por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48€ de costos de transporte por cada pedido semanal. Por otro lado, la encargada recibe una prima de 0,60€ por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50€ por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido.

- a) Si quiere minimizar el precio que le tiene que pagar al proveedor, formular el correspondiente problema. Dibujar la región factible.
- b) Resolver el problema planteado en a) calculando también cuánto le paga al proveedor y cuánto es el gasto de transporte.

- a) Llamemos x = número de plantas de interior e y = número de plantas de exterior.

Las restricciones del problema planteado son:

“Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior” $\rightarrow x \geq 20; y \geq 30$

“El transporte del pedido le supone unos costes, que son de 0,60€ por cada planta de interior y 0,80€ por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48€ de costos de transporte por cada pedido semanal” $\rightarrow 0.6x + 0.8y \leq 48$

“La encargada recibe una prima de 0,60€ por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50€ por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido” $\rightarrow 0.6x + 0.5y \geq 30$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \geq 30 \\ 0.6x + 0.8y \leq 48 \\ 0.6x + 0.5y \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \geq 30 \\ 6x + 8y \leq 480 \\ 6x + 5y \geq 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \geq 30 \\ 3x + 4y \leq 240 \\ 6x + 5y \geq 300 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos minimizar son los pagos al proveedor: $P(x, y) = x + 2y$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una de ellas.

$$3x + 4y = 240$$

x	$y = \frac{240 - 3x}{4}$
0	60
20	45
40	30

$$6x + 5y = 300$$

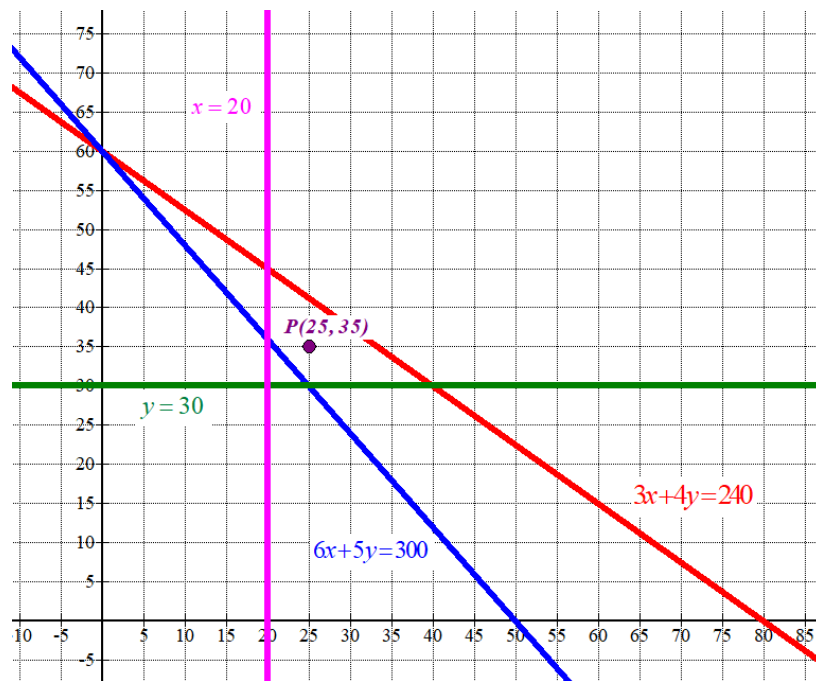
x	$y = \frac{300 - 6x}{5}$
0	60
20	36
25	30

$$x = 20$$

$x = 20$	y
20	36
20	45

$$y = 30$$

x	$y = 30$
25	30
40	30



Comprobamos que el punto $P(25, 35)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 25 \geq 20 \\ 35 \geq 30 \\ 3 \cdot 25 + 4 \cdot 35 \leq 240 \\ 6 \cdot 25 + 5 \cdot 35 \geq 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25 \geq 20 \\ 35 \geq 30 \\ 75 + 140 \leq 240 \\ 150 + 175 \geq 300 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la zona rayada del dibujo. Indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoremos los pagos en cada vértice de la región factible.

$$A(20, 36) \rightarrow P(20, 36) = 20 + 2 \cdot 36 = 92$$

$$B(20, 45) \rightarrow P(20, 45) = 20 + 2 \cdot 45 = 110$$

$$C(40, 30) \rightarrow P(40, 30) = 40 + 2 \cdot 30 = 100$$

$$D(25, 30) \rightarrow P(25, 30) = 25 + 2 \cdot 30 = \mathbf{85 \text{ Mínimo}}$$

Los mínimos gastos se obtiene en D(25, 30), que significa un pedido de 25 plantas de interior y 30 de exterior. Con unos gastos mínimos de 85 euros.

El transporte del pedido le supone unos costes, que son de 0,60€ por cada planta de interior y 0,80€ por cada planta de exterior. Con el pedido que minimiza el pago debería pagar $0.6 \cdot 25 + 0.8 \cdot 30 = 39$ euros por el transporte. Al proveedor le pagaría 85 €.

EBAU Extraordinaria 2017



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2016–2017

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Convocatoria:

- Se debe elegir sólo una de las pruebas (A o B)
- Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos

PRUEBA A

1. El tiempo diario, en horas, dedicado a ver la TV en una región, sigue una distribución normal con una desviación típica de 1,5 horas. Para estimar la media de esta variable, se ha realizado una encuesta a 256 personas obteniéndose el intervalo de confianza $[4,29; 4,71]$.

- a) ¿Cuál es el valor de la media muestral?
- b) ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo?
- c) Con los mismos datos, ¿cuál sería el intervalo con un nivel de confianza igual a 0,9?

2. El 30% de los videojuegos que se consumen en España se juegan en PC, el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en PC, el 50% son de acción, el 40% de estrategia y el resto de otras categorías. De los que se juegan en consola, el 70%, son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25% son de acción, otro 25% de estrategia y el resto de otras categorías.

- a) Construir el árbol de probabilidades.
- b) ¿Qué proporción de los videojuegos consumidos en España son de acción?
- c) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

3. La función $G(x)$ da la ganancia anual (en cientos de miles de euros) obtenida por una empresa de telefonía móvil en función del tiempo x (en años) transcurrido desde su creación:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+3}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) ¿A cuánto asciende la ganancia transcurridos dos años y medio? ¿Y transcurridos cuatro años?
- b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias. Justificar la respuesta.
- c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo? Razonar la respuesta.

4. Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos. El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades. Además, por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos.

- a) Plantear el correspondiente sistema.
- b) ¿Cuántos marineros de cada nacionalidad hay en el barco?

PRUEBA B

1. Recientes estudios indican que el 35% de las mujeres embarazadas de una región son fumadoras. Se toma una muestra de 100 mujeres embarazadas en esa región. Calcular la probabilidad de que en dicha muestra:

- a) Haya menos de 40 fumadoras
- b) Sean más de 25 las mujeres que fuman.
- c) El número de fumadoras esté entre 32 y 38.

2. Una compañía telefónica tiene interés en determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en el número de megas de descarga. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

- a) ¿De qué tamaño debería ser la muestra de clientes si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 con un nivel de confianza del 95%?
- b) Finalmente, se ha realizado el estudio con una muestra de 196 clientes, de los cuales 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. Calcular un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción total de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta.

3. Una zona de una terraza, limitada por las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x$, debe ser reparada con pintura impermeabilizante. Si se mide en metros, el precio de la pintura es 6'25€/m² y hay que sumar los gastos de aplicación y transportes, que suponen el 80% del precio total de la superficie:

- a) Hacer una gráfica de la zona.
- b) Hallar la superficie de la zona.
- c) ¿A cuánto asciende la reparación?

4. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla y electrónica en dos calidades distintas: calidad A, cuya carcasa es de plástico y calidad B cuya carcasa es de aluminio. El coste de producción unitario es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad B. Asimismo los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase B. Si, para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

- a) Plantear el problema que determina el número de móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
- b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

SOLUCIONES

PRUEBA A

1. El tiempo diario, en horas, dedicado a ver la TV en una región, sigue una distribución normal con una desviación típica de 1,5 horas. Para estimar la media de esta variable, se ha realizado una encuesta a 256 personas obteniéndose el intervalo de confianza [4,29; 4,71].

a) ¿Cuál es el valor de la media muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo?

c) Con los mismos datos, ¿cuál sería el intervalo con un nivel de confianza igual a 0,9?

Llamamos X = El tiempo diario, en horas, dedicado a ver la TV en una región. $X = N(\mu, 1.5)$

a) La media muestral es el valor central del intervalo [4,29; 4,71].

$$\bar{x} = \frac{4.29 + 4.71}{2} = 4.5 \text{ horas}$$

b) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ a partir del error que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{4.71 - 4.29}{2} = 0.21$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.21 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{256}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.21 \cdot 16}{1.5} = 2.24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9875$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9854	0.9858	0.9861	0.9864	0.9867

Despejamos el nivel de confianza “ $1 - \alpha$ ”

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9875 \Rightarrow 1 - 0.9875 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2(1 - 0.9875) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.975$$

El nivel de confianza es del 97.5%.

c) Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza de 0.9.

$$1 - \alpha = 0.9 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

El error del intervalo de confianza es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{256}} = 0.1542$.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4.5 - 0.1542, 4.5 + 0.1542) = (4.3458, 4.6542)$$

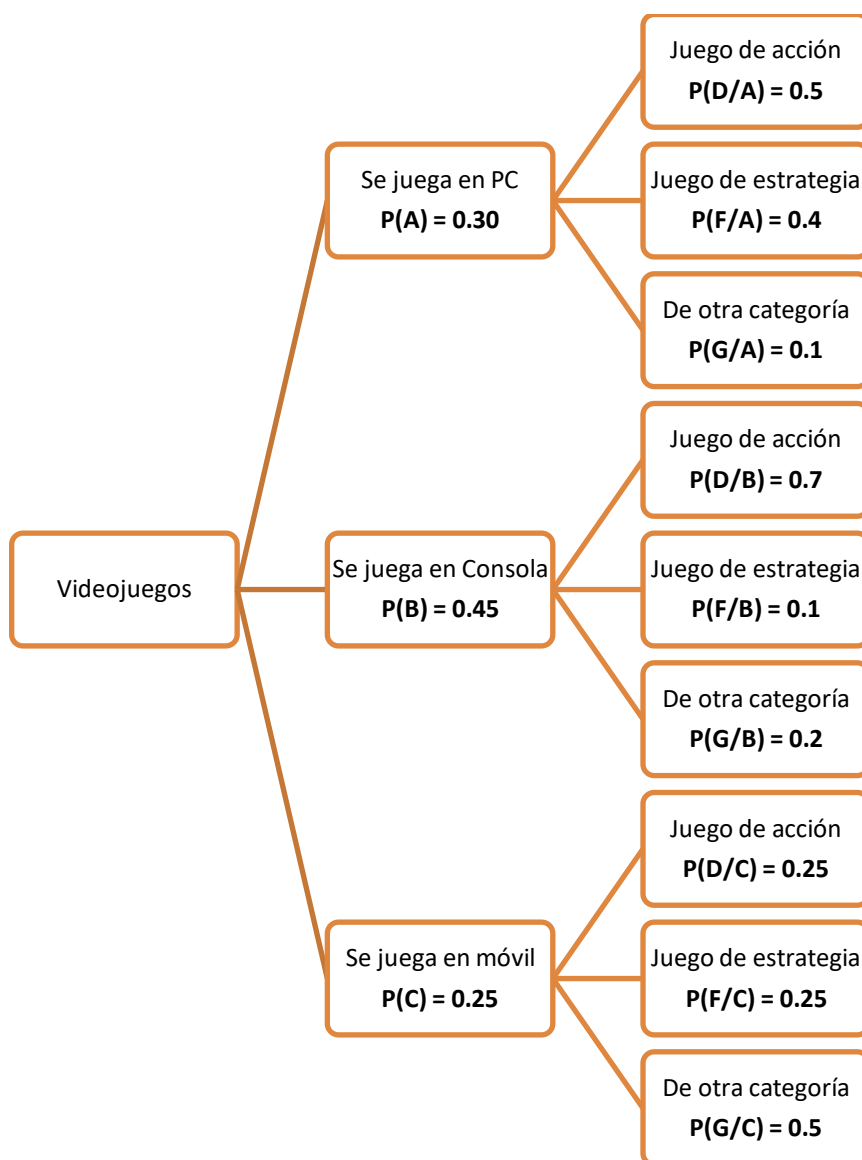
2. El 30% de los videojuegos que se consumen en España se juegan en PC, el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en PC, el 50% son de acción, el 40% de estrategia y el resto de otras categorías. De los que se juegan en consola, el 70%, son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25% son de acción, otro 25% de estrategia y el resto de otras categorías.

a) Construir el árbol de probabilidades.

b) ¿Qué proporción de los videojuegos consumidos en España son de acción?

c) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

a) Llamamos A = “El videojuego se juega en PC”, B = “el videojuego se juega en consola”, C = “el videojuego se juega en móvil”. D = “el videojuego es de acción”, F = “el videojuego es de estrategia” y G = “el videojuego es de otras categorías”.



b) Calculamos el valor de $P(D)$ aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.5 + 0.45 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.25 = \frac{211}{400} = 0.5275$$

La proporción de los videojuegos consumidos en España que son de acción es de 211 de cada 400, del 52.75 %.

c) Nos piden calcular $P(C / F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C / F) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{P(C)P(F / C)}{P(A)P(F / A) + P(B)P(F / B) + P(C)P(F / C)} =$$
$$= \frac{0.25 \cdot 0.25}{0.3 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.25} = \boxed{\frac{25}{91} \approx 0.2747}$$

3. La función $G(x)$ da la ganancia anual (en cientos de miles de euros) obtenida por una empresa de telefonía móvil en función del tiempo x (en años) transcurrido desde su creación:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+3}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) ¿A cuánto asciende la ganancia transcurridos dos años y medio? ¿Y transcurridos cuatro años?
 b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias. Justificar la respuesta.
 c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo? Razonar la respuesta.

a) Nos piden calcular $G(2.5)$ y $G(4)$.

$$G(2.5) = \frac{2}{5} \cdot 2.5 = 1$$

$$G(4) = \frac{4+3}{4+2} = \frac{7}{6} \approx 1.16667$$

La ganancia transcurridos dos años y medio es de 100 000 €. Transcurridos cuatro años es de 116 667 euros.

b) En el intervalo $(0, 3)$ la función es $G(x) = \frac{2}{5}x$ con derivada $G'(x) = \frac{2}{5} > 0$, la función es creciente.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $G(x) = \frac{x+3}{x+2}$. Calculamos su derivada y estudiamos su signo.

$$G'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+3)}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

Esta derivada tiene denominador siempre positivo y numerador siempre negativo, por lo que la derivada siempre es negativa. La función decrece.

La función crece durante los tres primeros años y decrece a partir del tercer año.

c) Hemos visto que a partir del tercer año las ganancias decrecen. Calculamos el límite de las ganancias cuando el tiempo crece para ver su tendencia.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

A partir del tercer año las ganancias decrecen acercándose a 100 000 €.

4. Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos. El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades. Además, por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos marineros de cada nacionalidad hay en el barco?

a) Llamamos “x” al número de marineros chinos, “y” al número de marineros filipinos y “z” al número de marineros griegos.

“Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos” →
 $x + y + z = 30$.

“El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades” →
 $z = 2(x + y)$.

“Por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos” →

$$\left. \begin{array}{cc} \text{Chinos} & \text{Filipinos} \\ x & \longrightarrow y \\ 2 & \longrightarrow 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 2y$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ z = 2(x + y) \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ z = 2x + 2y \\ 3x = 2y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ z = 2x + 2y \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2x + 2y = 30 \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y = 30 \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 10 - x \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 2(10 - x) \Rightarrow 3x = 20 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow \boxed{x = \frac{20}{5} = 4} \Rightarrow \boxed{y = 10 - 4 = 6} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 20}$$

En el barco hay 4 marineros chinos, 6 filipinos y 20 griegos.

PRUEBA B

1. Recientes estudios indican que el 35% de las mujeres embarazadas de una región son fumadoras. Se toma una muestra de 100 mujeres embarazadas en esa región. Calcular la probabilidad de que en dicha muestra:

- a) Haya menos de 40 fumadoras
- b) Sean más de 25 las mujeres que fuman.
- c) El número de fumadoras esté entre 32 y 38.

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de mujeres embarazadas que son fumadoras de un grupo de 100 mujeres.

La probabilidad de que una mujer embarazada sea fumadora es $p = 0.35$. El número de repeticiones es $n = 100$. $X = B(100, 0.35)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta distribución a una normal de media $\mu = np = 100 \cdot 0.35 = 35$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.35 \cdot 0.65} \approx 4.77$.

La distribución binomial X se aproxima con una normal $Y = N(35, 4.77)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 35 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.65 = 65 > 5$.

- a) Nos piden calcular $P(X < 40)$.

$$P(X < 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 39.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{39.5 - 35}{4.77}\right) = P(Z \leq 0.94) = \boxed{0.8264}$$

- b) Nos piden calcular $P(X > 25)$.

$$P(X > 25) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 25.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{25.5 - 35}{4.77}\right) = P(Z \geq -1.99) = P(Z \leq 1.99) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9767}$$

- c) Nos piden calcular $P(32 < X < 38)$.

$$P(32 < X < 38) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(32.5 \leq Y \leq 37.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{32.5 - 35}{4.77} \leq Z \leq \frac{37.5 - 35}{4.77}\right) = P(-0.52 \leq Z \leq 0.52) =$$

$$= P(Z \leq 0.52) - P(Z \leq -0.52) = P(Z \leq 0.52) - P(Z \geq 0.52) =$$

$$= P(Z \leq 0.52) - [1 - P(Z \leq 0.52)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6985 - [1 - 0.6985] = \boxed{0.397}$$

2. Una compañía telefónica tiene interés en determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en el número de megas de descarga. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

- a) ¿De qué tamaño debería ser la muestra de clientes si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 con un nivel de confianza del 95%?
- b) Finalmente, se ha realizado el estudio con una muestra de 196 clientes, de los cuales 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. Calcular un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción total de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta.

- a) La proporción de personas dispuestas a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en el número de megas de descarga en la muestra es $p = 0.15$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Igualemos el error a 0.08.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.08 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} \Rightarrow \frac{0.08}{1.96} = \sqrt{\frac{0.1275}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2 = \frac{0.1275}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1275}{\left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2} \approx 76.53 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 77 personas.

- b) La proporción de la muestra es $p = \frac{37}{196} \approx 0.189$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 92 %.

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.75 \sqrt{\frac{\frac{37}{196} \cdot \frac{159}{196}}{196}} = 0.049$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.189 - 0.049, 0.189 + 0.049) = (0.140, 0.238).$$

3. Una zona de una terraza, limitada por las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x$, debe ser reparada con pintura impermeabilizante. Si se mide en metros, el precio de la pintura es 6'25€/m² y hay que sumar los gastos de aplicación y transportes, que suponen el 80% del precio total de la superficie:

- Hacer una gráfica de la zona.
- Hallar la superficie de la zona.
- ¿A cuánto asciende la reparación?

a) Determinamos el vértice de la parábola

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 5$$

El vértice de la parábola es el punto V(1, 5).

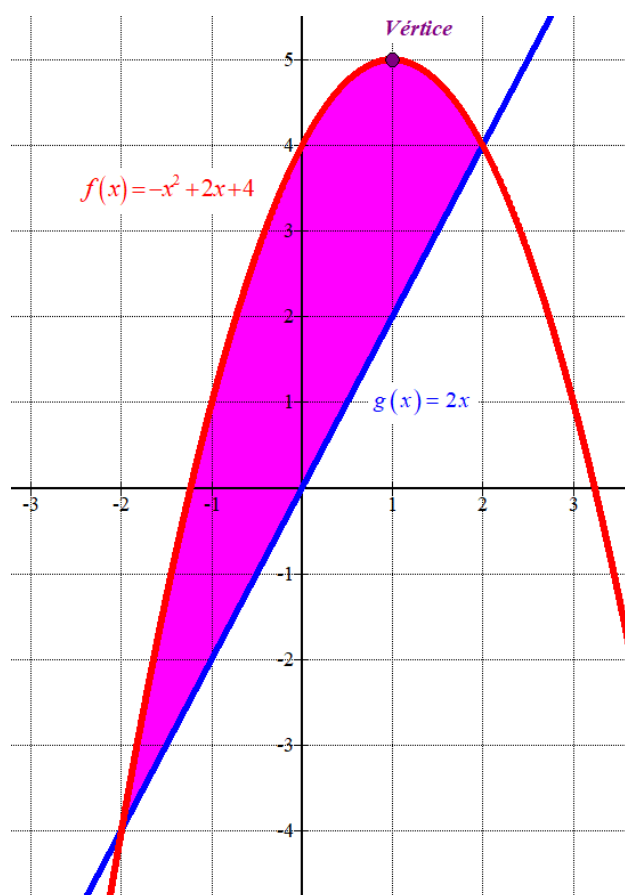
Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 2x + 4 \\ g(x) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto limitado por ellas.

x	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$
-2	-4
-1	1
0	4
1	5
2	4

x	$g(x) = 2x$
-2	-4
0	0
2	4



- Esta superficie tiene un área que calculamos como la integral definida entre -2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 -x^2 + 2x + 4 - 2x dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \\ &= \left[-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right] = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

- c) El precio de la pintura es 6.25 €/m². Lo multiplicamos por los metros cuadrados que debemos pintar y tenemos un coste de $\frac{32}{3} \cdot 6.25 = \frac{200}{3} \approx 66.67$ €. Los gastos de aplicación y transportes suponen el 80% del precio total de la superficie: $\frac{200}{3} \cdot \frac{80}{100} = \frac{160}{3} \approx 53.33$ €. Sumamos estas dos cantidades y obtenemos el coste total de la reparación.

$$\text{Coste total de reparación} = \frac{200}{3} + \frac{160}{3} = \boxed{120 \text{ €}}$$

4. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla y electrónica en dos calidades distintas: calidad A, cuya carcasa es de plástico y calidad B cuya carcasa es de aluminio. El coste de producción unitario es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad B. Asimismo los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase B. Si, para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcassas de aluminio.

- a) Plantear el problema que determina el número de móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

- a) Llamemos x = número de calidad A e y = número de móviles de calidad B.

Las restricciones del problema planteado son:

“Su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcassas de aluminio” $\rightarrow x + y \leq 350; y \leq 310$

“Para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 euros” $\rightarrow 70x + 90y \leq 30000$.

“Las cantidades deben ser positivas y enteras” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ 70x + 90y \leq 30000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ 7x + 9y \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

El beneficio de cada móvil de la calidad A es de $100 - 70 = 30$ € y cada móvil de clase B tiene un beneficio de $150 - 90 = 60$ €. La función que deseamos maximizar son los beneficios totales:
 $B(x, y) = 30x + 60y$

- b) Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una de ellas.

$$x + y = 350$$

x	$y = 350 - x$
0	350
40	310
75	275

$$7x + 9y = 3000$$

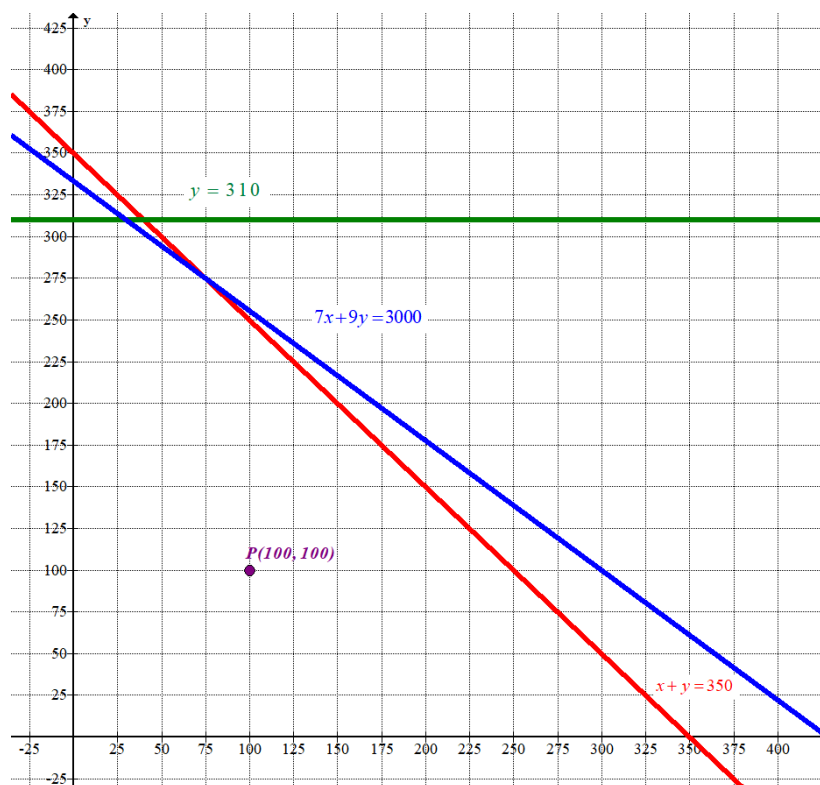
x	$y = \frac{3000 - 7x}{9}$
30	310
75	275
300	100

$$y = 310$$

x	$y = 310$
0	310
30	310

$$x \geq 0; y \geq 0$$

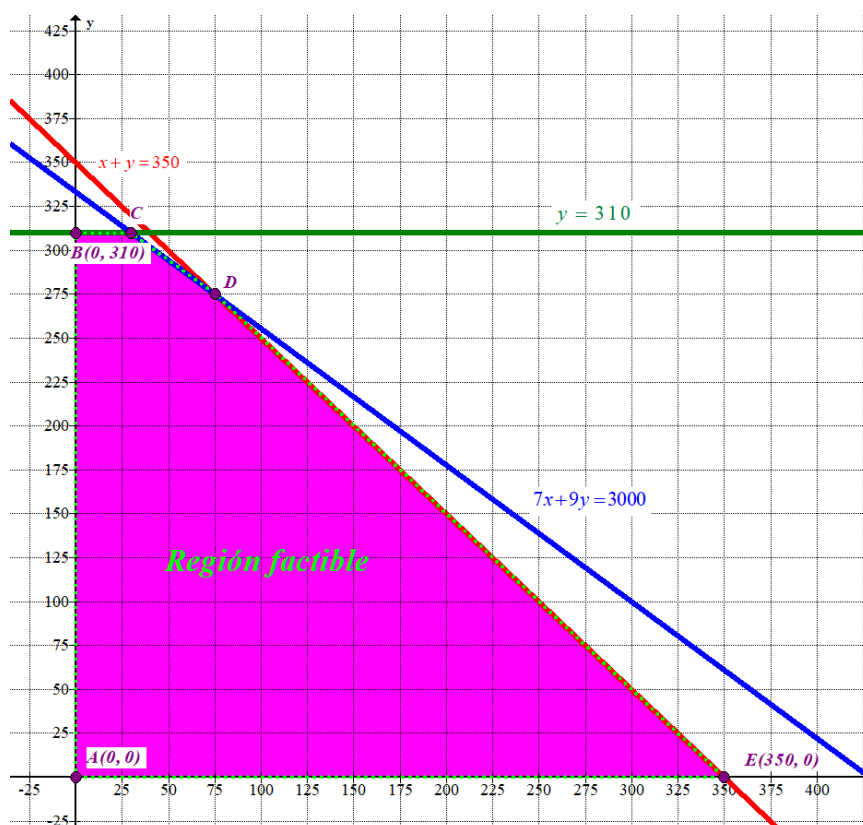
Pimer
cuadrante



Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 100 \leq 350 \\ 100 \leq 310 \\ 7 \cdot 100 + 9 \cdot 100 \leq 3000 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo. Indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 310 \\ 7x + 9y = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 2790 = 3000 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = \frac{210}{7} = 30 \Rightarrow C(30, 210)$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y = 3000 \\ x + y = 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y = 3000 \\ y = 350 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 3150 - 9x = 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = -150 \Rightarrow x = \frac{-150}{-2} = 75 \Rightarrow y = 350 - 75 = 275 \Rightarrow D(75, 275)$$

Valoramos los beneficios en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$$

$$B(0, 310) \rightarrow B(0, 310) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 310 = 18600$$

$$C(30, 310) \rightarrow B(30, 310) = 30 \cdot 30 + 60 \cdot 310 = 19500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 275) \rightarrow B(75, 275) = 30 \cdot 75 + 60 \cdot 275 = 18750$$

$$E(350, 0) \rightarrow B(350, 0) = 30 \cdot 350 + 60 \cdot 0 = 10500$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(30, 310), que significa fabricar 30 móviles de clase A y 310 de clase B. El beneficio máximo que se consigue es de 19 500 euros.

EBAU Ordinaria 2017



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2016-2017

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales	(1)
---	------------

Convocatoria: JUNIO

- Se debe elegir sólo una de las pruebas (A o B)
- Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos

OPCIÓN A

1. Un estudio realizado por una compañía de seguros de coches estima que una de cada cinco personas accidentadas es mujer. Si se contabilizan, por término medio, 144 accidentes cada fin de semana:

- Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de mujeres accidentadas supere el 23%.
- Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de hombres accidentados no supere el 84%.
- ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

2. Para una muestra de tamaño 100, y con una desviación típica de 15 años, la estimación media de la edad, en años, de los usuarios del servicio de atención a personas mayores, está entre 61,745 y 68,255 (ambos incluidos). Suponiendo que la variable manejada es normal:

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 9 usuarios del servicio sea mayor o igual que 66 años?

3.- Una empresa de material fotográfico oferta una máquina de revelado asegurando que es capaz de pasar a papel 13 fotografías por minuto. Sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto varía en función del número de años transcurridos desde su compra, según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x + 13 & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ \frac{5(x+14)}{x+4} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

- Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con el paso de los años.
- Justificar que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto y que no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea la máquina

4. En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25% del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Resolver el sistema anterior ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

OPCIÓN B

1. El gasto mensual en agua de las familias de 4 miembros es una normal de media 32 euros con una desviación típica de 10 euros. Hallar (justificando las respuestas):

- a) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias sea mayor que 36 euros.
- b) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias esté entre 28 y 35 euros.
- c) Probabilidad de que el gasto mensual medio de 9 de estas familias no supere los 30 euros.

2. En una ciudad, el 20% de las personas que acceden a un centro comercial urbano proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Respectivamente, efectúan compras el 60%, el 75% y el 50%.

- a) Dibujar el árbol de probabilidades.
- b) Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras?
- c) De los que entran en una determinada tienda del centro comercial, el 30% realizan compras. ¿Cuál es el porcentaje de los que, entrando y realizando compras en esa tienda, proceden de barrios periféricos?

3. Una zona de un patio está limitada por $y = 3(x-1)$ e $y = \frac{(x-1)^2}{4}$

Si las unidades de medida son metros, justificando las respuestas:

- a) Hacer una gráfica de la zona.
- b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la zona?
- c) Se pretende cubrirla de césped artificial que cuesta 10 euros el metro cuadrado. Si, por razones de instalación, se pierde el 15% de la superficie adquirida, ¿cuánto cuesta la cantidad de césped artificial que hay que comprar?

4. Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4 bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:

- a) Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.
- b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Un estudio realizado por una compañía de seguros de coches estima que una de cada cinco personas accidentadas es mujer. Si se contabilizan, por término medio, 144 accidentes cada fin de semana:

- a) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de mujeres accidentadas supere el 23%.
- b) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de hombres accidentados no supere el 84%.
- c) ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

- a) La proporción de mujeres accidentadas es $p = \frac{1}{5} = 0.2$.

Sea X = Número de mujeres accidentadas de un grupo de 144 accidentes.

La probabilidad de que sea una mujer la que sufra el accidente es $p = 0.2$. El número de repeticiones es $n = 144$.

$X = B(144, 0.2)$

La variable binomial X se aproxima con una normal de media $\mu = np = 144 \cdot 0.2 = 28.8$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{144 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 4.8$.

La aproximación es buena pues $np = 28.8 > 5$ y $nq = 144 \cdot 0.8 = 115.2 > 5$.

X se aproxima con una normal $Y = N(28.8, 4.8)$.

Para que la proporción supere el 23% deben producirse al menos $\frac{144 \cdot 23}{100} = 33.12$ accidentes en los que sea la mujer la accidentada.

Nos piden calcular $P(X \geq 33.12)$.

$$P(X \geq 33.12) = P(Y \geq 33.12) = P\left(Z \geq \frac{33.12 - 28.88}{4.8}\right) = P(Z \geq 0.9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.9) = 1 - 0.8159 = \boxed{0.1841}$$

- b) Para que la proporción de hombres accidentados no supere el 84% la proporción de mujeres accidentadas debe superar el $100 - 84 = 16\%$. Para ello deben producirse más de $\frac{144 \cdot 16}{100} = 23.04$ accidentes donde la accidentada sea una mujer.

Nos piden calcular $P(X > 23.04)$.

$$P(X > 23.04) = P(Y \geq 23.04) = P\left(Z > \frac{23.04 - 28.88}{4.8}\right) = P(Z > -1.22) =$$

$$= P(Z < 1.22) = \boxed{0.8888}$$

- c) El número esperado de mujeres accidentadas es $np = 144 \cdot 0.2 = 28.8$. El número esperado de hombres accidentados son el resto de los 144 accidentados: $144 - 28.8 = 115.2$. Se espera que hayan entre 115 y 116 hombres accidentados de los 144 accidentes del fin de semana.

2. Para una muestra de tamaño 100, y con una desviación típica de 15 años, la estimación media de la edad, en años, de los usuarios del servicio de atención a personas mayores, está entre 61,745 y 68,255 (ambos incluidos). Suponiendo que la variable manejada es normal:

- ¿Cuál es la media muestral obtenida?
- ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
- Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 9 usuarios del servicio sea mayor o igual que 66 años?

a) La media muestral es el valor central del intervalo (61.745, 68.255).

$$\bar{x} = \frac{61.745 + 68.255}{2} = 65 \text{ años}$$

b) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ a partir del error que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{68.255 - 61.745}{2} = 3.255$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.255 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{3.255 \cdot 10}{15} = 2.17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$$

Despejamos “ $1 - \alpha$ ”

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow 1 - 0.985 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2(1 - 0.985) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.97}$$

El nivel de confianza es del 97%.

- c) Si X = edad de un usuario del servicio de atención a personas mayores. $X = N(65, 15)$. Entonces la distribución de las medias de muestras de tamaño 9 sigue una distribución normal de la misma media (65) y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5 \text{ años}$. $\bar{X}_9 = N(65, 5)$.

Nos piden calcular $P(\bar{X}_9 \geq 66)$.

$$P(\bar{X}_9 \geq 66) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\bar{X}_9 - 65}{5} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{66 - 65}{5}\right) = P(Z \geq 0.2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5793 = \boxed{0.4207}$$

3.- Una empresa de material fotográfico oferta una máquina de revelado asegurando que es capaz de pasar a papel 13 fotografías por minuto. Sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto varía en función del número de años transcurridos desde su compra, según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x + 13 & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ \frac{5(x+14)}{x+4} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

- a) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con el paso de los años.
 b) Justificar que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto y que no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea la máquina

- a) Utilizamos la derivada de la función y su signo.

En el intervalo $[0, 6)$ la función es $f(x) = -0,5x + 13$ y la derivada es $f'(x) = -0,5$, que es siempre negativa. La función decrece.

En el intervalo $(6, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{5(x+14)}{x+4}$ y la derivada es $f'(x) = \frac{5(x+4) - 1 \cdot 5(x+14)}{(x+4)^2} = \frac{5x+20-5x-70}{(x+4)^2} = \frac{-50}{(x+4)^2}$, que es siempre negativa. La función decrece.

La función decrece en todo su dominio de definición.

- b) Vemos cuantas fotografías revelará el sexto año.

$$f(6) = \frac{5(6+14)}{6+4} = 10$$

Como $f(6) = 10$ y la función decrece podemos afirmar que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

Calculamos el límite de la función cuando pasan muchos años.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5(x+14)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+70}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

La función decrece y en el sexto año revela 10 fotografías por minuto, pero decrece sin llegar a bajar de 5 fotografías por minuto.

4. En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25% del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

a) Llamamos “x” a la cantidad asignada a inversión en proyectos de interés comunitario (en millones de euros), “y” a la cantidad asignada a gastos de funcionamiento y “z” a la cantidad asignada a gastos sociales.

“El presupuesto es de 125 millones de euros” $\rightarrow x + y + z = 125$

“La inversión en proyectos es el 56,25% del resto de lo presupuestado” $\rightarrow x = 0.5625(y + z)$

“Por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento”

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Gastos sociales} & & \text{Gastos de funcionamiento} \\ z & \longrightarrow & y \\ 9 & \longrightarrow & 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 11z = 9y$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 125 \\ x = 0.5625(y + z) \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 125 \\ x = 0.5625y + 0.5625z \\ 11z = 9y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 125 \\ x = 0.5625y + 0.5625z \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.5625y + 0.5625z + y + z = 125 \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.5625y + 1.5625z = 125 \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = \frac{125}{1.5625} = 80 \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - z \\ 11z = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow 11z = 9(80 - z) \Rightarrow 11z = 720 - 9z \Rightarrow 20z = 720 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{720}{20} = 36} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 36 = 44} \Rightarrow \boxed{x = 0.5625 \cdot 44 + 0.5625 \cdot 36 = 45}$$

Se asignan a proyectos 45 millones de euros, a gastos de funcionamiento 44 millones y a gastos sociales 36 millones de euros.

OPCIÓN B

1. El gasto mensual en agua de las familias de 4 miembros es una normal de media 32 euros con una desviación típica de 10 euros. Hallar (justificando las respuestas):

- a) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias sea mayor que 36 euros.
 b) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias esté entre 28 y 35 euros.
 c) Probabilidad de que el gasto mensual medio de 9 de estas familias no supere los 30 euros.

- a) Sea X = El gasto mensual en agua de las familias de 4 miembros.

$$X = N(32, 10)$$

Nos piden calcular $P(X > 36)$.

$$\begin{aligned} P(X > 36) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{36 - 32}{10}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446} \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(28 < X < 35)$.

$$\begin{aligned} P(28 < X < 35) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{28 - 32}{10} < Z < \frac{35 - 32}{10}\right) = P(-0.4 < Z < 0.3) = \\ &= P(Z < 0.3) - P(Z < -0.4) = P(Z < 0.3) - P(Z \geq 0.4) = P(Z < 0.3) - [1 - P(Z \leq 0.4)] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6179 - [1 - 0.6554] = \boxed{0.2733} \end{aligned}$$

- c) Si $X = N(32, 10)$ la distribución de la media muestral de muestras de tamaño 9 es una distribución normal con la misma media (32) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3} \approx 3.33$.

$$\overline{X}_9 = N\left(32, \frac{10}{3}\right).$$

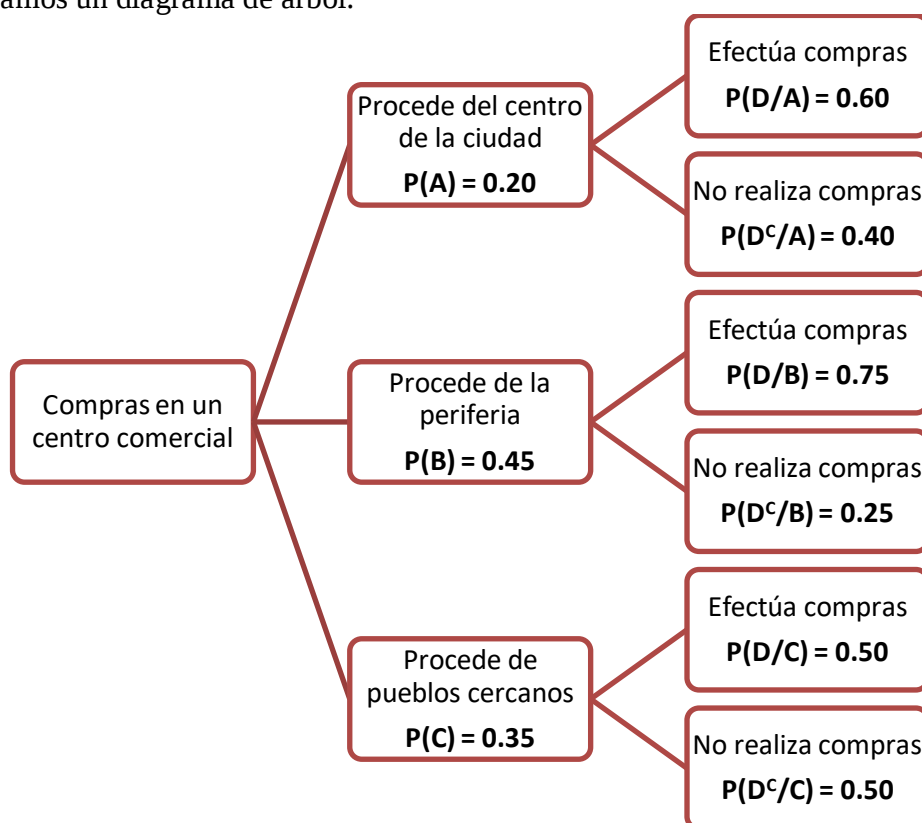
Nos piden calcular $P(\overline{X}_9 \leq 30)$.

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_9 \leq 30) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_9 - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{30 - 32}{10/3}\right) = P(Z \leq -0.6) = P(Z \geq 0.6) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7257 = \boxed{0.2743} \end{aligned}$$

2. En una ciudad, el 20% de las personas que acceden a un centro comercial urbano proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Respectivamente, efectúan compras el 60%, el 75% y el 50%.

- Dibujar el árbol de probabilidades.
- Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras?
- De los que entran en una determinada tienda del centro comercial, el 30% realizan compras. ¿Cuál es el porcentaje de los que, entrando y realizando compras en esa tienda, proceden de barrios periféricos?

- Llamamos A = “Proceder del centro de la ciudad”, B = “Proceder de la periferia”, C = “Proceder de los pueblos cercanos” y D = “Efectuar compras en el centro comercial”. Realizamos un diagrama de árbol.



- Calculamos la probabilidad de que una persona no realice compras $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D^c) &= P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.5 = \boxed{0.3675}
 \end{aligned}$$

Si acuden 2000 personas el número esperado que no realiza compras es $0.3675 \cdot 2000 = 735$ personas.

- Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.45 \cdot 0.75}{1 - 0.3675} = \boxed{\frac{135}{253} \approx 0.5336}$$

3. Una zona de un patio está limitada por $y = 3(x-1)$ e $y = \frac{(x-1)^2}{4}$

Si las unidades de medida son metros, justificando las respuestas:

- Hacer una gráfica de la zona.
- ¿Cuántos metros cuadrados tiene la zona?
- Se pretende cubrirla de césped artificial que cuesta 10 euros el metro cuadrado. Si, por razones de instalación, se pierde el 15% de la superficie adquirida, ¿cuánto cuesta la cantidad de césped artificial que hay que comprar?

a) Determinamos el vértice de la parábola

$$y = \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2 - 2x + 1}{4} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow x_v = \frac{1/2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow y_v = \frac{(1-1)^2}{4} = 0$$

El vértice de la parábola es el punto V(1, 0).

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{(x-1)^2}{4} \\ y = 3(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} = 3(x-1) \Rightarrow (x-1)^2 = 12(x-1) \Rightarrow$$

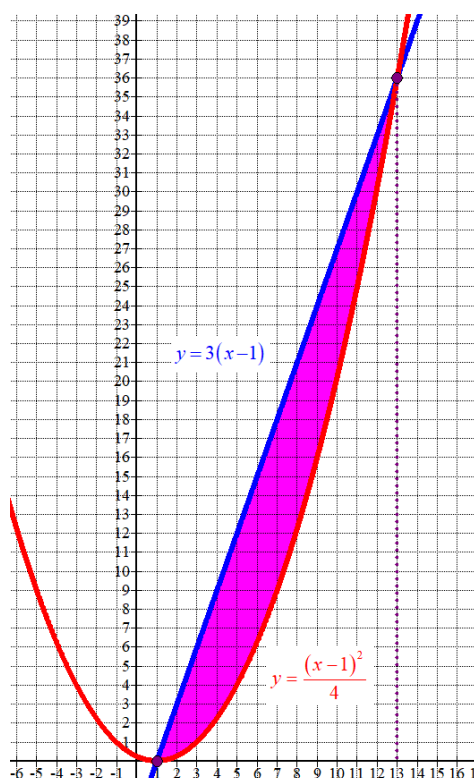
$$\Rightarrow (x-1)^2 - 12(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)[(x-1) - 12] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ x-13=0 \rightarrow \boxed{x=13} \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto limitado por ellas.

x	$y = \frac{(x-1)^2}{4}$
1	0
5	4
13	36

x	$y = 3(x-1)$
1	0
5	12
13	36



- b) El valor del área del recinto limitado por las dos gráficas lo calculamos como la integral definida entre 1 y 13 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^{13} 3(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4} dx = \int_1^{13} 3x - 3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} dx = \\ &= \int_1^{13} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{13}{4} dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{7x^2}{4} - \frac{13}{4}x \right]_1^{13} = \\ &= \left[-\frac{13^3}{12} + \frac{7 \cdot 13^2}{4} - \frac{13}{4} \cdot 13 \right] - \left[-\frac{1^3}{12} + \frac{7 \cdot 1^2}{4} - \frac{13}{4} \cdot 1 \right] = \boxed{72 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

La superficie de la zona es de 72 metros cuadrados.

- c) Si se pierde el 15% de la superficie adquirida se aprovecha el 85 %. Si compramos x metros cuadrados debe cumplirse que $0.85 \cdot x = 72 \rightarrow x = \frac{72}{0.85}$ metros cuadrados. Lo multiplicamos por el precio del metro cuadrado y obtenemos lo que debemos pagar por el césped.

$$\frac{72}{0.85} \cdot 10 = \frac{720}{0.85} \approx 847.06 \text{ €}$$

El césped necesario para cubrir el patio nos cuesta 847.06 €.

4. Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4 bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:

- a) Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.
 b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

- a) Llamemos x = número de cajas azules e y = número de cajas rojas.
 Realizamos una tabla para organizar los datos proporcionados.

	Nº bombones de crema	Nº de bombones con frutos secos	Nº de bombones con licor	Ingresos
Nº cajas azules (x)	$4x$	$4x$	$2x$	$8x$
Nº cajas rojas (y)	$6y$	$2y$	$4y$	$10y$
	$4x + 6y$	$4x + 2y$	$2x + 4y$	$8x + 10y$

Las restricciones del problema planteado son:

“Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor” $\rightarrow 4x + 6y \leq 320; 4x + 2y \leq 240; 2x + 4y \leq 200$

“Las cantidades deben ser positivas y enteras” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y \leq 320 \\ 4x + 2y \leq 240 \\ 2x + 4y \leq 200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 160 \\ 2x + y \leq 120 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar es la recaudación: $R(x, y) = 8x + 10y$

- b) Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una de ellas.

$$2x + 3y = 160$$

x	$y = \frac{160 - 2x}{3}$
20	40
50	20
80	0

$$2x + y = 120$$

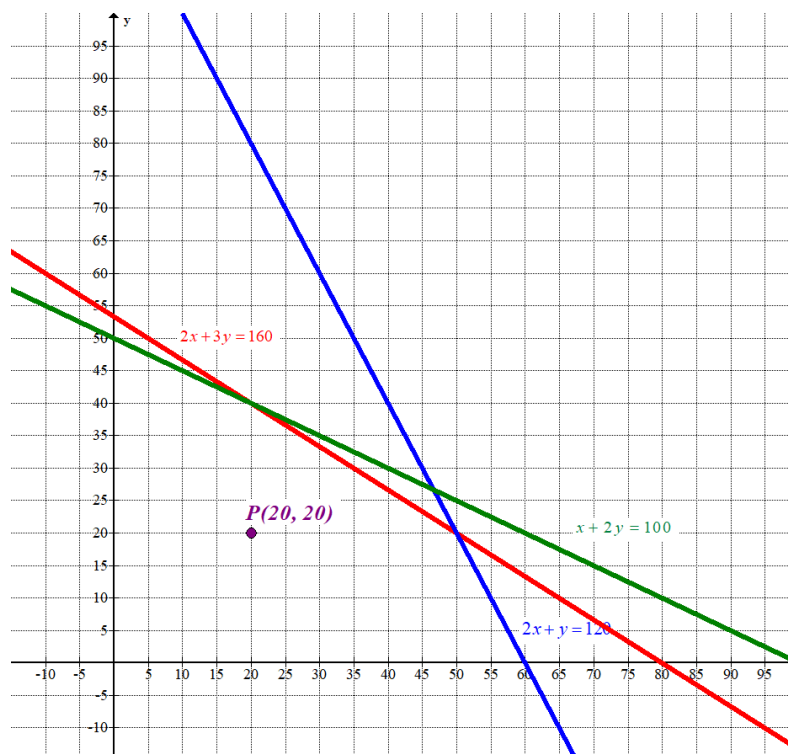
x	$y = 120 - 2x$
0	120
50	20
60	0

$$x + 2y = 100$$

x	$y = \frac{100 - x}{2}$
0	50
20	40

$$x \geq 0; y \geq 0$$

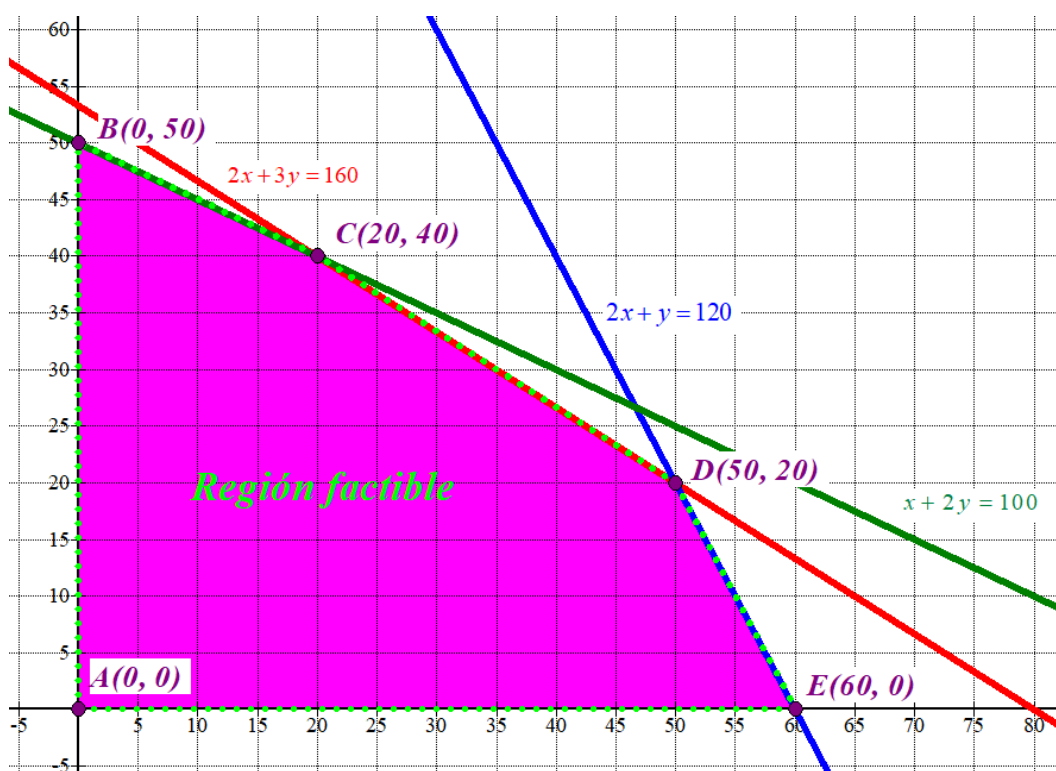
Pimer
cuadrante



Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 \leq 160 \\ 2 \cdot 20 + 20 \leq 120 \\ 20 + 2 \cdot 20 \leq 100 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo. Indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la recaudación en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow R(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow R(0, 50) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 50 = 500$$

$$C(20, 40) \rightarrow R(20, 40) = 8 \cdot 20 + 10 \cdot 40 = 560$$

$$D(50, 20) \rightarrow R(50, 20) = 8 \cdot 50 + 10 \cdot 20 = 600 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(60, 0) \rightarrow R(60, 0) = 8 \cdot 60 + 10 \cdot 0 = 480$$

La máxima recaudación se obtiene en el vértice D(50, 20), que significa confeccionar y vender 50 cajas azules y 20 rojas. Esta recaudación máxima tiene un valor de 600 euros.