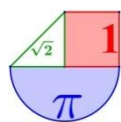


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en Cantabria

Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Cantabria desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

Julio 2026	3
Junio 2026	18
JULIO 2025	32
JUNIO 2025	47
JULIO 2024	61
JUNIO 2024	75
LOMCE – JULIO 2023	88
LOMCE – JUNIO 2023	102
LOMCE – JULIO 2022	115
LOMCE – JUNIO 2022	129
LOMCE – JULIO 2021	141
LOMCE – JUNIO 2021	153
LOMCE – SEPTIEMBRE 2020	167
LOMCE – JULIO 2020	180
LOMCE – JULIO 2019	192
LOMCE – JUNIO 2019	205
LOMCE – SEPTIEMBRE 2018	219
LOMCE – JUNIO 2018	232
LOMCE – SEPTIEMBRE 2017	244
LOMCE – JUNIO 2017	256

Julio 2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1. En una tienda de electrónica, se venden tres tipos de dispositivos: teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 €. Además, se sabe que la suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas.

Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela este problema para calcular las unidades vendidas de cada tipo.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántas unidades de cada tipo (teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles) se vendieron esa semana; y si no se puede, justifique por qué.

Opción 2. Una pastelería artesanal elabora dos tipos de tartas: la tarta de Almendra y la tarta de Queso.

- Para elaborar una tarta de Almendra se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar.
- Para elaborar una tarta de Queso se necesitan 200 g de harina y 400 g de azúcar.

La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar. Por motivos de demanda comercial, deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias. El beneficio obtenido por cada tarta de Almendra es de 12 € y por cada tarta de Queso es de 15 €. La intención de la pastelería es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántas tartas de cada tipo deben elaborarse diariamente para maximizar el beneficio?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Apartado 2 [4 puntos]. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1 PUNTO]. Determine el dominio de la función y calcule todas sus asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas), indicando las ecuaciones correspondientes.

Tarea 2.1B [2 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ e identifique las coordenadas de los extremos relativos (máximos y mínimos), si existen.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Calcule los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y realice un esbozo de la gráfica con la información obtenida (puntos de corte, extremos y asíntotas).

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica sigue una distribución normal con una desviación típica de 3 GB. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes y se observa que su consumo medio es de 15 GB. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule un intervalo de confianza al 97% para la media del consumo de datos de todos los clientes de la compañía.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media con un error menor de 0,5 GB y un nivel de confianza del 95%?

Opción 2. En un congreso médico, el 60% de los asistentes son cardiólogos, el 30% son neurólogos y el 10% restante son pediatras. Se sabe que hablan inglés el 80% de los cardiólogos, el 60% de los neurólogos y el 50% de los pediatras. Se elige un asistente al azar. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si se elige un asistente y resulta que no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea neurólogo?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés.

Tabla de la distribución normal N(0,1)

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1. En una tienda de electrónica, se venden tres tipos de dispositivos: teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 €. Además, se sabe que la suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas.

Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela este problema para calcular las unidades vendidas de cada tipo.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántas unidades de cada tipo (teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles) se vendieron esa semana; y si no se puede, justifique por qué.

1.1A Llamamos “x” al número de teléfonos móviles vendidos, “y” al número de tablets vendidas y “z” al número de ordenadores portátiles vendidos.

El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 € $\rightarrow x + y + z = 110$; $300x + 400y + 800z = 42000$.

La suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas $\rightarrow x + 2z = 2y$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema de ecuaciones lineales.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 300x + 400y + 800z = 42000 \\ x + 2z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

1.1B El sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 8 & 420 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el valor del determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 6 - 4 - 6 + 16 = 16 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero el rango de A es 3. El rango de A/B también es 3. Los rangos de A y A/B son iguales al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

1.1C Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x = 2y - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - 2z + y + z = 110 \\ 3(2y - 2z) + 4y + 8z = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - z = 110 \\ 6y - 6z + 4y + 8z = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - 110 = z \\ 10y + 2z = 420 \rightarrow 5y + z = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y + 3y - 110 = 210 \Rightarrow 8y = 320 \Rightarrow \boxed{y = \frac{320}{8} = 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 3 \cdot 40 - 110 = 10} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 40 - 2 \cdot 10 = 60}$$

Se vendieron 60 teléfonos móviles, 40 tablets y 10 ordenadores portátiles.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 2. Una pastelería artesanal elabora dos tipos de tartas: la tarta de Almendra y la tarta de Queso.

- Para elaborar una tarta de Almendra se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar.
- Para elaborar una tarta de Queso se necesitan 200 g de harina y 400 g de azúcar.

La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar. Por motivos de demanda comercial, deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias. El beneficio obtenido por cada tarta de Almendra es de 12 € y por cada tarta de Queso es de 15 €. La intención de la pastelería es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántas tartas de cada tipo deben elaborarse diariamente para maximizar el beneficio?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

1.2A Llamamos “x” = número de tartas de almendra e “y” = número de tartas de queso. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de harina	Gramos de azúcar	Beneficio
Nº tartas de almendra (x)	$500x$	$300x$	$12x$
Nº tartas de queso (y)	$200y$	$400y$	$15y$
TOTAL	$500x + 200y$	$300x + 400y$	$12x + 15y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio obtenido con la venta de las tartas que viene expresado como $B(x, y) = 12x + 15y$

Las restricciones son:

“La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar” $\rightarrow$
 $500x + 200y \leq 24000$, $300x + 400y \leq 20000$.

“Deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias” $\rightarrow y \geq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 200y \leq 24000 \\ 300x + 400y \leq 20000 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$5x + 2y = 240$$

$$3x + 4y = 200$$

$$y = 10$$

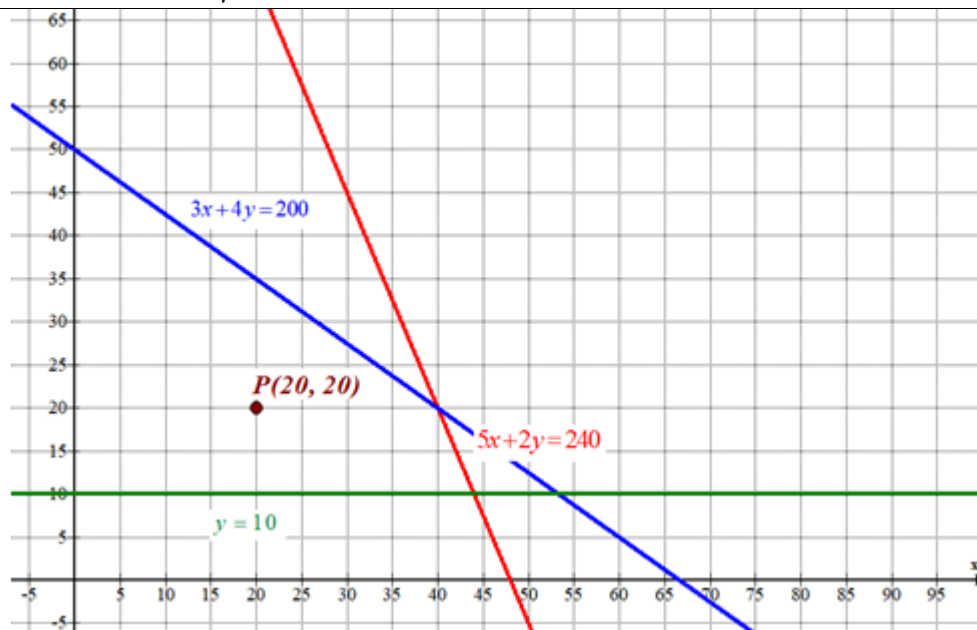
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{240 - 5x}{2}$
0	120
40	20
44	10
48	0

x	$y = \frac{200 - 3x}{4}$
0	50
40	20
60	5

x	$y = 10$
0	10
45	10

Primer
cuadrante



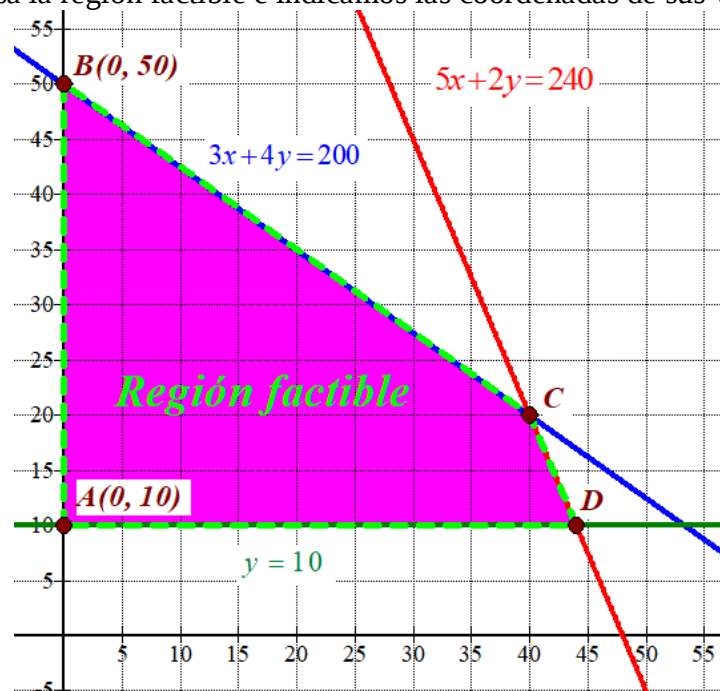
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta roja y azul, y por encima de la recta horizontal verde. Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \leq 240 \\ 3 \cdot 20 + 4 \cdot 20 \leq 200 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 + 40 \leq 240 \\ 60 + 80 \leq 200 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 200 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x - 20y = -1000 \\ 15x + 6y = 720 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-14y = -280}{-14} \Rightarrow y = \frac{-280}{-14} = 20 \Rightarrow 3x + 4 \cdot 20 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow \boxed{C(40, 20)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow 5x + 20 = 240 \Rightarrow 5x = 220 \Rightarrow x = \frac{220}{5} = 44 \Rightarrow \boxed{D(44, 10)}$$

Los vértices son A(0, 10); B(0, 50); C(40, 20) y D(44, 10).

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 12x + 15y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 10 = 150$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 50 = 750$$

$$C(40, 20) \rightarrow B(40, 20) = 12 \cdot 40 + 15 \cdot 20 = 780 \text{ Máximo}$$

$$D(44, 10) \rightarrow B(44, 10) = 12 \cdot 44 + 15 \cdot 10 = 678$$

El valor máximo es 780 y se alcanza en el vértice C(40, 20). El máximo beneficio se obtiene con la elaboración de 40 tartas de almendra y 20 de queso.

1.2D El máximo beneficio que se puede conseguir es de 780 euros.

Apartado 2 [4 puntos]. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1 PUNTO]. Determine el dominio de la función y calcule todas sus asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas), indicando las ecuaciones correspondientes.

Tarea 2.1B [2 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ e identifique las coordenadas de los extremos relativos (máximos y mínimos), si existen.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Calcule los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y realice un esbozo de la gráfica con la información obtenida (puntos de corte, extremos y asíntotas).

2.1A El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \frac{3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2}{(2-2)^2} = \frac{36}{0} = \infty$$

La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{12x}{x^2}}{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{12}{x}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{3 + \frac{12}{\infty}}{\left(1 - \frac{2}{\infty}\right)^2} = \frac{3+0}{(1-0)^2} = 3$$

La recta $y = 3$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

2.1B Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(6x+12)(x-2)^2 - 2(x-2)(3x^2+12x)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(6x+12)(x-2) - 2(3x^2+12x)}{(x-2)^3} = \frac{\cancel{6x^2} - \cancel{12x} + \cancel{12x} - 24 - \cancel{6x^2} - 24x}{(x-2)^3} = \frac{-24 - 24x}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-24 - 24x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow -24 - 24x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x = -1$ y del valor excluido del dominio $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

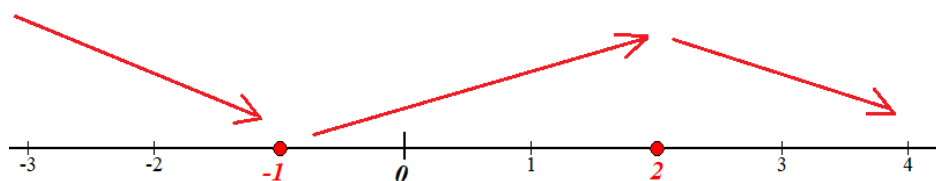
$$f'(-2) = \frac{-24 - 24(-2)}{(-2-2)^3} = \frac{24}{-64} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-24 - 24 \cdot 0}{(0-2)^3} = 3 > 0$. La función crece en $(-1, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-24 - 24 \cdot 3}{(3-2)^3} = -96 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(-1, 2)$.

La función sigue el esquema siguiente.



En $x = 2$ la función no existe. La función tiene un mínimo relativo en $x = -1$. Como

$$f(-1) = \frac{3(-1)^2 + 12(-1)}{(-1-2)^2} = -1, \text{ las coordenadas del mínimo relativo son } (-1, -1).$$

2.1C Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados.

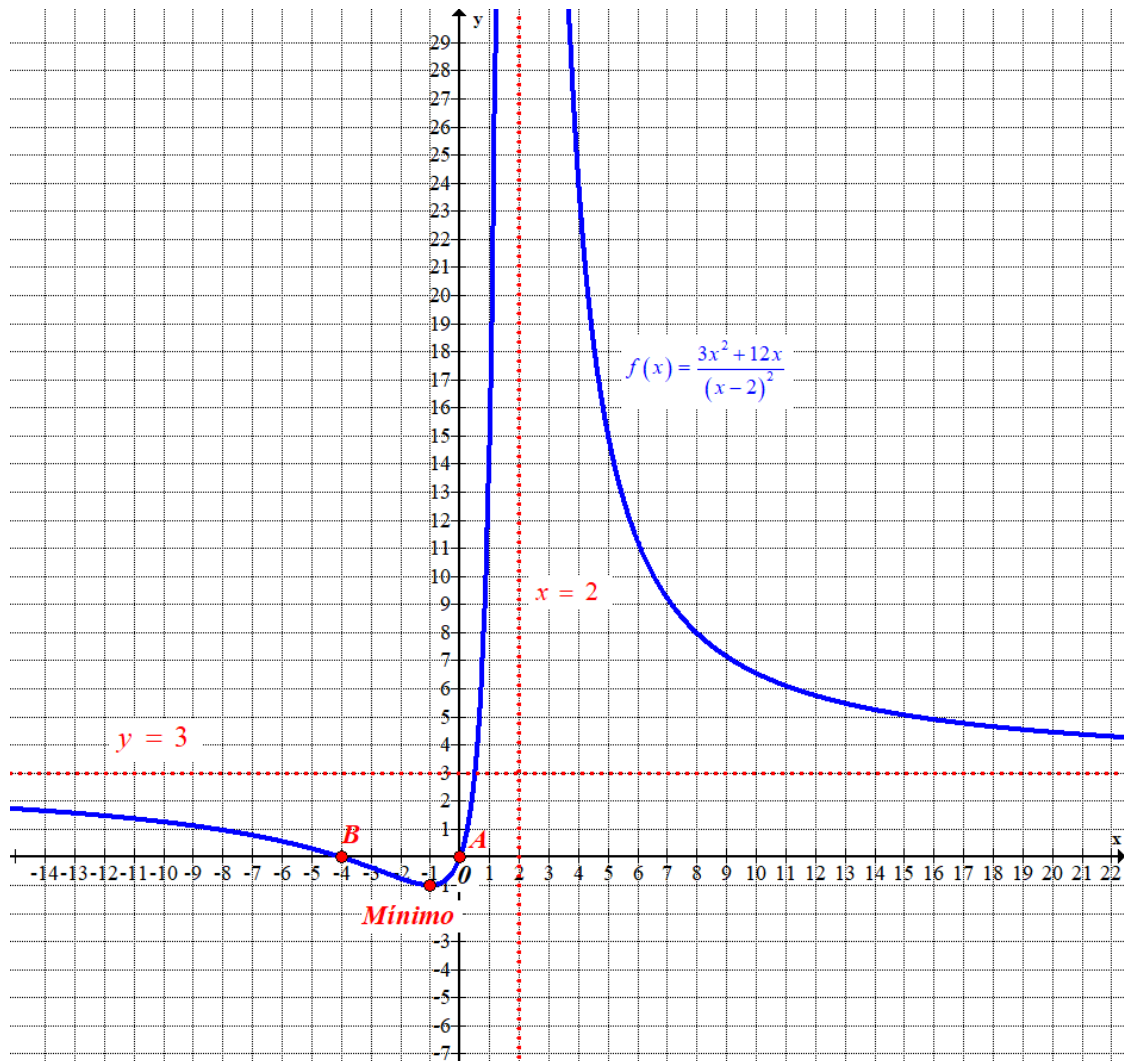
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0}{(0-2)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow \boxed{B(-4,0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(0, 0)$ y $B(-4, 0)$.
Realizamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$
-4	0
-3	-0.36
-1	-1
0	0
1	15
3	63



Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica sigue una distribución normal con una desviación típica de 3 GB. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes y se observa que su consumo medio es de 15 GB. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule un intervalo de confianza al 97% para la media del consumo de datos de todos los clientes de la compañía.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media con un error menor de 0,5 GB y un nivel de confianza del 95%?

X = El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica (en Gbs).

$X = N(\mu, 3)$

Tamaño de muestra = $n = 64$. Media muestral = $\bar{x} = 15$ GB.

3.1A Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \frac{3}{\sqrt{64}} = 0.81375 \text{ GB}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (15 - 0.81375, 15 + 0.81375) = (14.18625, 15.81375)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Igualamos el error a 0.5 GB.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\sqrt{n} = 5.88 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5.88}{0.5} \Rightarrow \boxed{n = 11.76^2 = 138.2976}$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 139 clientes.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 2. En un congreso médico, el 60% de los asistentes son cardiólogos, el 30% son neurólogos y el 10% restante son pediatras. Se sabe que hablan inglés el 80% de los cardiólogos, el 60% de los neurólogos y el 50% de los pediatras. Se elige un asistente al azar. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si se elige un asistente y resulta que no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea neurólogo?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés.

Llamamos C al suceso “el asistente es cardiólogo”, N a “el asistente es neurólogo”, P a “el asistente es pediatra” e I al suceso “el asistente habla inglés”.

Por los datos proporcionados tenemos: $P(C) = 0.60$, $P(N) = 0.30$, $P(P) = 1 - 0.6 - 0.3 = 0.1$,

$P(I/C) = 0.8$, $P(I/N) = 0.60$ y $P(I/P) = 0.5$.

3.2A Debemos calcular $P(I)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(I) &= P(C)P(I/C) + P(N)P(I/N) + P(P)P(I/P) = \\ &= 0.6 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.5 = \boxed{0.71} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés vale 0.71.

3.2B Debemos calcular $P(N/\bar{I})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(N/\bar{I}) &= \frac{P(N \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(N)P(\bar{I}/N)}{1 - P(I)} = \frac{P(N)[1 - P(I/N)]}{1 - P(I)} = \\ &= \frac{0.3 \cdot [1 - 0.6]}{1 - 0.71} = \boxed{\frac{12}{29} \approx 0.4138} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el asistente elegido que no habla inglés sea neurólogo tiene un valor aproximado de 0.4138.

3.2C Debemos calcular $P(C \cap \bar{I})$.

$$P(C \cap \bar{I}) = P(C)P(\bar{I}/C) = P(C)[1 - P(I/C)] = 0.6 \cdot (1 - 0.8) = \boxed{0.12}$$

La probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés vale 0.12.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

Consideramos un número de asistentes de 100 personas.

El 60% son cardiólogos, es decir, hay 60 cardiólogos. El 30% son neurólogos, es decir, hay 30 neurólogos. Los restantes son pediatras, es decir, $100 - 60 - 30 = 10$ son pediatras.

Hablan inglés el 80% de los cardiólogos, es decir, $0.8 \cdot 60 = 48$ cardiólogos hablan inglés.

Hablan inglés el 60% de los neurólogos, es decir, $0.6 \cdot 30 = 18$ neurólogos hablan inglés.

Hablan inglés el 50% de los pediatras, es decir, $0.5 \cdot 10 = 5$ pediatras hablan inglés. Colocamos todos estos datos en una tabla.

	Cardiólogos	Neurólogos	Pediatras	TOTAL
Hablan inglés	48	18	5	
No hablan inglés				
TOTAL	60	30	10	100

Completamos la tabla.

	Cardiólogos	Neurólogos	Pediatras	TOTAL
Hablan inglés	48	18	5	71
No hablan inglés	12	12	5	29
TOTAL	60	30	10	100

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

3.2A De los 100 asistentes son 71 los que hablan inglés. La probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés vale $\frac{71}{100} = 0.71$.

3.2B Hay 29 asistentes que no hablan inglés y son 12 los neurólogos que no hablan inglés. La probabilidad de que el asistente elegido que no habla inglés sea neurólogo tiene un valor aproximado de $\frac{12}{29} \approx 0.4138$.

3.2C De los 100 asistentes son 12 los cardiólogos que no hablan inglés. La probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés vale $\frac{12}{100} = 0.12$.



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD, PAU

Prueba Ordinaria

Junio 2026

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

INDICACIONES

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [2 PUNTOS]. Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -2$.

Opción 2. Una agencia de marketing desea maximizar el impacto de su nueva campaña, medido en miles de visualizaciones, invirtiendo en dos tipos de publicidad: Instagram Stories y YouTube Pre-roll.

Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €. Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube. Además, el número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube. Se estima que el impacto por unidad es de 1,5 miles de visualizaciones en Instagram y 3 miles en YouTube.

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos anuncios de cada tipo debe contratar la empresa para maximizar el impacto (número de visualizaciones)?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascendería dicho impacto máximo (en miles de visualizaciones)?

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para el valor de a obtenido, halle los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

Tarea 2.1B [1,5 PUNTOS]. Considerando el caso $a = -2$, calcule el área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Considerando el caso $a = 0$, calcule los extremos relativos que tiene esta función en el intervalo $[-3, 2]$, especificando si son máximos o mínimos.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 estudiantes seleccionados al azar, y se ha calculado que el tiempo medio necesario para completar el examen es de 90 minutos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 95% para el valor promedio del tiempo que los estudiantes tardan en completar el examen.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar el examen, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 minutos?

Opción 2. Una empresa de biotecnología ha desarrollado una prueba para una enfermedad. Se estima que el 3% de la población padece la enfermedad. La prueba es altamente sensible, dando positivo en el 98% de las personas enfermas. Sin embargo, en el 5% de las personas sanas, la prueba da un falso positivo. Realice las siguientes tareas que se plantean:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar dé positivo en la prueba.

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si una persona ha dado positivo, calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que la prueba dé un resultado incorrecto para una persona elegida al azar.

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES**Apartado 1 [3 puntos].**

Opción 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [2 PUNTOS]. Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -2$.

1.1A Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - 2 - 1 - 2a - a = a^2 - 3a - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = a \\ \frac{3-5}{2} = -1 = a \end{cases}$$

CASO 1 $a \neq -1$ y $a \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -4 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 4 \quad 2 \\ -2 \quad -8 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -9 \quad 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -9 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 9 \quad -6 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad -9 \quad 6 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -6}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $a \neq -1$ y $a \neq 4$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = -1$ o $a = 4$ el sistema es incompatible (sin solución).

1.1B Para $a = -2$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema para $a = -2$.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2z + 2 - y - 2z = 2 \\ 2y + z + 1 + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \\ 3y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2z = 2 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \boxed{x = 0 + 1 + 1 = 2}$$

Para $a = -2$ la solución del sistema es $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 2. Una agencia de marketing desea maximizar el impacto de su nueva campaña, medido en miles de visualizaciones, invirtiendo en dos tipos de publicidad: Instagram Stories y YouTube Pre-roll.

Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €. Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube. Además, el número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube. Se estima que el impacto por unidad es de 1,5 miles de visualizaciones en Instagram y 3 miles en YouTube.

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos anuncios de cada tipo debe contratar la empresa para maximizar el impacto (número de visualizaciones)?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascendería dicho impacto máximo (en miles de visualizaciones)?

1.2A Llamamos “x” = número de anuncios de Instagram Stories e “y” = número de anuncios Youtube Pre-roll. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Coste	Miles de visualizaciones
Nº Instagram Stories (x)	$500x$	$1.5x$
Nº Youtube Pre-roll (y)	$1500y$	$3y$
TOTAL	$500x + 1500y$	$1.5x + 3y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el impacto medido en miles de visualizaciones que vienen expresado como $I(x, y) = 1.5x + 3y$

Las restricciones son:

“Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €” $\rightarrow 500x + 1500y \leq 15000$

“Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube” $\rightarrow x + y \geq 10; y \geq 4$.

“El número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube” $\rightarrow x \leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 1500y \leq 15000 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 3y = 30$

$x + y = 10$

$y = 4$

$x = 2y$

$x \geq 0; y \geq 0$

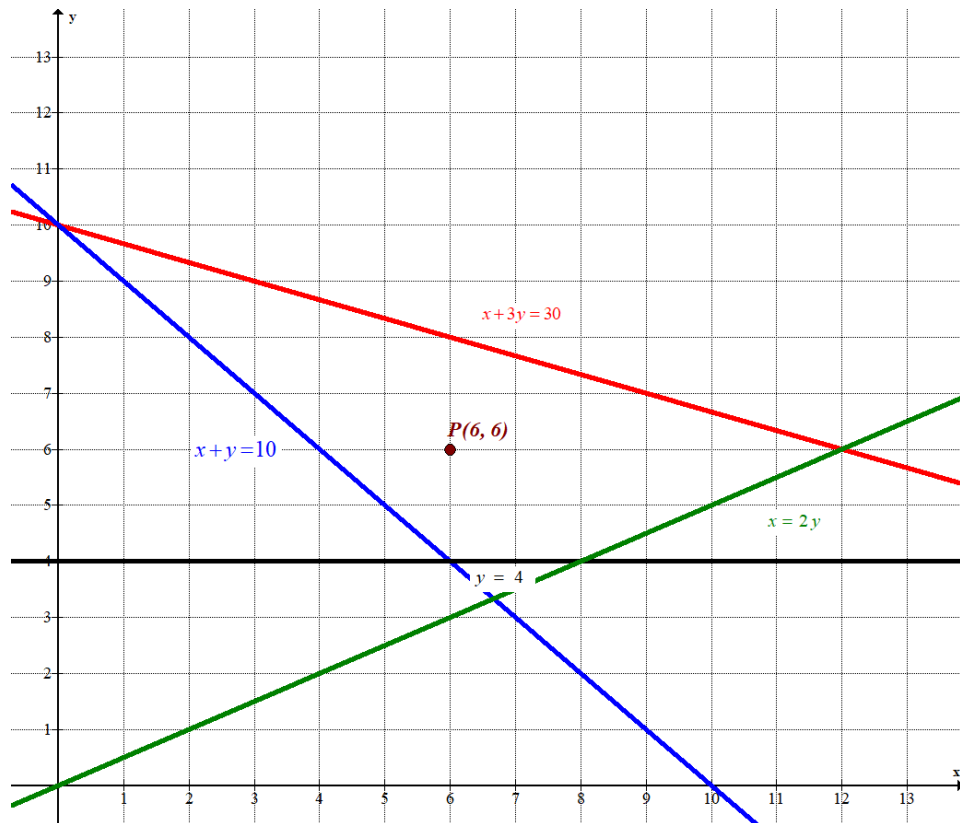
x	$y = \frac{30-x}{3}$
0	10
12	6
30	0

x	$y = 10 - x$
0	10
6	4
10	0

x	$y = 4$
6	4
8	4

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
8	4
12	6

Primer
cuadrante



Como las restricciones del problema son

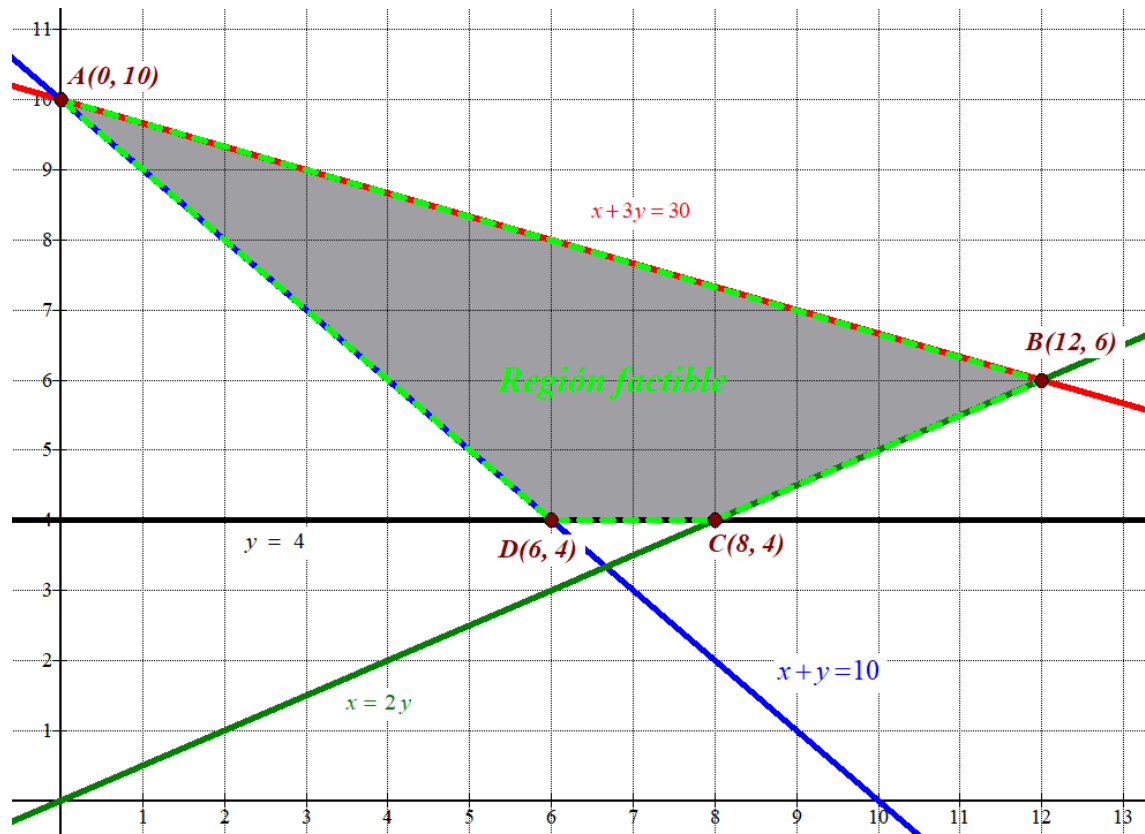
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta roja y por encima de las rectas azul, verde y negra.

Comprobamos que el punto $P(6, 6)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6 + 3 \cdot 6 \leq 30 \\ 6 + 6 \geq 10 \\ 6 \geq 4 \\ 6 \leq 2 \cdot 6 \\ 6 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 10)$; $B(12, 6)$; $C(8, 4)$ y $D(6, 4)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 1.5x + 3y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow I(0, 10) = 1.5 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$$

$$B(12, 6) \rightarrow I(12, 6) = 1.5 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 36 \text{ Máximo}$$

$$C(8, 4) \rightarrow I(8, 4) = 1.5 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$D(6, 4) \rightarrow I(6, 4) = 1.5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 21$$

El valor máximo es 36 y se alcanza en el vértice $B(12, 6)$. El máximo impacto se consigue contratando 12 anuncios de Instagram Stories y 6 de Youtube Pre-roll.

1.2D El máximo impacto que se puede conseguir es de 36 mil visualizaciones.

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para el valor de a obtenido, halle los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

Tarea 2.1B [1,5 PUNTOS]. Considerando el caso $a = -2$, calcule el área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Considerando el caso $a = 0$, calcule los extremos relativos que tiene esta función en el intervalo $[-3, 2]$, especificando si son máximos o mínimos.

2.1A La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ pues está definida con expresiones polinómicas. Para que la función sea continua debe serlo en el cambio de definición $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^3 + a \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 4a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 + ax^2 - 3x = 4a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3x - 4 = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 2 = -6 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La función es continua en todo su dominio para $a = -2$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX ($y = 0$).

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \dots$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = x(x-3)(x+1)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} x(x-3)(x+1), & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)(x+1), & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Esta expresión se anula en $x = 0$, $x = -1$ y

en $x = 4$. Los puntos de corte con el eje OX son A(0,0), B(-1,0) y C(4,0).

Hallamos los puntos de corte con el eje OY ($x = 0$).

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

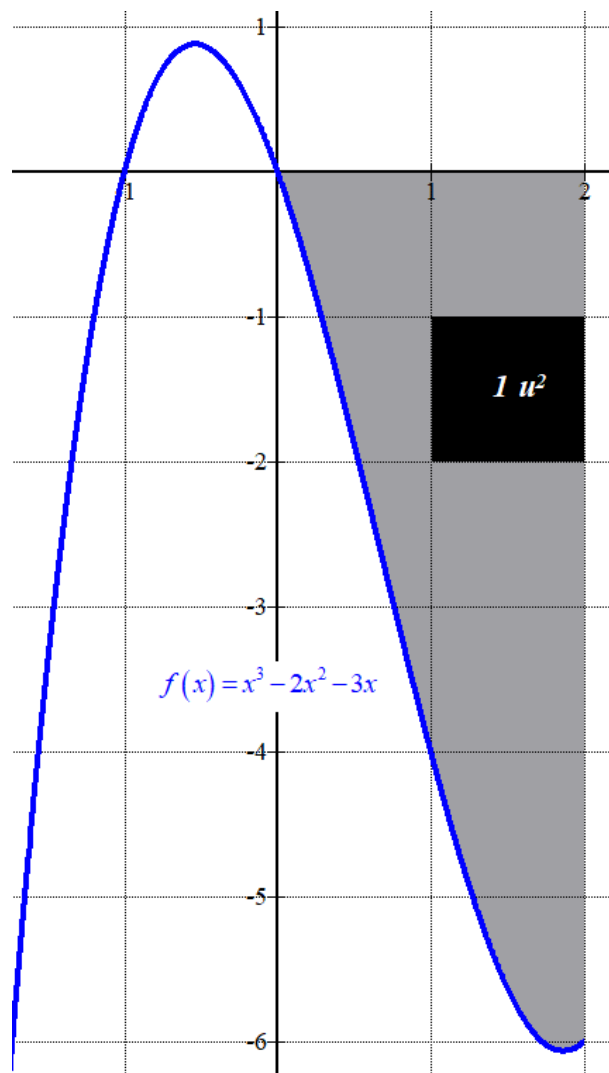
El punto de corte con el eje OY es el punto A(0, 0).

2.1B La función en el intervalo $[0, 2]$ solo corta el eje OX en $x = 0$. El área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$ es el valor absoluto de la integral de 0 a 2 de $f(x)$.

La función en el intervalo $[0, 2]$ tiene la expresión $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 x^3 - 2x^2 - 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right] = 4 - \frac{16}{3} - 6 = \boxed{\frac{-22}{3} \approx 7.333} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 7.333 unidades cuadradas.



2.1C Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En el intervalo $[-3, 2]$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x$. Hallamos su derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

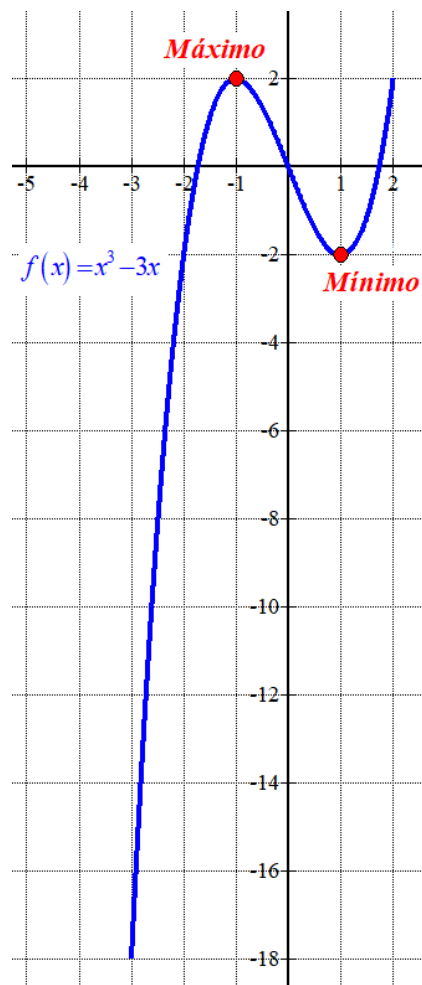
Estos dos puntos críticos pertenecen al intervalo $[-3, 2]$. Sustituimos esos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \end{cases}$$

En $x = -1$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función presenta un máximo relativo para $x = -1$.

En $x = 1$ la primera derivada se anula y la segunda es positiva. La función presenta un mínimo relativo para $x = 1$.

Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 2)$ y el mínimo relativo es $(1, -2)$.



Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 estudiantes seleccionados al azar, y se ha calculado que el tiempo medio necesario para completar el examen es de 90 minutos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 95% para el valor promedio del tiempo que los estudiantes tardan en completar el examen.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar el examen, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 minutos?

X = El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen (en minutos). $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de muestra = $n = 100$. Media muestral = $\bar{x} = 90$ minutos.

3.1A Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.96 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (90 - 1.96, 90 + 1.96) = (88.04, 91.96)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9

Igualamos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2} \right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 2. Una empresa de biotecnología ha desarrollado una prueba para una enfermedad. Se estima que el 3% de la población padece la enfermedad. La prueba es altamente sensible, dando positivo en el 98% de las personas enfermas. Sin embargo, en el 5% de las personas sanas, la prueba da un falso positivo. Realice las siguientes tareas que se plantean:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar dé positivo en la prueba.

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si una persona ha dado positivo, calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que la prueba dé un resultado incorrecto para una persona elegida al azar.

Llamamos M al suceso “la persona elegida está enferma”, $T+$ a “el test da positivo” y $T-$ a “el test da negativo”.

Por los datos proporcionados tenemos: $P(M) = 0.03$, $P(T+/M) = 0.98$ y $P(T+/\bar{M}) = 0.05$

3.2A Debemos calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(M)P(T+/M) + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = 0.03 \cdot 0.98 + 0.97 \cdot 0.05 = \boxed{0.0779}$$

3.2B Debemos calcular $P(\bar{M}/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{M}/T+) = \frac{P(\bar{M} \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(\bar{M})P(T+/\bar{M})}{P(T+)} = \frac{0.97 \cdot 0.05}{0.0779} = \boxed{\frac{485}{779} \approx 0.6226}$$

3.2C Hay dos formas de que el resultado sea incorrecto: dar positivo estando sano ($T+ \cap \bar{M}$) o dar negativo estando enfermo ($T- \cap M$). La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada una de estas opciones.

$$\begin{aligned} P(\text{Resultado incorrecto}) &= P(T- \cap M) + P(T+ \cap \bar{M}) = \\ &= P(M)P(T-/M) + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = P(M)[1 - P(T+/M)] + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = \\ &= 0.03(1 - 0.98) + 0.97 \cdot 0.05 = \boxed{0.0491} \end{aligned}$$

JULIO 2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados, todos ellos obligatorios. Cada apartado contiene una o dos opciones. Cuando en un apartado haya dos opciones, se escogerá únicamente una.
- En caso de resolver más de una opción en algún apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar y/o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].**Opción 1.**

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.**Tarea 1.1B [2 PUNTOS].** Para $a = 1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX = 2N$$

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.**Tarea 1.2B [1 PUNTO].** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS].** ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS].** ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

Apartado 2 [4 puntos].

Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas OX .

Apartado 3 [3 puntos].**Opción 1.**

Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9986	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	3,3
3,4	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	3,4
3,5	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,6
3,7	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,7
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,8
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,9

SOLUCIONES**Apartado 1 [3 puntos].****Opción 1.**

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.**Tarea 1.1B [2 PUNTOS].** Para $a=1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX = 2N$$

1.1A Para que la matriz M tenga inversa su determinante debe tener un valor distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5a + 0 + 0 - a^2 - 0 - 6 = -a^2 + 5a - 6$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-6)}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5-1}{-2} = \boxed{3=a} \\ \frac{-5+1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz M tiene inversa para cualquier valor de " a " distinto de 2 y 3.

1.1B Para $a=1$ la matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y hemos visto que es invertible.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$MX = 2N \Rightarrow X = M^{-1}2N = 2M^{-1}N$$

Obtenemos la inversa de M y terminamos de hallar la expresión de la matriz X .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 6 = -2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2M^{-1}N = 2 \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} -1-1 & 12+1 & -1-1 \\ 1-1 & 8+1 & 1-1 \\ -1+1 & -12-1 & -1+1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & 13 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $MX = 2N$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

1.2A Llamamos “x” = número de sobaos que elabora e “y” = número de quesadas que elabora. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Minutos	Mantequilla (gramos)	Beneficio
Nº sobaos (x)	45x	200x	1.5x
Nº quesadas (y)	90y	100y	2y
TOTAL	45x + 90y	200x + 100y	1.5x + 2y

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios obtenidos por la venta de los sobaos y quesadas, que vienen expresados como $B(x, y) = 1.5x + 2y$.

Las restricciones son:

“La cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades” →
 $x + y \leq 11$

“Se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla y de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas” → $200x + 100y \leq 1600$; $45x + 90y \leq 810$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 200x + 100y \leq 1600 \\ 45x + 90y \leq 810 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 11$$

$$2x + y = 16$$

$$x + 2y = 18$$

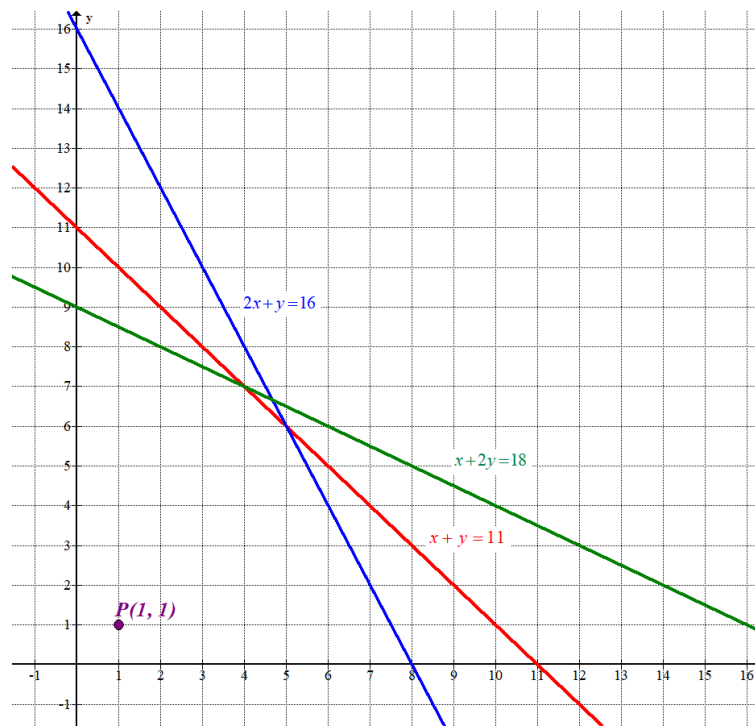
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 11 - x
0	11
4	7
5	6
11	0

x	y = 16 - 2x
0	16
5	6
8	0

x	y = $\frac{18-x}{2}$
0	9
4	7
18	0

Primer
cuadrante



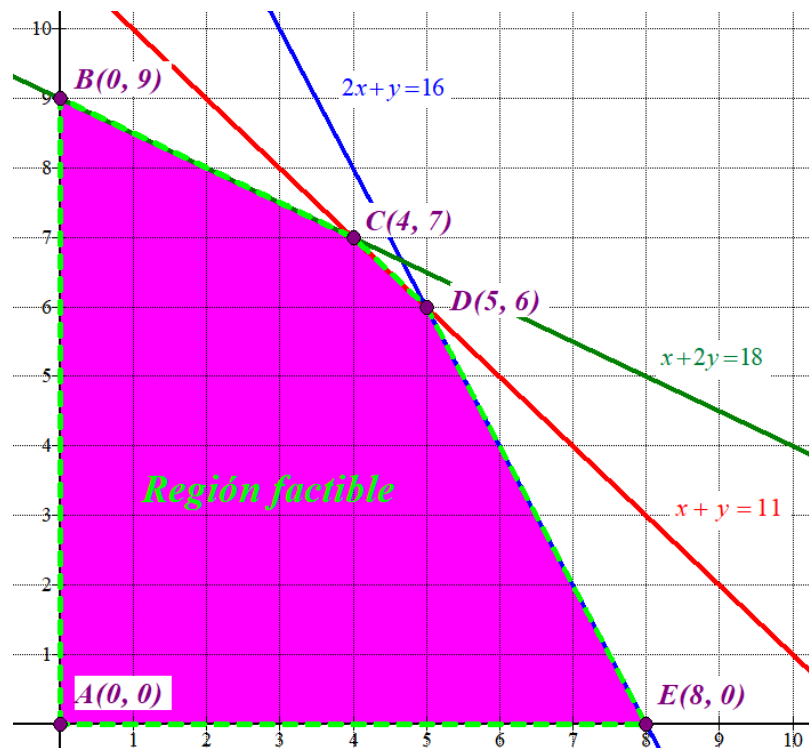
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.}$$

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 \leq 11 \\ 2 + 1 \leq 16 \\ 1 + 2 \leq 18 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{cases} x+2y=18 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=18 \\ x=11-y \end{cases} \Rightarrow 11-y+2y=18 \Rightarrow y=7 \Rightarrow x=11-7=4 \Rightarrow \boxed{C(4,7)}$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=16 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=16 \\ y=11-x \end{cases} \Rightarrow 2x+11-x=16 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=11-5=6 \Rightarrow \boxed{D(5,6)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 9); C(4, 7), D(5, 6) y E(8, 0).

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 1.5x + 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 9) \rightarrow B(0, 9) = 1.5 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = 18$$

$$C(4, 7) \rightarrow B(4, 7) = 1.5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 20 \text{ Máximo}$$

$$D(5, 6) \rightarrow B(5, 6) = 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 19.5$$

$$E(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 1.5 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 12$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(4, 7). El máximo beneficio se obtiene fabricando 4 sobaos y 7 quesadas.

1.2D El beneficio máximo que se pueden obtener es de 20 €.

Apartado 2 [4 puntos]. Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas OX .

2.1A Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = (x-3)^2 + 2(x+2)(x-3) = (x-3)(x-3+2(x+2)) =$$

$$= (x-3)(x-3+2x+4) = (x-3)(3x+1) = 3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \\ x+\frac{1}{3}=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 3$.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 3(-2-3)\left(-2+\frac{1}{3}\right) = 25 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3(0-3)\left(0+\frac{1}{3}\right) = -3 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\frac{1}{3}, 3\right).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3(4-3)\left(4+\frac{1}{3}\right) = 13 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -\frac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

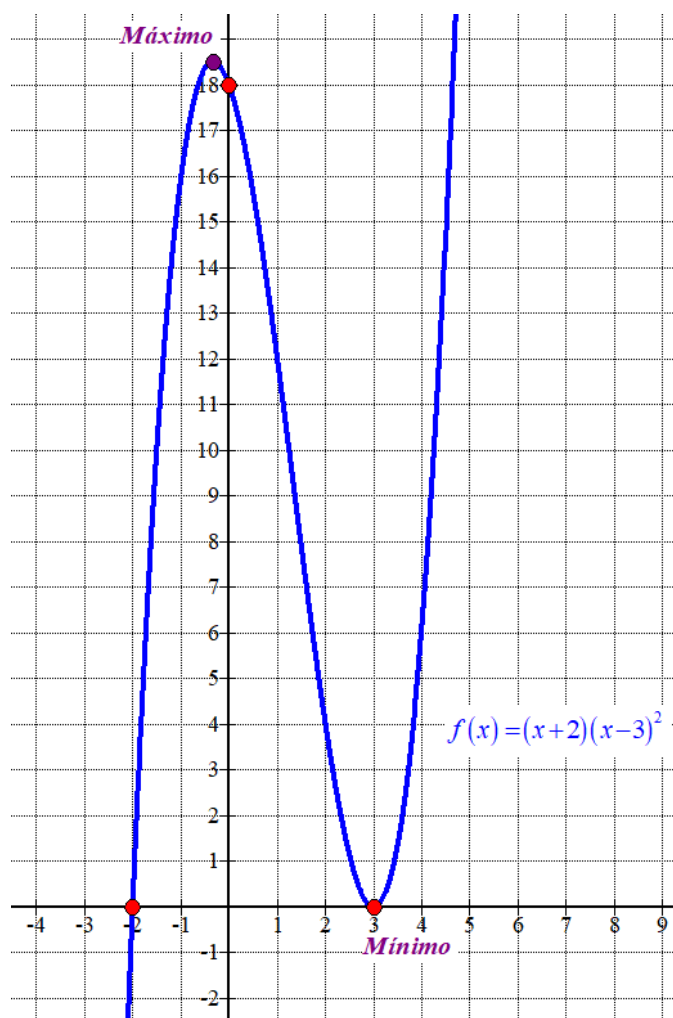
Como $f\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3} + 2\right)\left(\frac{-1}{3} - 3\right)^2 = \frac{500}{27} \approx 18.52$ y $f(3) = (3+2)(3-3)^2 = 0$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-1}{3}, \frac{500}{27}\right)$ y las del mínimo relativo son $(3, 0)$.

2.1B Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+2)(x-3)^2 \\ \text{Eje } X \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+2)(x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow A(-2, 0) \\ x = 3 \rightarrow B(3, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+2)(x-3)^2 \\ \text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = (0+2)(0-3)^2 = 18 \Rightarrow C(0, 18)$$

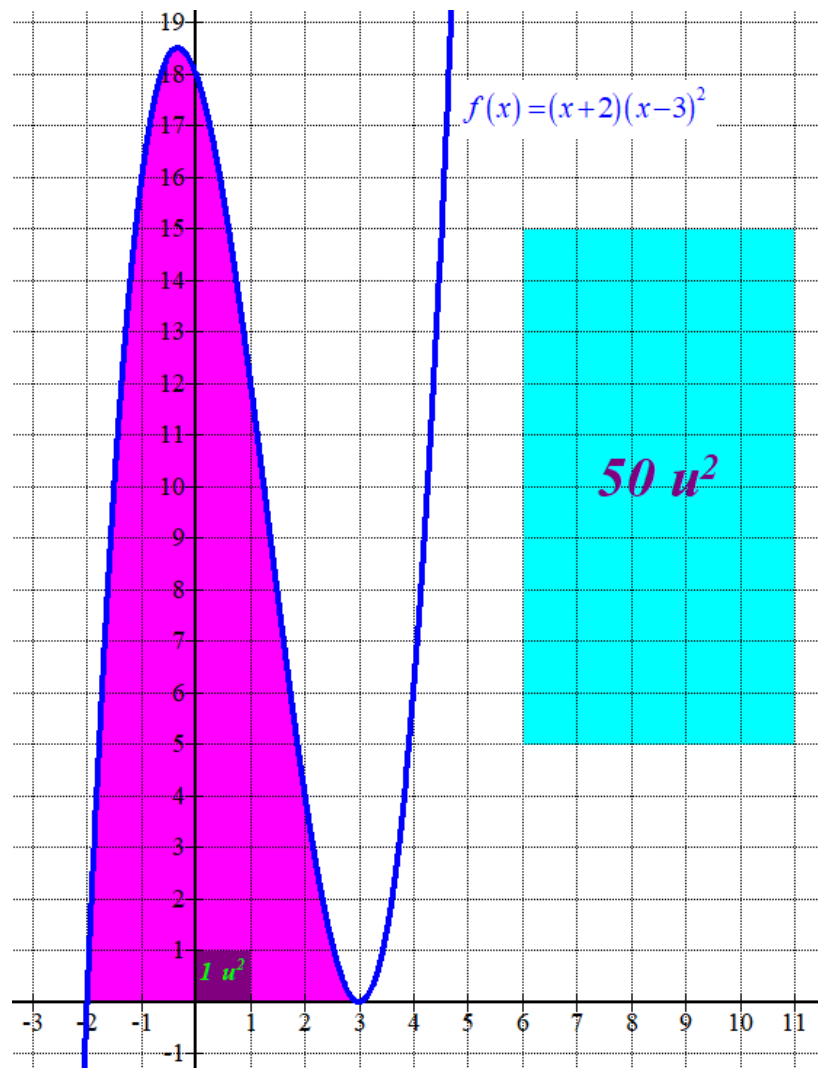
Los puntos de corte con los ejes son $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 18)$.



2.1C Los puntos de corte de la gráfica con el eje OX son $A(-2, 0)$ y $B(3, 0)$. El área del recinto delimitado por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas OX es el valor de la integral definida de la función entre -2 y 3 .

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^3 f(x) dx &= \int_{-2}^3 (x+2)(x-3)^2 dx = \int_{-2}^3 (x+2)(x^2+9-6x) dx = \\
 &= \int_{-2}^3 x^3+9x-6x^2+2x^2+18-12x dx = \int_{-2}^3 x^3-4x^2-3x+18 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x \right]_{-2}^3 = \\
 &= \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4(-2)^3}{3} - \frac{3(-2)^2}{2} + 18(-2) \right] = \\
 &= \frac{81}{4} - \cancel{36} - \frac{27}{2} + 54 - 4 - \frac{32}{3} + 6 + \cancel{36} = \boxed{\frac{625}{12} \approx 52.0833 u^2}
 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{625}{12} \approx 52.0833$ unidades cuadradas.



Apartado 3 [3 puntos].**Opción 1.**

Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

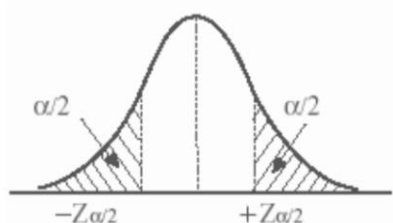
X = el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses.

$$X = N(\mu, 5)$$

Tamaño de muestra = $n = 225$. Media muestral = $\bar{x} = 21$ viajes.

3.1A Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5338	0.5
0.2	0.5793	0.5732	0.5
0.3	0.6179	0.6117	0.6
0.4	0.6554	0.6491	0.6
0.5	0.6915	0.6850	0.6
0.6	0.7257	0.7191	0.7
0.7	0.7580	0.7511	0.7
0.8	0.7881	0.7810	0.7
0.9	0.8159	0.8086	0.8
1.0	0.8413	0.8338	0.8
1.1	0.8643	0.8565	0.8
1.2	0.8849	0.8769	0.8
1.3	0.9032	0.8949	0.9
1.4	0.9192	0.9107	0.9
1.5	0.9332	0.9245	0.9
1.6	0.9452	0.9363	0.9
1.7	0.9554	0.9464	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{5}{\sqrt{225}} = 0.603 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (21 - 0.603, 21 + 0.603) = (20.397, 21.603)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9824	0,9828	0,9832	0,9836	0,9840	0,9844	0,9848	0,9850

Igualemos el error a 1 viaje y despejamos “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 2.17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 10.85 \Rightarrow n = (10.85)^2 = 117.7225$$

Como el tamaño mínimo debe ser entero y superior al “n” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 usuarios.

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

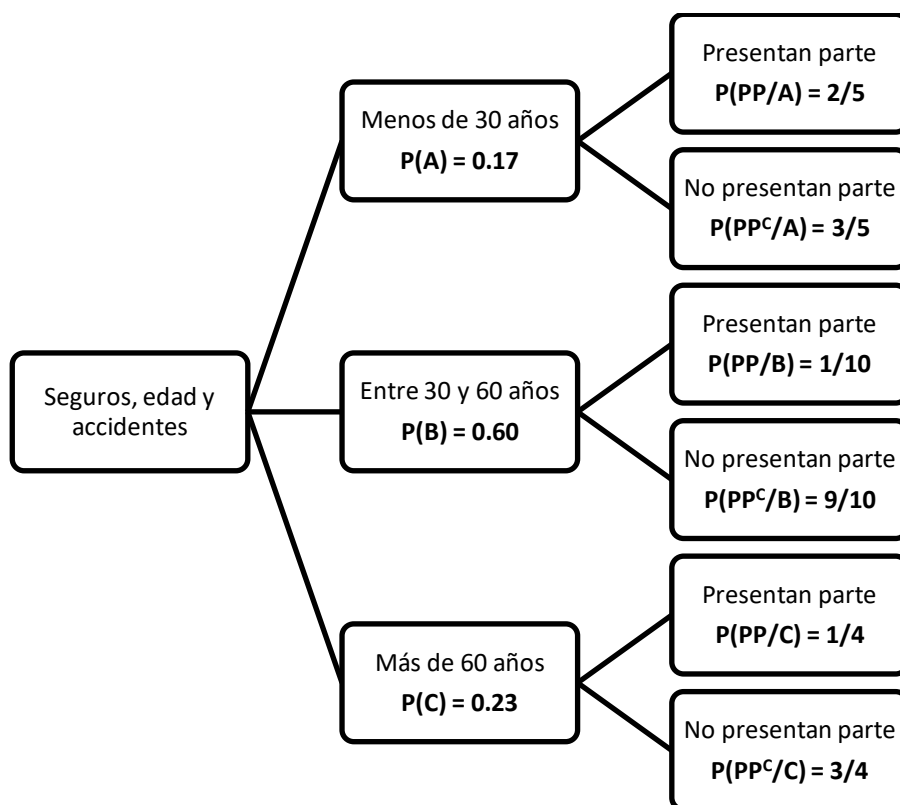
Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



3.2A Nos piden calcular $P(PP)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(PP) &= P(A)P(PP/A) + P(B)P(PP/B) + P(C)P(PP/C) = \\
 &= 0.17 \cdot \frac{2}{5} + 0.6 \cdot \frac{1}{10} + 0.23 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{0.1855}
 \end{aligned}$$

3.2B Nos piden calcular $P((B \cup C) \cap PP^c)$.

$$\begin{aligned}
 P((B \cup C) \cap PP^c) &= P(B \cap PP^c) + P(C \cap PP^c) = \\
 &= P(B)P(PP^c / B) + P(C)P(PP^c / C) = 0.6 \cdot \frac{9}{10} + 0.23 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{57}{80} = 0.7125}
 \end{aligned}$$

3.2C Nos piden calcular $P(A / PP)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / PP) = \frac{P(A \cap PP)}{P(PP)} = \frac{P(A)P(PP / A)}{P(PP)} = \frac{0.17 \cdot \frac{2}{5}}{0.1855} = \boxed{\frac{136}{371} \approx 0.3666}$$

JUNIO 2025

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales**INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].**Opción 1.**

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

Opción 2.

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tupper. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Dada la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4, & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas OX en el intervalo $[2,6]$.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1.

En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

Opción 2.

En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9986	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	3,3
3,4	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	3,4
3,5	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	3,6
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,7
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,8
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,9

SOLUCIONES

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1.

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

1.1A Llamamos “x” al número de lotes Clásicos, “y” al número de lotes Selección y “z” al número de lotes Premium.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes” $\rightarrow x + y + z = 33$.

“Se obtienen 855 €, siendo el precio de un lote Clásico de 20 €, de uno Selección de 30 € y de uno Premium de 45 €” $\rightarrow 20x + 30y + 45z = 855$.

“El número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos” $\rightarrow x = 3y$.

$$\text{Reunimos las ecuaciones en un sistema: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 20x + 30y + 45z = 855 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 4x + 6y + 9z = 171 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\}.$$

1.1B Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 12 - 6 - 0 + 27 = 18 \neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una solución única).

1.1C Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 4x + 6y + 9z = 171 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y + z = 33 \\ 4 \cdot 3y + 6y + 9z = 171 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 33 \\ 18y + 9z = 171 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 33 - 4y \\ 2y + z = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 33 - 4y = 19 \Rightarrow -2y = -14 \Rightarrow \boxed{y = 7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3 \cdot 7 = 21} \\ \boxed{z = 33 - 4 \cdot 7 = 5} \end{cases}$$

Se vendieron 21 lotes Clásicos, 7 lotes Selección y 5 lotes Premium.

Opción 2.

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tupper. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

1.2A Llamamos “x” = número de botellas de plástico e “y” = número de tupper.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Plástico rígido	Plástico flexible	Ingresos
Nº botellas plástico (x)	200x	300x	5x
Nº tupper (y)	400y	100y	7y
TOTAL	200x + 400y	300x + 100y	5x + 7y

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos que vienen expresados como:

$$I(x, y) = 5x + 7y$$

Las restricciones son:

“Se dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible” →
 $200x + 400y \leq 160000$; $300x + 100y \leq 100000$

“La cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas” → $y \leq 100 + x$

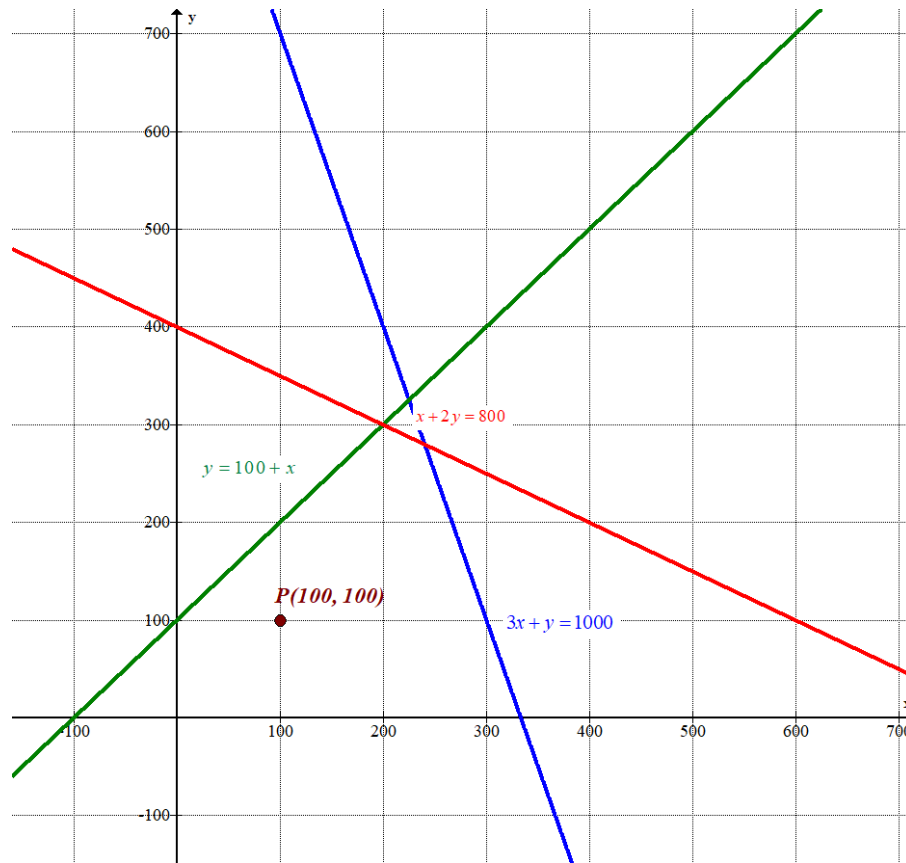
Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 400y \leq 160000 \\ 300x + 100y \leq 100000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 800$		$3x + y = 1000$		$y = 100 + x$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = \frac{800 - x}{2}$	x	$y = 1000 - 3x$	x	$y = 100 + x$	
0	400	0	1000	0	100	
200	300	300	100	200	300	
800	0	1000	0			
		3				



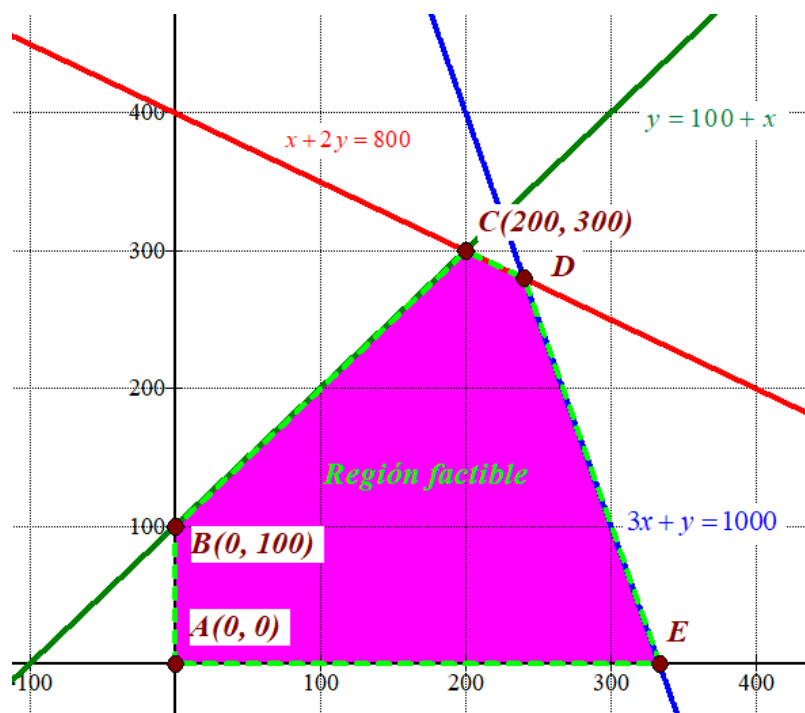
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.}$$

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 800 \\ 300 + 100 \leq 1000 \\ 100 \leq 100 + 100 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices D y E.

$$D \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 800 \\ y = 1000 - 3x \end{cases} \Rightarrow x + 2000 - 6x = 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x = -1200 \Rightarrow x = \frac{1200}{5} = 240 \Rightarrow y = 1000 - 3 \cdot 240 = 280 \Rightarrow \boxed{D(240, 280)}$$

$$E \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1000 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{3} \Rightarrow \boxed{E\left(\frac{1000}{3}, 0\right)}$$

Los vértices son $A(0, 0)$; $B(0, 100)$; $C(200, 300)$, $D(240, 280)$ y $E\left(\frac{1000}{3}, 0\right)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 5x + 7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 100) \rightarrow I(0, 100) = 5 \cdot 0 + 7 \cdot 100 = 700$$

$$C(200, 300) \rightarrow I(200, 300) = 5 \cdot 200 + 7 \cdot 300 = 3100$$

$$D(240, 280) \rightarrow I(240, 280) = 5 \cdot 240 + 7 \cdot 280 = \mathbf{3160 \text{ Máximo}}$$

$$E\left(\frac{1000}{3}, 0\right) \rightarrow I\left(\frac{1000}{3}, 0\right) = 5 \cdot \frac{1000}{3} + 7 \cdot 0 = \frac{5000}{3} \approx 1666.67$$

Los máximos ingresos se obtienen en el vértice $D(240, 280)$. Los máximos ingresos se obtienen fabricando 240 botellas de plástico y 280 tupperts.

1.2D Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 3160 €.

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Dada la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4, & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas OX en el intervalo $[2,6]$.

2.1A En el intervalo $(-\infty, 6)$ la función tiene la expresión $f(x) = (x-4)^2 - 4$ que es una función polinómica y por tanto, continua.

En el intervalo $(6, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = 16 - (x-10)^2$ que es una función polinómica y por tanto, continua.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición $x = 6$.

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= (6-4)^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} (x-4)^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} 16 - (x-10)^2 = 16 - (6-10)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6) = 0$$

La función es continua en $x = 6$. La función es continua en $\mathbb{R}$.

2.1B Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 2 \rightarrow \boxed{x=6} \in (-\infty, 6] \\ x-4 = -2 \rightarrow \boxed{x=2} \in (-\infty, 6] \end{cases} \\ 16 - (x-10)^2 = 0 \Rightarrow (x-10)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-10 = 4 \rightarrow \boxed{x=14} \in (6, +\infty) \\ x-10 = -4 \rightarrow x=6 \notin (6, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

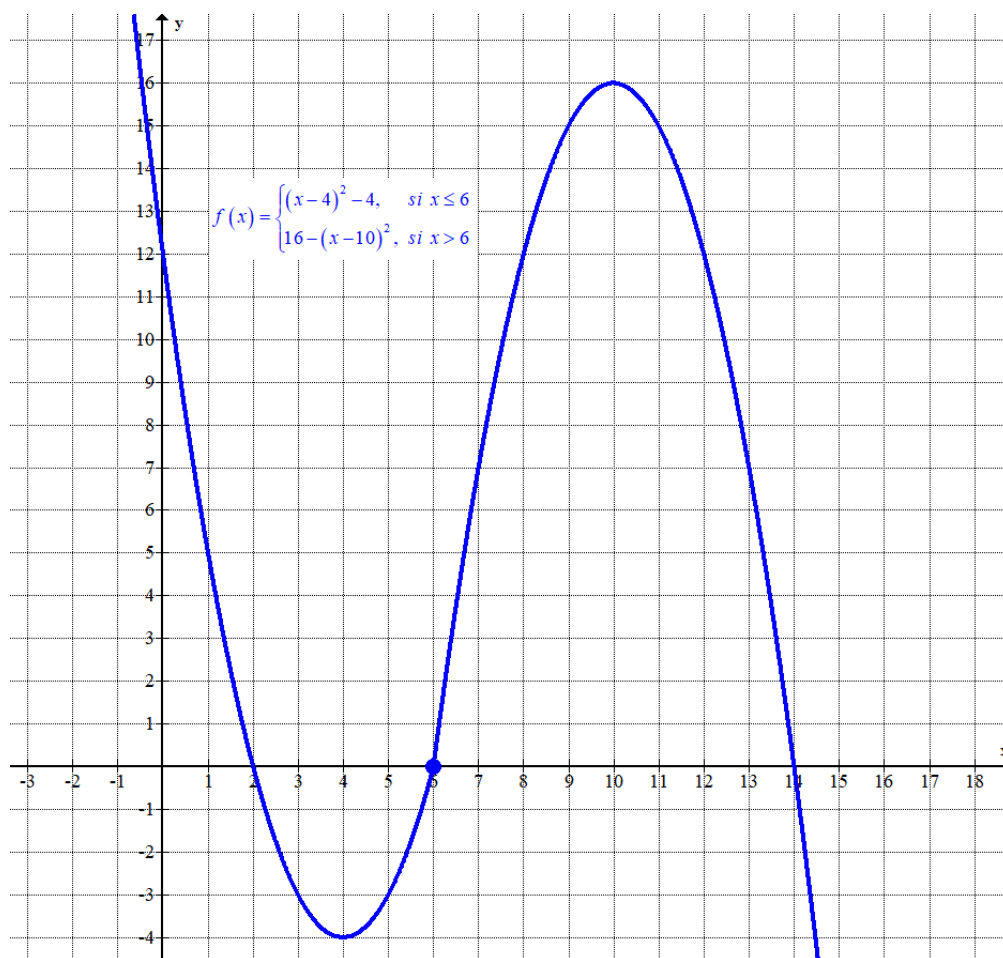
Los puntos de corte con el eje OX son $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(14, 0)$.

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = (0-4)^2 - 4 = 12$$

El punto de corte con el eje OY es el punto $D(0, 12)$.

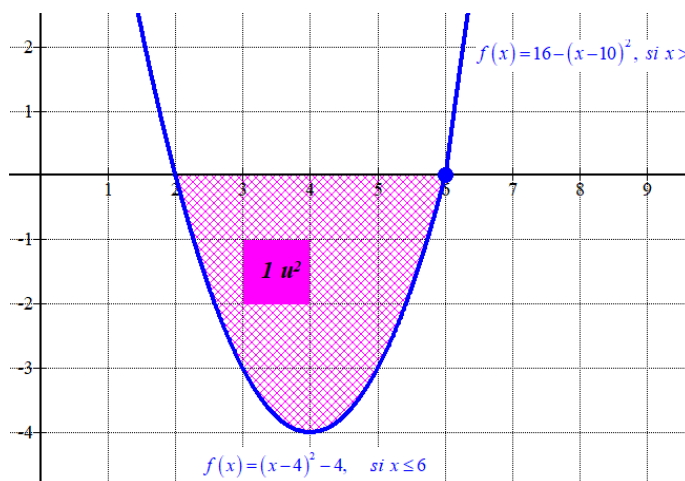
Sabemos que la gráfica son dos trozos de parábolas. Hallamos el vértice de cada una de ellas y dibujamos la gráfica de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-4), & \text{si } x < 6 \\ 2(x-10), & \text{si } x > 6 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-4) = 0 \rightarrow \boxed{x=4} \rightarrow V_1(4, -4) \\ 2(x-10) = 0 \rightarrow \boxed{x=10} \rightarrow V_2(10, 16) \end{cases}$$



2.1C El área del recinto delimitado por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas OX en el intervalo $[2,6]$ lo representamos en el dibujo. Como la función es negativa en ese intervalo calculamos el valor del área como el valor absoluto de la integral definida entre 2 y 6 de la función.

$$\begin{aligned}
 \int_2^6 f(x) dx &= \int_2^6 (x-4)^2 - 4 dx = \\
 &= \left[\frac{(x-4)^3}{3} - 4x \right]_2^6 = \\
 &= \left[\frac{(6-4)^3}{3} - 4 \cdot 6 \right] - \left[\frac{(2-4)^3}{3} - 4 \cdot 2 \right] = \\
 &= \frac{8}{3} - 24 + \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{-32}{3}}
 \end{aligned}$$



El área tiene un valor de $\frac{32}{3} \approx 10.667$ unidades cuadradas.

Apartado 3 [3 puntos].**Opción 1.**

En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

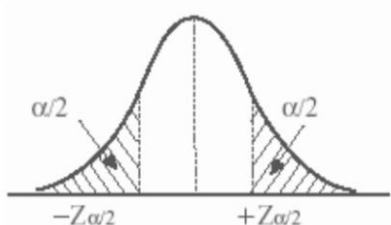
X = el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico (en minutos).

$X = N(\mu, 25)$

Tamaño de muestra = $n = 100$. Media muestral = $\bar{x} = 180$ minutos.

3.1A Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5388	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.525 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (180 - 4.525, 180 + 4.525) = (175.475, 184.525)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 97.5% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,6
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,7
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,8
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,9
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	1,0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	1,1
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	1,2
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	1,3
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	1,4
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	1,5
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	1,6
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	1,7
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	1,8
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	1,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	2,0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	2,1
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	2,2
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	2,3
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	2,4
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	2,5
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	2,6
2,2	0,9871	0,9874	0,9878	0,9881	0,9884	2,7
2,3	0,9915	0,9918	0,9921	0,9924	0,9927	2,8

Igualamos el error a 5 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 2.24 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 56 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{56}{5} \Rightarrow n = \left(\frac{56}{5}\right)^2 = 125.44$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 126 estudiantes.

Opción 2.

En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado.

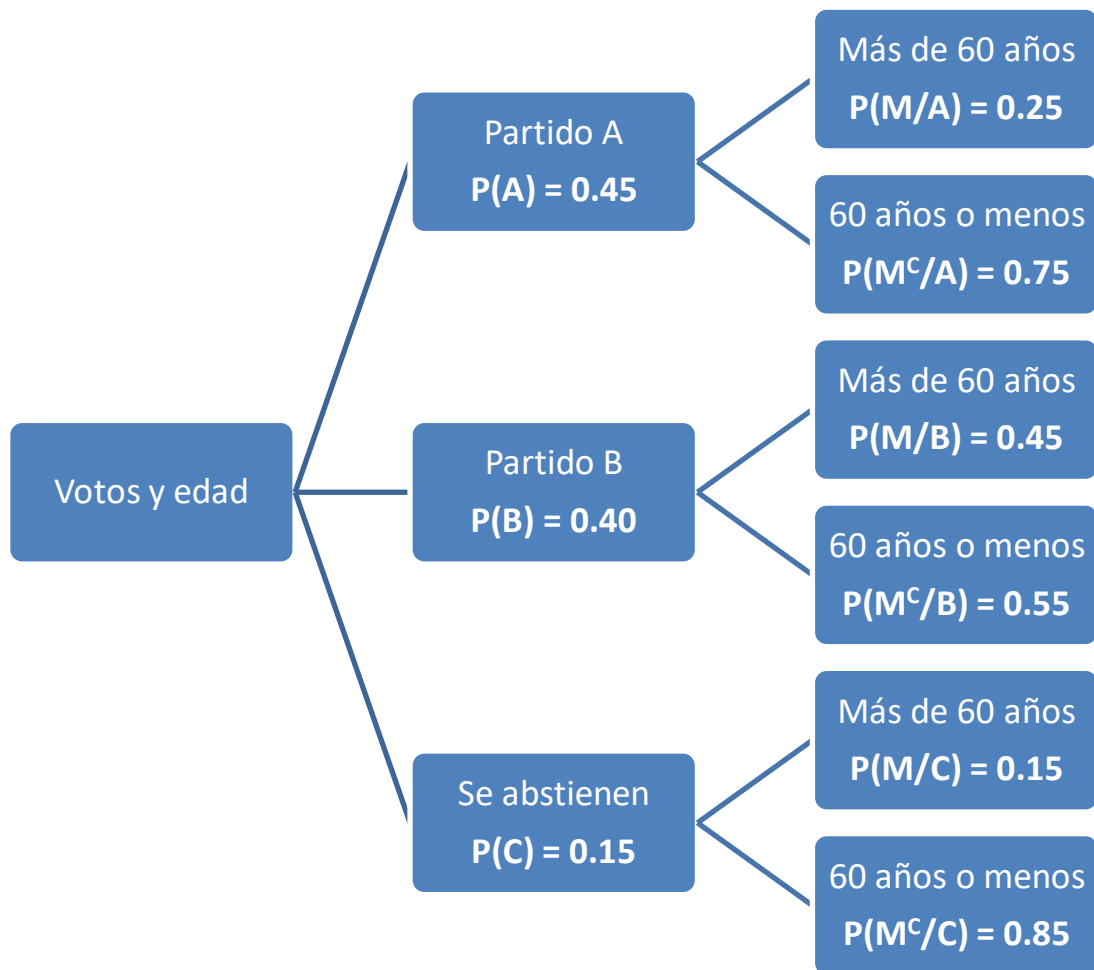
Realice las siguientes tareas que se plantean:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



3.2A Nos piden calcular $P(B \cap M^c)$.

$$P(B \cap M^c) = P(B)P(M^c / B) = 0.4 \cdot 0.55 = \boxed{0.22}$$

3.2B Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A)P(M / A) + P(B)P(M / B) + P(C)P(M / C) = \\ &= 0.45 \cdot 0.25 + 0.40 \cdot 0.45 + 0.15 \cdot 0.15 = \boxed{0.315} \end{aligned}$$

3.2C Nos piden calcular $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M/C)}{P(M)} = \frac{0.15 \cdot 0.15}{0.315} = \boxed{\frac{1}{14} \approx 0.0714}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a absolutos suponiendo que hay una población de 400 personas (elijo esta cifra para que los cálculos salgan exactos, de no conseguirlo la cambio por otra).

El 45 % votan al partido A, esto significa que el partido A tiene $0.45 \cdot 400 = 180$ votantes.

El 40 % votan al partido B, esto significa que $0.4 \cdot 400 = 160$ personas votan a B.

El resto se abstiene, es decir, $400 - 180 - 160 = 60$ personas se abstienen.

El 25 % de los votantes de A son mayores de 60 años, es decir, $0.25 \cdot 180 = 45$ personas son mayores de 60 años y votantes del partido A.

El 45 % de los votantes de B son mayores de 60 años, es decir, $0.45 \cdot 160 = 72$ personas son mayores de 60 años y votantes del partido B.

El 15% de las personas que se abstienen son mayores de 60 años, es decir, $0.15 \cdot 60 = 9$ personas son mayores de 60 años y se abstienen.

Ponemos todos estos datos en una tabla para tenerlos mejor ordenados y claros.

	Mayores de 60 años	60 años o menos	TOTALES
Partido A	45		180
Partido B	72		160
Abstención	9		60
TOTALES			400

Completamos la tabla.

	Mayores de 60 años	60 años o menos	TOTALES
Partido A	45	135	180
Partido B	72	88	160
Abstención	9	51	60
TOTALES	126	274	400

Aplicando la regla de Laplace respondemos a las cuestiones planteadas.

Tarea 3.2A. Hay 88 personas que votan al partido B y que son menores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar vote al partido B y tenga como máximo 60 años vale $\frac{88}{400} = 0.22$.

Tarea 3.2B. De las 400 habitantes 126 son mayores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar sea mayor de 60 años vale $\frac{126}{400} = 0.315$.

Tarea 3.2C. Hay 126 habitantes mayores de 60 años y de estos 9 se abstuvieron. Si la persona elegida al azar es mayor de 60 años, la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones vale $\frac{9}{126} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$.

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD****JULIO 2024****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II****INDICACIONES**

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

- A. [0,9 PUNTOS]** Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
- B. [0,8 PUNTOS]** Analice la compatibilidad de dicho sistema.
- C. [0,8 PUNTOS]** Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

- A. [0,75 PUNTOS]** Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO]** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS]** ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?
- D. [0,25 PUNTOS]** ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- A. [0,5 PUNTOS]** Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [1 PUNTO]** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- C. [1 PUNTO]** Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$

- A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua $f(x)$? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
- B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.
- C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de $f(x)$, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

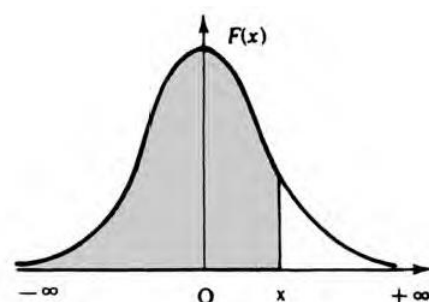
- A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?
- D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES**Ejercicio 1** [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de banderas, “y” al número de camisetas y “z” al número de gorras.

“El presupuesto es de 500 €” $\rightarrow 5x + 6y + 2z = 500$.

“La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras” $\rightarrow y = \frac{z}{2}$.

“La suma de banderas y camisetas debe ser 70” $\rightarrow x + y = 70$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo ordenamos.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y + 2z = 500 \\ y = \frac{z}{2} \rightarrow 2y = z \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 6y + 2z = 500 \\ 2y - z = 0 \\ x + y = 70 \end{array} \right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y + 2z = 500 \\ 2y - z = 0 \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 5 = -5 \neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y + 2z = 500 \\ 2y - z = 0 \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 6y + 2z = 500 \\ 2y = z \\ x = 70 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 5(70 - y) + 6y + 2(2y) = 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 350 - 5y + 6y + 4y = 500 \Rightarrow 5y = 150 \Rightarrow \boxed{y = 30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 70 - 30 = 40} \\ \boxed{z = 2 \cdot 30 = 60} \end{cases}$$

Deben comprarse 40 banderas, 30 camisetas y 60 gorras si se pretende agotar el presupuesto disponible.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.
B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos “x” = número de menús A e “y” = número de menús B.
 Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Horas	Beneficio
Nº menús A (x)	$2x$	$50x$
Nº menús B (y)	$3y$	$70y$
TOTAL	$2x + 3y$	$50x + 70y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 50x + 70y$$

Las restricciones son:

“La empresa quiere preparar al menos 15 menús” $\rightarrow x + y \geq 15$

“No quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B” $\rightarrow x \leq \frac{y}{2}$.

“Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús” $\rightarrow 2x + 3y \leq 96$

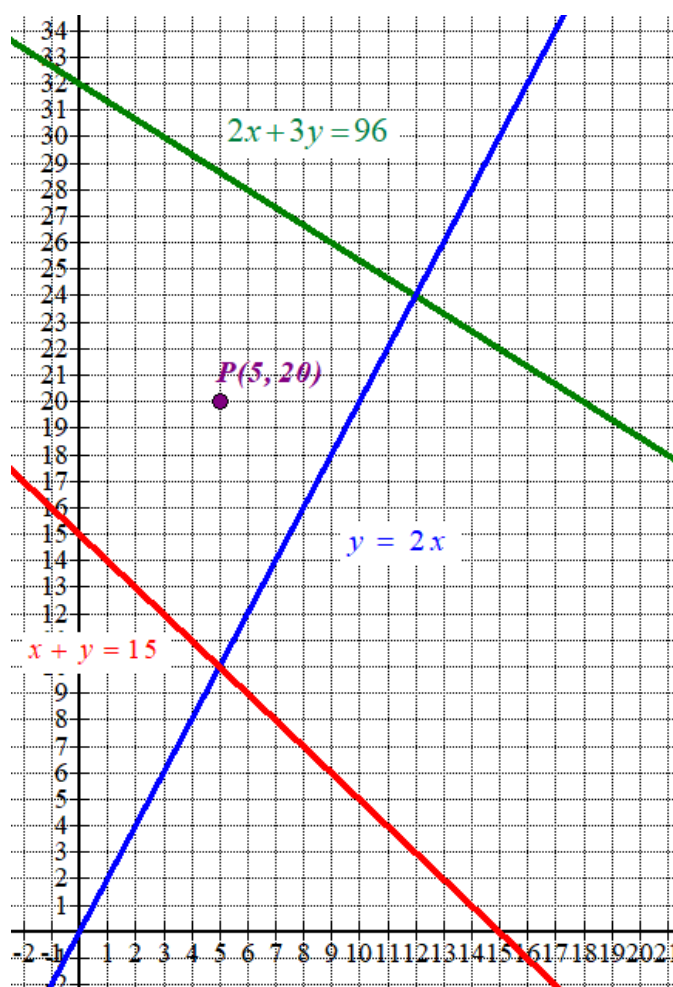
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ x \leq \frac{y}{2} \\ 2x + 3y \leq 96 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ 2x \leq y \\ 2x + 3y \leq 96 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 15$	$y = 2x$	$2x + 3y = 96$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 15 - x$	$x \mid y = 2x$	$x \mid y = \frac{96 - 2x}{3}$	Primer cuadrante
0 $\mid$ 15	0 $\mid$ 0	0 $\mid$ 32	
5 $\mid$ 10	5 $\mid$ 10	12 $\mid$ 24	
15 $\mid$ 0	12 $\mid$ 24	48 $\mid$ 0	



Como las restricciones del problema son

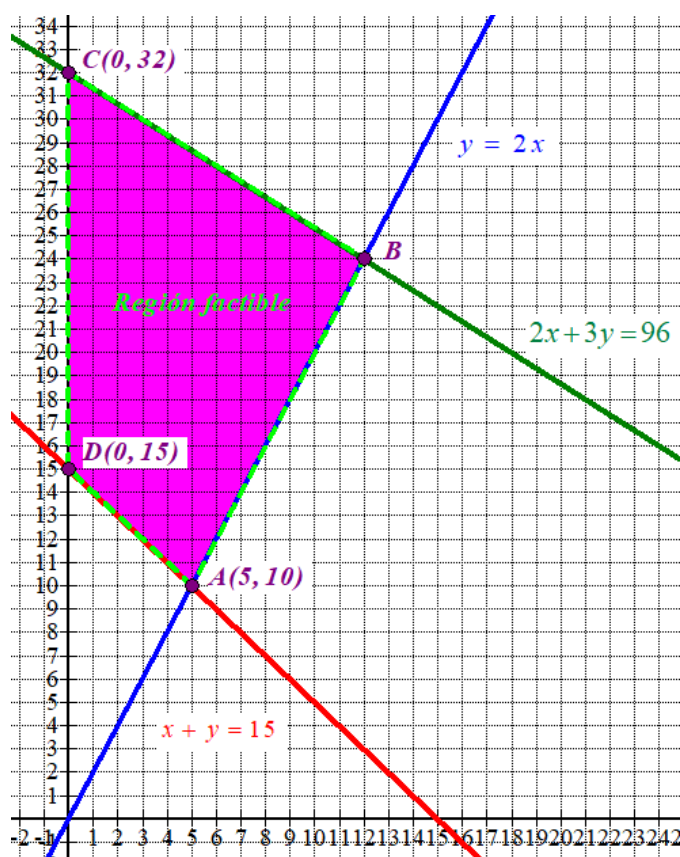
$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ 2x \leq y \\ 2x + 3y \leq 96 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta verde y por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(5, 20)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 20 \geq 15 \\ 2 \cdot 5 \leq 20 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 \leq 96 \\ 5 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice B.

$$B \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 96 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x + 6x = 96 \Rightarrow 8x = 96 \Rightarrow x = \frac{96}{8} = 12 \Rightarrow y = 24 \Rightarrow B(12, 24)$$

Los vértices son A(5, 10); B(12, 24); C(0, 32) y D(0, 15).

C. Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 50x + 70y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(5, 10) \rightarrow B(5, 10) = 50 \cdot 5 + 70 \cdot 10 = 950$$

$$B(12, 24) \rightarrow B(12, 24) = 50 \cdot 12 + 70 \cdot 24 = 2280 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(0, 32) \rightarrow B(0, 32) = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 32 = 2240$$

$$D(0, 15) \rightarrow B(0, 15) = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 15 = 1050$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice B(12, 24). Se deben cocinar 12 menús A y 24 menús B para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 2280 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{A(0,2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow \boxed{B(1,0)} \\ x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \rightarrow \boxed{C(-2,0)} \end{cases} \end{array} \right.$$

Hay tres puntos de corte: A(0,2), B(1, 0) y C(-2, 0).

B. Utilizamos la derivada de la función para determinar sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

C. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

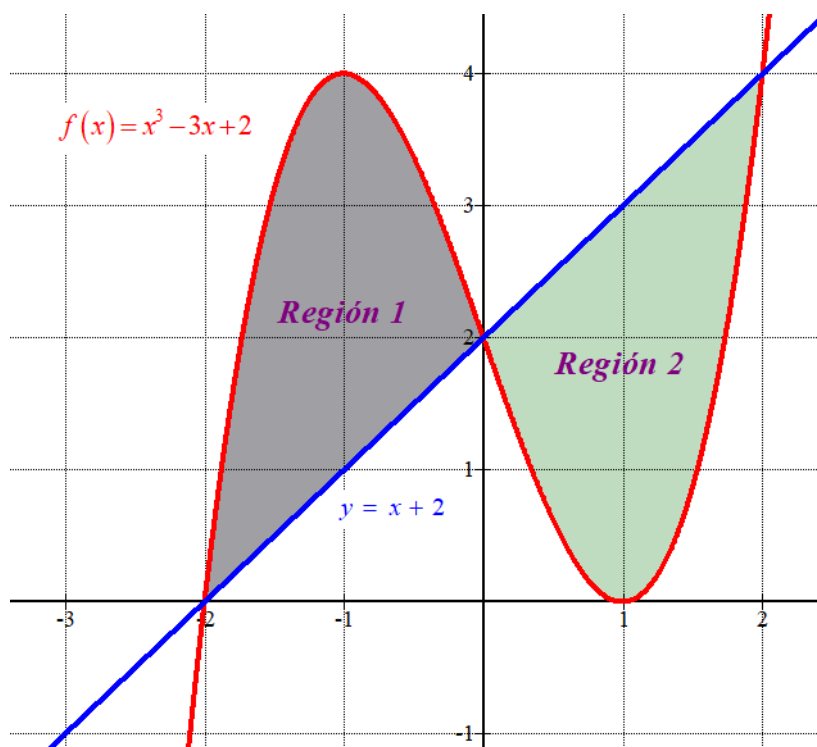
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de la curva y la recta.

x	$y = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4

x	$y = x + 2$
-2	0
0	2
2	4



Hallamos el área de la región 1.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-2}^0 x^3 - 3x + 2 - (x + 2) dx = \int_{-2}^0 x^3 - 3x + 2 - x - 2 dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right] = -4 + 8 = 4 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

El área de la región 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

Hallamos el área de la región 2.

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \int_0^2 x + 2 - (x^3 - 3x + 2) dx = \int_0^2 x + 2 - x^3 + 3x - 2 - x - 2 dx = \int_0^2 -x^3 + 4x dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \left[-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^2 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2 \cdot 0^2 \right] = -4 + 8 = 4 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

El área de la región 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

El área de la región limitada por la curva y la recta tiene un valor de $4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$

- A.** [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua $f(x)$? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
- B.** [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.
- C.** [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de $f(x)$, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y en $x = 1$.

Calculamos los límites de la función en dichos valores.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^2 - 2(-1) - 3}{(-1)^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2(-1) - 2}{2(-1)} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 - 3}{1^2 - 1} = \frac{-4}{0} = \infty$$

La función presenta una discontinuidad evitable en $x = -1$ y una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 1$.

B. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

$x = -1$ no es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

C. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

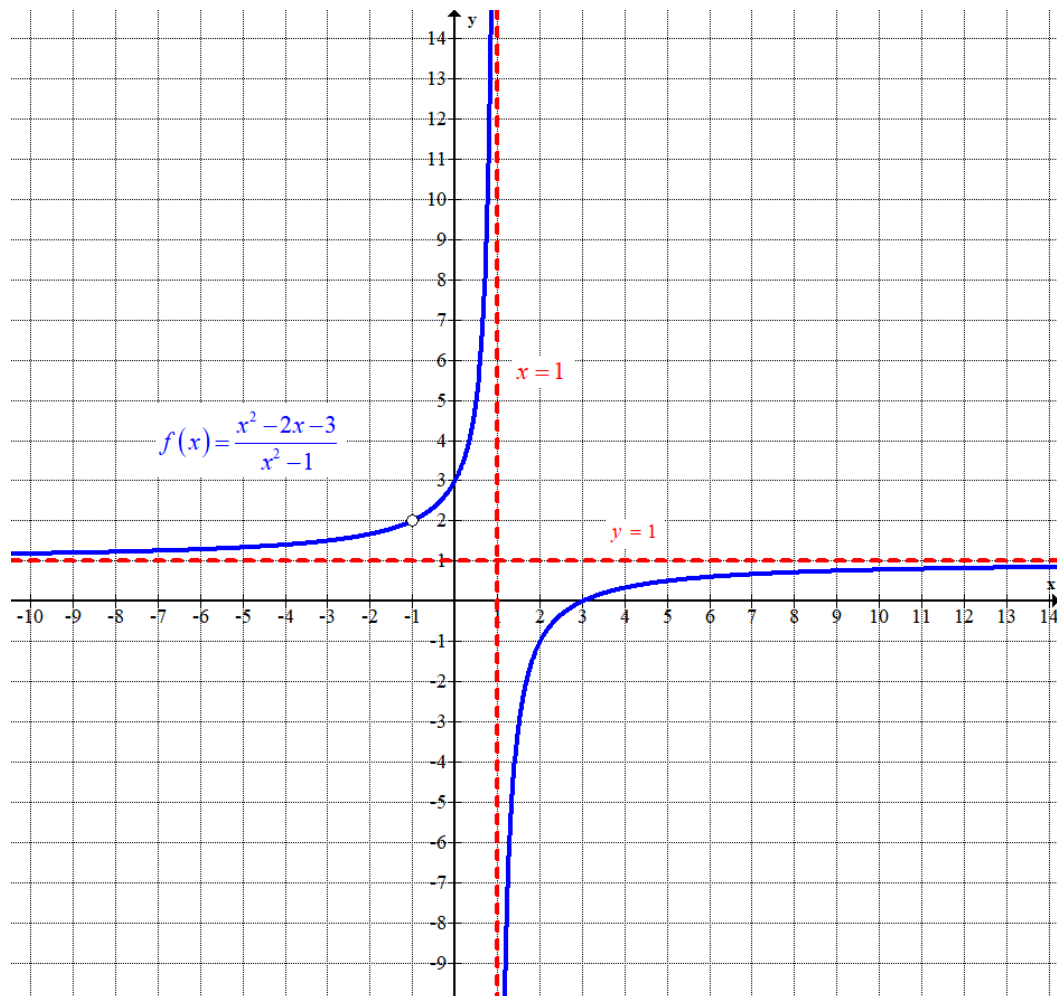
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 - 3}{0^2 - 1} = 3 \Rightarrow \boxed{A(0,3)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \rightarrow \boxed{B(3,0)} \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \text{ No pertenece al dominio} \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: A(0,3) y B(3, 0).

Con la información obtenida dibujamos la gráfica de la función.



Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

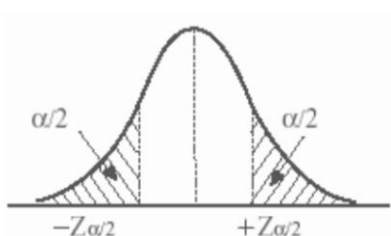
- A.** [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.
- B.** [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

X = el porcentaje de cafeína por lata. $X = N(\mu, 0.45)$

Tamaño de muestra = $n = 120$. $\bar{x} = 8.75$ %.

- A.** Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.52
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.56
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.60
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.64
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.68
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.71
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.74
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.77
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.80
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.83
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.85
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.87
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.89
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.91
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.92
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.94
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.95
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.96
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.96
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.97

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{120}} \approx 0.08 \%$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (8.75 - 0.08, 8.75 + 0.08) = (8.67, 8.83)$$

- B.** Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Igualemos el error a 0.1 %.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.17 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.17 \cdot 0.45 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.9765}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{0.9765}{0.1} \right)^2 \approx 95.35$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 96 latas.

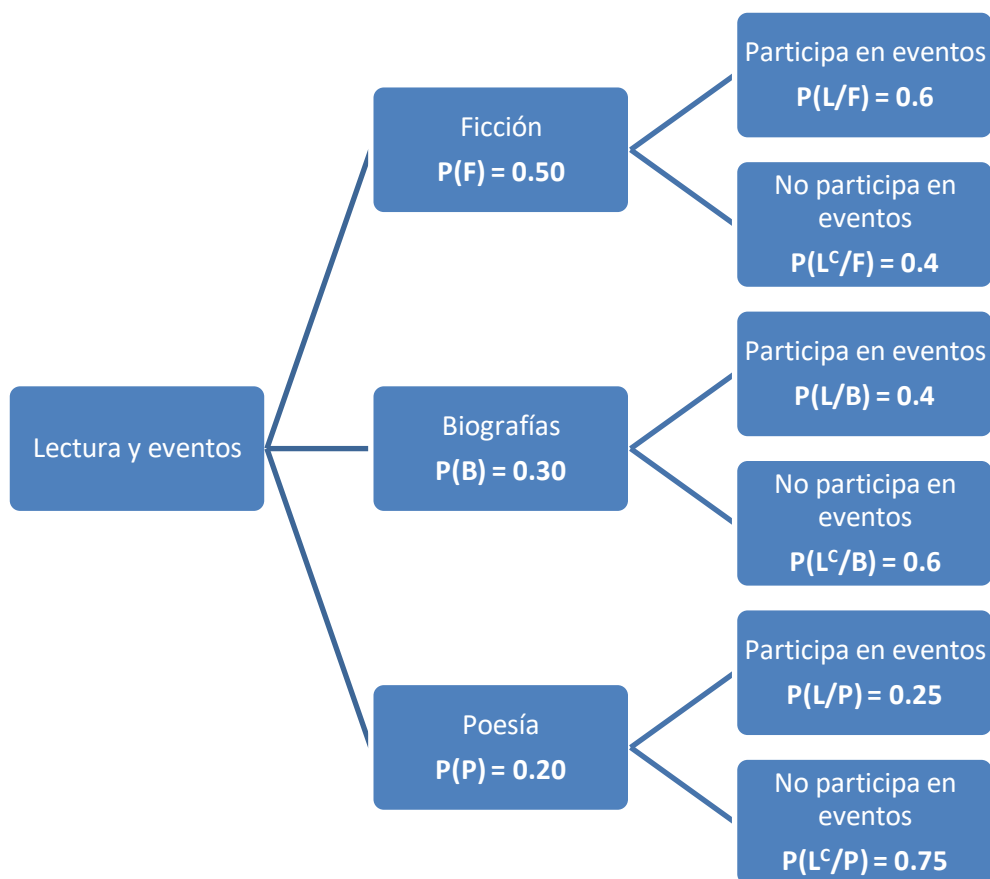
Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?
- D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

Llamamos F al suceso “el lector prefiere libros de ficción”, B al suceso “el lector prefiere libros de biografías”, P al suceso “el lector prefiere libros de poesía” y L al suceso “el lector participa en eventos de lectura”.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



- A. Nos piden calcular $P(F \cap L)$.

$$P(F \cap L) = P(F)P(L/F) = 0.5 \cdot 0.6 = \boxed{0.3}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura es de 0.3.

B. Nos piden calcular $P(P \cap L^c)$.

$$P(P \cap L^c) = P(P)P(L^c / P) = 0.2 \cdot 0.75 = \boxed{0.15}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura es de 0.15.

C. Nos piden calcular $P(L)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(L) &= P(F)P(L / F) + P(B)P(L / B) + P(P)P(L / P) = \\ &= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.25 = \boxed{0.17} \end{aligned}$$

La probabilidad de que participe en eventos de lectura es de 0.17.

D. Nos piden calcular $P(F / L^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(F / L^c) &= \frac{P(F \cap L^c)}{P(L^c)} = \frac{P(F)P(L^c / F)}{P(F)P(L^c / F) + P(B)P(L^c / B) + P(P)P(L^c / P)} = \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.75} = \boxed{\frac{20}{53} \approx 0.3774} \end{aligned}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción sabiendo que no participa en eventos de lectura tiene un valor aproximado de 0.3774.

JUNIO 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

- A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
- B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
- C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

- A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
- D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3x + 5, & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{x-b}{x^2+1}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.
- B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x) dx$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2}$

- A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
- C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

- A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
- D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

- A. [0,9 PUNTOS]** Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

- A.** Llamamos “x” al precio del kilo de tierra en el proveedor A, “y” al precio del kilo de piedras decorativas en el proveedor A y “z” al precio del kilo de semillas.

“El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €” $\rightarrow 300x + 200y + 100z = 13000$

“El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio

total ofrecido por el proveedor A” $\rightarrow 300 \frac{x}{3} + 200 \frac{y}{2} + 100 \frac{z}{5} = 13000 - 8800 \rightarrow$

$$100x + 100y + 20z = 4200.$$

“Para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas” $\rightarrow z = 2(x + y).$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left. \begin{array}{l} 300x + 200y + 100z = 13000 \\ 100x + 100y + 20z = 4200 \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\}$$

- B.** Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 4 - 10 + 10 - 10 + 6 = 7 \neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

- C.** Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 2x + 2y = 130 \\ 5x + 5y + 2x + 2y = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 130 \\ 7x + 7y = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 130 \\ x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 130 \\ y = 30 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 4(30 - x) = 130 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 120 - 4x = 130 \Rightarrow \boxed{x = 10} \Rightarrow \boxed{y = 30 - 10 = 20} \Rightarrow \boxed{z = 20 + 40 = 60}$$

El precio de 1 kilo de tierra es 10 €, el kilo de piedras a 20 € y el de semillas a 60 €.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.

Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B.** [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C.** [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
- D.** [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

- A.** Llamamos "x" = número de guías prácticas que publica la editorial e "y" = número de libros de cocina que publica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de papel reciclado	Gramos de papel de bambú	Beneficio
Nº guías prácticas (x)	60x	20x	5x
Nº libros de cocina (y)	70y	10y	4y
TOTAL	60x + 70y	20x + 10y	5x + 4y

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio: $B(x, y) = 5x + 4y$

Las restricciones son:

"La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción" $\rightarrow 60x + 70y \leq 4000$; $20x + 10y \leq 800$

"La editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana" $\rightarrow y \geq 10$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- B.** Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 80$

$6x + 7y = 400$

$y = 10$

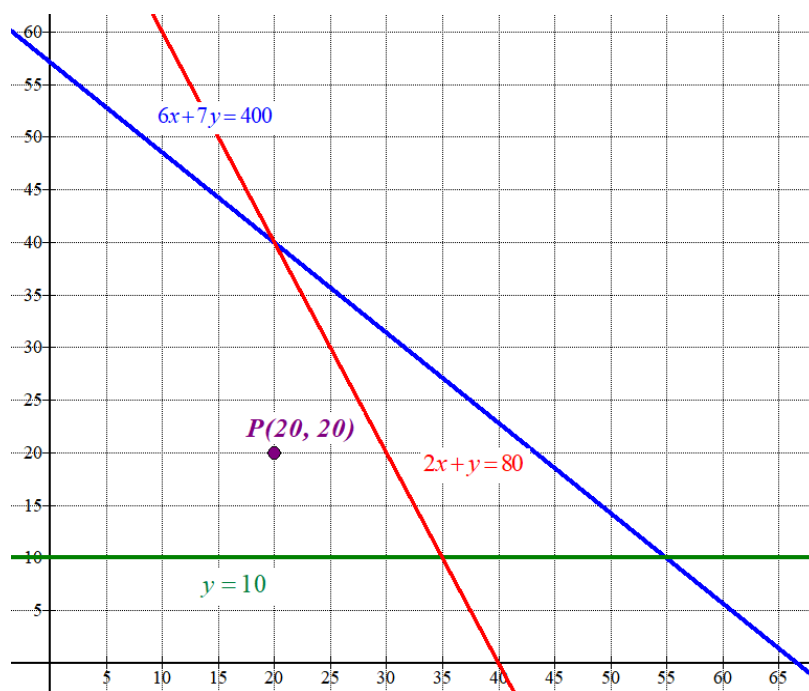
$x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = 80 - 2x$
0	80
20	40
35	10

x	$y = \frac{400 - 6x}{7}$
0	$400 / 7$
20	40
60	$40 / 7$

x	$y = 10$
0	10
35	10

Primer
cuadrante



Como las restricciones del problema son

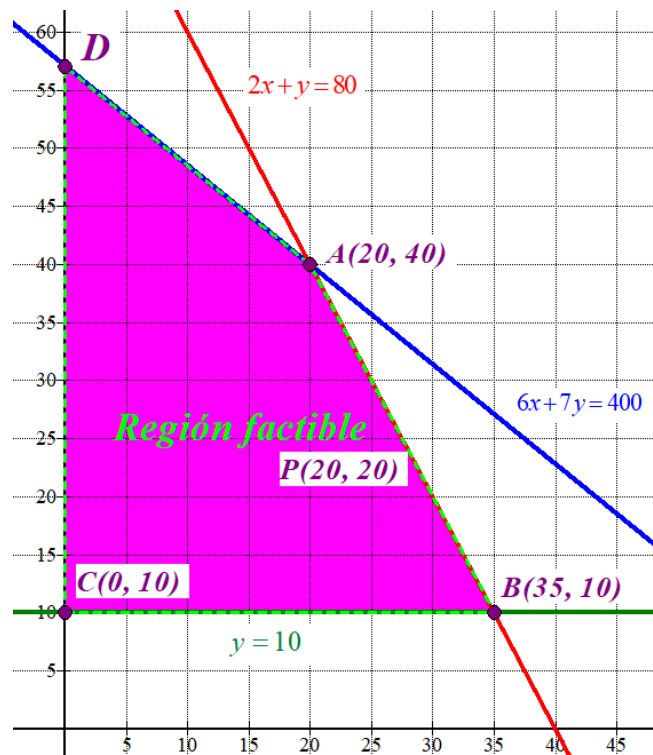
$$\left. \begin{array}{l} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 \leq 400 \\ 2 \cdot 20 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 7y = 400 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 7y = 400 \Rightarrow y = \frac{400}{7} \Rightarrow D\left(0, \frac{400}{7}\right)$$

Los vértices son $A(20, 40)$; $B(35, 10)$; $C(0, 10)$ y $D\left(0, \frac{400}{7}\right)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 5x + 4y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(20, 40) \rightarrow B(20, 40) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 40 = 260 \text{ ¡Máximo!}$$

$$B(35, 10) \rightarrow B(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 215$$

$$C(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 40$$

$$D\left(0, \frac{400}{7}\right) \rightarrow B\left(0, \frac{400}{7}\right) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{400}{7} = 228.57$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $A(20, 40)$. Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 260 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3x + 5, & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{x-b}{x^2+1}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x) dx$

A. La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= -a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} ax + 2 = -a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 3x + 5 = (-1)^2 - 3(-1) + 5 = 9 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + 2 = 9 \Rightarrow \boxed{-7 = a}$$

La función debe ser continua en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 3x + 5 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-b}{x^2+1} = \frac{3-b}{10} \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3-b}{10} = 5 \Rightarrow 3-b = 50 \Rightarrow \boxed{-47 = b}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = -7$ y $b = -47$.

B. En el intervalo $[0, 2]$ la función es $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 - 3x + 5 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 5 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2}{2} + 5 \cdot 0 \right] = \frac{8}{3} - 6 + 10 = \boxed{\frac{20}{3} \approx 6.67} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.

C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow A(-1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 2}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow B(0, -1)$$

Los puntos de corte con los ejes OX y OY son A(-1,0) y B(0,-1).

B. Como $x = 2$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \frac{2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 2}{2 - 2} = \frac{18}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{2 + \frac{4}{\infty} - \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{2 + \frac{4}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0} = 2 \end{aligned}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{2x^2} + 4x + 2 - \cancel{2x^2} + 4x}{x - 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{8 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{8 + 0}{1 - 0} = 8$$

La recta $y = 2x + 8$ es asíntota oblicua de la función.

C. Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x + 4)(x - 2) - 1 \cdot (2x^2 + 4x + 2)}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 8x + \cancel{4x} - 8 - 2x^2 - \cancel{4x} - 2}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 10}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 8x - 10}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = \boxed{5=x} \\ \frac{4-6}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos, incluyendo el valor excluido del dominio $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2 - 8(-2) - 10}{(-2 - 2)^2} = \frac{7}{8} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{2(0)^2 - 8(0) - 10}{(0 - 2)^2} = \frac{-10}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 2).$$

- En el intervalo $(2, 5)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{2(3)^2 - 8(3) - 10}{(3 - 2)^2} = -16 < 0. \text{ La función decrece en } (2, 5).$$

- En el intervalo $(5, +\infty)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale

$$f'(6) = \frac{2(6)^2 - 8(6) - 10}{(6 - 2)^2} = \frac{14}{16} > 0. \text{ La función crece en } (5, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2) \cup (2, 5)$.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

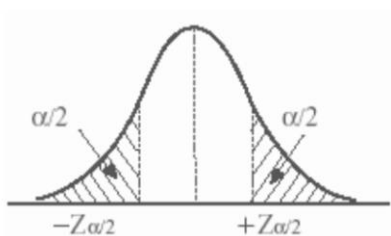
- A.** [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
- B.** [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

X = el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen (en minutos). $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de muestra = $n = 100$. $\bar{x} = 90$ minutos.

- A.** Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.81 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (90 - 1.81, 90 + 1.81) = (88.19, 91.81)$$

- B.** Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Igualemos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

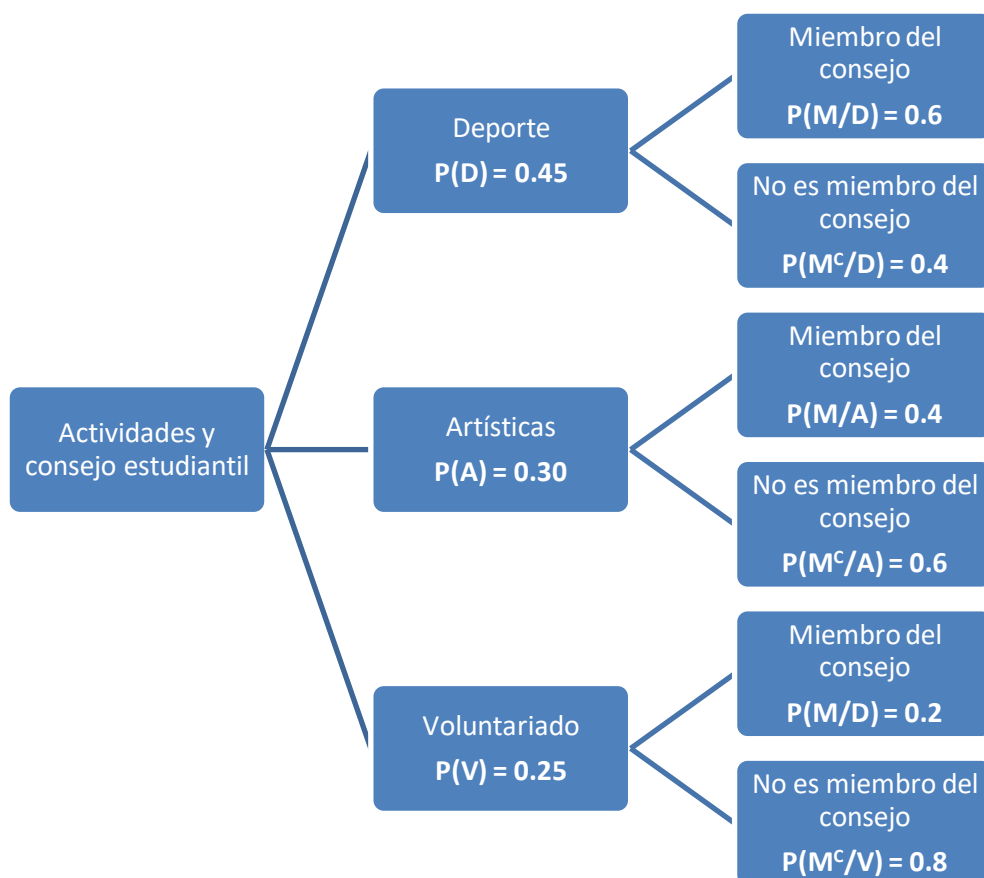
Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
- D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Llamamos D al suceso “el estudiante practica algún deporte”, A al suceso “el estudiante participa en actividades artísticas”, V al suceso “el estudiante participa en actividades de voluntariado” y M al suceso “el estudiante es miembro del consejo estudiantil”.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



- A. Nos piden calcular $P(D \cap M)$.

$$P(D \cap M) = P(D)P(M / D) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

La probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil es de 0.27.

- B. Nos piden calcular $P(A \cap M^c)$.

$$P(A \cap M^c) = P(A)P(M^c / A) = 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.18}$$

La probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil es de 0.18

C. Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(D \cap M) + P(A \cap M) + P(V \cap M) = \\ &= P(D)P(M / D) + P(A)P(M / A) + P(V)P(M / V) = \\ &= 0.45 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 = \boxed{0.44} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil es de 0.44.

D. Nos piden calcular $P(V / M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(V / M^c) &= \frac{P(V \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(V)P(M^c / V)}{P(D)P(M^c / D) + P(A)P(M^c / A) + P(V)P(M^c / V)} = \\ &= \frac{0.25 \cdot 0.8}{0.45 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.8} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571} \end{aligned}$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

- A. [1,25 PUNTOS]** Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.
- B. [1,25 PUNTOS]** Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

- A. [0,75 PUNTOS]** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO]** Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS]** ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?
- D. [0,25 PUNTOS]** ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

- A. [0,5 PUNTOS]** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
- B. [0,5 PUNTOS]** ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
- C. [0,5 PUNTOS]** Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g .
- D. [1 PUNTO]** Calcule el área de la región que queda encerrada entre f y g .

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

- A. [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0, 6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?
- B. [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

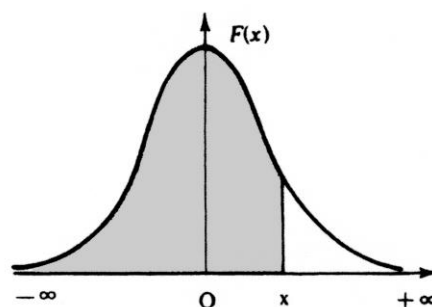
- A. [1,25 PUNTOS] Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años, 9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.
- B. [1,25 PUNTOS] En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?
- D. [0,75 PUNTOS] Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES**Ejercicio 1** [2,5 PUNTOS]

Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de operarios, “y” al número de supervisores, “z” al número de gerentes.

“Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes” $\rightarrow$
 $x + y + z = 244$

“El número de operarios ocho veces el de gerentes” $\rightarrow x = 8z$

“Un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron” $\rightarrow$
 “Quedaron la mitad de los supervisores y el 40 % de los gerentes. No faltó ningún operario”
 $\rightarrow x = 4\left(\frac{y}{2} + 0.4 \cdot z\right)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 244 \\ x = 4\left(\frac{y}{2} + 0.4 \cdot z\right) \\ x = 8z \end{array} \right\}$$

B. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 244 \\ x = 4\left(\frac{y}{2} + 0.4 \cdot z\right) \\ x = 8z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 244 \\ x = 2y + 1.6z \\ x = 8z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8z + y + z = 244 \\ 8z = 2y + 1.6z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 9z = 244 \\ 6.4z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 9z = 244 \\ 3.2z = y \end{array} \right\} \Rightarrow 3.2z + 9z = 244 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12.2z = 244 \Rightarrow \boxed{z = \frac{244}{12.2} = 20} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 3.2 \cdot 20 = 64} \\ \boxed{x = 8 \cdot 20 = 160} \end{array} \right.$$

La empresa tiene 160 operarios, 64 supervisores y 20 gerentes.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B.** [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
- C.** [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?
- D.** [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos x = número de utilitarios, y = número de deportivos.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 25000x + 40000y$$

Las restricciones son:

“Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos” $\rightarrow x + y \leq 120$

“Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos” $\rightarrow$
 $x \leq 90; y \geq 10$

“El número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos” $\rightarrow x \geq 2y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 90; y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 120$	$x = 2y$	$y = 10$	$x = 90$	$x \geq 0; y \geq 0$																												
<table><tr><th>x</th><th>$y = 120 - x$</th></tr><tr><td>0</td><td>120</td></tr><tr><td>80</td><td>40</td></tr><tr><td>90</td><td>30</td></tr></table>	x	$y = 120 - x$	0	120	80	40	90	30	<table><tr><th>x</th><th>$y = \frac{x}{2}$</th></tr><tr><td>20</td><td>10</td></tr><tr><td>80</td><td>40</td></tr><tr><td>100</td><td>50</td></tr></table>	x	$y = \frac{x}{2}$	20	10	80	40	100	50	<table><tr><th>x</th><th>$y = 10$</th></tr><tr><td>20</td><td>10</td></tr><tr><td>90</td><td>10</td></tr></table>	x	$y = 10$	20	10	90	10	<table><tr><th>$x = 90$</th><th>y</th></tr><tr><td>90</td><td>10</td></tr><tr><td>90</td><td>20</td></tr></table>	$x = 90$	y	90	10	90	20	Primer cuadrante
x	$y = 120 - x$																															
0	120																															
80	40																															
90	30																															
x	$y = \frac{x}{2}$																															
20	10																															
80	40																															
100	50																															
x	$y = 10$																															
20	10																															
90	10																															
$x = 90$	y																															
90	10																															
90	20																															



Como las restricciones del problema son

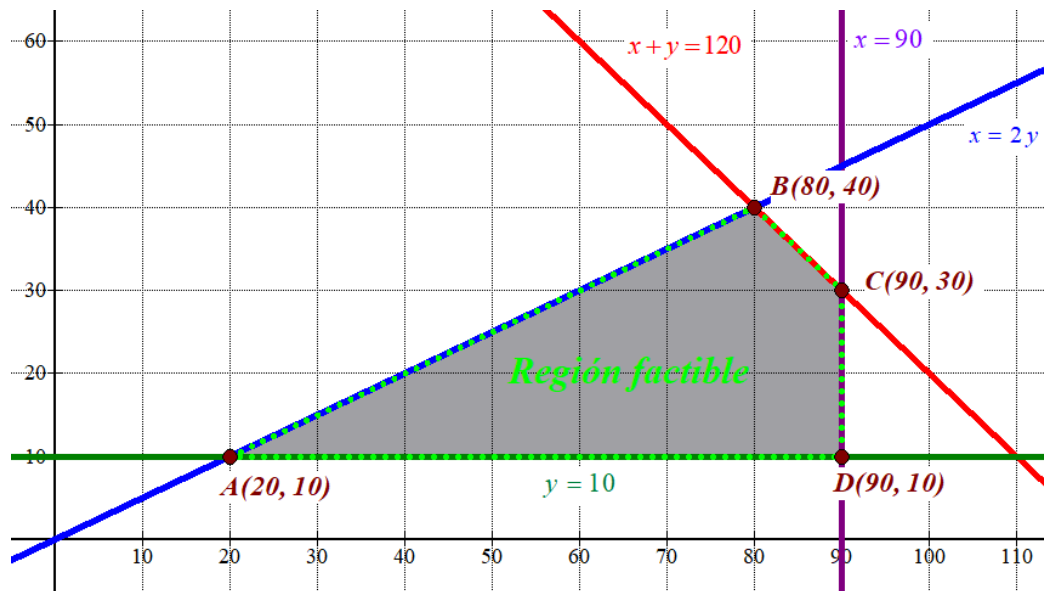
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 90; y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical violeta.

Comprobamos que el punto $P(70, 20)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 70 + 20 \leq 120 \\ 70 \leq 90; 20 \geq 10 \\ 70 \geq 2 \cdot 20 \\ 70 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(20, 10)$; $B(80, 40)$; $C(90, 30)$ y $D(90, 10)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 25000x + 40000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(20, 10) \rightarrow B(20, 10) = 500000 + 400000 = 900.000$$

$$B(80, 40) \rightarrow B(80, 40) = 2000000 + 1600000 = 3.600.000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(90, 30) \rightarrow B(90, 30) = 2250000 + 1200000 = 3.450.000$$

$$D(90, 10) \rightarrow B(90, 10) = 2250000 + 400000 = 2.650.000$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $B(80, 40)$. Se deben comprar 80 utilitarios y 40 deportivos para obtener un beneficio máximo.

D. El beneficio máximo que se puede obtener es de 3.600.000 euros.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

- A.** [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g .
D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre f y g .

A. Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 6 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Averiguamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $(-\infty, 3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 6 > 0$. La función $f(x)$ crece en $(-\infty, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = -8 + 6 = -2 < 0$. La función $f(x)$ decrece en $(3, +\infty)$.

La función $f(x) = -x^2 + 6x$ crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$.

Repetimos este estudio para la función $g(x) = x^2 - 2x$.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 2x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

Averiguamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = -2 < 0$. La función $g(x)$ decrece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $g'(2) = 4 - 2 = 2 > 0$. La función $g(x)$ crece en $(1, +\infty)$.

La función $g(x) = x^2 - 2x$ decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

B. La función $f(x) = -x^2 + 6x$ crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$, por lo tanto en $x = 3$ hay un máximo relativo y absoluto de la función $f(x)$.

La función $g(x) = x^2 - 2x$ decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$, por lo tanto en $x = 1$ hay un mínimo relativo y absoluto de la función $g(x)$.

C. Hallamos los puntos de corte de las dos funciones con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 6x \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 6x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -x^2 + 6x \Rightarrow -x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow \boxed{B(6,0)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 2x \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 2x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = x^2 - 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 6x \\ g(x) = x^2 - 2x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 6x = x^2 - 2x \Rightarrow 0 = 2x^2 - 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow g(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow g(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow \boxed{D(4,8)} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las dos gráficas.

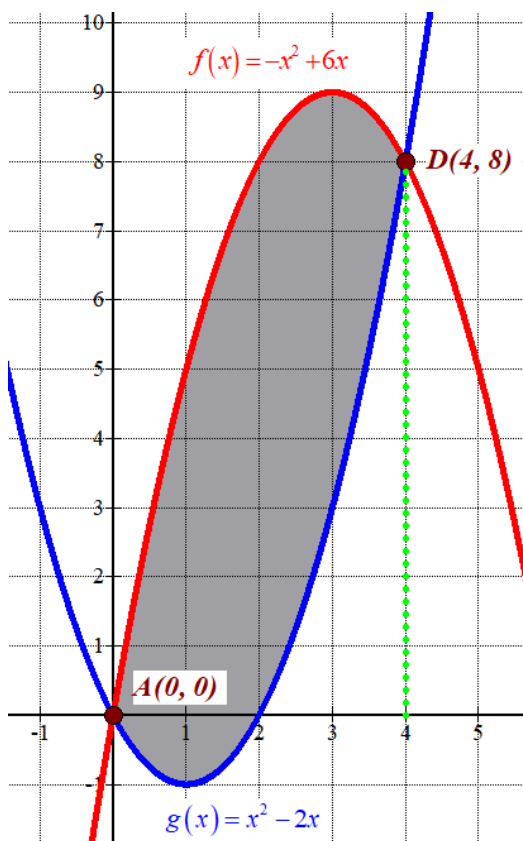
x	$y = x^2 - 2x$
0	0
2	0
4	8
6	24

x	$y = -x^2 + 6x$
0	0
2	8
4	8
6	0



D. El área del recinto encerrado entre ambas gráficas es el valor de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 4$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 f(x) - g(x) dx = \int_0^4 (-x^2 + 6x) - (x^2 - 2x) dx = \\ &= \int_0^4 -x^2 + 6x - x^2 + 2x dx = \int_0^4 -2x^2 + 8x dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \\ &= \left[-2 \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[-2 \frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2 \right] = -\frac{128}{3} + 64 = \boxed{\frac{64}{3} \approx 21.33 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

- A.** [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0, 6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?
- B.** [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

A. Utilizamos la derivada de la función para obtener sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} P'(t) = 60t - 240 \\ P'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 60t - 240 = 0 \Rightarrow t - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

Sustituimos $t = 4$ en la segunda derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo relativo.

$$P''(t) = 60 \Rightarrow P''(4) = 60 > 0 \Rightarrow t = 4 \text{ es mínimo relativo}$$

Para $t = 4$ tenemos que $P(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 3000 = 2520 \text{ kg}$

El número mínimo de fruta se produce a las 4 horas de estar abierta la frutería, teniendo 2520 kg de fruta en dicho momento.

B. Obtenemos la expresión del beneficio como la diferencia entre los ingresos y los costes de producción.

Los costes de producir x pantalones es $C(x) = 120x + 700$.

Los ingresos por su venta son $P(x) = x(200 - x)$.

$$B(x) = P(x) - C(x) = x(200 - x) - (120x + 700) = 200x - x^2 - 120x - 700 = -x^2 + 80x - 700$$

Buscamos el máximo de la función beneficio usando la derivada primera y segunda.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 80 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 80 = 0 \Rightarrow x - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 40}$$

$$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(40) = -2 < 0 \Rightarrow x = 40 \text{ es máximo relativo}$$

Con la fabricación y venta de 40 pantalones se obtienen unos beneficios máximos.

Estos beneficios máximos tienen un valor de $B(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 700 = 900$ euros.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

- A.** [1,25 PUNTOS] Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años, 9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.
- B.** [1,25 PUNTOS] En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

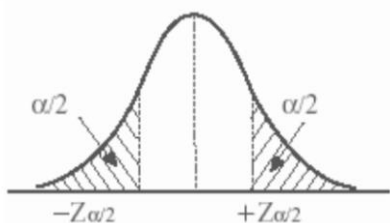
A. X = Tiempo de vida útil de un microondas (en años). $X = N(\mu, 3.2)$

Como el intervalo de confianza es (8.2, 9.4) sabemos que la media muestral es el valor central del intervalo y el error la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{8.2 + 9.4}{2} = 8.8 \qquad Error = \frac{9.4 - 8.2}{2} = 0.6$$

Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.6 = 1.96 \cdot \frac{3.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.6\sqrt{n} = 1.96 \cdot 3.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 3.2}{0.6} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 3.2}{0.6} \right)^2 \approx 109.27$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 110 microondas.

B. X = Tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad (en minutos). $X = N(\mu, 2)$

Tamaño de muestra = $n = 125$. $\bar{x} = 16$ minutos

Con un nivel de confianza del 97.5 %

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838
2.2	.9871	.9875	.9879	.9882	.9885
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{125}} \approx 0.4 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

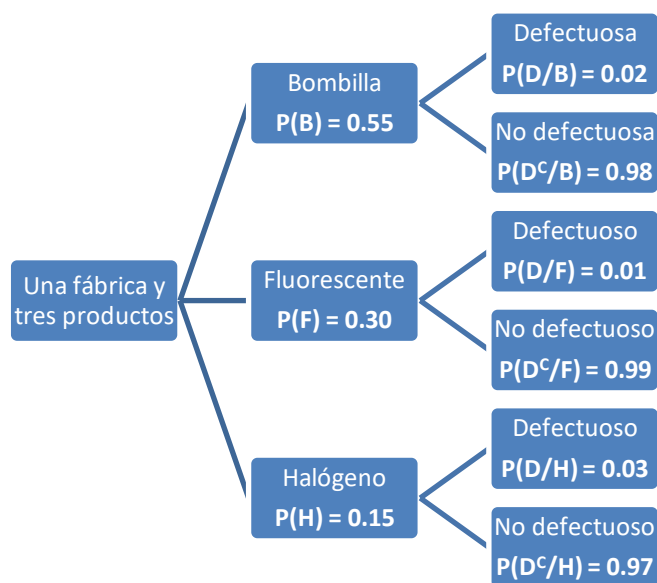
$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.4, 16 + 0.4) = (15.6, 16.4)$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?
- D. [0,75 PUNTOS] Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado B, F y H a los sucesos “ser bombilla”, “ser fluorescente” y “ser halógeno”. Llamamos D al suceso “ser defectuoso”.

- A. Nos piden calcular $P(F \cap D^c)$.

$$P(F \cap D^c) = P(F)P(D^c / F) = 0.30 \cdot 0.99 = \boxed{0.297}$$

- B. Nos piden calcular $P(B \cap D)$.

$$P(B \cap D) = P(B)P(D / B) = 0.55 \cdot 0.02 = \boxed{0.011}$$

- C. Nos piden calcular $P(D)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(B \cap D) + P(F \cap D) + P(H \cap D) = \\ &= P(B)P(D / B) + P(F)P(D / F) + P(H)P(D / H) = \\ &= 0.55 \cdot 0.02 + 0.30 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.03 = \boxed{0.0185} \end{aligned}$$

- D. Nos piden calcular $P(H / D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(H / D^c) = \frac{P(H \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(H)P(D^c / H)}{1 - P(D)} = \frac{0.15 \cdot 0.97}{1 - 0.0185} = \frac{291}{1963} \approx 0.1482$$

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD****LOMCE – JUNIO 2023****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II****INDICACIONES**

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

- A. [1,25 PUNTOS]** Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.
- B. [1,25 PUNTOS]** Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m³ de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m³ anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

- A. [0,75 PUNTOS]** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO]** Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS]** ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?
- D. [0,25 PUNTOS]** ¿A cuánto asciende dicha producción?
- .

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 & \text{si } 2 < x \leq 2.5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de sacos de cemento de 25 kg, “y” al número de sacos de cemento de 50 kg, “z” al número de sacos de cemento de 100 kg.

“Cierta día se vendió un total de 180 sacos” $\rightarrow x + y + z = 180$

“Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 €” $\rightarrow (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200$

“Ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg” $\rightarrow x = 2(y + z)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\}$$

B. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ 100x + 200y + 400z = 29200 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ \Rightarrow x + 2y + 4z = 292 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + y + z = 180 \\ 2y + 2z + 2y + 4z = 292 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 180 \\ 4y + 6z = 292 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 60 \rightarrow y = 60 - z \\ 2y + 3z = 146 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(60 - z) + 3z = 146 \Rightarrow 120 - 2z + 3z = 146 \Rightarrow \boxed{z = 26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 60 - 26 = 34} \Rightarrow \boxed{x = 68 + 52 = 120}$$

Se vendieron 120 sacos de 25 kg, 34 sacos de 50 kg y 26 sacos de 100 kg.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m³ de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m³ anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

- A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
 B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
 C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?
 D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

- A. Llamamos x = número de hectáreas para hortalizas, y = número de hectáreas para frutales. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	m ³ de agua	Inversión	Producción
Nº hectáreas para hortalizas (x)	$8x$	$400x$	$450x$
Nº hectáreas para frutales (y)	$4y$	$800y$	$600y$
TOTAL	$8x + 4y$	$400x + 800y$	$450x + 600y$

La función objetivo que deseamos maximizar es la producción $P(x, y) = 450x + 600y$.

Las restricciones son:

“El ayuntamiento dispone de 48000 €” $\rightarrow 400x + 800y \leq 48000$

“Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales” $\rightarrow x \leq 50; y \geq 10$

“Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego” $\rightarrow 8x + 4y \leq 480$

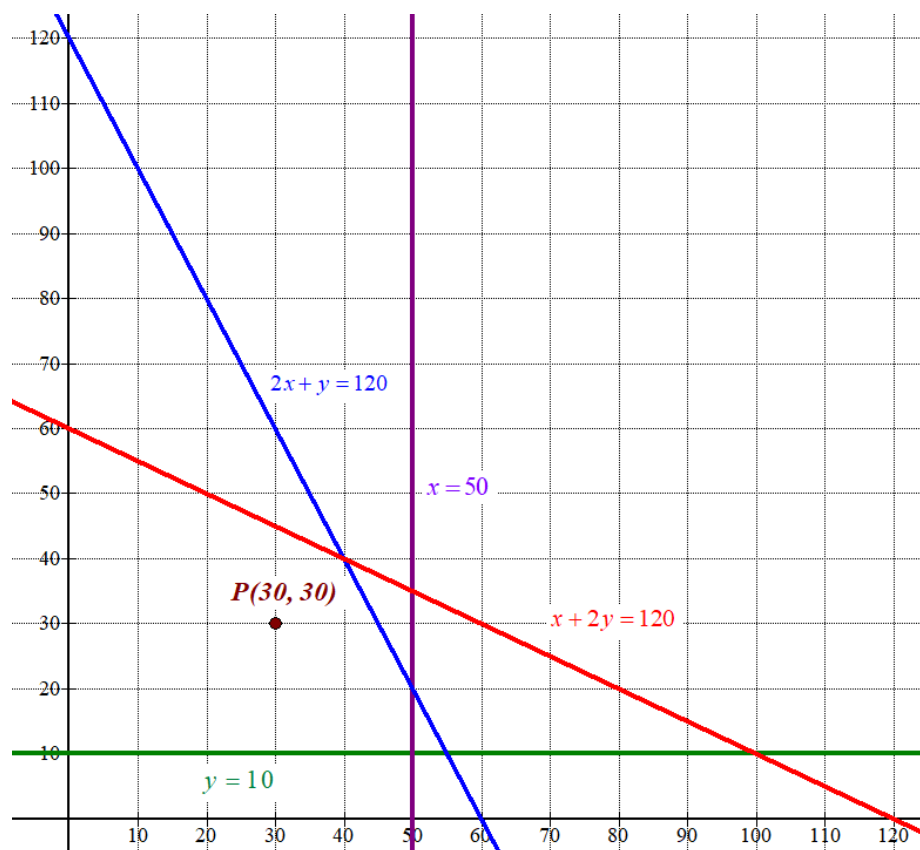
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 800y \leq 48000 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 8x + 4y \leq 480 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 120 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 2x + y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 120$		$2x + y = 120$		$y = 10$		$x = 50$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = \frac{120-x}{2}$	x	$y = 120-2x$	x	$y = 10$	$x = 50$	y	Primer cuadrante
0	60	0	120	0	10	50	10	
40	40	40	40	50	10	50	20	
100	10	50	20					



Como las restricciones del problema son

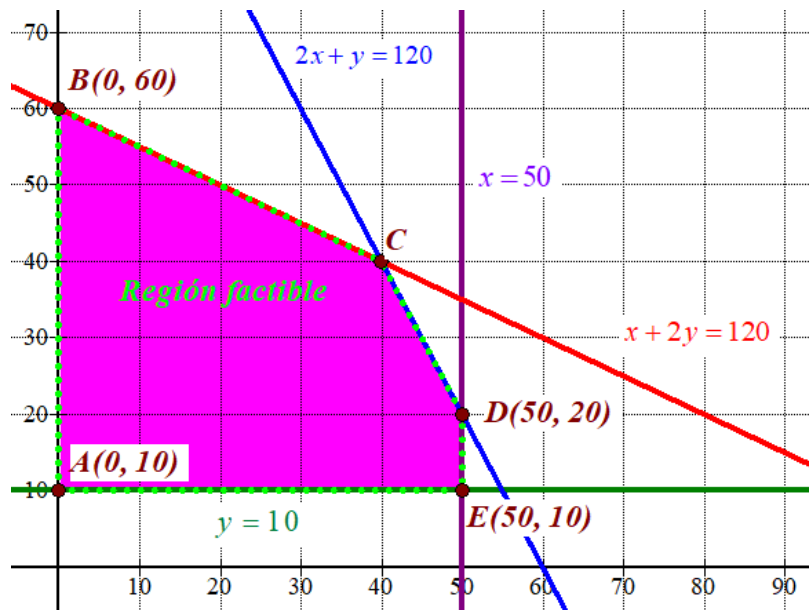
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 120 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 2x + y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical violeta.

Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 2 \cdot 30 \leq 120 \\ 30 \leq 50; 30 \geq 10 \\ 2 \cdot 30 + 30 \leq 120 \\ 30 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$\begin{aligned}
 C \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 120 \\ x + 2y = 120 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 120 - 2x \\ x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow x + 2(120 - 2x) = 120 \Rightarrow x + 240 - 4x = 120 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -3x = -120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow y = 120 - 80 = 40 \Rightarrow C(40, 40)
 \end{aligned}$$

Los vértices son A(0, 10); B(0, 60); C(40, 40), D(50, 20) y E(50, 10).

C. Valoramos la función objetivo $P(x, y) = 450x + 600y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow P(0, 10) = 6000$$

$$B(0, 60) \rightarrow P(0, 60) = 36000$$

$$C(40, 40) \rightarrow P(40, 40) = 450 \cdot 40 + 600 \cdot 40 = 42000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(50, 20) \rightarrow P(50, 20) = 22500 + 12000 = 34500$$

$$E(50, 10) \rightarrow P(50, 10) = 22500 + 6000 = 28500$$

La máxima producción se obtiene en el vértice C (40, 40). Se deben cultivar 40 hectáreas de hortalizas y 40 de frutales para maximizar la producción anual.

D. La máxima producción es de 42000 kg y se obtiene con 40 hectáreas de hortalizas y 40 de frutales.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 & \text{si } 2 < x \leq 2.5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$.

A. Como $x = 1$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$,

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1} = 2$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{2x^2} - 1 - \cancel{2x^2} + 2x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$y = 2x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

B. Para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$ debe serlo en $x = 1$ y en $x = 2$.

Continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1^2 + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + b = a + b \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 1$$

Continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= a \cdot 2^2 + b = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + b = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} e^x + 1 = e^2 + 1 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + b = e^2 + 1$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 4a + b &= e^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 1 - a \\ 4a + b &= e^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 1 - a = e^2 + 1 \Rightarrow 3a = e^2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{e^2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1 - \frac{e^2}{3} = \frac{3 - e^2}{3}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{e^2}{3}$; $b = \frac{3 - e^2}{3}$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

- A.** [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?
- B.** [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

A. La integral de la derivada es la función.

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int t^2 - 40t + 231 dt = \frac{t^3}{3} - 40\frac{t^2}{2} + 231t = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + K$$

Determinamos el valor de K utilizando que $P(36) = 448$.

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + K \\ P(36) = 448 \end{array} \right\} \Rightarrow P(36) = \frac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + K = 448 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + K = 448 \Rightarrow -2052 + K = 448 \Rightarrow K = 2500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2500}$$

Utilizamos la derivada para hallar los momentos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} P'(t) = t^2 - 40t + 231 \\ P'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 40t + 231 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(1)(231)}}{2} = \frac{40 \pm 26}{2} = \begin{cases} \frac{40+26}{2} = 33 = t \\ \frac{40-26}{2} = 7 = t \end{cases}$$

Averiguamos si son máximos o mínimos usando el signo de la segunda derivada.

$$P''(t) = 2t - 40 \Rightarrow \begin{cases} P''(7) = 14 - 40 = -26 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ P''(33) = 66 - 40 = 26 > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

En la hora 33 hay un mínimo de pacientes.

$$P(33) = \frac{33^3}{3} - 20 \cdot 33^2 + 231 \cdot 33 + 2500 = 322$$

En el momento de cantidad mínima de pacientes hay 322.

Lo comparamos con los valores en los extremos del intervalo $[0, 36]$ para comprobar que es un mínimo absoluto.

$$P(0) = \frac{0^3}{3} - 20 \cdot 0^2 + 231 \cdot 0 + 2500 = 2500$$

$$P(33) = 322$$

$$P(36) = 448$$

El número mínimo de pacientes se produce en la hora 33 y es de 322 pacientes.

B. Obtenemos la expresión de las ganancias mensuales. Los costes de producir x hogazas es $2x$, a lo que le sumamos los 500 euros de gastos fijos.

Los ingresos por su venta son $P(x) = x(122 - x)$. Las ganancias es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$G(x) = P(x) - (2x + 500) = x(122 - x) - 2x - 500 = -x^2 + 122x - 2x - 500 = -x^2 + 120x - 500$$

Buscamos el máximo de la función ganancias usando la derivada primera y segunda.

$$G(x) = -x^2 + 120x - 500 \Rightarrow G'(x) = -2x + 120$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 120 = 0 \Rightarrow 2x = 120 \Rightarrow x = 60$$

$$G''(x) = -2 \Rightarrow G''(60) = -2 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo relativo!}$$

Con la fabricación y venta de 60 hogazas se obtienen unas ganancias máximas.

Estas ganancias tienen un valor de $G(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 500 = 3100$ euros.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

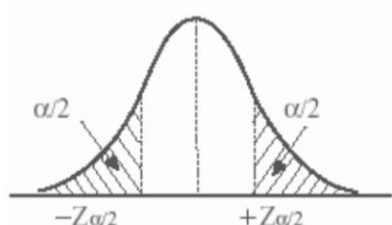
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

X = Precio de una lavadora (en euros). $X = N(\mu, 235)$

Tamaño de muestra = $n = 50$. $\bar{x} = 405$

A. Para un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{235}{\sqrt{50}} \approx 65,14 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (405 - 65,14, 405 + 65,14) = (339,86, 470,14)$$

B. Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,17}$$

Igualamos el error a 50 euros.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50 = 2,17 \cdot \frac{235}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50\sqrt{n} = 2,17 \cdot 235 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,17 \cdot 235}{50} \Rightarrow n = \left(\frac{2,17 \cdot 235}{50} \right)^2 = 104,01$$

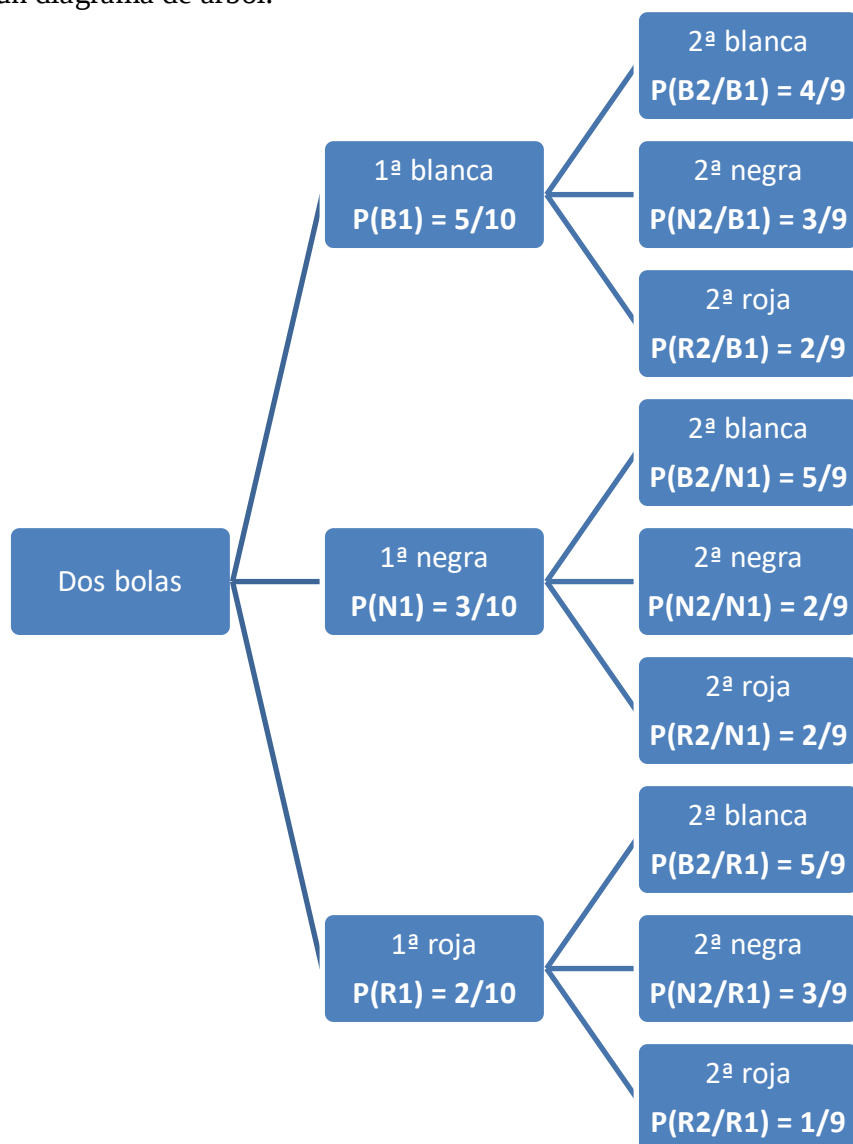
Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 105 lavadoras.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

- A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?
 B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?
 C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?
 D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado B1, N1, R1 a sacar bola blanca, negra o roja en la primera extracción y B2, N2, R2 a sacar bola blanca, negra o roja en la segunda extracción.

- A. Nos piden calcular $P(R1 \cap R2)$.

$$P(R1 \cap R2) = P(R1)P(R2/R1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \approx 0.022$$

- B. Nos piden calcular $P((B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2) \cup (R1 \cap R2))$.

$$\begin{aligned}
 P((B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2) \cup (R1 \cap R2)) &= P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap N2) + P(R1 \cap R2) = \\
 &= P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(N2/N1) + P(R1)P(R2/R1) = \\
 &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{90} = \boxed{\frac{14}{45} \approx 0.311}
 \end{aligned}$$

C. Calculamos la probabilidad usando el suceso contrario.

El suceso contrario a “Al menos una de las dos bolas extraídas es negra” es “Ninguna de las dos bolas es negra”. Así debemos sacar en la primera extracción una de las 7 bolas que no son negras y en la segunda extracción una de las 6 de las 9 que quedan que no son negras.

$$P(\text{Ninguna bola negra}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

$$\text{Así la probabilidad pedida es } P(\text{Al menos una bola es negra}) = 1 - \frac{42}{90} = \frac{48}{90} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.533}$$

D. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(B1/R2) &= \frac{P(B1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(B1)P(R2/B1)}{P(B1)P(R2/B1) + P(N1)P(R2/N1) + P(R1)P(R2/R1)} = \\
 &= \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{\frac{10}{90}}{\frac{90}{180}} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9} \approx 0.556}
 \end{aligned}$$

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD****LOMCE – JULIO 2022****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II****INDICACIONES**

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

- A.** [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.
- B.** [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B.** [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C.** [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?
- D.** [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ y $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

- A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
- C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g .
- D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones f y g .

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P , expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500, \text{ con } 1 \leq d \leq 31$$

donde d indica el día del mes.

- A. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?
- B. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?
- C. [0,5 PUNTOS] Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

- A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?
- D. [0,75 PUNTOS] Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al precio de un helado, “y” al precio de un granizado y “z” al precio de una horchata.

“Compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más” $\rightarrow (3+1)x + 2y + (2+1)z = 20 - 5$.

“Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Un helado y una horchata valen los 5 € que le devuelven” $\rightarrow x + z = 5$

“Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales” $\rightarrow 0.5x + 0.5y = 2$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} (3+1)x + 2y + (2+1)z = 20 \\ x + z = 5 \\ 0.5x + 0.5y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x + y = 4 \end{array} \right\}$$

B. Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x + y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x = 4 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(4 - y) + 2y + 3z = 20 \\ 4 - y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16 - 4y + 2y + 3z = 20 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2y + 3z = 4 \\ z = 1 + y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 3(1 + y) = 4 \Rightarrow -2y + 3 + 3y = 4 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 1 + 1 = 2} \\ \boxed{x = 4 - 1 = 3} \end{array} \right.$$

Un helado cuesta 3 euros, un granizado vale 1 euro y una horchata vale 2 euros.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

- A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
 B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
 C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?
 D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos x = número de vacas de la raza parda, y = número de vacas de la raza frisona.

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 350x + 500y$.

Las restricciones son:

“Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría” $\rightarrow x + y \leq 160$

“No comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas” $\rightarrow x \leq 50; y \geq 70$

“Quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas” $\rightarrow$

$$x \geq \frac{y}{3}$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 160 \\ x \leq 50; y \geq 70 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 160 \\ y \leq 3x \\ x \leq 50; y \geq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 160$$

x	$y = 160 - x$
0	160
40	120
50	110

$$y = 3x$$

x	$y = 3x$
0	0
40	120
70	210

$$x = 50$$

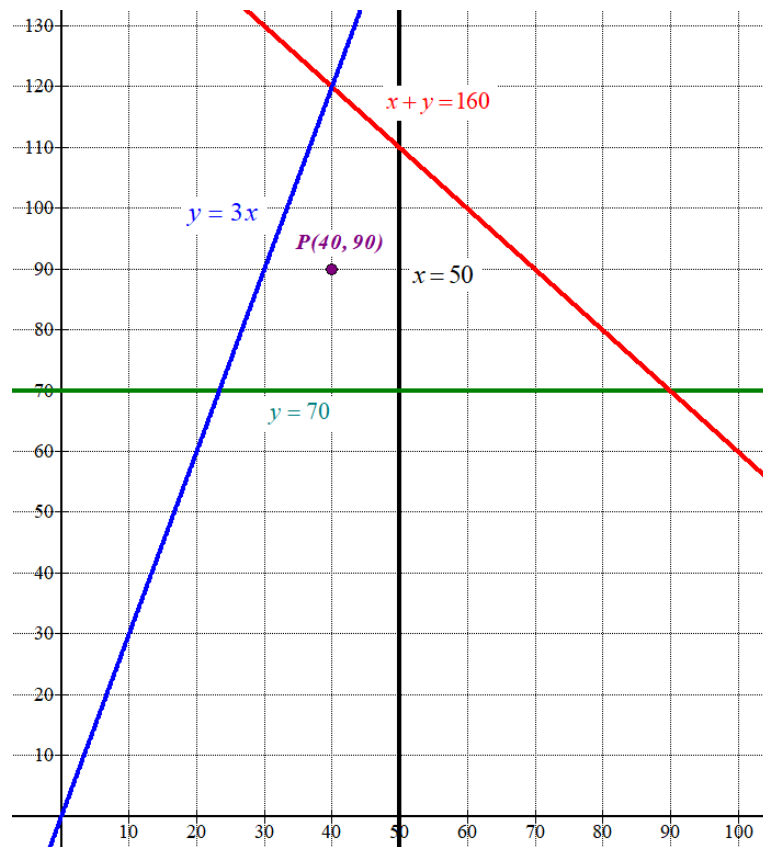
Recta
vertical

$$y = 70$$

x	$y = 70$
0	70
50	70

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como las restricciones del problema son

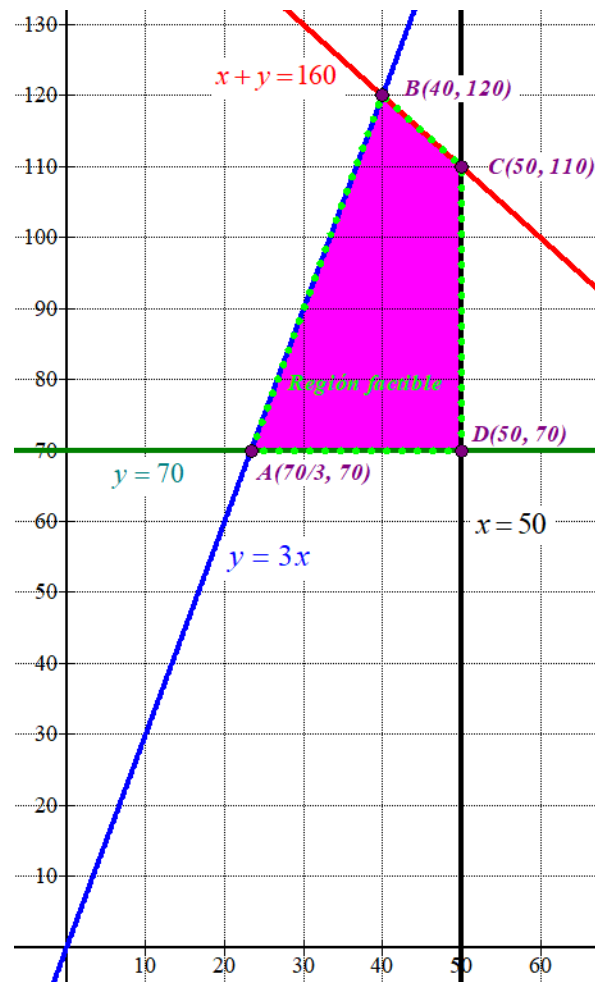
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 160 \\ y \leq 3x \\ x \leq 50; y \geq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical negra.

Comprobamos que el punto $P(40, 90)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 40 + 90 \leq 160 \\ 90 \leq 3 \cdot 40 \\ 40 \leq 50; 90 \geq 70 \\ 40 \geq 0; 90 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice A.

$$A \Rightarrow \begin{cases} y = 70 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow 70 = 3x \Rightarrow x = \frac{70}{3} \Rightarrow A\left(\frac{70}{3}, 70\right)$$

Los vértices son $A(70/3, 70)$; $B(40, 120)$; $C(50, 110)$ y $D(50, 70)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 350x + 500y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(70/3, 70) \rightarrow B(70/3, 70) = 350 \frac{70}{3} + 35000 \approx 43166.66$$

$$B(40, 120) \rightarrow B(40, 120) = 14000 + 60000 = 74000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(50, 110) \rightarrow B(50, 110) = 17500 + 55000 = 72500$$

$$D(50, 70) \rightarrow B(50, 70) = 17500 + 35000 = 52500$$

El máximo beneficio es de 74 000 € y se produce en el vértice B (40, 120) que significa comprar 40 vacas pardas y 120 frisonas.

D. El máximo beneficio es de 74 000 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ y $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

- A.** [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g .
D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones f y g .

A. Calculo la derivada, la igualo a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = -x^2 - 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = -2(-2) - 2 = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -0 - 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(-1, +\infty)$.

La función $f(x)$ crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, +\infty)$.

Repetimos el proceso con la función $g(x)$

$$g(x) = 2x^2 - 2x - 4 \Rightarrow g'(x) = 4x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = 0 - 2 = -2 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 4 - 2 = 2 > 0$. La función crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

La función $g(x)$ decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- B.** Según lo visto en el apartado anterior la función $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = -1$ y la función $g(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Como $f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$ y $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$ las coordenadas del máximo relativo de $f(x)$ son $(-1, 9)$ y las del mínimo relativo de $g(x)$ son $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

C. Puntos de corte de ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 8 \\ g(x) = 2x^2 - 2x - 4 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 2x^2 - 2x - 4 \Rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = -4 - 4 + 8 = 0 \rightarrow \boxed{A(2,0)} \\ f(-2) = -4 + 4 + 8 = 8 \rightarrow \boxed{B(-2,8)} \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje OY ($x = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 8 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 8 \Rightarrow C(0,8)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 2x^2 - 2x - 4 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = -4 \Rightarrow D(0,-4)$$

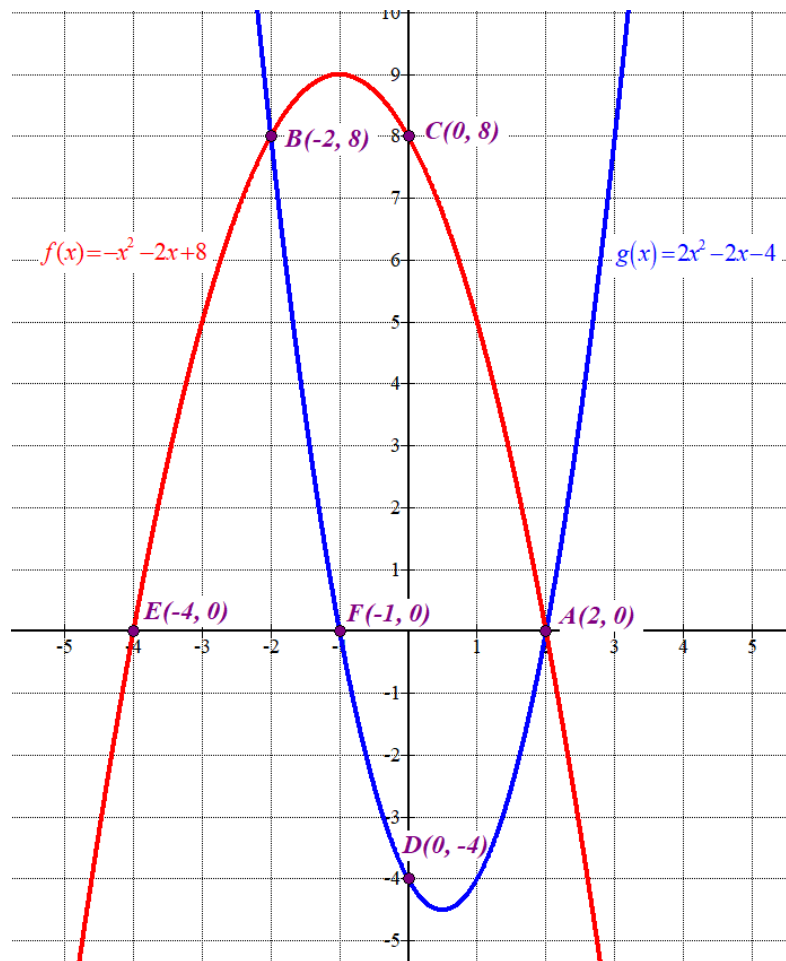
Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 8 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)8}}{-2} = \frac{2 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{2+6}{-2} = -4 \rightarrow E(-4,0) \\ \frac{2-6}{-2} = 2 \rightarrow A(2,0) \end{cases}$$

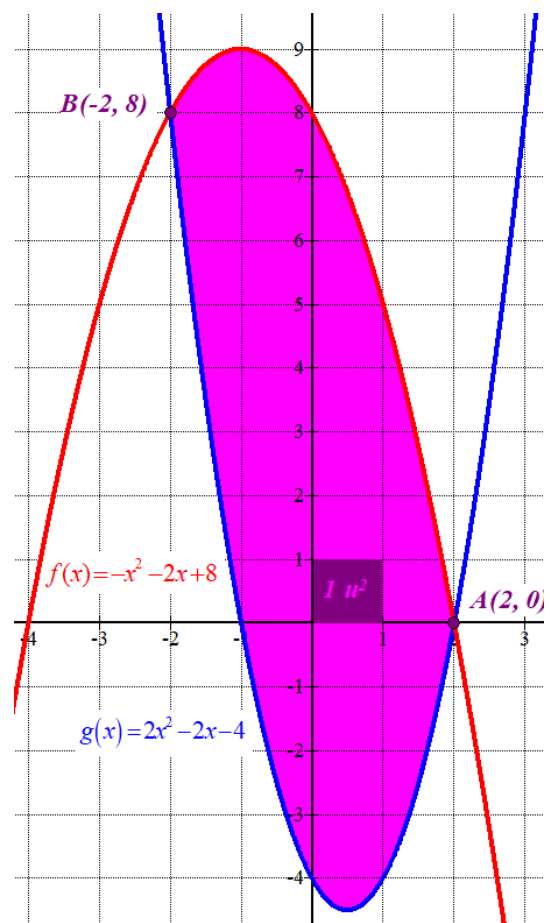
$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 2x^2 - 2x - 4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \rightarrow A(2,0) \\ \frac{1-3}{2} = -1 \rightarrow F(-1,0) \end{cases}$$



D. El área de la región encerrada entre ambas curvas es la integral definida entre -2 y 2 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{-2}^2 f(x) - g(x) dx = \\
 &= \int_{-2}^2 -x^2 - 2x + 8 - (2x^2 - 2x - 4) dx = \\
 &= \int_{-2}^2 -x^2 - 2x + 8 - 2x^2 + 2x + 4 dx = \\
 &= \int_{-2}^2 -3x^2 + 12 dx = \left[-x^3 + 12x \right]_{-2}^2 = \\
 &= \left[-2^3 + 12 \cdot 2 \right] - \left[-(-2)^3 + 12(-2) \right] = \\
 &= -8 + 24 - 8 + 24 = \boxed{32 u^2}
 \end{aligned}$$



Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P , expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500, \text{ con } 1 \leq d \leq 31$$

donde d indica el día del mes.

- A.** [1 PUNTO] ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?
- B.** [1 PUNTO] ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?
- C.** [0,5 PUNTOS] Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

A. Derivamos la función e igualamos a cero.

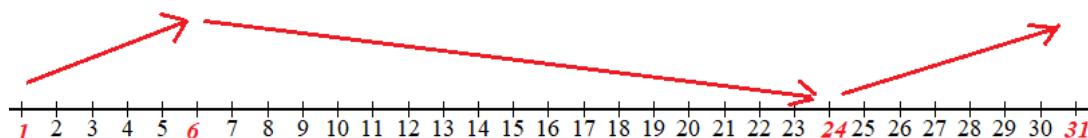
$$P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500 \Rightarrow P'(d) = 3 \cdot \frac{1}{3}d^2 - 30d + 144$$

$$P'(d) = 0 \Rightarrow d^2 - 30d + 144 = 0 \Rightarrow d = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{30 \pm 18}{2} = \begin{cases} \frac{30+18}{2} = \boxed{24 = d} \\ \frac{30-18}{2} = \boxed{6 = d} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos su signo.

$$P''(d) = 2d - 30 \Rightarrow \begin{cases} P''(24) = 48 - 30 = 18 > 0 \rightarrow d = 24 \text{ es mínimo relativo} \\ P''(6) = 12 - 30 = -18 < 0 \rightarrow d = 6 \text{ es máximo relativo} \end{cases}$$

La función sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los extremos del intervalo $[1, 31]$ y lo comparamos con el valor en el máximo y mínimo relativos.

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 144 \cdot 1 + 1500 = \frac{4888}{3} \approx 1629.33 \\ P(6) &= \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 + 1500 = 1896 \text{ ¡Máximo absoluto!} \\ P(24) &= \frac{1}{3} \cdot 24^3 - 15 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 1500 = 924 \text{ ¡Mínimo absoluto!} \\ P(31) &= \frac{1}{3} \cdot 31^3 - 15 \cdot 31^2 + 144 \cdot 31 + 1500 = \frac{4438}{3} \approx 1479.33 \end{aligned} \right\}$$

Para obtener la máxima ganancia debe venderse el sexto día del mes. Se vendería a 1896 €/kg. Obtendríamos $1896 \cdot 4 = 7584$ €.

B. El peor día es el día 24 donde el precio de venta tiene un mínimo.

Se obtendría una ganancia de $924 \cdot 4 = 3696$ €.

C. Si reducimos el intervalo a $[20, 31]$ tenemos que el día 6 no está incluido en el intervalo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en uno de ellos estará el máximo. Aunque mirando el esquema ya sabemos que el máximo estará en el día 31.

$$\left. \begin{aligned} P(20) &= \frac{1}{3} \cdot 20^3 - 15 \cdot 20^2 + 144 \cdot 20 + 1500 = \frac{3140}{3} \approx 1046.66 \\ P(31) &= \frac{4438}{3} \approx 1479.33 \text{ ¡Máximo!} \end{aligned} \right\}$$

Debería venderlo el día 31, obteniendo un precio de 1479.33 €/kg.

Se ganaría 1479.33 €.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

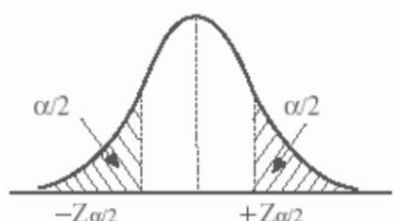
- A.** [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.
- B.** [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

X = Porcentaje de alcohol presente en las botellas de vino. $X = N(\mu, 0.53)$

Tamaño de muestra = $n = 120$. $\bar{x} = 12.05$

A. Con un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803

Utilizamos la fórmula del error.

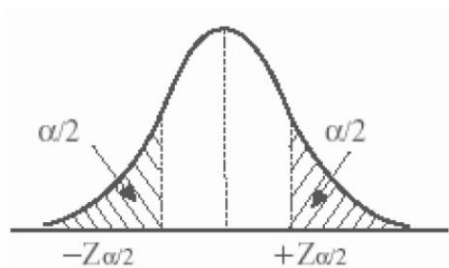
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.53}{\sqrt{120}} = 0.0948$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (12.05 - 0.0948, 12.05 + 0.0948) = (11.9552, 12.1448)$$

B. Con un nivel de confianza del 97.5% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea 0.1.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.24 \cdot \frac{0.53}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.24 \cdot 0.53 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.24 \cdot 0.53}{0.1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow n &= \left(\frac{2.24 \cdot 0.53}{0.1} \right)^2 = 140.94
 \end{aligned}$$

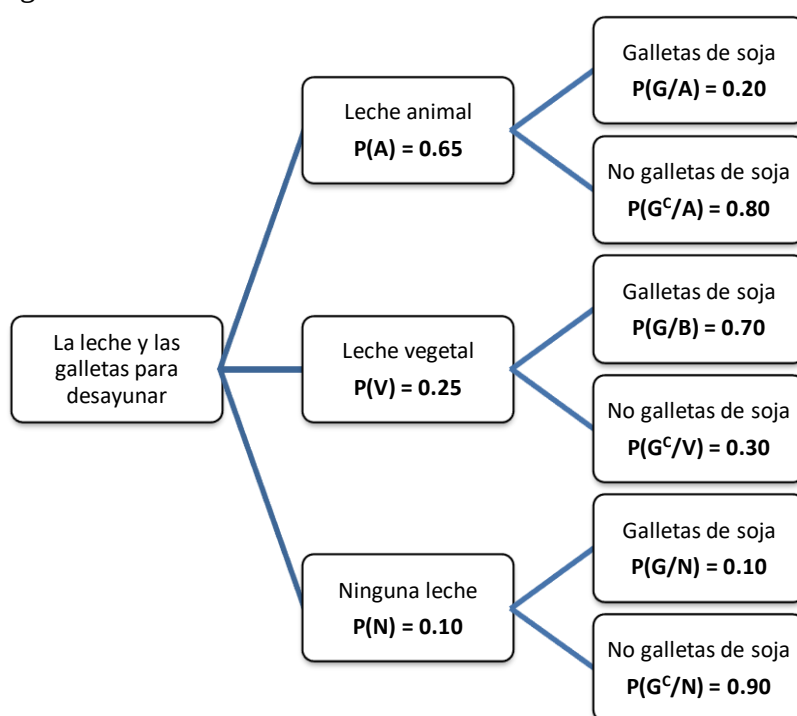
Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo es de 141 botellas.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?
 B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?
 C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?
 D. [0,75 PUNTOS] Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

Llamamos A = "Comprar leche de origen animal", V = "Comprar leche de origen vegetal", N = "No comprar leche de ningún tipo", G = "Comprar galletas de soja".
 Realizamos un diagrama de árbol.



A. $P(A \cap G) = P(A)P(G/A) = 0.65 \cdot 0.2 = \boxed{0.13}$

B. $P(V \cap G^c) = P(V)P(G^c/V) = 0.25 \cdot 0.3 = \boxed{0.075}$

C. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(V)P(G/V) + P(N)P(G/N) =$$

$$= 0.65 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.315}$$

D. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/G^c) = \frac{P(V \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{P(V)P(G^c/V)}{1 - P(G)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{1 - 0.315} = \frac{15}{137} \approx 0.109$$

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD****LOMCE – JUNIO 2022****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II****INDICACIONES**

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

- A. [1 PUNTO]** Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.
- B. [1,5 PUNTOS]** Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.

- A. [0,75 PUNTOS]** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO]** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS]** ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?
- D. [0,25 PUNTOS]** ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8}$

- A. [1 PUNTO] ¿En qué puntos es discontinua f? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
- B. [0,25 PUNTOS] ¿Se podría redefinir f para evitar alguna de estas discontinuidades?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas de f?
- D. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de f, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(v)$, donde v representa el número de vehículos movilizadas. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5000 € si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(v) = v^2 - 32v + 112$ es la derivada de $C(v)$.

- A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Para qué número de vehículos movilizadas serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.

- A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?
- B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?
- C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?
- D. [0,75 PUNTOS] Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

A. [1 PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

B. [1,5 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al precio del kg de cemento en el suministrador A, “y” al precio del kg de ladrillos en el suministrador A, “z” al precio del kg de azulejos en el suministrador A.

“Necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €” $\rightarrow 400x + 150y + 120z = 9800$

Los precios en el suministrador B quedan $x/2$ el precio del kg de cemento, $y/3$ el precio del kg de ladrillo, $z/4$ el kg de azulejos. Con estos precios se ahorra 6400 € por lo que le cuesta

$$9800 - 6400 = 3400 \text{ €} \rightarrow 400 \frac{x}{2} + 150 \frac{y}{3} + 120 \frac{z}{4} = 3400.$$

“Para el suministrador A el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos” $\rightarrow z = 2(x + y)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 150y + 120z = 9800 \\ 400 \frac{x}{2} + 150 \frac{y}{3} + 120 \frac{z}{4} = 3400 \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 200x + 50y + 30z = 3400 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$$

B. Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12(2x + 2y) = 980 \\ 20x + 5y + 3(2x + 2y) = 340 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 24x + 24y = 980 \\ 20x + 5y + 6x + 6y = 340 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 64x + 39y = 980 \\ 26x + 11y = 340 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 64x + 39y = 980 \\ y = \frac{340 - 26x}{11} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64x + 39 \frac{340 - 26x}{11} = 980 \Rightarrow 704x + 13260 - 1014x = 10780 \Rightarrow -310x = -2480 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2480}{310} = 8 \text{ €/kg}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{340 - 26 \cdot 8}{11} = 12 \text{ €/kg}} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 = 40 \text{ €/kg}}$$

En el suministrador A el cemento cuesta a 8 €/kg, el ladrillo a 12 €/kg y el azulejo a 40 €/kg.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B.** [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- C.** [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?
- D.** [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos x = número de packs A, y = número de packs B.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Número de tartas de queso	Número de quesadas	Beneficio
Nº packs A (x)	$4x$	$12x$	$44x$
Nº packs B (y)	$2y$	$3y$	$16y$
TOTAL	$4x + 2y$	$12x + 3y$	$44x + 16y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 44x + 16y$.

Las restricciones son:

“Su producción diaria máxima es de 400 tartas de queso” $\rightarrow 4x + 2y \leq 400$

“Su producción diaria máxima es de 900 quesadas” $\rightarrow 12x + 3y \leq 900$

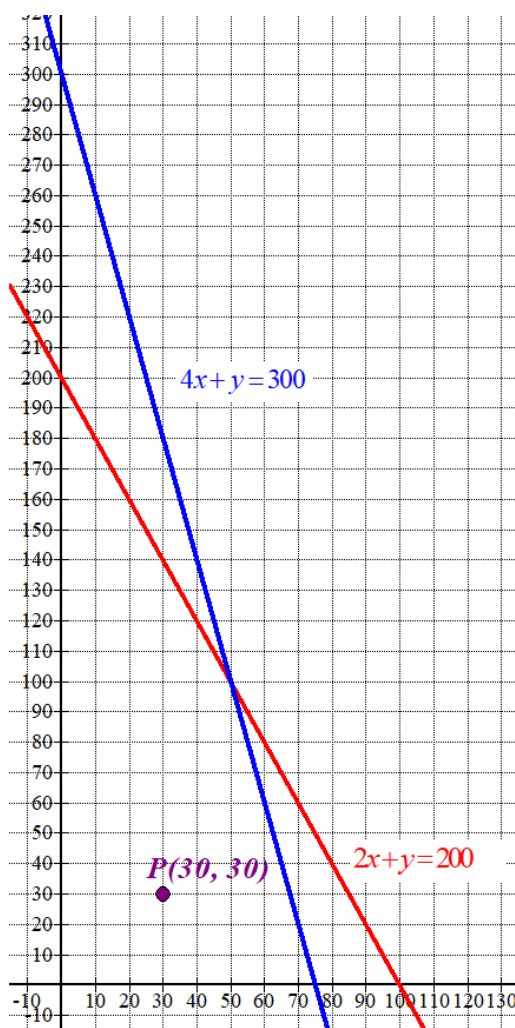
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y \leq 400 \\ 12x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ 4x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 200$		$4x + y = 300$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 200 - 2x$	x	$y = 300 - 4x$	
0	200	0	300	
50	100	50	100	
100	0	75	0	

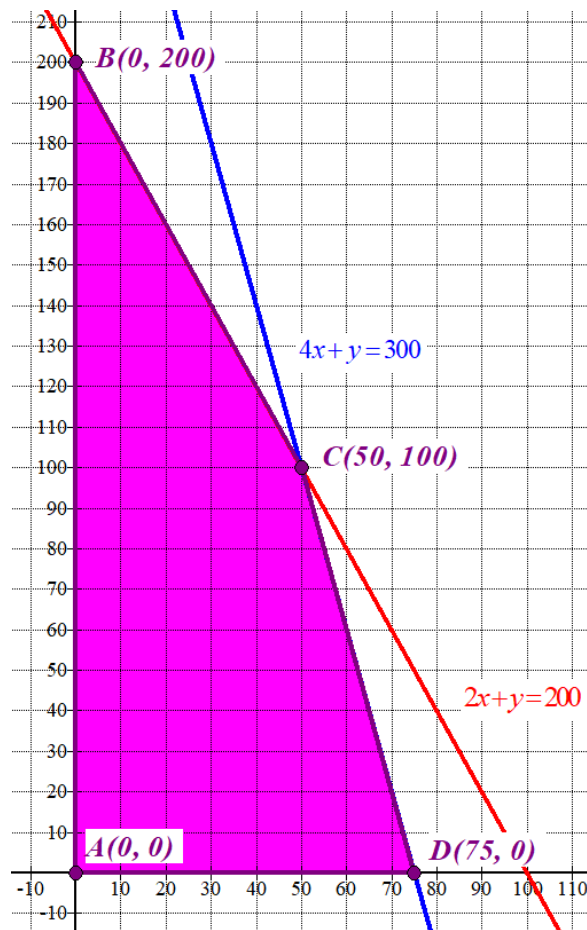


Como las restricciones del problema son
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ 4x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60 + 30 \leq 200 \\ 120 + 30 \leq 300 \\ 30 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 300 - 4x \\ y = 200 - 2x \end{cases} \Rightarrow 300 - 4x = 200 - 2x \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 200 - 100 = 100 \Rightarrow C(50, 100)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} y = 300 - 4x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 300 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{4} = 75 \Rightarrow D(75, 0)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 200); C(50, 100) y D(75, 0).

C. Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 44x + 16y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 200) \rightarrow B(0, 200) = 0 + 3200 = 3200$$

$$C(50, 100) \rightarrow B(50, 100) = 2200 + 1600 = 3800 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(75, 0) \rightarrow B(75, 0) = 3300 + 0 = 3300$$

El máximo beneficio es de 3800 € y se produce en el vértice C (50, 100) que significa hacer 50 packs A y 100 packs B.

D. El máximo beneficio es de 3800 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8}$

- A.** [1 PUNTO] ¿En qué puntos es discontinua f ? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
B. [0,25 PUNTOS] ¿Se podría redefinir f para evitar alguna de estas discontinuidades?
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas de f ?
D. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de f , indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

A. La función es discontinua en los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 = x \\ \frac{-2-6}{2} = -4 = x \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$

En $x = -4$ estudiamos el tipo de discontinuidad.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \frac{32 - 8 - 24}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{4x + 2}{2x + 2} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

En $x = -4$ la discontinuidad es evitable.

En $x = 2$ estudiamos el tipo de discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \frac{8 + 4 - 24}{0} = \frac{-12}{0} = \infty$$

En $x = 2$ la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

B. Se puede redefinir en $x = -4$. La nueva función sería:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} & \text{si } x \neq -4, x \neq 2 \\ \frac{7}{3} & \text{si } x = -4 \end{cases}$$

Esta nueva función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

C. Asíntotas verticales. $x = a$

El dominio de f lo hemos calculado y es $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$, pero el único que es asíntota vertical es

$$x = 2. \text{ Hemos visto que } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \infty.$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \frac{2}{1} = 2$$

La asíntota horizontal es $y = 2$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene pues existe asíntota horizontal.

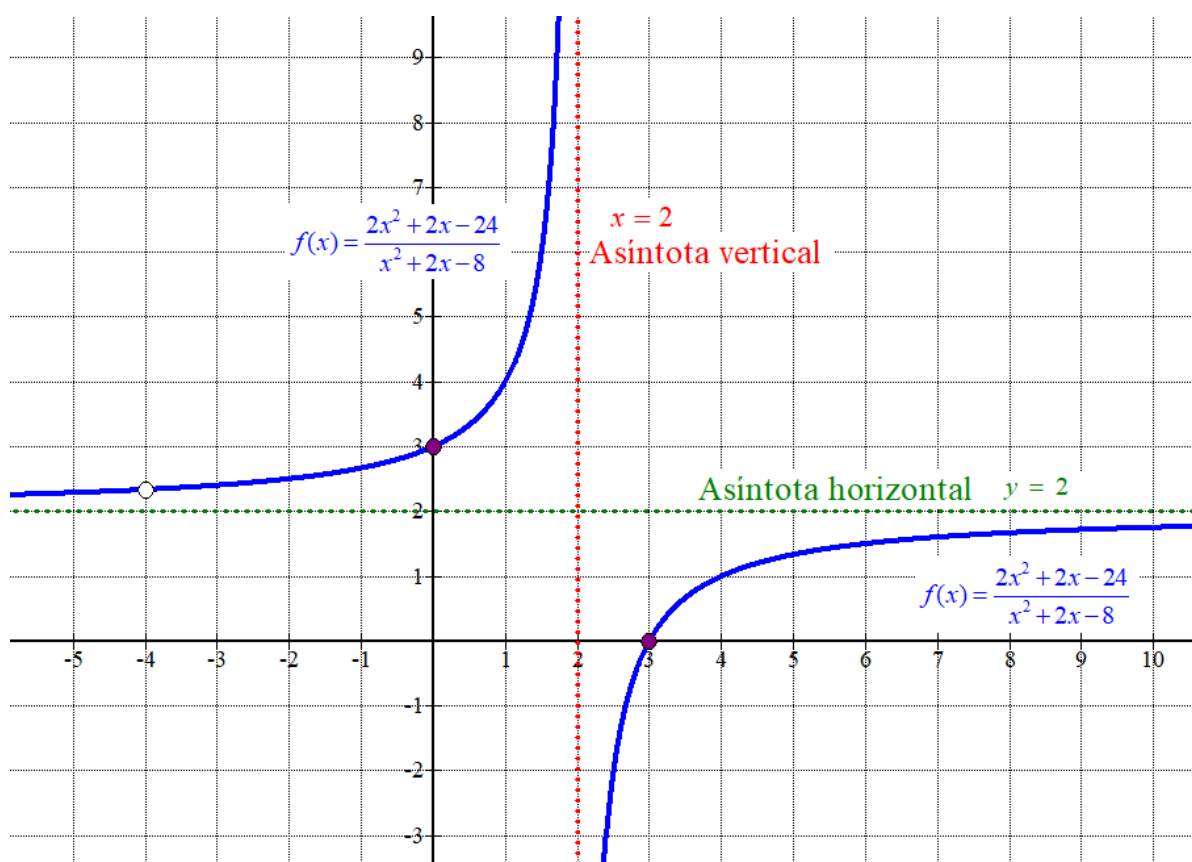
D. Hallo los puntos de corte con los ejes.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 24}{0^2 + 2 \cdot 0 - 8} = 3$. El punto de corte con el eje OY es (0, 3).

Si $y = 0 \rightarrow \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 = x \\ \frac{-1-7}{2} = -4; \text{ No es válido, no pertenece al dominio} \end{cases}$$

El punto de corte con el eje OX es (3, 0).



Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(v)$, donde v representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5000 € si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(v) = v^2 - 32v + 112$ es la derivada de $C(v)$.

- A.** [1,25 PUNTOS] ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?
- B.** [1,25 PUNTOS] ¿Para qué número de vehículos movilizados serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

Averiguamos la expresión de $C(v)$ calculando la integral de $C'(v) = v^2 - 32v + 112$.

$$C(v) = \int C'(v) dv = \int v^2 - 32v + 112 dv = \frac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + K$$

Como sabemos que los costes son de 5000 € si se movilizan 0 vehículos $\rightarrow C(0) = 5000$.

$$\left. \begin{array}{l} C(v) = \frac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + K \\ C(0) = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow 5000 = \frac{0^3}{3} - 16 \cdot 0^2 + 112 \cdot 0 + K = K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C(v) = \frac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + 5000}$$

A. Se pueden movilizar entre 0 y 36 vehículos.

Igualamos a cero la derivada en busca de un mínimo relativo.

$$C'(v) = 0 \Rightarrow v^2 - 32v + 112 = 0 \Rightarrow v = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 112}}{2} = \frac{32 \pm 24}{2} = \begin{cases} \frac{32 + 24}{2} = \boxed{28 = v} \\ \frac{32 - 24}{2} = \boxed{4 = v} \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y vemos cuál de estos dos valores es el mínimo.

$$C'(v) = v^2 - 32v + 112 \Rightarrow C''(v) = 2v - 32 \Rightarrow \begin{cases} C''(4) = 8 - 32 = -24 < 0, \text{ ¡Máximo!} \\ C''(28) = 56 - 32 = 24 > 0, \text{ ¡Mínimo!} \end{cases}$$

Valoramos el coste en $v = 28$ y en los extremos del intervalo para comprobar si este mínimo relativo también lo es absoluto.

$$C(0) = 5000$$

$$C(28) = \frac{28^3}{3} - 16 \cdot 28^2 + 112 \cdot 28 + 5000 = \boxed{2909.33 \text{ €}}$$

$$C(36) = \frac{36^3}{3} - 16 \cdot 36^2 + 112 \cdot 36 + 5000 = 3848 \text{ €}$$

En $v = 28$ hay un mínimo absoluto de la función coste.

Se deben movilizar 28 vehículos para minimizar el coste.

El coste mínimo es de 2909.33 €.

B. En el apartado anterior hemos obtenido el máximo relativo en $v = 4$.

Valoramos la función coste en $v = 0$; $v = 4$ y en $v = 36$.

$$C(0) = 5000$$

$$C(4) = \frac{4^3}{3} - 16 \cdot 4^2 + 112 \cdot 4 + 5000 = 5213.33\text{€}$$

$$C(36) = 3848\text{€}$$

El máximo coste se produce movilizand 4 vehículos, siendo este coste de 5213.33 €.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.

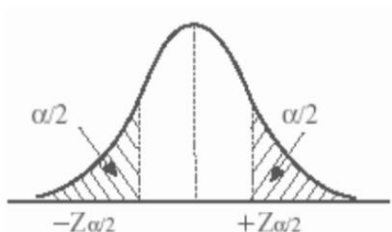
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

X = Peso de una naranja (en gramos). $X = N(\mu, 15)$

Tamaño de muestra = $n = 100$. $\bar{x} = 210$

A. Con un nivel de confianza del 93%

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$



x	0.00	0.01	0.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255
0.4	.6554	.6591	.6628
0.5	.6915	.6950	.6985
0.6	.7257	.7291	.7324
0.7	.7580	.7611	.7642
0.8	.7881	.7910	.7939
0.9	.8159	.8186	.8212
1.0	.8413	.8438	.8461
1.1	.8643	.8665	.8686
1.2	.8849	.8869	.8888
1.3	.9032	.9049	.9066
1.4	.9192	.9207	.9222
1.5	.9332	.9345	.9357
1.6	.9452	.9463	.9474
1.7	.9554	.9564	.9573
1.8	.9641	.9649	.9656

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2.715 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (210 - 2.715, 210 + 2.715) = (207.285, 212.715)$$

B. Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Igualemos el error a 2 gramos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 2.17 \cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 15}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 15}{2} \right)^2 = 264.87$$

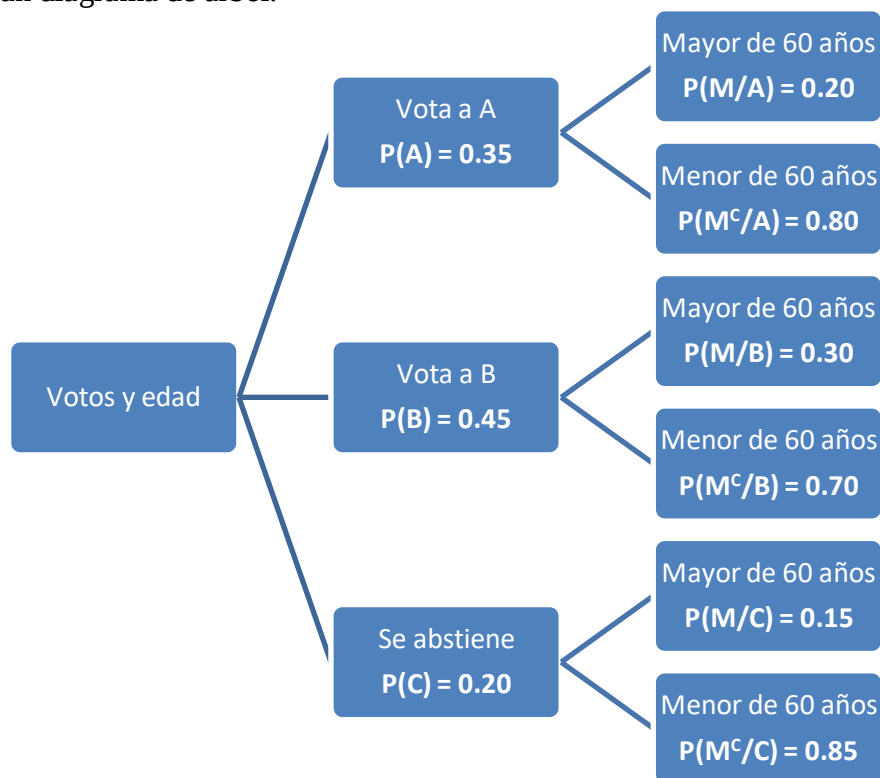
Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo es de 265 naranjas.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

- A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?
 B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?
 C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?
 D. [0,75 PUNTOS] Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado A = “Votar al partido A”, B = “Votar al partido B”, C = “Abstenerse”,
 M = “Ser mayor de 60 años” y $M^c = \bar{M}$ = “Tener 60 años o menos”

A. $P(B \cap \bar{M}) = P(B)P(\bar{M} / B) = 0.45 \cdot 0.70 = \boxed{0.315}$

B. $P(A \cap M) = P(A)P(M / A) = 0.35 \cdot 0.20 = \boxed{0.07}$

C. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M / A) + P(B)P(M / B) + P(C)P(M / C) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.2 + 0.45 \cdot 0.3 + 0.20 \cdot 0.15 = \boxed{\frac{47}{200} = 0.235}$$

D. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C / M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M / C)}{P(M)} = \frac{0.20 \cdot 0.15}{0.235} = \boxed{\frac{6}{47} \approx 0.128}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen**.
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida dividida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.

El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

- A. [0,9 PUNTOS]** Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.
- B. [0,8 PUNTOS]** Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
- C. [0,8 PUNTOS]** Resolverlo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$

- A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- C. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
- D. [0,25 PUNTOS] Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.
- E. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

- A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 23 % de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %.

Seleccionamos un habitante al azar:

- A. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?
- B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?
- C. [1 PUNTO] Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.

El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

- A.** [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.
B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A. Llamamos “x” al tiempo empleado por Cristina, “y” al tiempo empleado por Juan y “z” al tiempo empleado por Pedro.

“Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto” $\rightarrow$ “Cristina empleó un 140 % del tiempo que empleó Juan” $\rightarrow x = 1.40y$

“Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan” $\rightarrow z = \frac{x+y}{2}$

“El tiempo total empleado fue de 18 horas” $\rightarrow x + y + z = 18$

Juntamos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1.40y \\ z = \frac{x+y}{2} \\ x + y + z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - 1.4y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

B. La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1.4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1.4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2.8 + 1 + 1.4 + 2 = 7.2 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - 1.4y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad -1.4y \quad \quad = 0 \\ -x \quad -y \quad -z = -18 \\ \hline -2.4y \quad -z = -18 \\ \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad -2z = 0 \\ -x \quad -y \quad -z = -18 \\ \hline -3z = -18 \\ \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ -2.4y - z = -18 \\ -3z = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ -2.4y - z = -18 \\ \boxed{z = \frac{18}{3} = 6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 6 = 18 \\ -2.4y - 6 = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ -2.4y = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ \boxed{y = \frac{12}{2.4} = 5} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 5 = 12 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

Cristina dedica 7 horas, Juan 5 horas y Pedro 6 horas.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Llamamos “x” al número de lotes A, “y” al número de lotes B.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº lapiceros USB	Nº tabletas	Ingresos
Nº lotes A (x)	3x	x	70x
Nº lotes B (y)	6y	y	160y
TOTALES	3x + 6y	x + y	70x + 160y

“Dispone de 96 lapiceros con memoria USB” $\rightarrow 3x + 6y \leq 96$

“Dispone de 15 tabletas digitales” $\rightarrow x + y \leq 15$

“El número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A” $\rightarrow y \leq \frac{x}{2}$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 96 \\ x + y \leq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 32 \\ x + y \leq 15 \\ 2y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 32$$

x	y = $\frac{32-x}{2}$
---	----------------------

0	16
16	8

$$x + y = 15$$

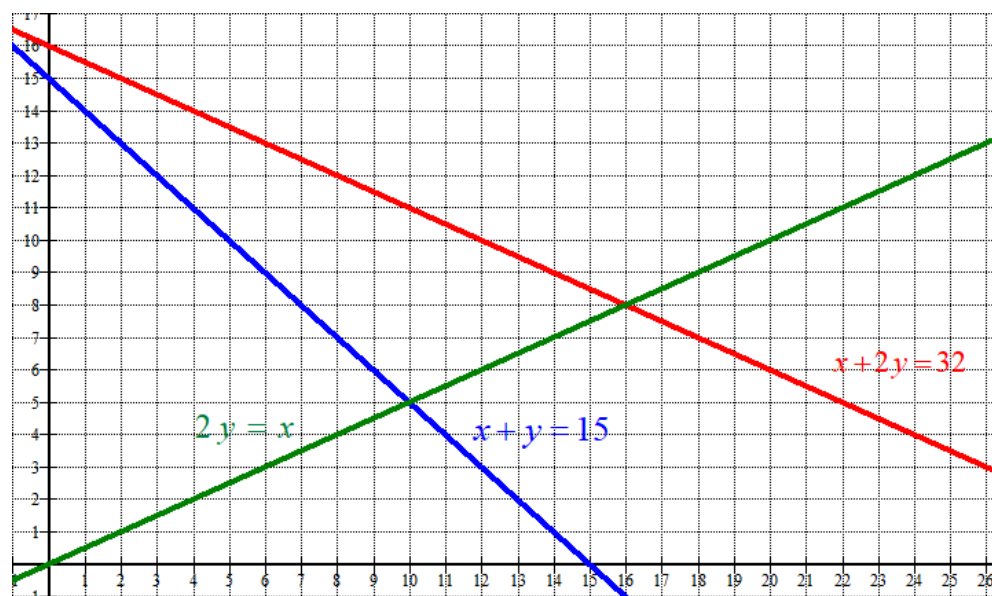
x	y = 15 - x
---	------------

10	5
0	15

$$2y = x$$

x	y = $\frac{x}{2}$
---	-------------------

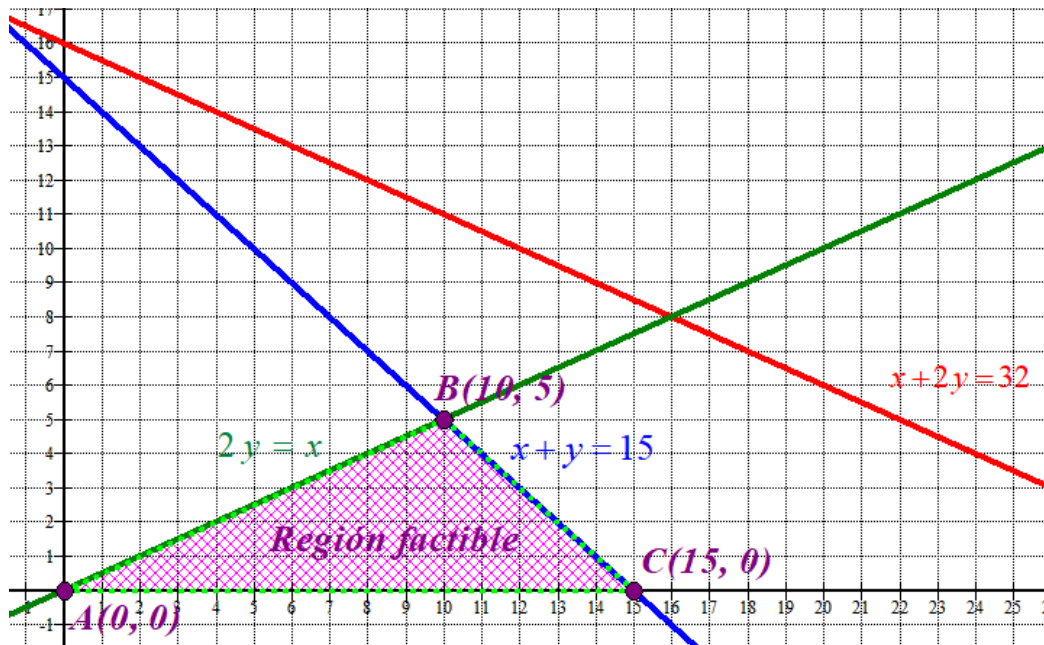
10	5
0	0



Como las restricciones son

$x + 2y \leq 32$	→ Por debajo	} la región factible es la región del
$x + y \leq 15$	→ Por debajo	
$2y \leq x$	→ Por debajo	
$x \geq 0; y \geq 0$	→ Primer cuadrante	

primer cuadrante situada por debajo de las tres rectas.
Coloreamos de rosa la región factible.



Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 70x + 160y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(10, 5) \rightarrow I(10, 5) = 700 + 800 = 1500 \text{ €}$$

$$C(15, 0) \rightarrow I(15, 0) = 1050$$

Deben prepararse 10 lotes del tipo A y 5 del tipo B para conseguir unos máximos ingresos de 1500 euros.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Llamamos “x” al número de nuevos viajeros inscritos y que superan de 20 (con 25 viajeros sería $x = 5$). Así habrán $20 + x$ viajeros en el autocar.

Los gastos de la empresa son: $G(x) = 475(20 + x) + 850 = 475x + 9500 + 850 = 475x + 10350$

Los ingresos $I(x)$ son dependientes del número de nuevos viajeros inscritos (x).

Hacemos una tabla para obtener con más facilidad la expresión de los ingresos.

x	$I(x)$
0	$525 \cdot 20$
1	$(525 - 1.25)(20 + 1) \Rightarrow I(x) = (525 - x \cdot 1.25)(20 + x)$
2	$(525 - 2 \cdot 1.25)(20 + 2)$
3	$(525 - 3 \cdot 1.25)(20 + 3)$

$$I(x) = (525 - x \cdot 1.25)(20 + x) = 10500 + 525x - 25x - 1.25x^2 = -1.25x^2 + 500x + 10500$$

El beneficio será la diferencia entre ingresos y gastos.

$$B(x) = I(x) - G(x) = -1.25x^2 + 500x + 10500 - (475x + 10350) = -1.25x^2 + 25x + 150$$

$$B(x) = -1.25x^2 + 25x + 150$$

Derivamos la función beneficio e igualamos a cero su derivada en busca de sus puntos críticos.

$$B(x) = -1.25x^2 + 25x + 150 \Rightarrow B'(x) = -2.5x + 25$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2.5x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2.5} = 10$$

Sustituimos en la segunda derivada el valor $x = 10$.

$$B'(x) = -2.5x + 25 \Rightarrow B''(x) = -2.5 \Rightarrow B''(10) = -2.5 < 0$$

En $x = 10$ hay un máximo relativo.

Con $20 + 10 = 30$ viajeros se consiguen los máximos beneficios, siendo estos de

$$B(10) = -1.25 \cdot 10^2 + 250 + 150 = 275 \text{ €}.$$

Cada viajero debe pagar $525 - 10 \cdot 1.25 = 512.5 \text{ €}$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$

- A.** [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
C. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
D. [0,25 PUNTOS] Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.
E. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

A. Puntos de corte con eje OY.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 0 = 0 \Rightarrow P(0,0)$$

Puntos de corte con eje OX.

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow P(0,0) \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} Q(\sqrt{3},0) \\ R(-\sqrt{3},0) \end{cases} \end{cases}$$

Hay tres puntos de corte $P(0,0)$, $Q(\sqrt{3},0)$ y $R(-\sqrt{3},0)$.

B. Calculamos su derivada e igualamos a cero.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Vemos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 2)$

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 3 = -2$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -2)$.

C. Obtenemos la derivada segunda e igualamos a cero.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x = 0$.

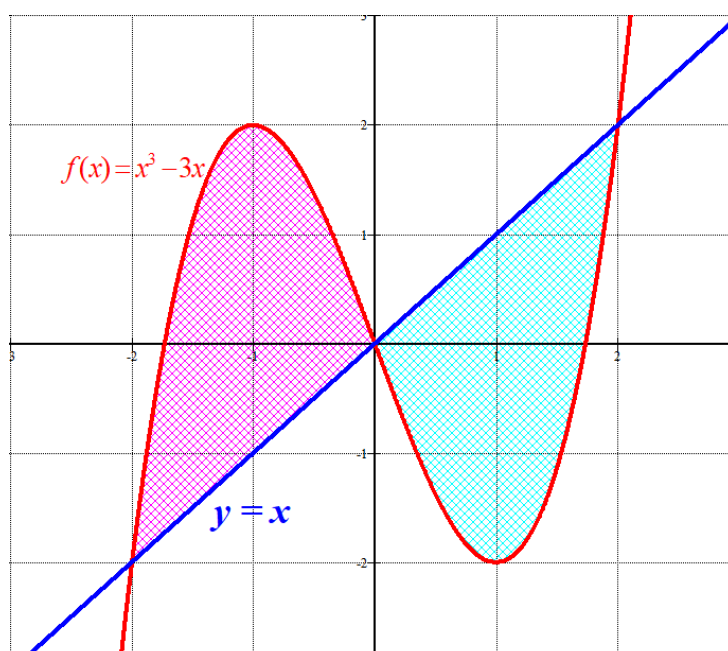
- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = -6 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ y convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = 0$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 0)$.

D. Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = x^3 - 3x$
$-\sqrt{3}$	0
-1	2 máximo
0	0 punto de inflexión
1	-2 mínimo
$\sqrt{3}$	0

x	$y = x$
0	0
2	2



E. Calculamos el área como la suma de dos integrales definidas, una para calcular el área de la región rosa y otra para calcular el área de la región azul.

Aunque no es necesario pues se observa que tienen el mismo valor de área, por lo que calculamos solo una de las áreas, por ejemplo, la azul y el área total es dos veces el valor que obtengamos del área azul.

$$\text{Área azul} = \int_0^2 x - (x^3 - 3x) dx = \int_0^2 4x - x^3 dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left[2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right] - \left[0 - \frac{0}{4} \right] = \boxed{4 \text{ u}^2}$$

El área de la región encerrada entre la recta $y = x$ y la función $f(x) = x^3 - 3x$ es de 8 unidades cuadradas.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

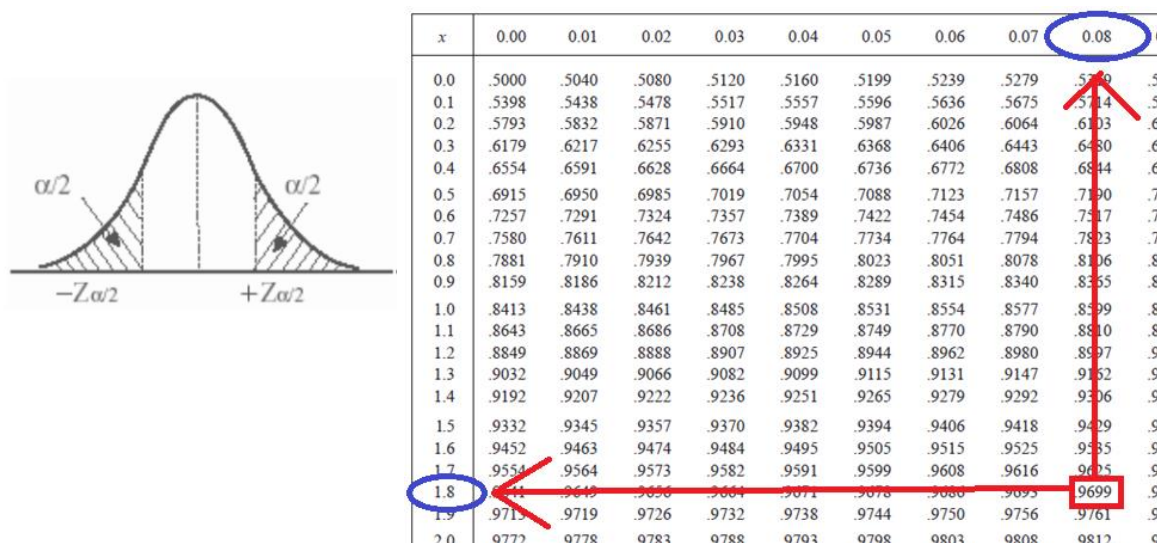
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

X = Número de libros leídos por un estudiante de un instituto. $X = N(\mu, 1)$

Tamaño de muestra = $n = 125$. $\bar{x} = 4$

A. Con un nivel de confianza del 94 %

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{1}{\sqrt{125}} \approx 0.168$$

El intervalo de confianza es:

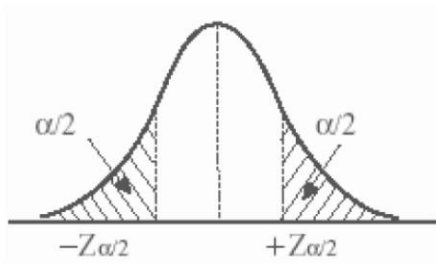
$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4 - 0.168, 4 + 0.168) = (3.832, 4.168)$$

B. ¿n?

Un error que sea la cuarta parte del obtenido en el apartado anterior es $\frac{0.168}{4} = 0.042$

Con un nivel de confianza del 97% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5715
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7824
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812
2.1	.9824	.9828	.9832	.9836	.9840	.9844	.9848	.9850	.9854
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9908	.9911	.9913

El error debe ser 0.042.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.042 = 2.17 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.042}{2.17} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17}{0.042} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.17}{0.042} \right)^2 \approx 2669.44$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo es de 2670 estudiantes.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 23 % de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %.

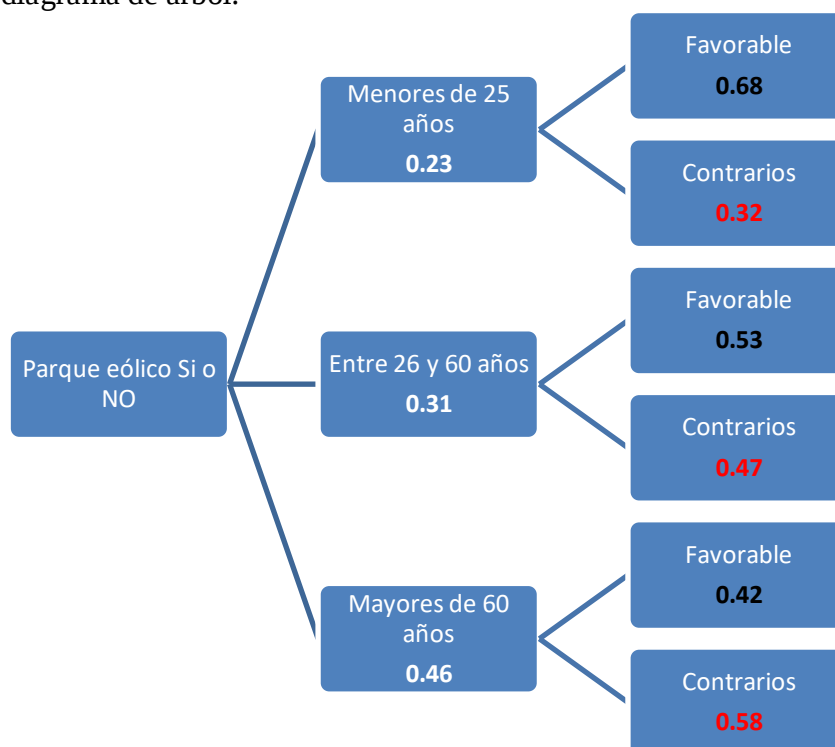
Seleccionamos un habitante al azar:

A. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

C. [1 PUNTO] Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Ser menor de 25 años, B = Tener entre 25 y 60 años, C = Ser mayor de 60 años.

Y también F = Ser favorable a la instalación, $\bar{F}$ = Ser contrario a la instalación.

A. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(A)P(F/A) + P(B)P(F/B) + P(C)P(F/C) =$$

$$= 0.23 \cdot 0.68 + 0.31 \cdot 0.53 + 0.46 \cdot 0.42 = \boxed{0.5139}$$

B. $P(\bar{F} \cap C) = P(C)P(\bar{F}/C) = 0.46 \cdot 0.58 = \boxed{0.2668}$

C. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{F}) = \frac{P(A \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(A)P(\bar{F}/A)}{1 - P(F)} = \frac{0.23 \cdot 0.32}{1 - 0.5139} \approx \boxed{0.1514}$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen**.
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 €; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 €.

A. [1 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

B. [1 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,25 PUNTOS] Resolverlo.

D. [0,25 PUNTOS] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

A. [0,5 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?

B. [1 PUNTO] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

C. [1 PUNTO] Calcular los dos límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

- A. [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [0,5 PUNTOS] Las asíntotas.
- C. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- D. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
- E. [0,25 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-40 años	41-60 años	Mayores de 60 años	Total
Ha realizado alguna Compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

Elegida una de las personas del grupo al azar,

- A. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.
- B. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.
- C. [1 PUNTO] Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

- A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]**

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 €; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 €.

- A.** [1 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.
B. [1 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,25 PUNTOS] Resolverlo.
D. [0,25 PUNTOS] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

A. Llamamos a = tarifa de adulto, n = tarifa de niño, j = tarifa de jubilado.

“La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño” $\rightarrow a + j = 5n$

“Un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 €” $\rightarrow 5a + 3n + 3j = 222$

“Otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados ha pagado 168 €.” $\rightarrow 3a + 2n + 4j = 168$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + j = 5n \\ 5a + 3n + 3j = 222 \\ 3a + 2n + 4j = 168 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - 5n + j = 0 \\ 5a + 3n + 3j = 222 \\ 3a + 2n + 4j = 168 \end{array} \right\}$$

B. La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 45 + 10 - 9 + 100 - 6 = 62 \neq 0$.

El rango de la matriz A es 3, así como el de la matriz ampliada $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{array} \right)$ y el

número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (solución única).

C. Aplicamos el método de Cramer.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 222 & 3 & 3 \\ 168 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2520 + 444 - 504 + 4440}{62} = 30$$

$$n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 222 & 3 \\ 3 & 168 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{888 + 840 - 666 - 504}{62} = 9$$

$$j = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 168 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{504 - 3330 + 4200 - 444}{62} = 15$$

La tarifa de adulto es 30 €, la de niño es 9 € y la de jubilado es 15 €.

D. Sin descuento pagarían $2 \cdot 30 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 123$ €, pero le descontamos el 15 %, es decir, pagan solo el 85 %. Pagarían $0.85 \cdot 123 = 104.55$ €

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Llamamos x = kilogramos de A, y = kilogramos de B.

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 5x + 7y$.

Las restricciones son:

“Solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana” $\rightarrow x + y \leq 500$

“Cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 h. Solo dispone de 3200 horas” $\rightarrow 4x + 8y \leq 3200$

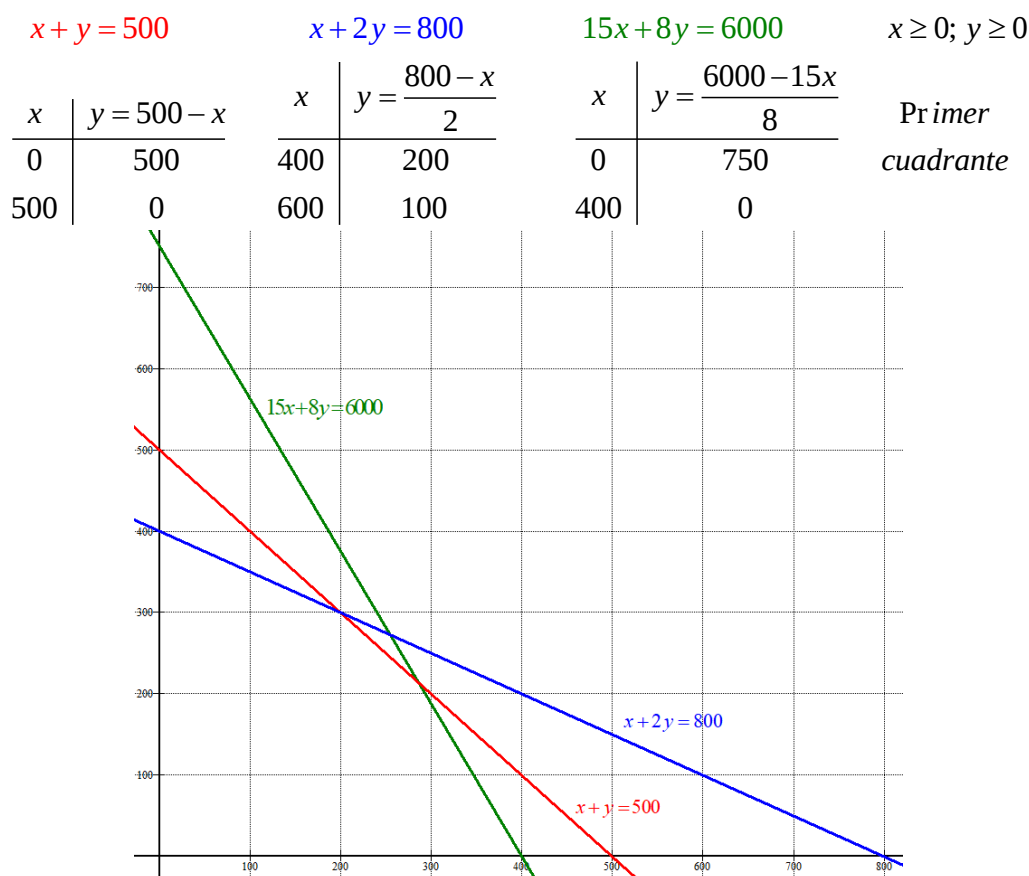
“Solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades” $\rightarrow 3.75x + 2y \leq 1500$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

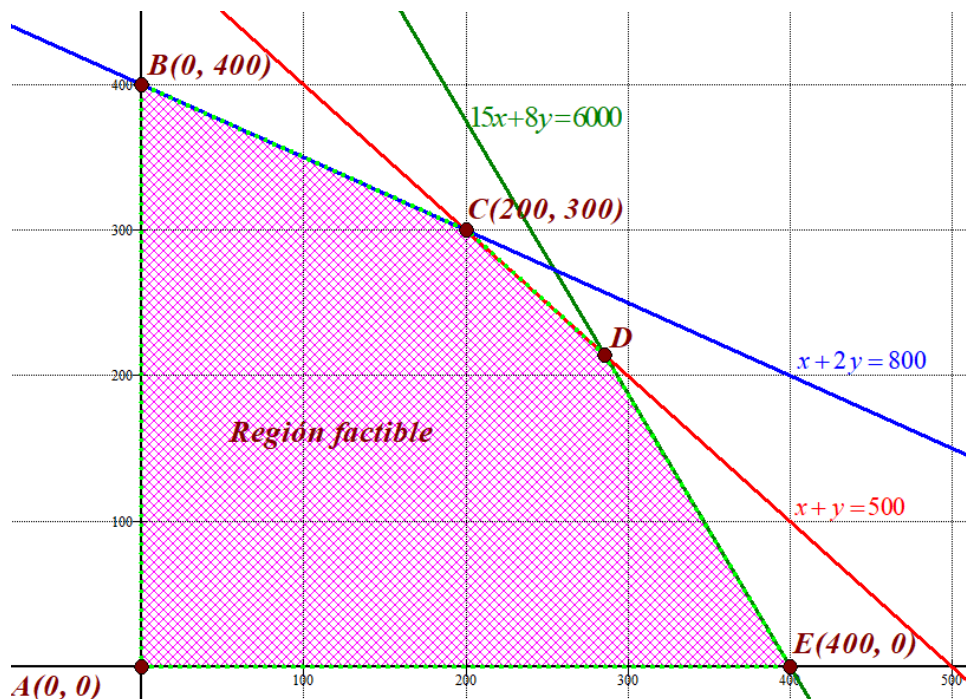
Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ 4x + 8y \leq 3200 \\ 3.75x + 2y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.



Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, roja y verde. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.}$$


Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ 15x + 8y = 6000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 500 - x \\ 15x + 8y = 6000 \end{array} \right\} \Rightarrow 15x + 8(500 - x) = 6000 \Rightarrow 15x + 4000 - 8x = 6000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x = 2000 \Rightarrow x = \frac{2000}{7} \Rightarrow y = 500 - \frac{2000}{7} = \frac{1500}{7} \Rightarrow D\left(\frac{2000}{7}, \frac{1500}{7}\right)$$

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 5x + 7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,400) \rightarrow B(0,400) = 0 + 2800 = 2800$$

$$C(200,300) \rightarrow B(200,300) = 1000 + 2100 = 3100 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D\left(\frac{2000}{7}, \frac{1500}{7}\right) \rightarrow B\left(\frac{2000}{7}, \frac{1500}{7}\right) = \frac{10000}{7} + \frac{10500}{7} = \frac{20500}{7} \approx 2928.6$$

$$E(400,0) \rightarrow B(400,0) = 2000 + 0 = 2000$$

El máximo beneficio es de 3100 € y se produce en el vértice C (200, 300) que significa vender 200 kilos de producto A y 300 del producto B.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

- A.** [0,5 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
B. [1 PUNTO] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.
C. [1 PUNTO] Calcular los dos límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

A. El dominio de la función son todos los valores menos los que anulan el denominador.

$$4x^2 + 4x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-30)}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{-1+11}{2} = 5 \\ \frac{-1-11}{2} = -6 \end{cases}$$

La función no está definida en $x = -6$, ni en $x = 5$.

Dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-6, 5\}$

La función es discontinua en $x = -6$ y en $x = 5$.

- B.** En $x = -6$ calculamos el límite de la función. Si se obtiene un valor concreto podemos redefinir la función y evitar esta discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{-18-15}{4(-6)^2+4(-6)-120} = \frac{-33}{0} = \infty$$

La discontinuidad en $x = -6$ es inevitable.

En $x = 5$ calculamos el límite de la función. Si se obtiene un valor concreto podemos redefinir la función y evitar esta discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{15-15}{4(5)^2+4(5)-120} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Descomponemos el numerador y el denominador y simplificamos la expresión:

$$\frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{3(x-5)}{4(x^2+x-30)} = \frac{3\cancel{(x-5)}}{4\cancel{(x-5)}(x+6)} = \frac{3}{4(x+6)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4 \cdot 11} = \frac{3}{44}$$

La discontinuidad en $x = 5$ es evitable redefiniendo la función en dicho valor:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} & \text{si } x \neq 5 \text{ y } x \neq -6 \\ \frac{3}{44} & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

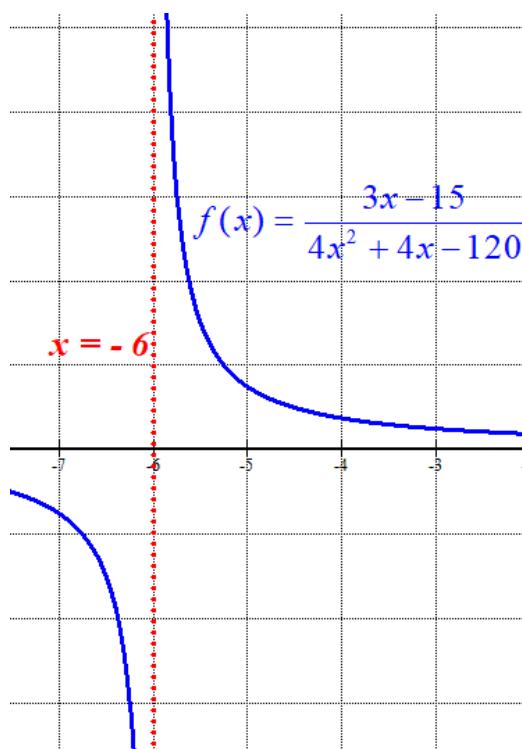
La nueva función es continua en $x = 5$ y en el resto de puntos es la misma función inicial.

- C.** Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{3(\cancel{x-5})}{4(\cancel{x-5})(x+6)} = \frac{3}{4(0^-)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{3(\cancel{x-5})}{4(\cancel{x-5})(x+6)} = \frac{3}{4(0^+)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Significa que en $x = -6$ hay una asíntota vertical y la función se aproxima a ella por la izquierda bajando hasta $-\infty$ y por la derecha se aproxima subiendo hasta $+\infty$



Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

- A.** [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,5 PUNTOS] Las asíntotas.
C. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,25 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

A. El dominio es $\mathbb{R} - \{-4\}$, pues el denominador se anula para $x = -4$.

Si $x = 0$ entonces $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{(0+4)^2} = 0$. El punto de corte tiene coordenadas $(0, 0)$

Si $y = 0$ entonces $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. El punto de corte obtenido es $(0, 0)$

Sólo tiene un punto de corte con los ejes de coordenadas: $(0, 0)$

B. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-4\}$, pues el denominador se anula para $x = -4$.

Asíntota vertical. $x = -4$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \frac{48}{0} = \infty$$

$x = -4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\left(\frac{x}{x} + \frac{4}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{4}{x}\right)^2} = \frac{3}{\left(1 + \frac{4}{\infty}\right)^2} = \frac{3}{1} = 3$$

$y = 3$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

C. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x(x+4)^2 - 3x^2 \cdot 2(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{6x(x+4) - 3x^2 \cdot 2}{(x+4)^3}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 24x - 6x^2}{(x+4)^3} = \frac{24x}{(x+4)^3}$$

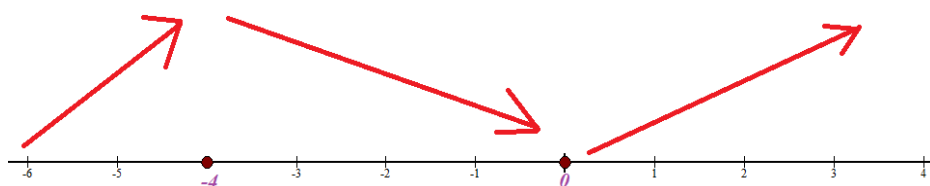
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{24x}{(x+4)^3} = 0 \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Además, tenemos un punto de discontinuidad en $x = -4$.

Vemos si la función crece o decrece antes, entre y después de $x = -4$ y $x = 0$.

- En $(-\infty, -4)$ tomo $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5) = \frac{24(-5)}{(-5+4)^3} = \frac{-120}{-1} = 120 > 0$. La función crece en $(-\infty, -4)$.
- En $(-4, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-24}{(-1+4)^3} = \frac{-24}{27} < 0$. La función decrece en $(-4, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{24}{(1+4)^3} = \frac{24}{125} > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-4, 0)$.

En $x = -4$ la función no existe y no es un máximo.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{(0+4)^2} = 0$. El punto mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

D. Utilizamos la derivada segunda para estudiar la concavidad y convexidad.

$$f'(x) = \frac{24x}{(x+4)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{24(x+4)^3 - 24x \cdot 3(x+4)^2}{(x+4)^6} = \frac{24(x+4)^2((x+4) - 3x)}{(x+4)^6}$$

$$f''(x) = \frac{24(-2x+4)}{(x+4)^4} = \frac{24(2)(-x+2)}{(x+4)^4} = \frac{48(-x+2)}{(x+4)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{48(-x+2)}{(x+4)^4} = 0 \Rightarrow 48(-x+2) = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

El posible punto de inflexión es $x = 2$.

Comprobamos la curvatura de la función antes y después de dicho valor. En $x = -4$ no se produce cambio del signo de la derivada segunda pues el denominador está elevado a 4.

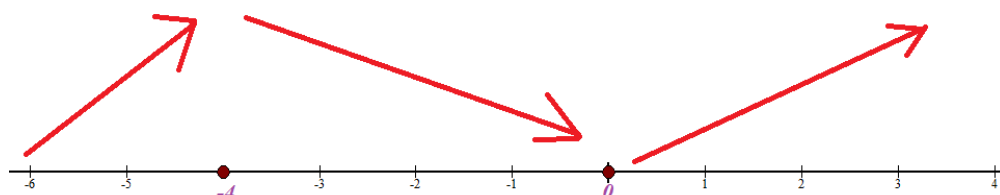
- En $(-\infty, -4)$ tomamos $x = -5$ y la derivada segunda vale $f''(-5) = \frac{48(5+2)}{(-5+4)^4} = 336 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(-\infty, -4)$.
- En $(-4, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = \frac{48(-0+2)}{(0+4)^4} = \frac{96}{128} > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(-4, 2)$.

- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada segunda vale $f''(5) = \frac{48(-5+2)}{(5+4)^4} = \frac{-144}{9^4} < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(2, +\infty)$.

La función es convexa en $(-\infty, -4) \cup (-4, 2)$ y cóncava ($\cap$) en $(2, +\infty)$.

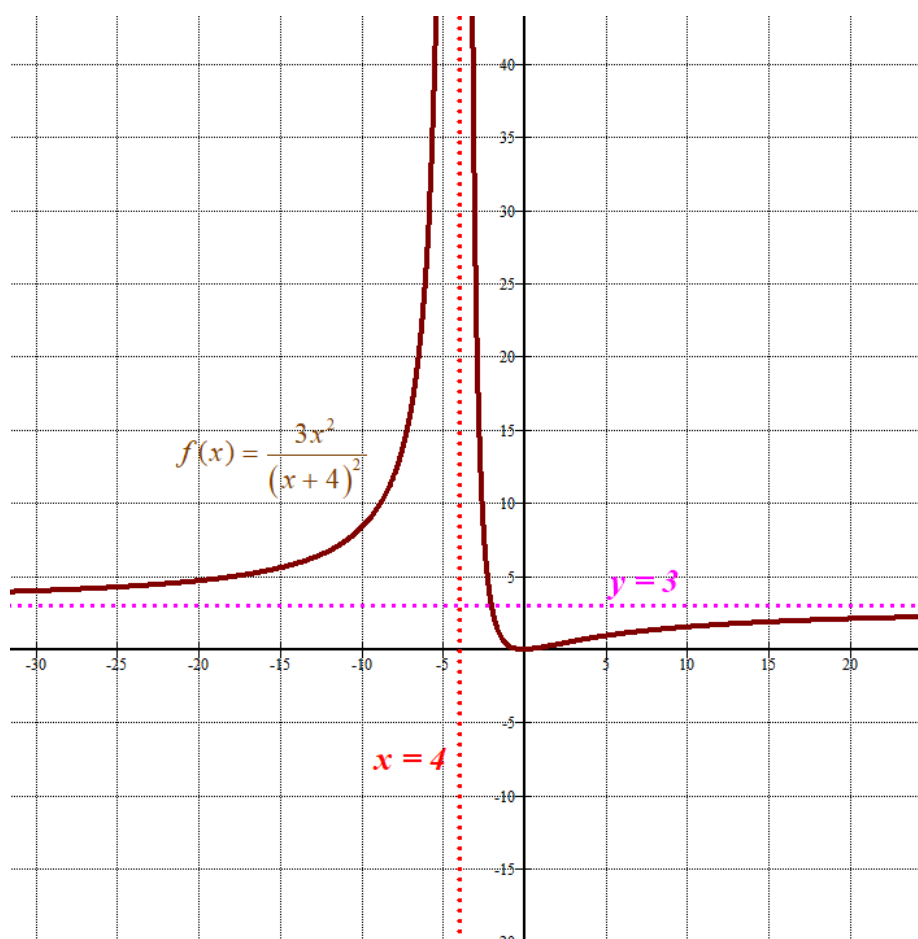
La función tiene un punto de inflexión en $x = 2$.

E. Sabemos que el dominio es $\mathbb{R} - \{-4\}$, el único punto de corte con los ejes en $(0, 0)$. Hay una asíntota vertical: $x = -4$ y una asíntota horizontal: $y = 3$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. La función sigue el esquema de crecimiento.



Solo nos falta una tabla de valores para poder dibujar su gráfica con más precisión.

x	$y = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$
-6	27
-5	75
-2	3
-1	3/16
1	3/25
2	1/3



Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

Elegida una de las personas del grupo al azar,

	18-40 años	41-60 años	Mayores de 60 años	Total
Ha realizado alguna Compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

- A.** [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.
- B.** [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.
- C.** [1 PUNTO] Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

A. Hay un total de 2000 personas, y 250 son mayores de 60 años que han realizado alguna compra por internet. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es $p_A = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} = \boxed{0.125}$

B. Hay un total de 2000 personas, y 532 tienen una edad comprendida entre 41 y 60 años. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es $p_B = \frac{532}{2000} = \frac{133}{500} = \boxed{0.266}$

C. Hay 1043 personas que han realizado alguna compra por internet. Y de ella 468 tienen entre 18 y 40 años. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad pedida vale $p_C = \frac{468}{1043} \approx \boxed{0.4487}$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

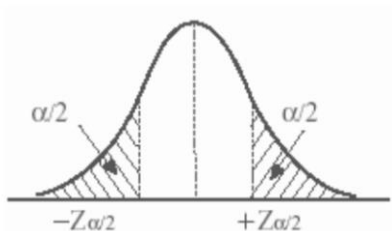
A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

X = Tiempo de espera en minutos. $X = N(\mu, 2)$. Tamaño de muestra = $n = 450$. $\bar{x} = 14$

A. Con un nivel de confianza del 93% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$



x	0.00	0.01	0.02
0.0	.5000	.5039	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255
0.4	.6554	.6591	.6628
0.5	.6915	.6950	.6985
0.6	.7257	.7291	.7324
0.7	.7580	.7611	.7642
0.8	.7881	.7910	.7939
0.9	.8159	.8186	.8212
1.0	.8413	.8438	.8461
1.1	.8643	.8665	.8686
1.2	.8849	.8869	.8888
1.3	.9032	.9049	.9066
1.4	.9192	.9207	.9222
1.5	.9332	.9345	.9357
1.6	.9452	.9463	.9474
1.7	.9554	.9564	.9573
1.8	.9641	.9649	.9656

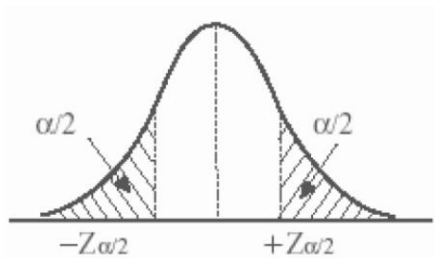
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{2}{\sqrt{450}} = 0.1706$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (14 - 0.1706, 14 + 0.1706) = (13.8294, 14.1706)$$

B. Con un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea un tercio de 0.1706.

El error debe ser $\frac{0.1706}{3} \approx 0.0569$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.0569 \Rightarrow \frac{1.645 \cdot 2}{0.0569} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 2}{0.0569} \right)^2 = 3343.238$$

Como n debe ser entero y superior al “n” hallado el tamaño mínimo es de 3344 clientes.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2020**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen**.
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75.**

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

- A.** Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.
1. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
 2. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
 3. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

BLOQUE 2

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

- A.** [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x+5}{2x^2+4x-30}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en $x = 3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 5 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x^2 + 2x - b & \text{si } x > 4 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = 2$ y en $x = 4$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

- A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [1 PUNTO] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- C. [0,25 PUNTOS] Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.
- D. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

BLOQUE 3

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En una población de 3510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-35 años	36-55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1759
No colabora con ninguna ONG	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

Elegido un habitante al azar,

- A. [1,25 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.
- B. [1,25 PUNTOS] Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.

- A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.
- B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES**Ejercicio 1** [2,5 PUNTOS]

A. Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

- [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
- [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
- [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

- Llamemos “x” al número de archivadores, “y” al número de cuadernos y “z” al número de carpetas.

“Tenemos un presupuesto de 600 € y cada unidad vale 6, 3 y 2 euros respectivamente” $\rightarrow$
 $6x + 3y + 2z = 600$

“El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas” $\rightarrow y = \frac{z}{4}$

“El número total de archivadores y de carpetas será de 165” $\rightarrow x + z = 165$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ y = \frac{z}{4} \\ x + z = 165 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ z = 4y \\ x + z = 165 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ x + z = 165 \end{array} \right\}$$

- Dado su aspecto estudiamos su compatibilidad por Gauss. Obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ x + z = 165 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 6 \cdot \text{Ecuación 3ª} \\ 6x + 3y + 2z = 600 \\ -6x - 6z = -990 \\ \hline 3y - 4z = -390 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ 3y - 4z = -390 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 3ª} + 3 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 12y - 16z = -1560 \\ -12x + 3z = 0 \\ \hline -13y = -1560 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ -13z = -1560 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ z = \frac{-1560}{-13} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ z = 120 \end{array} \right\}$$

Este sistema triangular es compatible determinado. Tiene una solución única.

3. Resolvemos el sistema.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ -4y + z = 0 \\ \boxed{z = 120} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 240 = 600 \\ -4y + 120 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 360 \\ -4y = -120 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 360 \\ \boxed{y = \frac{120}{4} = 30} \end{array} \right\} &\Rightarrow 6x + 90 = 360 \Rightarrow 6x = 270 \Rightarrow \boxed{x = \frac{270}{6} = 45} \end{aligned}$$

La solución es 45 archivadores, 30 cuadernos y 120 carpetas.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Llamamos “x” al número de acciones de clase A e “y” al número de acciones de clase B.

La función objetivo es el beneficio obtenido: $B(x, y) = 0,2x + 0,08y$.

Establecemos las restricciones mediante inecuaciones:

“La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200” $\rightarrow x + y \leq 1200$

“No comprará más de 500 acciones del tipo A” $\rightarrow x \leq 500$

“Está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B” $\rightarrow y \geq 350$

“No quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A” $\rightarrow y \leq 3x$

“El número de acciones debe ser positivo” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

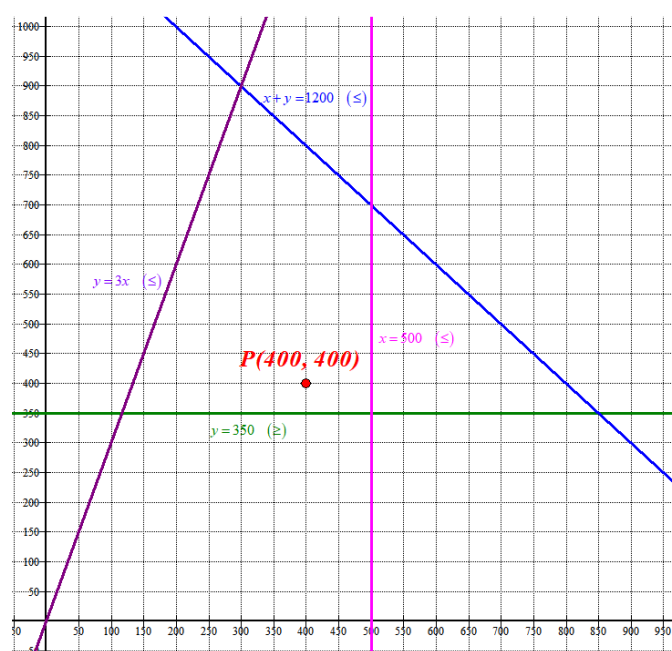
Las restricciones se agrupan en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Represento las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible donde está la solución del problema.

$$x + y = 1200 \quad (\leq) \quad x = 500 \quad (\leq) \quad y = 350 \quad (\geq) \quad y = 3x \quad (\leq) \quad x \geq 0; y \geq 0$$

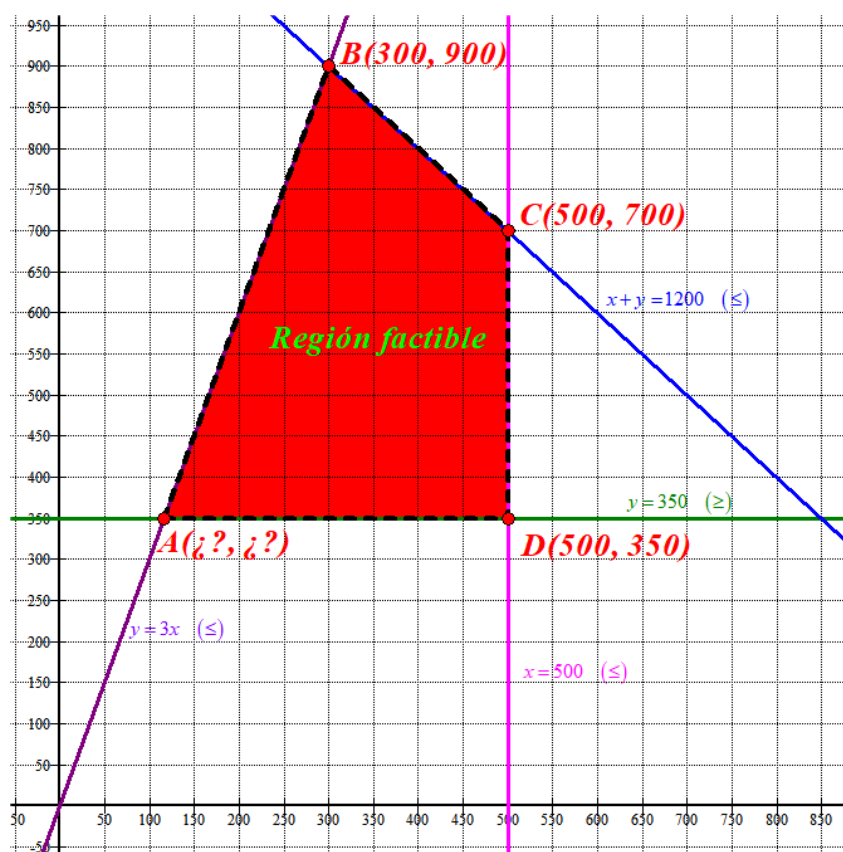
x	y = 1200 - x	x = 500	y	x	y = 350	x	y = 3x	
0	1200	500	0	0	350	0	0	Primer cuadrante
1200	0	500	100	100	350	100	300	



Comprobamos si el punto P(400, 400) cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 400 + 400 \leq 1200 \\ 400 \leq 500 \\ 400 \geq 350 \\ 400 \leq 1200 \\ 400 \geq 0; 400 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la zona donde está situado el punto P y delimitado por las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo en el dibujo siguiente.



Determinamos las coordenadas del vértice A resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = 350 \\ y = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow 350 = 3x \Rightarrow x = \frac{350}{3} \quad \text{El vértice A tiene coordenadas } A\left(\frac{350}{3}, 350\right)$$

Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices en busca de un máximo beneficio.

$$A\left(\frac{350}{3}, 350\right) \rightarrow B\left(\frac{350}{3}, 350\right) = 0,2 \frac{350}{3} + 0,08 \cdot 350 = \frac{154}{3}$$

$$B(300, 900) \rightarrow B(300, 900) = 0,2 \cdot 300 + 0,08 \cdot 900 = 132$$

$$C(500, 700) \rightarrow B(500, 700) = 0,2 \cdot 500 + 0,08 \cdot 700 = 156 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(500, 350) \rightarrow B(500, 350) = 0,2 \cdot 500 + 0,08 \cdot 350 = 128$$

Debe comprar 500 acciones clase A y 700 de clase B para obtener un máximo beneficio de 156 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x+5}{2x^2+4x-30}$

- [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
- [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
- [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en $x = 3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-5 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x^2+2x-b & \text{si } x > 4 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = 2$ y en $x = 4$.

A.1. Es una función racional y su dominio son todos los reales menos los valores que anulen el denominador.

$$f(x) = \frac{x+5}{2x^2+4x-30} \Rightarrow 2x^2+4x-30=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2+8}{2} = 3 = x \\ \frac{-2-8}{2} = -5 = x \end{cases}$$

No existe el valor de la función en estos puntos y por tanto es discontinua en $x = 3$ y en $x = -5$.

A.2. La discontinuidad en $x = -5$ es evitable.

Comprobemos si existe el límite de la función cuando x se acerca a -5 .

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\cancel{x+5}}{2(x-3)\cancel{(x+5)}} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{2(x-3)} = \frac{1}{-16}.$$

Si definimos la función dándole el valor $-1/16$ para $x = -5$ entonces será continua.

La discontinuidad en $x = 3$ es inevitable, pues $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{8}{0} = \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} & \text{si } x \neq -5 \text{ y } x \neq 3 \\ -\frac{1}{16} & \text{si } x = -5 \end{cases}$$

Esta función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$

A.3. Calculamos el valor de los límites laterales.

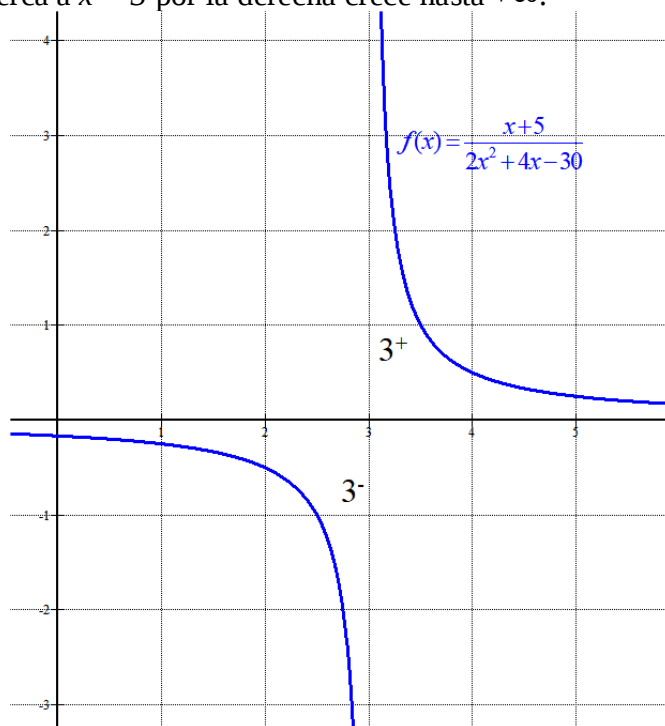
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Para } x = 2,99 \text{ la función vale } f(2,99) = \frac{2,99+5}{2 \cdot 2,99^2 + 4 \cdot 2,99 - 30} = -50 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Para $x = 3,01$ la función vale $f(3,01) = \frac{3,01+5}{2 \cdot 3,01^2 + 4 \cdot 3,01 - 30} = 50 > 0$

En $x = 3$ hay una asíntota y la función conforme se acerca a $x = 3$ por la izquierda decrece hasta $-\infty$ y conforme se acerca a $x = 3$ por la derecha crece hasta $+\infty$.



B. La función debe ser continua en $x = 2$ y en $x = 4$. Y debe cumplirse que los límites y el valor de la función en dichos puntos coincidan.

- Existe $f(2) = \frac{2+2a}{2-5} = \frac{2+2a}{-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2a}{x-5} = \frac{2+2a}{-3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 5 = 4 - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Deben ser iguales} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{2+2a}{-3} = -1 \Rightarrow 2+2a = 3 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$
- $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

Se cumple si $a = \frac{1}{2}$.

- Existe $f(4) = 4^2 - 5 = 11$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 5 = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x^2 + 2x - b = 16 + 8 - b \end{cases} \Rightarrow \text{Deben ser iguales} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 11 = 24 - b \Rightarrow \boxed{b = 13}$
- $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 11$

Se cumple si $b = 13$.

Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$ y $b = 13$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

C. [0,25 PUNTOS] Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.

D. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

A. Puntos de corte con el eje OY:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow A(0,0) \\ g(0) = 0 \Rightarrow A(0,0) \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Los puntos de corte con eje OX de la función $f(x)$ son A(0, 0) y B(3, 0).

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte con eje OX de la función $g(x)$ son A(0, 0) y C(1, 0).

B. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

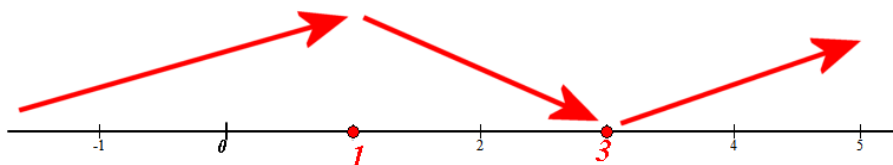
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función $f(x)$ son $x = 1$ y $x = 3$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 9 > 0$. La función $f(x)$ crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$. La función $f(x)$ decrece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 48 - 48 + 9 = 9 > 0$. La función $f(x)$ crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

Tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.

Como $f(1) = 1^3 - 6 + 9 = 4$, el máximo relativo es $P(1, 4)$

Como $f(3) = 3^3 - 54 + 27 = 0$, el mínimo relativo es $Q(3, 0)$

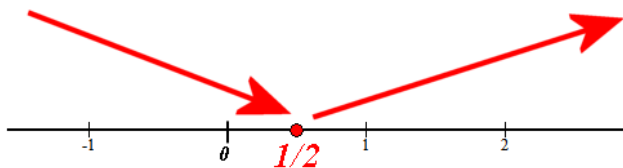
Realizamos el estudio para la función $g(x) = x^2 - x$.

$$g(x) = x^2 - x \Rightarrow g'(x) = 2x - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

El punto crítico de la función $g(x)$ es $x = 1/2$.

- En $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = -1 < 0$. La función $g(x)$ decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 2 - 1 = 1 > 0$. La función $g(x)$ crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

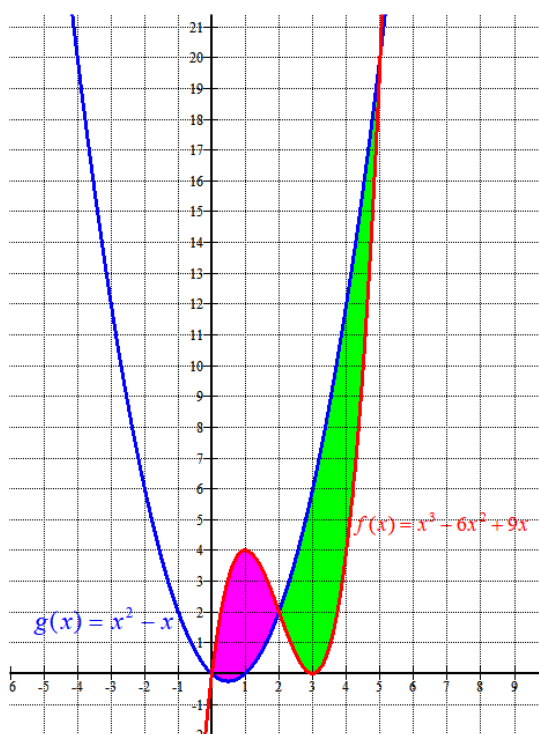


La función $g(x) = x^2 - x$ crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $x = 1/2$.

Como $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, el mínimo relativo es $R\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

C.



D. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas, aunque se aprecia en el dibujo que ocurre en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 5$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = x^2 - x \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 7x + 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = x \\ \frac{7-3}{2} = 2 = x \end{cases} \end{cases}$$

El área total es la suma del área del recinto rosa más el área del recinto verde.
Calculamos cada una con una integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área recinto rosa} &= \int_0^2 f(x) - g(x) dx = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 9x - (x^2 - x) dx = \int_0^2 x^3 - 7x^2 + 10x dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 7 \frac{x^3}{3} + 5x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} - 7 \frac{2^3}{3} + 5 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 7 \frac{0^3}{3} + 5 \cdot 0^2 \right] = 4 - \frac{56}{3} + 20 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área recinto verde} &= \int_2^5 g(x) - f(x) dx = \int_2^5 x^2 - x - (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \int_2^5 -x^3 + 7x^2 - 10x dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + 7 \frac{x^3}{3} - 5x^2 \right]_2^5 = \left[-\frac{5^4}{4} + 7 \frac{5^3}{3} - 5 \cdot 5^2 \right] - \left[-\frac{2^4}{4} + 7 \frac{2^3}{3} - 5 \cdot 2^2 \right] = \\ &= -\frac{625}{4} + \frac{875}{3} - 125 + 4 - \frac{56}{3} + 20 = \frac{63}{4} \end{aligned}$$

El área encerrada por las dos curvas vale $\frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \boxed{\frac{253}{12} = 21.083 u^2}$

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En una población de 3510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-35 años	36-55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1759
No colabora con ninguna ONG	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

Elegido un habitante al azar,

- A.** [1,25 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.
- B.** [1,25 PUNTOS] Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años?

- A.** Hay un total de 3510 personas y de ellas 652 tienen edad comprendida entre 18 y 35 años. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Edad entre 18 y 35}) = \frac{652}{3510} = \boxed{0,186}$$

- B.** Es una probabilidad condicionada. Hay 1751 personas que no colaboran con ninguna ONG y de ellas 1034 tienen entre 36 y 55 años.

$$P(\text{Edad entre 36 y 55} / \text{No colabora con ninguna ONG}) =$$

$$= \frac{P(\text{Edad entre 36 y 55} \cap \text{No colabora con ninguna ONG})}{P(\text{No colabora con ninguna ONG})} = \frac{1034}{1751} = \boxed{0,5905}$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.

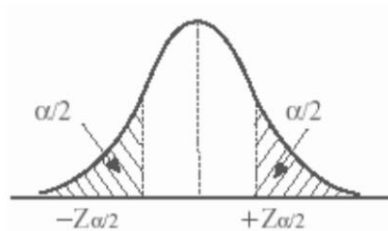
A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

A. $X =$ Número de horas semanales dedicadas a la lectura. $X = N(\mu, 2)$

Con un nivel de confianza del 94% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot \frac{2}{\sqrt{375}} = 0,1942$$

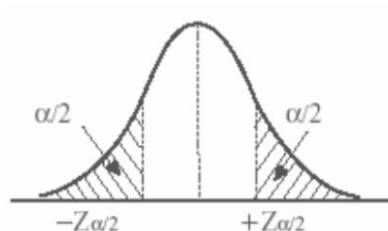
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4 - 0,1942, 4 + 0,1942) = (3,8058, 4,1942)$$

B. $X =$ Número de horas semanales dedicadas a la lectura. $X = N(\mu, 2)$

Con un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de $\frac{0,1942}{4}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{0,1942}{4} \Rightarrow \frac{1,645 \cdot 2}{\frac{0,1942}{4}} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 8}{0,1942} \right)^2 = 4592,12$$

El tamaño mínimo es de 4593 personas.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JULIO 2020**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen**.
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75.**

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.

Semanalmente se cuenta con 20000 litros de zumo de piña, con 15000 de zumo de mango y con 15000 de zumo de papaya.

Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

- A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.
- B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
- C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

BLOQUE 2**Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]**

- A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

- A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en $x = -3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

- B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 5 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

BLOQUE 3**Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]**

- A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?
- B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.

Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

- A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?
- B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

SOLUCIONES**BLOQUE 1****Ejercicio 1** [2,5 PUNTOS]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.

Semanalmente se cuenta con 20000 litros de zumo de piña, con 15000 de zumo de mango y con 15000 de zumo de papaya.

Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Llamemos “x” al número de litros de la bebida A e “y” al número de litros de la bebida B.

Para establecer las restricciones completamos la tabla proporcionada en el enunciado del ejercicio.

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya	Ingresos
Nº de litros de A (x)	0,5x litros	0,5x litros		1,5x
Nº de litros de B (y)	0,4y litros		0,6y litros	1,75y
TOTALES	0,5x + 0,4y	0,5x	0,6y	1,5x + 1,75y

La función a maximizar son los ingresos $f(x, y) = 1,5x + 1,75y$.

Sometida a las restricciones:

“Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña” $\rightarrow 0,5x + 0,4y \leq 20000$

“Semanalmente se cuenta con 15 000 de zumo de mango” $\rightarrow 0,5x \leq 15000$

“Semanalmente se cuenta con 15 000 de zumo de papaya” $\rightarrow 0,6y \leq 15000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reuniendo las restricciones en un sistema de inecuaciones.

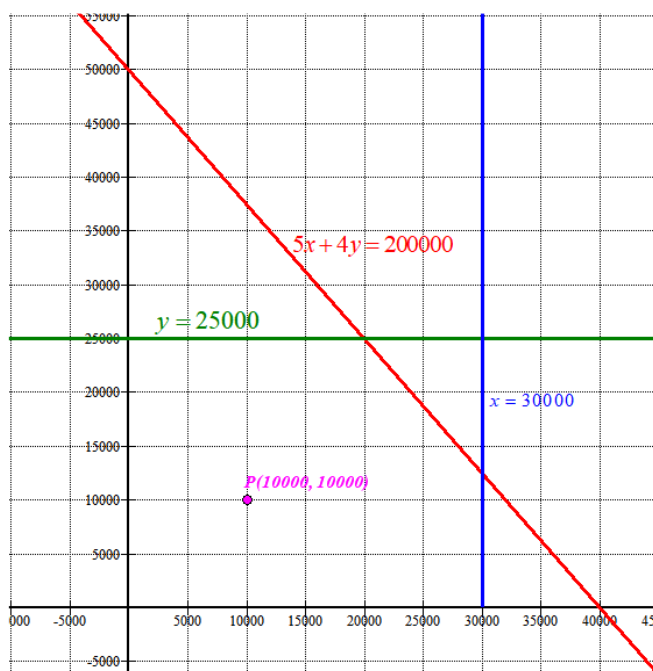
$$\left. \begin{array}{l} 0,5x + 0,4y \leq 20000 \\ 0,5x \leq 15000 \\ 0,6y \leq 15000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 200000 \\ x \leq 30000 \\ y \leq 25000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$$5x + 4y = 200000$$

x	y = $\frac{200000 - 5x}{4}$
0	50000
40000	0

$x = 30000$; recta vertical $y = 25000$; recta horizontal
 $x \geq 0; y \geq 0$; primer cuadrante



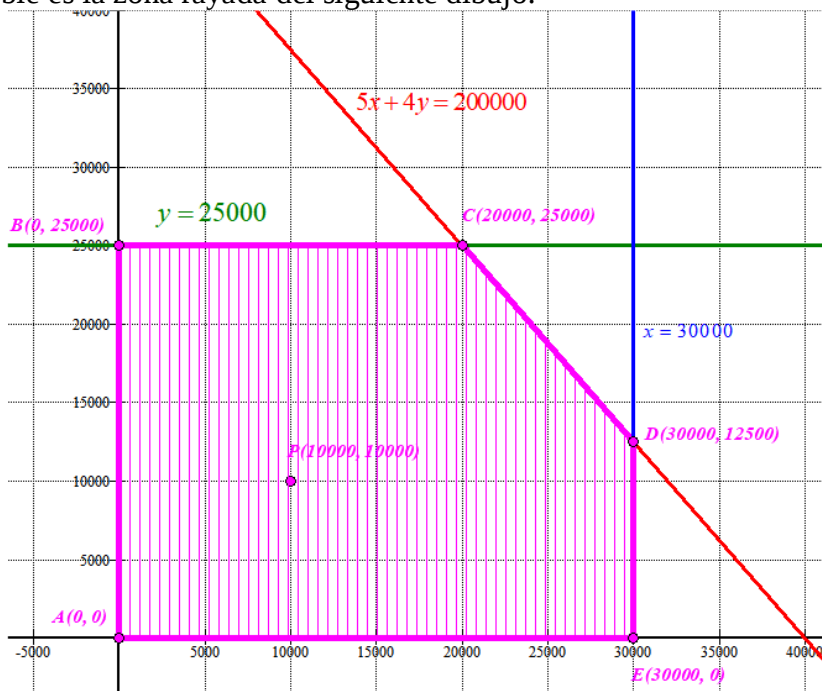
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 200000 \\ x \leq 30000 \\ y \leq 25000 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas roja y verde y a la izquierda de la recta vertical azul. Comprobamos si el punto $P(10000, 10000)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50000 + 40000 \leq 200000 \\ 10000 \leq 30000 \\ 10000 \leq 25000 \\ 10000 \geq 0; \quad 10000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Son ciertas.}$$

La región factible es la zona rayada del siguiente dibujo.



Valoramos la función $f(x, y) = 1,5x + 1,75y$ en cada vértice en busca de un valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$$

$$B(0, 25000) \rightarrow f(0, 25000) = 1,75 \cdot 25000 = 43750 \text{ €}$$

$$C(20000, 25000) \rightarrow f(20000, 25000) = 1,5 \cdot 20000 + 1,75 \cdot 25000 = 73750 \text{ € ;Máximo!}$$

$$D(30000, 12500) \rightarrow f(30000, 12500) = 1,5 \cdot 30000 + 1,75 \cdot 12500 = 66875 \text{ €}$$

$$E(30000, 0) \rightarrow f(30000, 0) = 45000 \text{ €}$$

Los máximos ingresos cumpliendo las restricciones son de 73 750 € y se consiguen en el punto C(20000, 25000), es decir, con la producción de 20 000 litros de A y 25 000 litros de B.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Llamamos “a” al número de televisores del modelo A vendidos, “b” al número de televisores modelo B y “c” al número de televisores del modelo C.

A. Establecemos las ecuaciones asociadas a la información dada en el ejercicio.

“Ha vendido 750 televisores” $\rightarrow a + b + c = 750$

“De A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B” $\rightarrow a + c = 2b$

“El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A” $\rightarrow$ El modelo B cuesta $320 \cdot 0,8 = 256$ euros, el modelo C cuesta $320 \cdot 1,1 = 352$ euros. Como los ingresos son de 230400 euros $\rightarrow 320a + 256b + 352c = 230400$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 750 \\ a + c = 2b \\ 320a + 256b + 352c = 230400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 750 \\ a + c = 2b \\ 10a + 8b + 11c = 7200 \end{array} \right\}$$

B. Utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema y establecer con facilidad su compatibilidad.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 750 \\ a - 2b + c = 0 \\ 10a + 8b + 11c = 7200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ a - 2b + c = 0 \\ -a - b - c = -750 \\ \hline -3b = -750 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 10 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 10a + 8b + 11c = 7200 \\ -10a - 10b - 10c = -7500 \\ \hline -2b + c = -300 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 750 \\ -3b = -750 \\ -2b + c = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio ecuación 3}^a \text{ por 2}^a \\ \text{y las incógnitas de lugar} \\ \text{para conseguir un sistema} \\ \text{triangular} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c + b = 750 \\ c - 2b = -300 \\ -3b = -750 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene solución única. Es compatible determinado.

C. Terminamos de resolver el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} a + c + b = 750 \\ c - 2b = -300 \\ -3b = -750 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c + b = 750 \\ c - 2b = -300 \\ \boxed{b = \frac{-750}{-3} = 250} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c + 250 = 750 \\ c - 500 = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 500 \\ \boxed{c = 200} \end{array} \right\} \Rightarrow a + 200 = 500 \Rightarrow \boxed{a = 300}
 \end{array}$$

Se han vendido 300 televisores del modelo A, 250 del modelo B y 200 del modelo C.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - 1(x^2 + x - 2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

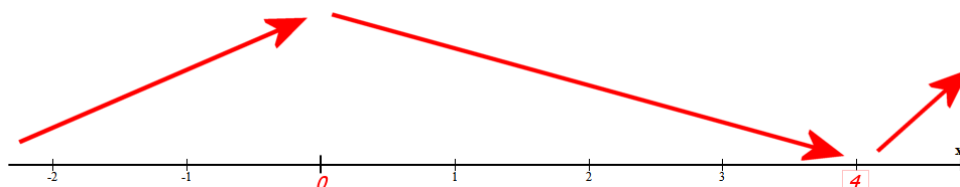
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 4 y por último, después de 4.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$, la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 4(-1)}{(-1-2)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$
- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$, la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 4}{(1-2)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$
- En $(2, 4)$ tomamos $x = 3$, la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 12}{(3-2)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$, la derivada vale $f'(5) = \frac{5^2 - 20}{(5-2)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 4$.

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{0 - 2} = 1 \quad f(4) = \frac{4^2 + 4 - 2}{4 - 2} = 9$$

Máximo en $(0, 1)$ y mínimo en $(4, 9)$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6}$

- [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
- [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
- [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en $x = -3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 5 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

A.1. Veamos el dominio de $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6}$.

Si igualamos a cero el denominador.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 = x \\ \frac{-5-1}{2} = -3 = x \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, -3\}$.

Esta función es discontinua en $x = -2$ y en $x = -3$.

A.2. Veamos en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$\begin{array}{r rrrr} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) \\ \hline & 1 & 3 & 0 \\ 2x+4 = 2(x+2) \end{array}$
--

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{-2+3} = 2$$

Veamos en $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-6+4}{(-3)^2+5(-3)+6} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Solo es evitable la discontinuidad en $x = -2$.

La nueva función sería $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} & \text{si } x \neq -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$.

Esta nueva definición de la función solo es discontinua en $x = -3$.

A.3. Calculamos los límites pedidos.

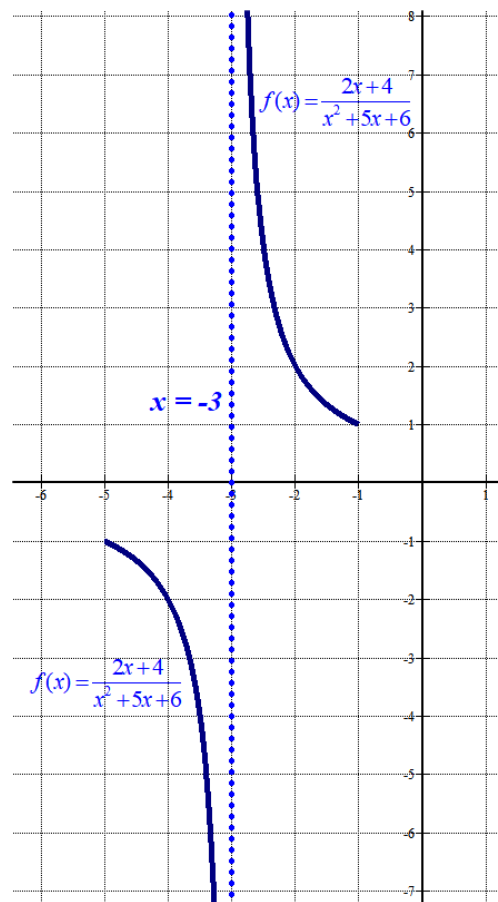
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

x	$f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6}$
-2.5	4
-2.9	20
-2.99	200

x	$f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6}$
-3.1	-20
-3.01	-200
-3.001	-2000

Esto significa que en la asíntota $x = -3$ la función se comporta como indica el gráfico.



B. Forzamos la continuidad en $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} ax^2 + 2x - 1 = a - 2 - 1 = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \end{cases} \Rightarrow a - 3 = -4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Forzamos la continuidad en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 5 = 9 - 5 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{b+x}{3x-2} = \frac{b+3}{9-2} = \frac{b+3}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{b+3}{7} = 4 \Rightarrow b+3 = 28 \Rightarrow \boxed{b = 25}$$

Los valores necesarios para que la función sea continua son $a = -1$ y $b = 25$.

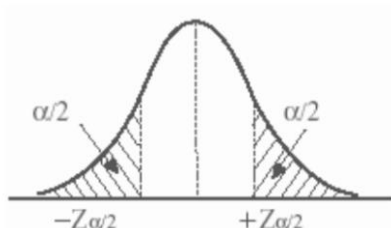
Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

- A.** [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?
- B.** [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

A. $X = \text{Precio de alquiler de vivienda. } X = N(\mu, 265)$

Con un nivel de confianza del 97% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 20,7 €.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{265}{\sqrt{n}} = 20,7 \Rightarrow \frac{2,17 \cdot 265}{20,7} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2,17 \cdot 265}{20,7} \right)^2 = 771,739$$

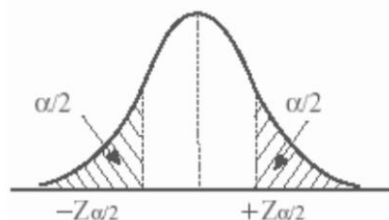
El tamaño mínimo es de 772 viviendas.

B. $X = \text{Precio de alquiler de vivienda. } X = N(\mu, 134)$

Tamaño de la muestra $n = 357$. Media muestral $\bar{x} = 448$ euros.

Con un nivel de confianza del 93% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{134}{\sqrt{357}} = 12,837$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (448 - 12,837, 448 + 12,837) = (435,163, 460,837)$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

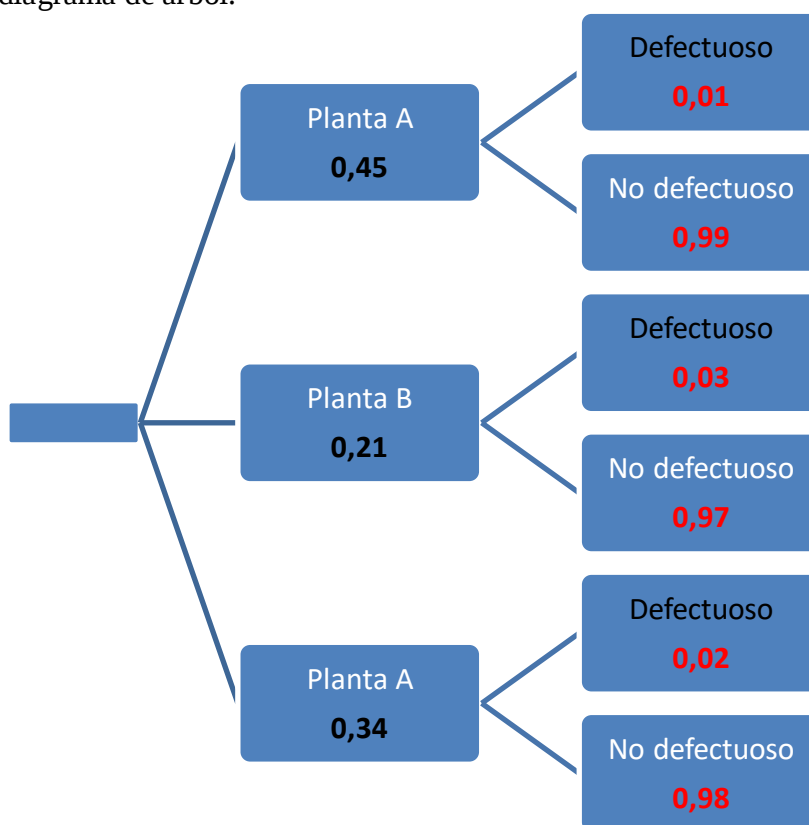
Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.

Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

Realizamos el diagrama de árbol.



A. Ocurre en la rama superior y la probabilidad pedida es:

$$P(\text{De planta A y No defectuoso}) = 0,45 \cdot 0,99 = \boxed{0,4455}$$

B. Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Planta B} / \text{No defectuoso}) &= \frac{P(\text{Planta B} \cap \text{No defectuoso})}{P(\text{No defectuoso})} = \\
 &= \frac{0,21 \cdot 0,97}{0,45 \cdot 0,99 + 0,21 \cdot 0,97 + 0,34 \cdot 0,98} = \frac{0,2037}{0,9824} = \boxed{0,2073}
 \end{aligned}$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x - 3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92% para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98% sea de 0,7?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos.

¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x+3 & \text{si } -4 < x < -2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{x+15}{x+b} & \text{si } 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

A. Debemos discutir el sistema:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene asociada una matriz de coeficientes y una matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 450 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cuando los rangos de ambas matrices son iguales, en cuyo caso el sistema tendrá solución.

Consideramos el menor que resulta de quitar la tercera fila y tercera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

El rango de A/B es como máximo 3, veamos cuando el determinante es nulo.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 15 & 20 & 450 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 60k - 900 - 1350 + 30k = 90k - 2250$$

Lo igualamos a cero.

$$|A/B| = 0 \Rightarrow 90k - 2250 = 0 \Rightarrow k = \frac{2250}{90} = 25$$

Si $k \neq 25$ el rango de A/B es 3 distinto del rango de A que es 2. El sistema no tiene solución.

Si $k = 25$ el rango de A/B no es 3 y por tanto vale 2 al igual que el rango de A e igual al número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

Resolvemos en este caso el sistema, que con $k = 25$ queda:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = 25 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 15x + 15y = 375 \\ -15x - 20y = -450 \\ \hline -5y = -75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 15x - 10y = 0 \\ -15x - 20y = -450 \\ \hline -30y = -450 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ -5y = -75 \\ -30y = -450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ y = \frac{-75}{-5} = 15 \\ y = \frac{-450}{-30} = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 300 = 450 \\ \boxed{y = 15} \end{cases} \Rightarrow 15x = 450 - 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{150}{15} = 10}$$

Si $k = 25$ la solución es $x = 10$ cajas del tipo A e $y = 15$ cajas del tipo B.

B1. Utilizamos las propiedades de los determinantes.

$$|A^{-1}B^2| = |A^{-1}| \cdot |B^2| = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 = \frac{1}{-3} \cdot 10^2 = -\frac{100}{3}$$

B2. $|C| = 6|A| = 6(-3) = -18$ y además $|B^t| = |B| = 10$.

$$\text{Tenemos que } |CB^t| = |C| \cdot |B^t| = (-18)(10) = -180$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]**A.** [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **A1.** [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.**A2.** [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.**A3.** [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x - 3$.**A4.** [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.**B.** [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?**A1.** Si $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -0^2 + 0 + 5 = 5$

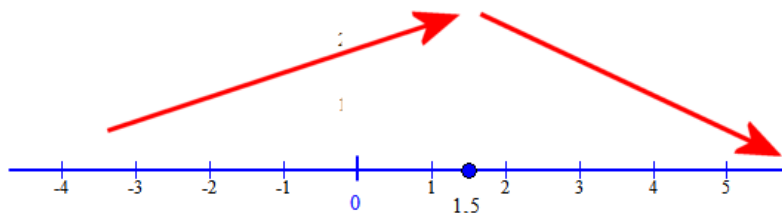
El punto de corte de la gráfica de la función con el eje OY es P(0, 5).

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{-2} = \begin{cases} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{-2} = 1,19 \\ = \frac{-3 - \sqrt{29}}{-2} = 4,19 \end{cases}$$

Los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX son Q(1,19, 0) y R(4,19, 0)

A2. La derivada de la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ es $f'(x) = -2x + 3$. Si la igualamos a cero, para buscar los puntos críticos $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 0 + 3 = 3 > 0$. La función crece.
- En el intervalo $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -4 + 3 = -1 < 0$. La función decrece.

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.Tiene un máximo relativo en $x = \frac{3}{2}$.**A3.** Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 3x + 5 \\ y = x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 3x + 5 = x - 3 \Rightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow$$

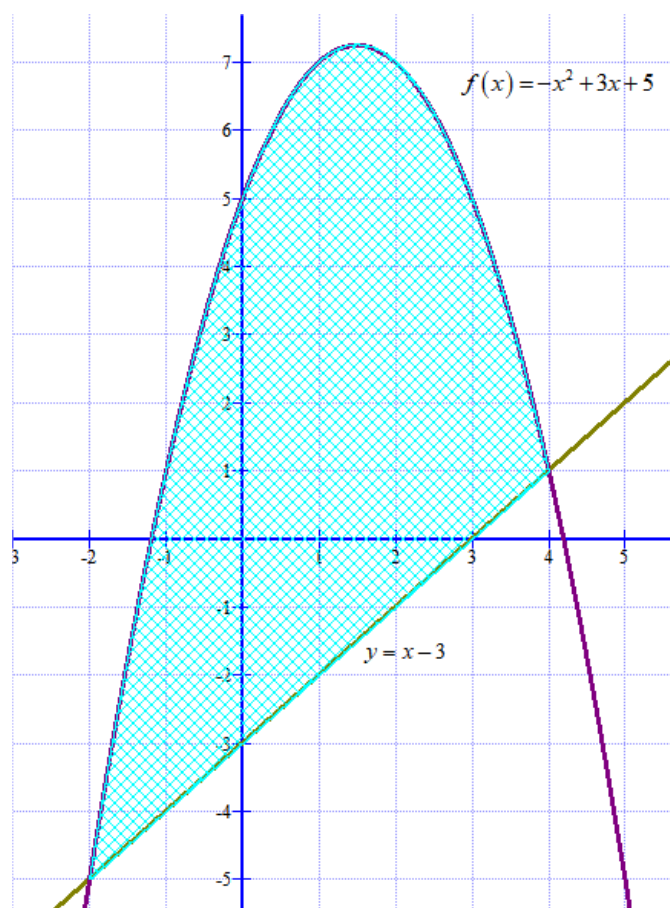
$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2} = \begin{cases} = \frac{-2 + 6}{-2} = -2 \\ = \frac{-2 - 6}{-2} = 4 \end{cases}$$

Las gráficas de la parábola y la recta coinciden en $x = -2$ y $x = 4$.

Realizamos una tabla de valores para cada función y dibujamos sus gráficas y la región encerrada por ellas.

x	$y = -x^2 + 3x + 5$
-2	-5
1	7
1,5	7,25
4	1

x	$y = x - 3$
-2	-5
1	-2
4	1



A4. El área es la integral definida entre -2 y 4 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 -x^2 + 3x + 5 - (x - 3) dx &= \int_{-2}^4 -x^2 + 2x + 8 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right]_{-2}^4 = \\ &= \left[-\frac{4^3}{3} + 4^2 + 32 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 8(-2) \right] = -\frac{64}{3} + 48 - \frac{8}{3} - 4 + 16 = 60 - 24 = 36 \end{aligned}$$

El área del recinto encerrado entre las dos gráficas tiene un valor de 36 unidades cuadradas.

B. La función es discontinua en los valores que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{2+8}{2} = 5 = x \\ \frac{2-8}{2} = -3 = x \end{cases}$$

La función es discontinua en $x = -3$ y en $x = 5$.

Veamos si existe el límite de la función en alguno de estos valores.

En $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \frac{25 - 5 - 12}{25 - 10 - 15} = \frac{8}{0} = \infty$$

En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \frac{9 + 3 - 12}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Factorizamos los polinomios del numerador y denominador.

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{1+7}{2} = 4 = x \\ \frac{1-7}{2} = -3 = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-4)}{\cancel{(x+3)}(x-5)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-4}{x+5} = \frac{-4}{5}$$

Se puede definir de nuevo para que sea continua en $x = -3$. La discontinuidad en $x = 5$ es inevitable.

La nueva definición sería:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} & \text{si } x \neq -3 \\ -\frac{4}{5} & \text{si } x = -3 \end{cases} \quad \text{es discontinua en } x = 5$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92% para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98% sea de 0,7?

A. Sea X la variable aleatoria que mide la edad de los asistentes a un concierto de música clásica. Sabemos que sigue una $N(\mu, 3)$.

Utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ para establecer el intervalo de confianza.

$$n = 350, \bar{x} = 64,3 \text{ años}, \sigma = 3 \text{ años}$$

Para un nivel de confianza del 92% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(64,3 - 1,75 \cdot \frac{3}{\sqrt{350}}, 64,3 + 1,75 \cdot \frac{3}{\sqrt{350}} \right)$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (64.01, 64.58)}$$

B. Para un nivel de confianza del 98% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$$

El error debe ser menor de 0,7.

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,7 \Rightarrow 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0,7 \Rightarrow 2,33 \cdot \frac{3}{0,7} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,33 \cdot \frac{3}{0,7} \right)^2 = 99,7$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 100 espectadores.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos.

¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Llamamos x = número de rollos del estampado A y y = número de rollos del estampado B.
Las restricciones del problema son:

Al menos 50 rollos de tela del estampado A $\rightarrow x \geq 50$

Al menos 50 rollos de tela del estampado B $\rightarrow y \geq 50$

El número de rollos del B (y) no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A (x) $\rightarrow$
 $y \geq \frac{x}{2}$

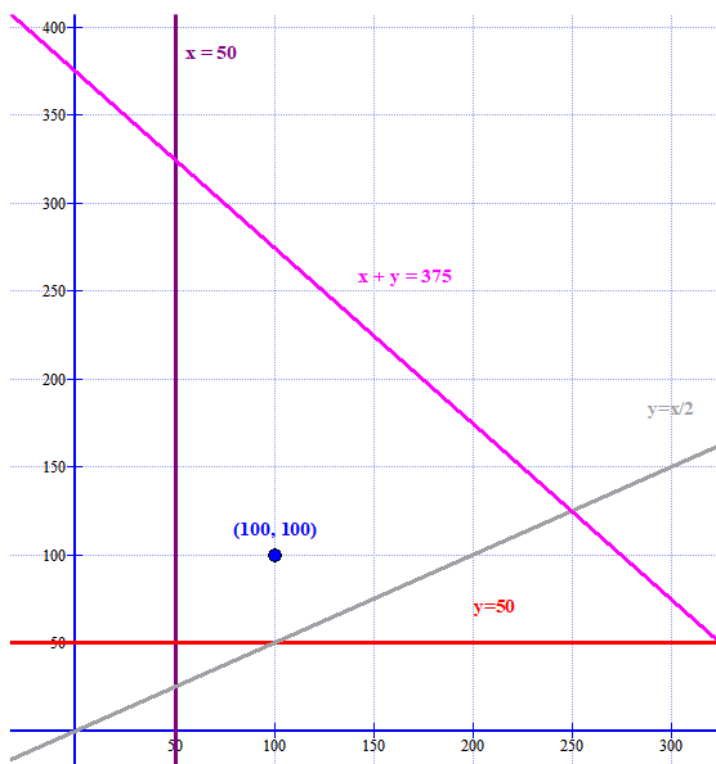
La capacidad del almacén es de 375 rollos $\rightarrow x + y \leq 375$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \leq 375 \end{array} \right\}$$

La función que debemos maximizar es la función ingresos: $I(x, y) = 30x + 20y$

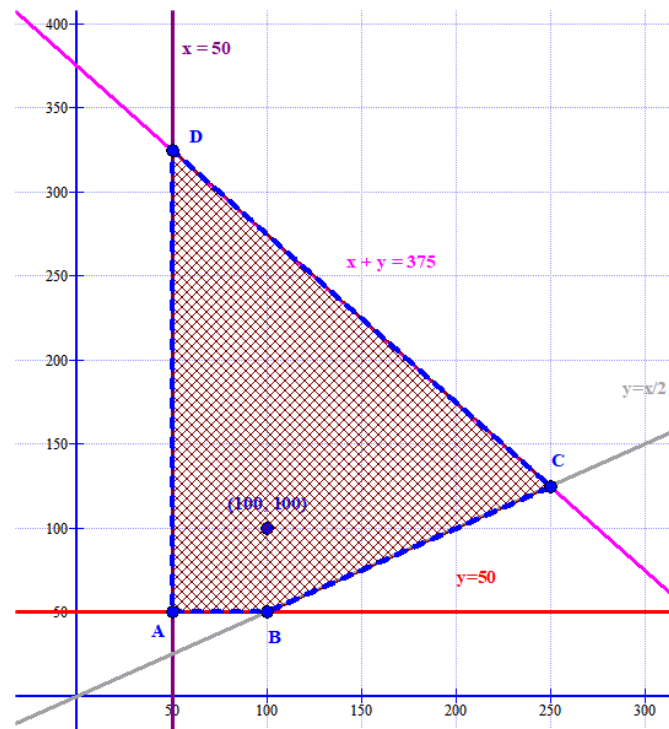
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:



Y decidiendo la zona objetivo probamos el punto (100, 100):

$$\left. \begin{array}{l} 100 \geq 50 \\ 100 \geq 50 \\ 100 \geq \frac{100}{2} \\ 100 + 100 \leq 375 \end{array} \right\} \text{ cumple todas las restricciones.}$$

Luego la región factible es la zona rayada del dibujo.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 375 \end{array} \right\} \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 375 \Rightarrow 2x + x = 750 \Rightarrow x = \frac{750}{3} = 250 \Rightarrow y = \frac{250}{2} = 125$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 50 \\ x + y = 375 \end{array} \right\} \Rightarrow 50 + y = 375 \Rightarrow y = 325$$

Los puntos tienen coordenadas C(250, 125) y D(50, 325).

Las coordenadas de los vértices de la región factible y candidatos a maximizar la función ingresos son A(50, 50), B(100, 50), C(250, 125) y D(50, 325).

Veamos con cuál de los vértices se obtienen unos ingresos máximos.

$$A(50, 50) \rightarrow I(50, 50) = 1500 + 100 = 2500\text{€}$$

$$B(100, 50) \rightarrow I(100, 50) = 3000 + 1000 = 4000\text{€}$$

$$C(250, 125) \rightarrow I(250, 125) = 7500 + 2500 = 10000\text{€ ; Máximo!}$$

$$D(50, 325) \rightarrow I(50, 325) = 1500 + 6500 = 8000\text{€}$$

Los ingresos máximos se obtienen en el vértice C. Con 250 estampados del tipo A y 125 del tipo B se consiguen los máximos ingresos, siendo estos de 100 000 euros.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x+3 & \text{si } -4 < x < -2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{x+15}{x+b} & \text{si } 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

A. Para que sea continua en $x = -2$ se debe cumplir:

- Existe $f(-2) = (-2)^2 + a(-2) + 5 = 9 - 2a$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -6x + 3 = 12 + 3 = 15$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + ax + 5 = 9 - 2a$.
- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow 9 - 2a = 15 \Rightarrow -6 = -2a \Rightarrow \boxed{a=3}$

Para que sea continua en $x = 0$ se debe cumplir:

- Existe $f(0) = \frac{0+15}{0+b} = \frac{15}{b}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 3x + 5 = 5$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+15}{x+b} = \frac{15}{b}$.
- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow \frac{15}{b} = 5 \Rightarrow \boxed{b = \frac{15}{5} = 3}$

B. Asíntotas verticales. $x = a$

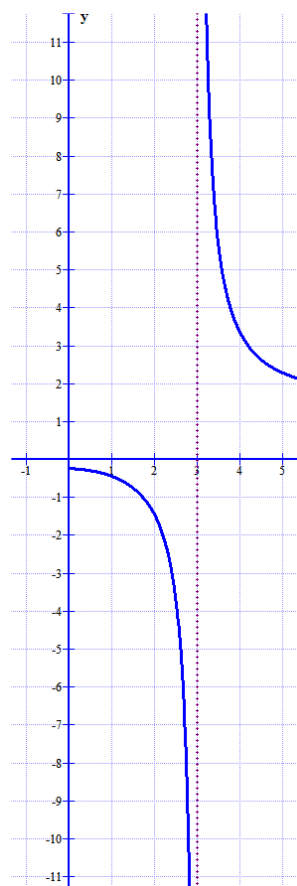
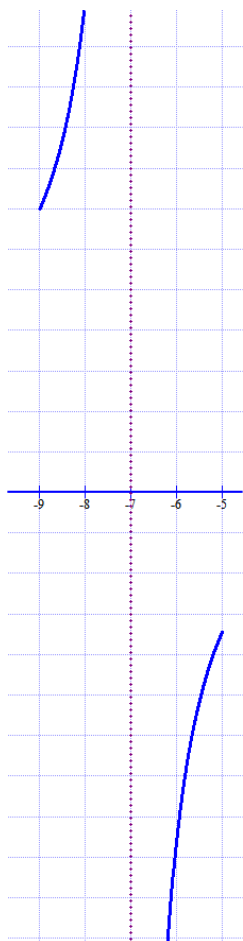
Debemos buscar los valores que anulen el denominador:

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} = \begin{cases} = \frac{-4+10}{2} = 3 \\ = \frac{-4-10}{2} = -7 \end{cases}$$

Las dos asíntotas son $x = 3$ y $x = -7$

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \frac{103}{0} = +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si tomo } x = -8 \text{ el denominador vale} \\ 64 - 32 - 21 = 11 \text{ y el cociente es } \frac{+}{+} = + \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \frac{103}{0} = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si tomo } x = -6 \text{ el denominador vale} \\ 36 - 24 - 21 = -9 \text{ y el cociente es } \frac{+}{-} = - \end{array} \right\}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 4x - 21} = \frac{23}{0} = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si tomo } x = 2 \text{ el denominador vale} \\ 4 + 8 - 21 = -9 \\ \text{y el cociente es } \frac{+}{-} = - \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 4x - 21} = \frac{23}{0} = +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si tomo } x = 4 \text{ el denominador vale} \\ 16 + 16 - 21 = 11 \\ \text{y el cociente es } \frac{+}{+} = + \end{array} \right.$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

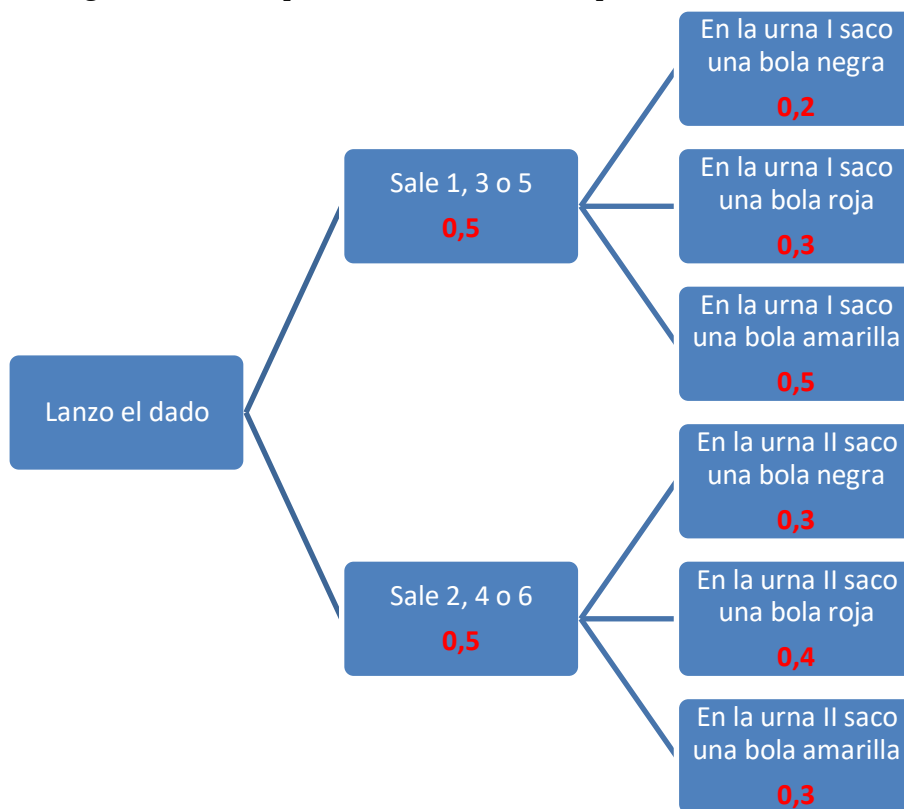
Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

Construyamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada:



$$\begin{aligned} \text{A. } P(\text{Extraer bola amarilla}) &= P(\text{salga 1, 3 o 5}) \cdot P(\text{Extraer bola amarilla en urna I}) + \\ &+ P(\text{salga 2, 4 o 6}) \cdot P(\text{Extraer bola amarilla en urna II}) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 = \boxed{0,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } P(\text{Se extrae de la urna I / la bola es roja}) &= \frac{P(\text{Extraer bola roja de la urna I})}{P(\text{Extraer bola roja})} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 0,3}{0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4} = \frac{0,15}{0,35} = \boxed{0,428} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C. } P(\text{Extraer bola amarilla de la urna II}) &= P(\text{salga 2, 4 o 6}) \cdot P(\text{Extraer bola amarilla en urna II}) = \\ &= 0,5 \cdot 0,3 = \boxed{0,15} \end{aligned}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $B \times B = B (X+A)$

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,6 puntos] Las asíntotas.

C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1** [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema:
$$\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{5a}{2} \\ 5x + 2y = a^2 \end{cases}$$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a , los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son:

$$|A| = 3, |B| = -2 \text{ y } |C| = 6.$$

Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C .

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A .

Ejercicio 2 [3,5 puntos]

A. [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades. Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1** [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $B \cdot X \cdot B = B \cdot (X+A)$

A1. Llamemos x = número de cajas del modelo A, y = número de cajas del modelo B, z = número de cajas del modelo C.

- Son 325 unidades metidos en “ x ” cajas del modelo A (cabén 5 unidades por caja), “ y ” cajas del modelo B (cabén 10 unidades por caja) y “ z ” unidades del modelo C (cabén 15 unidades por caja) $\rightarrow 325 = 5x + 10y + 15z$
- Hay un total de 35 cajas $\rightarrow x + y + z = 35$.
- El total de cajas de los modelos A y B ($x + y$) es seis veces el número de cajas del modelo C (z) $\rightarrow x + y = 6z$

Ponemos juntas estas condiciones y tenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 325 = 5x + 10y + 15z \\ x + y + z = 35 \\ x + y = 6z \end{array} \right\}$$

A2. Utilicemos Gauss para discutir el sistema que simplificado y ordenado queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ x + y + z = 35 \\ x + y - 6z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad +z \quad = 35 \\ -x \quad -2y \quad -3z \quad = -65 \\ \hline -y \quad -2z \quad = -30 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad -6z \quad = 0 \\ -x \quad -2y \quad -3z \quad = -65 \\ \hline -y \quad -9z \quad = -65 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ -y - 9z = -65 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ y + 9z = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ y \quad +9z \quad = 65 \\ -y \quad -2z \quad = -30 \\ \hline 7z \quad = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ 7z = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Simplificamos} \} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ y + 2z = 30 \\ z = 5 \end{array} \right\}$$

Este sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

A3. Sigamos con la resolución.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ y + 2z = 30 \\ \boxed{z = 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 15 = 65 \\ y + 10 = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ \boxed{y = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 40 = 50 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

La solución es $x = 10$, $y = 20$, $z = 5$

A4. Con los datos proporcionados la factura será de:

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \text{ cajas del modelo A a } 4,5\text{€} \\ y = 20 \text{ cajas del modelo B a } 8\text{€} \\ z = 5 \text{ cajas del modelo C a } 12\text{€} \end{array} \right\} \Rightarrow 10 \cdot 4,5 + 20 \cdot 8 + 5 \cdot 12 = 45 + 160 + 60 = \boxed{265\text{€}}$$

B. Si suponemos B una matriz invertible, siendo B^{-1} su matriz inversa, se despejaría:

$$B X B = B(X + A) \Rightarrow B^{-1} B X B = B^{-1} B(X + A) \Rightarrow X B = X + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X B - X = A \Rightarrow X(B - I) = A \Rightarrow \boxed{X = A(B - I)^{-1}}$$

Hemos supuesto también que la matriz $(B - I)$ es invertible.

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

- A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
 B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
 C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
 D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
 E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

A. La función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ tiene como dominio $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$, ya que estos valores excluidos anulan el denominador y por tanto no tienen imagen.

$$f(-2) = \frac{4+1}{4-4} = \frac{5}{0} = \text{No existe} \quad f(2) = \frac{4+1}{4-4} = \frac{5}{0} = \text{No existe}$$

Los puntos de corte con el eje OY:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0+1}{0-4} = -\frac{1}{4} = -0,25 \text{ El punto de corte es } P(0, -0,25)$$

Los puntos de corte con el eje OX:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

No hay puntos de corte con el eje de abscisas.

B. Asíntotas verticales. $x = 2$; $x = -2$. Al ser estos los valores excluidos del dominio.

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntota oblicua. Al tener asíntota horizontal no tiene oblicua.

C. Para estudiar el crecimiento o decrecimiento necesitamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}$$

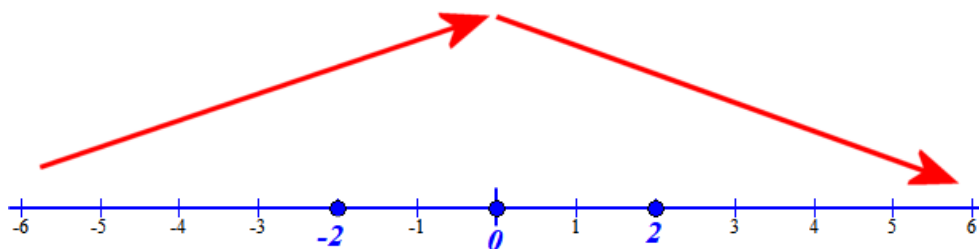
Igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -10x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 0.

- En $(-\infty, -2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{30}{(9-4)^2} > 0$ la función crece.
- En $(-2, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{20}{(1-4)^2} > 0$ la función crece.

- En $(0, 2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-10}{(1-4)^2} < 0$ la función decrece.
- En $(2, +\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-30}{(9-4)^2} < 0$ la función decrece.



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $x = 0$.

D. Para estudiar la concavidad o convexidad necesitamos la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-10(x^2 - 4)^2 - (-10x)2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-10(x^2 - 4)^2 + 40x^2(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-10\cancel{(x^2 - 4)}[(x^2 - 4) - 4x^2]}{(x^2 - 4)^{4-3}} = \frac{-10(-3x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

Si igualamos a cero.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-10(-3x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow -10(-3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow -3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{-3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-4}{3}} = \text{No existe}$$

No hay puntos de inflexión.

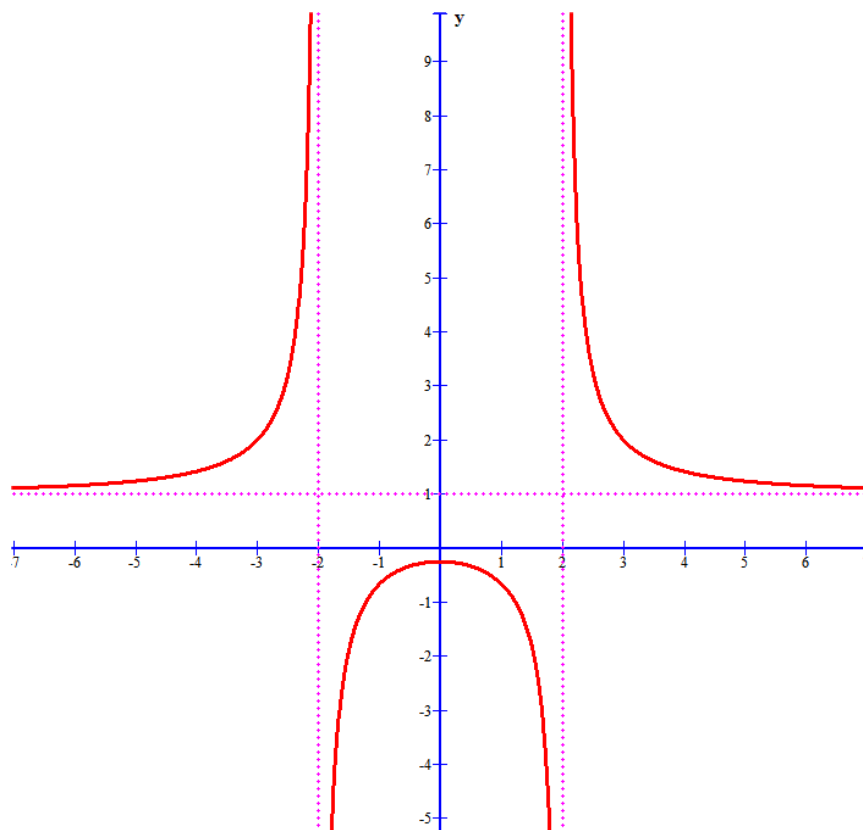
Veamos el signo de la derivada segunda antes de -2 , entre -2 y 2 , por último, después de 2 .

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ la derivada segunda vale $f''(-3) = \frac{-10(-27-4)}{(9-4)^3} = \frac{310}{125} > 0$ y la función es convexa ($\cup$).
- En $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ la derivada segunda vale $f''(0) = \frac{-10(-4)}{(0-4)^3} = \frac{40}{-64} < 0$ y la función es cóncava ($\cap$).
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ la derivada segunda vale $f''(3) = \frac{-10(-27-4)}{(9-4)^3} = \frac{310}{125} > 0$ y la función es convexa ($\cup$).

La función es cóncava ($\cap$) en $(-2, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

E. Hacemos una tabla de valores y con los datos obtenidos podemos dibujar la gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$
-4	$\frac{17}{12} = 1,41$
-3	$\frac{10}{5} = 2$
-1	$\frac{2}{-3} = -0,66$
0	$\frac{-1}{4} = -0,25$
3	2
4	1,41



Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

A. De 360 alumnos hay 197 que no están matriculados en el Centro de Idiomas. Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

$$P(\text{No esté matriculado en el C. de Idiomas}) = \frac{197}{360} = \boxed{0,547}$$

B. De 120 alumnos que pertenecen al Grado en Económicas hay 57 que están matriculados en el Centro de Idiomas. Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

$$P(\text{Esté en el C. de Idiomas} / \text{Está en el G. Económicas}) = \frac{57}{120} = \boxed{0,475}$$

C. De 360 alumnos hay 134 que están matriculados en el Grado en Administración y D. de Empresas y no están inscritos en el Centro de Idiomas. Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

$$P(\text{Esté en G. Adm. y D. Empresas} \cap \text{No esté en C. de Idiomas}) = \frac{134}{360} = \boxed{0,372}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1** [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{5a}{2} \\ 5x + 2y = a^2 \end{cases}$$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a , los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son:

$$|A| = 3, |B| = -2 \text{ y } |C| = 6.$$

Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C .

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A .

A1. Discutamos el sistema en función del parámetro a .

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \frac{5a}{2} \\ 5 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 ya que tiene un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0$

El rango de A/B depende del valor de a .

$$|A/B| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \frac{5a}{2} \\ 5 & 2 & a^2 \end{vmatrix} = -3a^2 + \frac{100a}{2} + 24 - 90 - 8a^2 + \frac{10a}{2} = -11a^2 + 55a - 66$$

Si igualamos a cero.

$$|A/B| = 0 \Rightarrow -11a^2 + 55a - 66 = 0 \Rightarrow -a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} = \frac{-5+1}{-2} = 2 \\ = \frac{-5-1}{-2} = 3 \end{cases}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq 3$ el rango de la matriz ampliada A/B es 3 distinto del rango de la matriz de coeficientes A . El sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

Si $a = 2$ o $a = 3$ el rango de la matriz ampliada A/B es 2 al igual que el de la matriz de coeficientes A e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

A2. Resolvemos los dos casos de compatibilidad del sistema.

Si $a = 2$ el sistema queda

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 3y = 5 \\ -2x + 8y = 12 \\ \hline 11y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x + 2y = 4 \\ -5x + 20y = 30 \\ \hline 22y = 34 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 11y = 17 \\ 22y = 34 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a\} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 11y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ y = \frac{17}{11} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x + 4 \cdot \frac{17}{11} = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{68}{11} - 6 = \frac{2}{11}} \end{aligned}$$

Si $a = 3$ el sistema queda

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{15}{2} \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 3y = 7,5 \\ -2x + 8y = 12 \\ \hline 11y = 19,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x + 2y = 9 \\ -5x + 20y = 30 \\ \hline 22y = 39 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 11y = 19,5 \\ 22y = 39 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a\} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 22y = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 6 \\ y = \frac{39}{22} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x + 4 \cdot \frac{39}{22} = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{156}{22} - 6 = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}} \end{aligned}$$

B1. Aplicamos las propiedades de los determinantes para obtener el determinante pedido.

$$\left. \begin{aligned} |D \cdot C| &= |D| \cdot |C| \\ |A^t| &= |A| \\ |B^{-1}| &= \frac{1}{|B|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |A^t B^{-1}| = |A^t| |B^{-1}| = |A| \frac{1}{|B|} = 3 \cdot \frac{1}{-2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

B2. Al ser D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C se cumple que $|D| = 2|C| \rightarrow |D| = 2|C| = 2 \cdot 6 = \boxed{12}$

B3. Al intercambiar dos filas el determinante cambia de signo $\rightarrow |E| = -|A|$.

$$|B^2 E| = |B^2| |E| = |B|^2 (-|A|) = (-2)^2 (-3) = \boxed{-12}$$

Ejercicio 2 [3,5 puntos]**A.** [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

A. El beneficio mensual viene dado por la fórmula: Beneficios = Ingresos – Gastos.

$$B(x) = (518 - x^2)x - (225 + 275x) = 518x - x^3 - 225 - 275x$$

$$B(x) = -x^3 + 243x - 225$$

Para buscar el máximo beneficio hacemos su derivada e igualamos a cero.

$$B(x) = -x^3 + 243x - 225 \Rightarrow B'(x) = -3x^2 + 243$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 243 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -243 \Rightarrow x^2 = \frac{-243}{-3} = 81 \Rightarrow x = \sqrt{81} = \pm 9$$

Como estamos en un caso de x unidades de tren, solo es válido el valor de $x = 9$.

Comprobemos si es un máximo.

$$B'(x) = -3x^2 + 243 \Rightarrow B''(x) = -6x$$

$$\text{Sustituimos } x = 9 \rightarrow B''(9) = -54 < 0$$

La función presenta un máximo beneficio para el número de unidades $x = 9$

Con 9 unidades se maximiza el beneficio. Y este es un beneficio de

$$B(9) = -9^3 + 243 \cdot 9 - 225 = 1233 \text{ €, siendo los ingresos (sin descontar los gastos) de}$$

$$\text{Ingresos}(9) = (518 - 9^2)9 = 3933 \text{ €}.$$

B1. La función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$ corta al eje OY.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 0. \text{ El punto de corte con el eje OY es } P(0, 0).$$

La función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$ corta al eje OX.

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -2x^3 - 4x^2 + 6x \Rightarrow 0 = 2x(-x^2 - 2x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x = \frac{2+4}{-2} = -3 \\ x = \frac{2-4}{-2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son $P(0, 0)$, $Q(-3, 0)$ y $R(1, 0)$.

B2. Estudiemos el signo de la derivada de $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

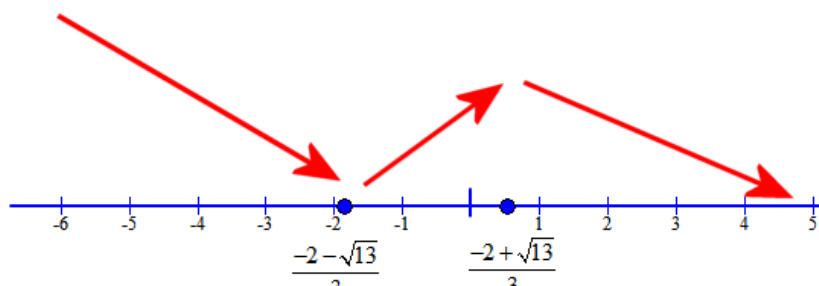
$$f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = -6x^2 - 8x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} = \begin{cases} x = \frac{-4 + \sqrt{52}}{6} = 0,53 \\ x = \frac{-4 - \sqrt{52}}{6} = -1,86 \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada antes de $-1,86$, entre los dos valores y después de $0,53$.

- En $(-\infty, -1.86)$ tomamos $x = -3$ la derivada vale $f'(-3) = -6(-3)^2 - 8(-3) + 6 = -54 + 24 + 6 = -24 < 0$ y la función decrece.
- En $(-1.86, 0.53)$ tomamos $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = 6 > 0$ y la función crece.
- En $(0.53, +\infty)$ tomamos $x = 1$ la derivada vale $f'(1) = -6 - 8 + 6 = -8 < 0$ y la función decrece.



La función tiene un mínimo en $x = -1.86$ y un máximo en $x = 0.53$.

La función crece en $(-1.86, 0.53)$ y decrece en $(-\infty, -1.86) \cup (0.53, +\infty)$.

B3. Estudiemos el signo de la derivada segunda de $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$.

$$f'(x) = -6x^2 - 8x + 6 \Rightarrow f''(x) = -12x - 8$$

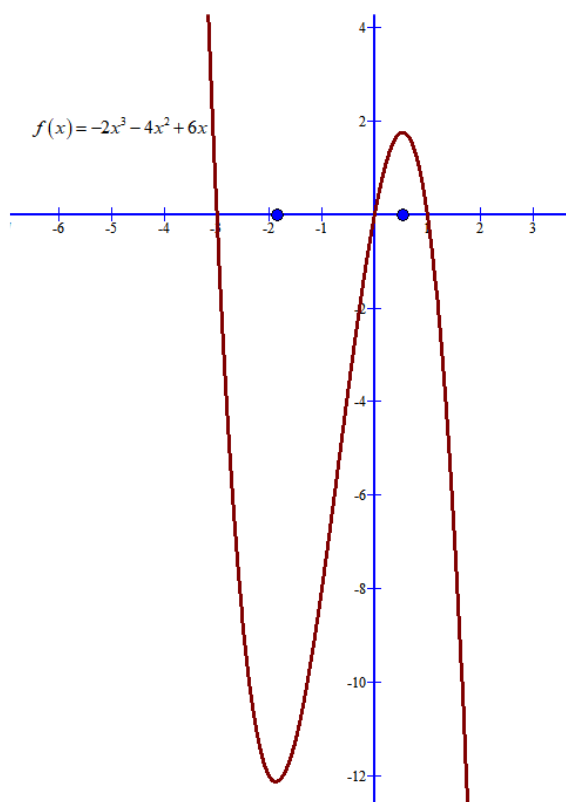
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x - 8 = 0 \Rightarrow -12x = 8 \Rightarrow x = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes de $-\frac{2}{3}$ y después de $-\frac{2}{3}$.

- En $(-\infty, -\frac{2}{3})$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = 12 - 8 = 4 > 0$ y la función es convexa ($\cup$).
- En $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = -8 < 0$ y la función es cóncava ($\cap$).
- En $(-\infty, -\frac{2}{3})$ es convexa ($\cup$) y en $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ es cóncava ($\cap$). En $x = -\frac{2}{3}$ hay un punto de inflexión.

B4. Con una tabla de valores y los datos obtenidos la gráfica es:

x	$y = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
-3	0
0	0
1	0
0,53	1,75
-1,86	10,59
2	-20

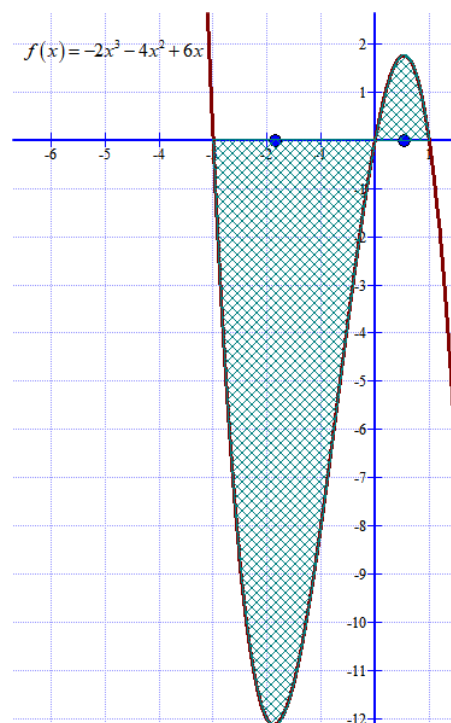


B5. El área de la región limitada por la gráfica y el eje de abscisas es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre -3 y 0 y el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 .

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 -2x^3 - 4x^2 + 6x dx &= \left[-2 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 = \\ &= \left[-\frac{x^4}{2} - 4 \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_{-3}^0 = \\ &= \left[-\frac{0^4}{2} - 4 \frac{0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right] - \left[-\frac{(-3)^4}{2} - 4 \frac{(-3)^3}{3} + 3(-3)^2 \right] = \\ &= \frac{81}{2} - 36 - 27 = \frac{81-126}{2} = \boxed{\frac{-45}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 -2x^3 - 4x^2 + 6x dx &= \left[-\frac{x^4}{2} - 4 \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left[-\frac{1^4}{2} - 4 \frac{1^3}{3} + 3 \right] - \left[-\frac{0^4}{2} - 4 \frac{0^3}{3} + 0 \right] = -\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 3 = \boxed{\frac{10}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{El área vale } \left| \frac{-45}{2} \right| + \frac{10}{6} = \frac{45}{2} + \frac{10}{6} = \frac{135+10}{6} = \frac{145}{6} = \boxed{24,16 \text{ u}^2}$$



Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

X = El gasto mensual en alquiler de un inquilino. $X = N(\mu, 73)$

A. El tamaño de la muestra es $n = 350$.

Con el nivel de confianza del 93% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(689,3 - 1,81 \cdot \frac{73}{\sqrt{350}}, 689,3 + 1,81 \cdot \frac{73}{\sqrt{350}} \right)$$

El intervalo de confianza es (682,24, 696,36)

B. Para un nivel de confianza del 91% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,91 \rightarrow \alpha = 0,09 \rightarrow \alpha/2 = 0,045 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,955 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,695$$

Como el error anterior era $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{73}{\sqrt{350}} = 7,062$

Y ahora deseamos un tercio del error anterior, sería $\frac{7,062}{3} = 2,354$ entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,354 \Rightarrow 1,695 \cdot \frac{73}{\sqrt{n}} = 2,354 \Rightarrow 1,695 \cdot \frac{73}{2,354} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1,695 \cdot \frac{73}{2,354} \right)^2 = 2762,94$$

El tamaño mínimo de la muestra es 2763 inquilinos.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2018**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [1 PUNTO] Calcular los valores del parámetro a para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & -3 \\ -1 & a+3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa.

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, determinar para qué valores del parámetro a , las siguientes matrices tienen inversa:

B1. [0,25 PUNTOS] A^2

B2. [0,25 PUNTOS] La traspuesta de A : A^t

C. [2 PUNTOS] Consideremos la matriz del apartado A para $a = 1$, y las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $A^{-1}XB + C = \text{Id}$.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El coste, en euros, de fabricar x unidades de un producto es $C(x) = 3x + 25$. Se ha fijado un precio de venta por unidad que también depende del número de unidades producidas:

$$13 - \frac{x^2}{750} \text{ euros.}$$

¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtener los máximos beneficios? ¿Cuál es el precio de venta por unidad que debe fijarse para obtener dichos beneficios?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$:

B1. [1 PUNTO] Determinar sus asíntotas verticales. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B2. [0,75 PUNTOS] Calcular la integral definida: $\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} dx$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El Centro de Idiomas de la Universidad de Cantabria realiza un examen de inglés a todos los alumnos de nuevo ingreso en el curso 2017/2018. La nota obtenida sigue una distribución normal con desviación típica 1,9. Una muestra aleatoria de 100 alumnos da como resultado una nota media de 6,82.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 90 % para la nota media.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Una asociación de vecinos ha programado una excursión en la que se han inscrito 540 personas. La compañía con la que han contratado el viaje dispone de 12 autocares de 60 plazas y de 9 de 40 plazas, pero en las fechas previstas para el viaje solo se podrá contar con 10 conductores. Por otro lado, alquilar un autocar grande supone 100 euros; y uno pequeño, 65 euros. ¿Cuántos autocares de cada tipo deberán alquilarse para minimizar los costes?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

- A. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
 B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
 C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
 D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $g(x) = -6x$.
 E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

De los alumnos matriculados en 1º en los grados de Economía, Administración y Dirección de Empresas y Derecho, de determinada universidad, conocemos su nivel de inglés. Los datos desglosados aparecen en la tabla adjunta

	G. Económicas	G. Adm. y D. Empresas	G. Derecho	Total
Nivel alto	20	33	34	87
Nivel medio	78	167	76	321
Nivel bajo	27	20	65	112
Total	125	220	175	520

Escogido un alumno al azar:

- A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que esté estudiando Derecho?
 B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Económicas y tenga un nivel alto?
 C [1 PUNTO] Si sabemos que el alumno tiene un nivel medio, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando Administración y D. de Empresas?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

A. [1 PUNTO] Calcular los valores del parámetro a para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & -3 \\ -1 & a+3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa.

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, determinar para qué valores del parámetro a , las siguientes matrices tienen inversa:

B1. [0,25 PUNTOS] A^2

B2. [0,25 PUNTOS] La traspuesta de A : A^t

C. [2 PUNTOS] Consideremos la matriz del apartado A para $a = 1$, y las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $A^{-1}XB + C = Id$.

A. Calculemos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & -3 \\ -1 & a+3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)(a+3) - 3 - (-3a-9) = a^2 + 3a - 2a - 6 - 3 + 3a + 9 = a^2 + 4a$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a(a+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de -4 .

B1. Por las propiedades de los determinantes: $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A|$

Por lo que el determinante de A^2 es no nulo cuando es no nulo el de A . Entonces A^2 tiene inversa si a es distinto de 0 y de -4 .

B2. Por las propiedades de los determinantes: $|A^t| = |A|$

Por lo que la matriz traspuesta tendrá inversa cuando a sea distinto de 0 y de -4 .

C. Siendo $a = 1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y esta matriz tiene inversa, ya que a es

distinto de 0 y de -4 .

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^{-1}XB + C = Id \Rightarrow A \cdot A^{-1}XB + A \cdot C = A \cdot Id \Rightarrow XB = A - A \cdot C = A(I - C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XB \cdot B^{-1} = A(I - C)B^{-1} \Rightarrow X = A(I - C)B^{-1}$$

Calculamos el determinante de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - (4 + 0 + 0) = -6 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la matriz B tiene inversa. La calculamos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y determinamos la expresión de X.

$$X = A(I - C)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \left[-\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 3-3 \\ 1 & 1-4 & 3 \\ -1-1 & -1+1 & -3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -8-3 & -16 \\ 2-6 & -2+9-3 & -4-6 \\ -4+4 & +4+2 & +8+4 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -11 & -16 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & 11/6 & 8/3 \\ 2/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El coste, en euros, de fabricar x unidades de un producto es $C(x) = 3x + 25$. Se ha fijado un precio de venta por unidad que también depende del número de unidades

producidas: $13 - \frac{x^2}{750}$ euros.

¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtener los máximos beneficios? ¿Cuál es el precio de venta por unidad que debe fijarse para obtener dichos beneficios?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$:

B1. [1 PUNTO] Determinar sus asíntotas verticales. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B2. [0,75 PUNTOS] Calcular la integral definida: $\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} dx$

A. El beneficio es la diferencia entre ingresos y coste de producción.

$$B(x) = \left(13 - \frac{x^2}{750}\right)x - (3x + 25) = 13x - \frac{x^3}{750} - 3x - 25 = -\frac{x^3}{750} + 10x - 25$$

Derivamos la función en busca de los extremos relativos de la misma.

$$B'(x) = -\frac{3x^2}{750} + 10 = -\frac{x^2}{250} + 10$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{250} + 10 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2500 = 0 \Rightarrow x^2 = 2500 \Rightarrow x = \sqrt{2500} = 50$$

$x = 50$ es un posible máximo. Lo comprobamos con la segunda derivada.

$$B'(x) = -\frac{x^2}{250} + 10 \Rightarrow B''(x) = -\frac{2x}{250}$$

$$B''(50) = -\frac{100}{250} < 0$$

Se produce un máximo beneficio en una producción de 50 unidades.

Para conseguir este beneficio máximo se debe fijar un precio de venta por unidad de

$$13 - \frac{50^2}{750} = 13 - \frac{2500}{750} = 13 - \frac{10}{3} = \frac{29}{3} = 9,66 \text{ €}$$

B1. Asíntotas verticales. $x = a$

La función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$ no existe en los puntos que anulan el denominador.

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{-6 + 4}{2} = -1 \\ = \frac{-6 - 4}{2} = -5 \end{cases}$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

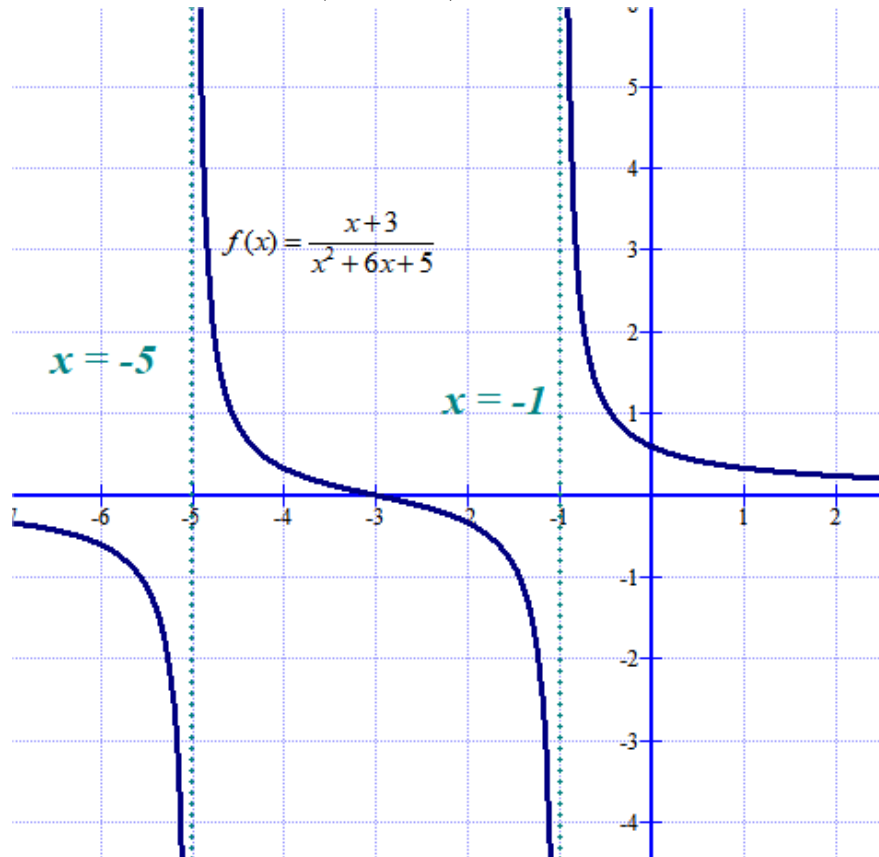
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{2(\text{positivos})}{0(\text{positivos})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{2(\text{positivos})}{0(\text{negativos})} = -\infty$$

$x = -5$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{-2(\text{negativos})}{0(\text{negativos})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{-2(\text{negativos})}{0(\text{positivos})} = -\infty$$



B2. Para resolver esta integral $\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} dx$ debemos hacer un pequeño ajuste para que en el numerador esté la derivada del denominador ($2x+6$).

$$\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2(x+3)}{x^2+6x+5} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x+6}{x^2+6x+5} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+6x+5) \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(2^2+12+5) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(1^2+6+5) \right] = \frac{1}{2} \ln 21 - \frac{1}{2} \ln 12 =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 21 - \ln 12) = \frac{1}{2} \ln \frac{21}{12} = \boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{7}{4}}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El Centro de Idiomas de la Universidad de Cantabria realiza un examen de inglés a todos los alumnos de nuevo ingreso en el curso 2017/2018. La nota obtenida sigue una distribución normal con desviación típica 1,9. Una muestra aleatoria de 100 alumnos da como resultado una nota media de 6,82.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 90 % para la nota media.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

X = Nota obtenida en examen de inglés. $X = N(\mu, 1.9)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$ y la media obtenida en la muestra es $\bar{x} = 6.82$.

A. Si el nivel de confianza es del 90% hallamos el error asociado.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$\text{El error es } z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1.9}{\sqrt{100}} = 0.31255...$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (6.820 - 0.313, 6.820 + 0.313) = (6.507, 7.133)$$

B. La cuarta parte del error del apartado anterior es $\text{Error} = \frac{0.3126}{4} = 0.0781$

Si el nivel de confianza es del 98% hallamos el error asociado.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

El error debe ser 0,0781 y con la fórmula es $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{1.9}{\sqrt{n}}$. Despejamos “n” de la igualdad obtenida.

$$2.33 \cdot \frac{1.9}{\sqrt{n}} = 0.0781 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.9 \cdot 2.33}{0.0781} \Rightarrow n = \left(\frac{1.9 \cdot 2.33}{0.0781} \right)^2 = 3213.046$$

El tamaño de la muestra debe ser un mínimo de 3214 personas.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una asociación de vecinos ha programado una excursión en la que se han inscrito 540 personas. La compañía con la que han contratado el viaje dispone de 12 autocares de 60 plazas y de 9 de 40 plazas, pero en las fechas previstas para el viaje solo se podrá contar con 10 conductores. Por otro lado, alquilar un autocar grande supone 100 euros; y uno pequeño, 65 euros. ¿Cuántos autocares de cada tipo deberán alquilarse para minimizar los costes?

Es un problema de programación lineal con dos variables x = número de autobuses de 60 plazas e y = número de autobuses de 40 plazas.

El coste es lo que cobramos por el alquiler. $C(x, y) = 100x + 65y$

Las restricciones del problema.

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\text{Solo disponemos de 12 autobuses de 60 plazas} \rightarrow x \leq 12$$

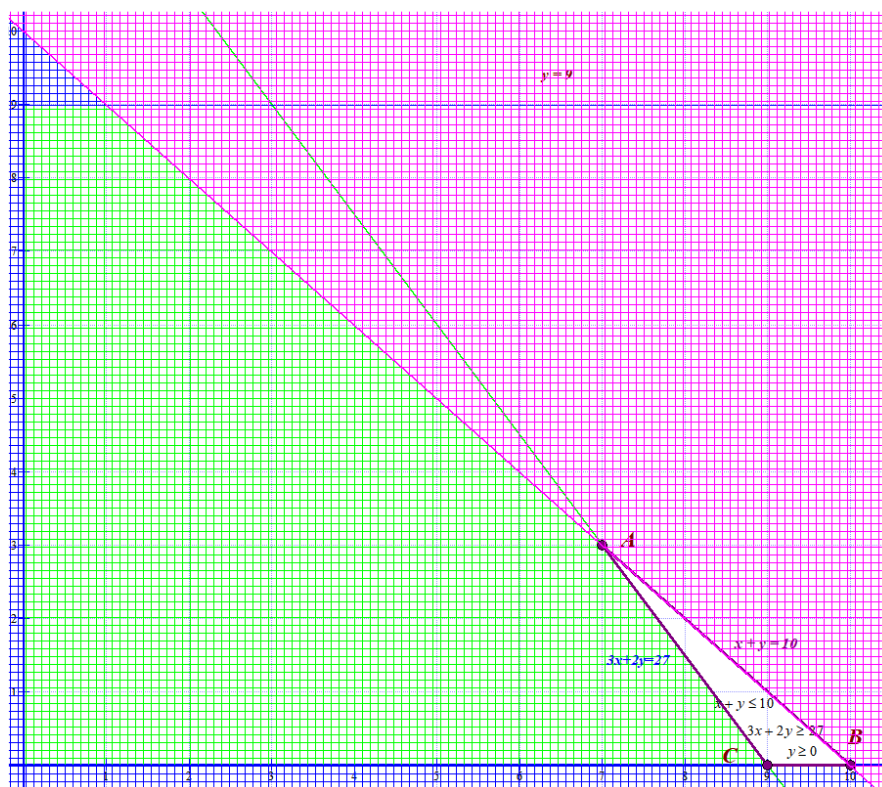
$$\text{Solo disponemos de 9 autobuses de 40 plazas} \rightarrow y \leq 9$$

$$\text{Solo disponen de 10 conductores} \rightarrow x + y \leq 10$$

$$\text{Deben caber en los autobuses las 540 personas} \rightarrow 60x + 40y \geq 540 \rightarrow 3x + 2y \geq 27$$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y = \frac{27-3x}{2}$	x	$y = 10 - x$	x	$y = 9$
9	0	10	0	0	9
1	12	0	10	12	9
7	3	7	3		



La región factible es la zona blanca, ya que las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ y \leq 9 \\ x + y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 27 \end{array} \right\}$$

Las coordenadas de los vértices de la región son: A(7, 3), B(10, 0) y C(9, 0)

Veamos el coste en cada uno de estos vértices.

$$A(7, 3) \rightarrow C(7, 3) = 700 + 195 = 895 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 1000$$

$$C(9, 0) \rightarrow C(9, 0) = 900$$

El coste mínimo se consigue alquilando 7 autobuses de 60 plazas y 3 de 40 plazas. Siendo este coste de 895 €.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

- A. [0,1 PUNTOS]** Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $g(x) = -6x$.
E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

A. Puntos de corte con eje OY. $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 = 0$ El punto de corte es A(0, 0).**Puntos de corte con eje OX.**

$$y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + x^2 - 12x \Rightarrow 0 = x(x^2 + x - 12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} = \frac{-1+7}{2} = 3 \\ = \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son A(0, 0), B(3, 0) y C(-4, 0)

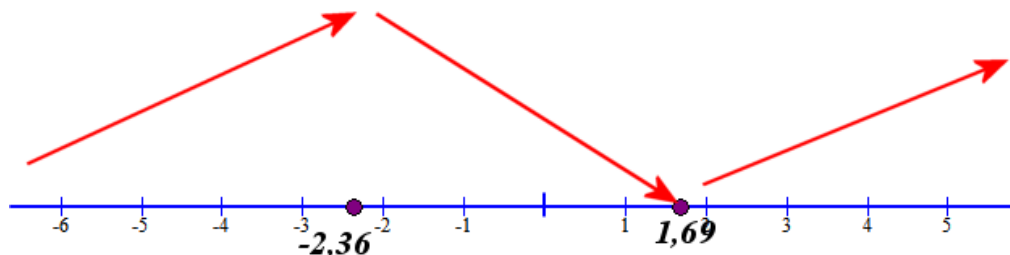
B. Utilizamos la derivada de $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 12$$

Igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+144}}{6} = \begin{cases} = \frac{-2+\sqrt{148}}{6} = 1,69 \\ = \frac{-2-\sqrt{148}}{6} = -2,36 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2,36)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = 48 - 8 - 12 = 30 > 0$. La función es creciente.
- En $(-2,36, 1,69)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 0 + 0 - 12 = -12 < 0$. La función es decreciente.
- En $(1,69, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 48 + 8 - 12 = 44 > 0$. La función es creciente.

La función presenta un máximo en $x = -2,36$ y un mínimo en $x = 1,69$.La función crece en $(-\infty, -2,36) \cup (1,69, +\infty)$ y decrece en $(-2,36, 1,69)$.

C. Utilizamos la segunda derivada de $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 12 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$$

Igualamos a cero.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = -5$ y la derivada segunda es $f''(-5) = -30 + 2 = -28 < 0$. La función es cóncava ($\cap$).
- En $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda es $f''(0) = 0 + 2 = 2 > 0$. La función es convexa ($\cup$).

La función presenta un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{3}$.

D. Hacemos una pequeña tabla de valores de las dos funciones.

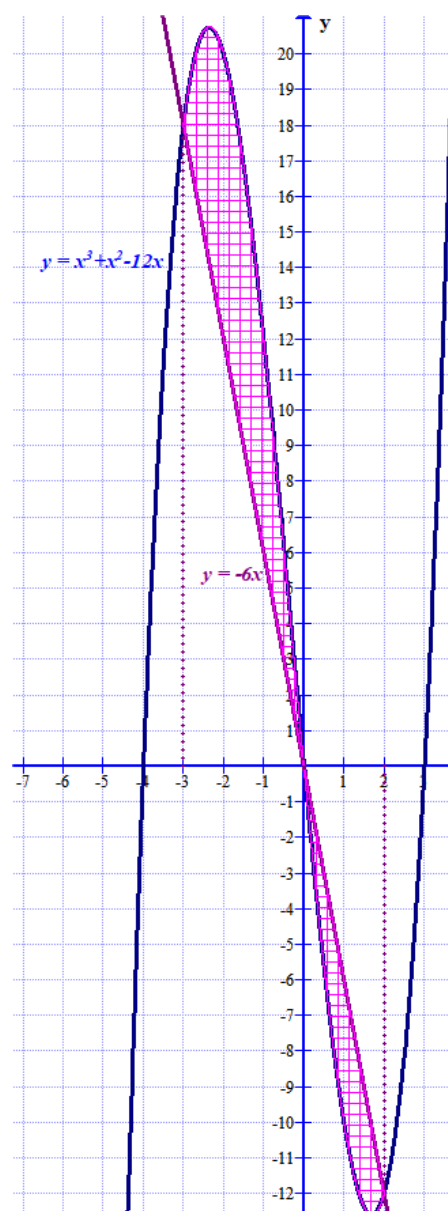
x	$y = x^3 + x^2 - 12x$	x	$y = -6x$
-3	18	0	0
-2,36	20,7	-3	18
1,69	-12,6	2	-12
2	-12		

Estas gráficas se cortan en:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + x^2 - 12x = -6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \\ = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 = x \\ \frac{-1-5}{2} = -3 = x \end{cases} \end{cases}$$



E. El área de esta región se calcula con dos integrales definidas.

$$\int_{-3}^0 x^3 + x^2 - 12x - (-6x) dx = \int_{-3}^0 x^3 + x^2 - 6x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-3}^0 =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0 \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - 3(-3)^2 \right] = -\frac{81}{4} + 9 + 27 = \frac{63}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 -6x - (x^3 + x^2 - 12x) dx &= \int_0^2 -x^3 - x^2 + 6x dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 12 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0 \right] = -4 - \frac{8}{3} + 12 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12} = 21,08$ unidades cuadradas.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

De los alumnos matriculados en 1º en los grados de Economía, Administración y Dirección de Empresas y Derecho, de determinada universidad, conocemos su nivel de inglés. Los datos desglosados aparecen en la tabla adjunta

	G. Económicas	G. Adm. y D. Empresas	G. Derecho	Total
Nivel alto	20	33	34	87
Nivel medio	78	167	76	321
Nivel bajo	27	20	65	112
Total	125	220	175	520

Escogido un alumno al azar:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que esté estudiando Derecho?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Económicas y tenga un nivel alto?

C [1 PUNTO] Si sabemos que el alumno tiene un nivel medio, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando Administración y D. de Empresas?

A. Hay 520 alumnos y 175 están estudiando Derecho. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Estudie Derecho}) = \frac{175}{520} = 0,336$$

B. Hay 520 alumnos y 20 están estudiando Económicas y tienen nivel alto. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Estudie Economicas y tenga nivel alto de inglés}) = \frac{20}{520} = 0,038$$

C. Hay 321 alumnos con nivel medio y 167 de ellos están estudiando Administración y D. de Empresas. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Estudie Administracion y D. Empresas / Tiene un nivel medio}) = \frac{167}{321} = 0,52$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2018**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

B1. [0,25 PUNTOS]
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$$

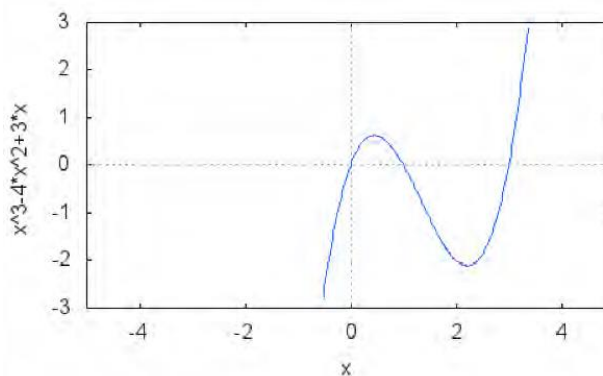
B2. [0,25 PUNTOS]
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado **B**.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%.

Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} & , \quad x \neq -2 \quad y \quad x \neq 1 \\ ax & , \quad x = -2 \end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro a para los cuales $f(x)$ es continua en $x = -2$.

A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de $f(x)$. Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [1 PUNTO] Dada la función $f(x) = x^3 + ax + 5$, calcular el valor de a para que $\int_{-1}^3 f(x)dx = 60$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

A. [2,5 PUNTOS] Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

B1. [0,25 PUNTOS]
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$$

B2. [0,25 PUNTOS]
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado B.

A. El rango de la matriz A de dimensión 3×3 puede ser 1, 2 o 3.

¿El rango de A es 3?

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 4a + 0 - (-6a^2 + 0 + 2a) = 6a^2 - 6a - 12$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6a^2 - 6a - 12 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $a = -1$

El determinante de A es cero $\rightarrow$ El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Si $a = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar en A la fila y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como su determinante es no nulo el rango de A es 2.

CASO 3. $a = 2$

El determinante de A es cero $\rightarrow$ El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$\text{Si } a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Extraemos el menor que resulta de quitar en A la fila y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como su determinante es no nulo el rango de A es 2.

Conclusión: Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3. Para $a = -1$ o $a = 2$ el rango es 2.

B1. El sistema $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Esta matriz ampliada es la misma que se ha considerado en el CASO 1}$$

del apartado A con $a = 1$. Por lo que el rango de A/B es 3. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2, entonces el sistema no tiene solución. Es incompatible.

B2. El sistema $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Esta matriz ampliada es la misma que la del CASO 3 del apartado A}$$

con $a = 2$. Por lo que el rango de A/B es 2. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2 e igual que el número de incógnitas, el sistema tiene solución y es única.

C. Resolvemos el sistema compatible del apartado B2.

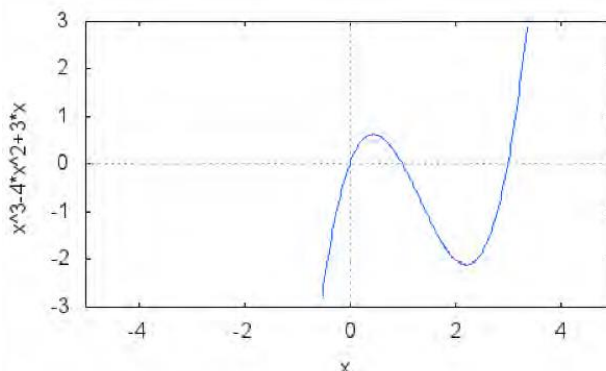
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ y = -\frac{2}{3} \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = -4 \\ -x - \frac{2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{3} \\ -x = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

La solución es $x = -\frac{8}{3}; y = -\frac{2}{3}$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX.



A. Hallamos la expresión de la producción ($f(x)$) en función del número de árboles nuevos a plantar (x).

Los 10 limoneros que tiene producen $70 \cdot 10$ frutos. Pero si planta x árboles nuevos, la producción disminuye $5x$ en cada ejemplar, es decir, la producción es $(10 + x)(70 - 5x)$.

$$f(x) = (10 + x)(70 - 5x) = 700 - 50x + 70x - 5x^2 = -5x^2 + 20x + 700.$$

Derivamos para averiguar la producción máxima.

$$f(x) = -5x^2 + 20x + 700 \Rightarrow f'(x) = -10x + 20$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 20 = 0 \Rightarrow -10x = -20 \Rightarrow x = 2$$

Con la derivada segunda comprobamos si $x = 2$ es un máximo.

$$f'(x) = -10x + 20 \Rightarrow f''(x) = -10$$

$$f''(2) = -10 < 0$$

En $x = 2$ hay un máximo de $f(x)$. Esto indica que debo plantar 2 árboles más para obtener esa producción máxima.

B. Averiguamos en qué puntos la función corta el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - 4x^2 + 3x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \\ = \frac{4 - 2}{2} = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

La función corta en tres puntos $x = 0$; $x = 1$ y $x = 3$. El recinto lo dividimos en dos partes, calculando el área de cada una con la integral definida correspondiente.

$$\int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{3-16+18}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\int_1^3 x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_1^3 = \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 27}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] =$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{243-432+162-3+16-18}{12} = \frac{-32}{12}$$

El área de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX es la suma del valor absoluto de las integrales definidas calculadas:

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x dx \right| + \left| \int_1^3 x^3 - 4x^2 + 3x dx \right| = \frac{5}{12} + \left| -\frac{32}{12} \right| = \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \boxed{\frac{37}{12} u^2}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%.

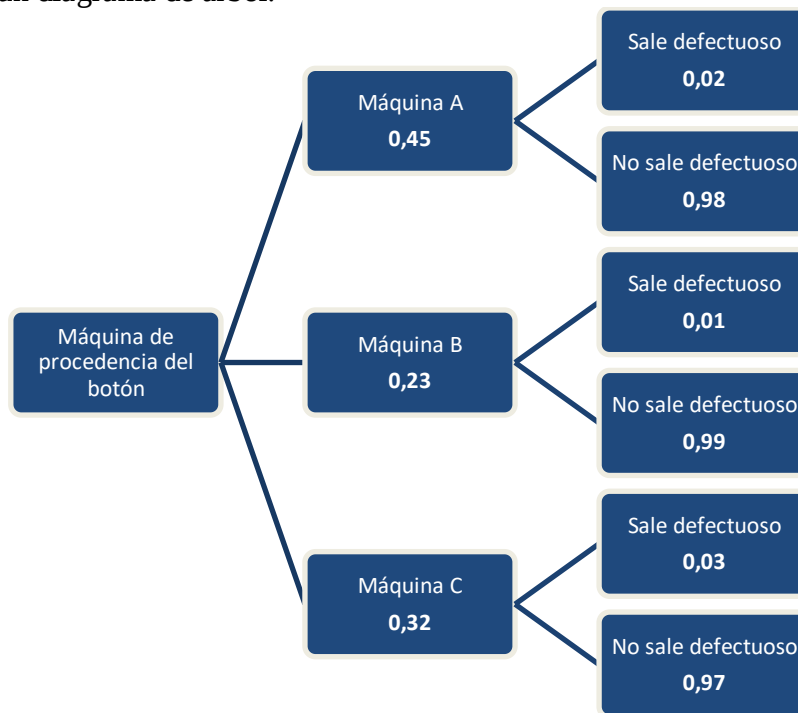
Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

Construyamos un diagrama de árbol.



A. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No sale defectuoso}) &= \\
 &= P(\text{Es de la máquina A})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina A}) + \\
 &+ P(\text{Es de la máquina B})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina B}) + \\
 &+ P(\text{Es de la máquina C})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina C}) = \\
 &= 0,45 \cdot 0,98 + 0,23 \cdot 0,99 + 0,32 \cdot 0,97 = \boxed{0,9791}
 \end{aligned}$$

B. Calculamos la probabilidad de recorrer la rama intermedia del diagrama de árbol.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Pasa por la máquina B y sale defectuoso}) &= \\
 &= P(\text{Es de la máquina B})P(\text{Sale defectuoso/Es de la máquina B}) = 0,23 \cdot 0,01 = \boxed{0,0023}
 \end{aligned}$$

C. Es una probabilidad a posteriori. Se da por hecho que es defectuoso. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea de la máquina C /Es defectuoso}) &= \frac{P(\text{Sea de la máquina C y es defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} = \\
 &= \frac{P(\text{De la máquina C}) \cdot P(\text{Defectuoso /De la máquina C})}{1 - P(\text{No es defectuoso})} = \frac{0,32 \cdot 0,03}{1 - 0,9791} = \frac{96}{209} = \boxed{0,4593}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x es el número de docenas de tartas de hojaldre; y es el número de docenas de tartas de chocolate.

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Cantidad	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
Número de docenas de tartas de hojaldre	x	$2,5x$	x	x	$15x$
Número de docenas de tartas de chocolate	y	$5y$	$0,5y$	y	$25y$

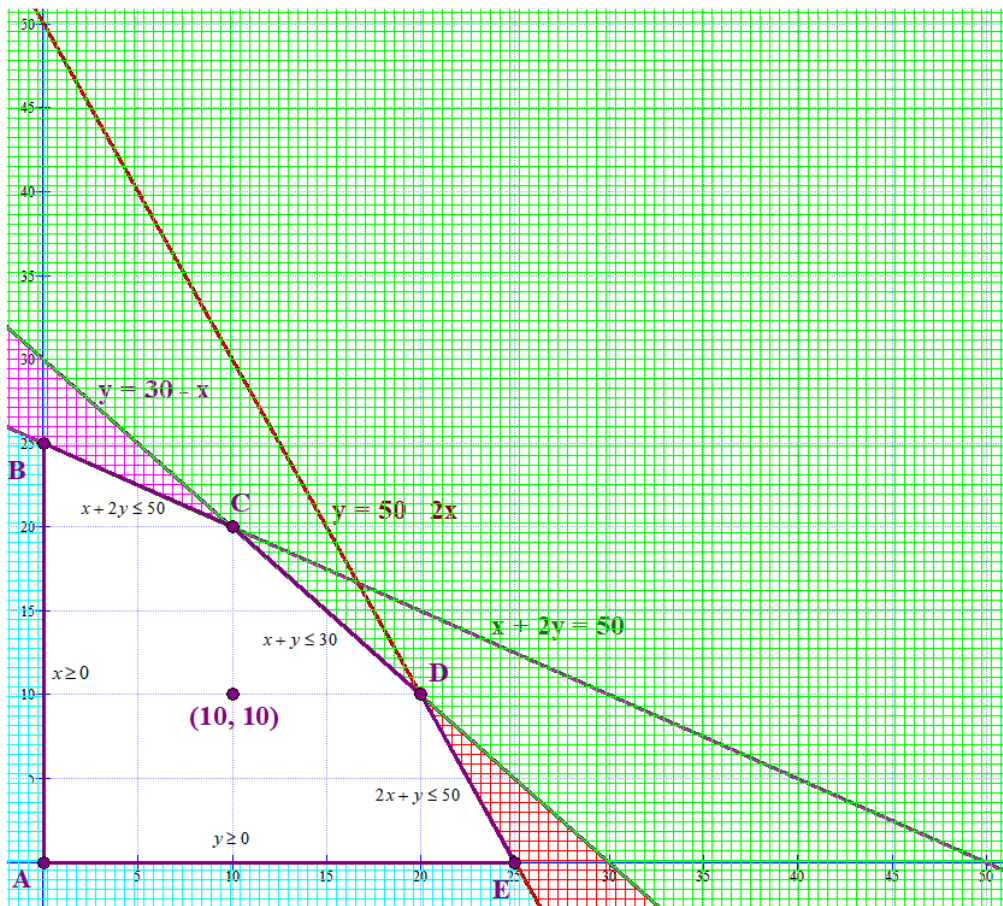
La función beneficio es $B(x, y) = 15x + 25y$.

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2,5x + 5y \leq 125 \\ x + 0,5y \leq 25 \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

x	$y = \frac{50-x}{2}$	x	$y = 50-2x$	x	$y = 30-x$
0	25	0	50	0	30
50	0	25	0	30	0
10	20	20	10	20	10



Comprobamos si el punto (10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10 + 20 \leq 50 \\ 20 + 10 \leq 50 \\ 10 + 10 \leq 30 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen!}$$

La región factible es la zona blanca del dibujo.

Valoramos el beneficio en cada uno de los vértices de la región factible.

$$A(0, 0) \Rightarrow B(0,0) = 0 + 0 = 0$$

$$B(0, 25) \Rightarrow B(0,25) = 0 + 625 = 625$$

$$C(10, 20) \Rightarrow B(10,20) = 150 + 500 = 650$$

$$D(20, 10) \Rightarrow B(20,10) = 300 + 250 = 550$$

$$E(25, 0) \Rightarrow B(25,0) = 375 + 0 = 375$$

El beneficio máximo se produce en C(10, 20). Hay que hacer 10 docenas de tartas de hojaldre y 20 de chocolate para obtener el máximo beneficio, siendo este de 650 €.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} & , \quad x \neq -2 \quad y \quad x \neq 1 \\ ax & , \quad x = -2 \end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro a para los cuales $f(x)$ es continua en $x = -2$.

A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de $f(x)$. Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [1 PUNTO] Dada la función $f(x) = x^3 + ax + 5$, calcular el valor de a para que $\int_{-1}^3 f(x) dx = 60$.

A1. Para que sea continua en $x = -2$ debe cumplirse:

1. Existe $f(-2) = a(-2) = -2a$.
2. Existe el límite de la función cuando x se acerca a -2 .

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}$$

$$2x+4 = 2(x+2) \text{ y también } \begin{array}{r|rrr} & 3 & 3 & -6 \\ -2 & -6 & 6 & \\ \hline & 3 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow 3x^2+3x-6 = (3x-3)(x+2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2\cancel{(x+2)}}{(3x-3)\cancel{(x+2)}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{3x-3} = \boxed{\frac{2}{-9}}$$

$$3. \text{ Deben ser iguales: } f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow -2a = \frac{2}{-9} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{9}}$$

A2. Asíntota vertical. $x = a$

Para ello igualamos a cero el denominador, para localizar los valores de x para los que no existe la función.

$$3x^2+3x-6=0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \frac{-3 \pm 9}{6} = \begin{cases} = \frac{-3+9}{6} = 1 \\ = \frac{-3-9}{6} = -2 \end{cases}$$

En estos dos valores podría haber asíntota vertical, pero hemos comprobado que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\frac{2}{9}$, por lo que no hay asíntota en $x = -2$.

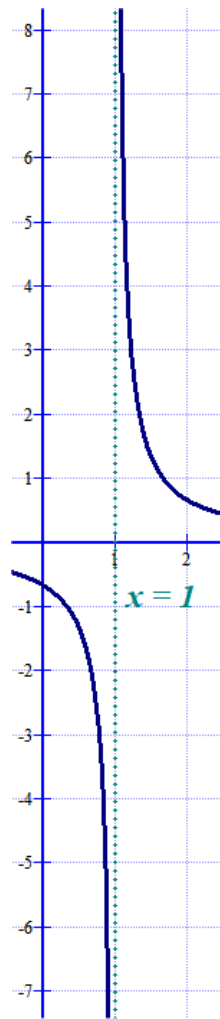
$$\text{Sin embargo } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{6}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 1$

Comportamiento de la función en el entorno de la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{6(\text{valores positivos})}{0(\text{valores positivos})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{6(\text{valores positivos})}{0(\text{valores negativos})} = -\infty$$



B. Calculemos la integral definida.

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 x^3 + ax + 5 dx = \left[\frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-1}^3 = \left[\frac{3^4}{4} + a \frac{3^2}{2} + 15 \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + a \frac{(-1)^2}{2} - 5 \right] =$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{9}{2}a + 15 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + 5 = \frac{80}{4} + 20 + \frac{8}{2}a = 40 + 4a$$

$$\text{Como } \int_{-1}^3 f(x) dx = 60 \Rightarrow 40 + 4a = 60 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

X = Número de veces que va al teatro una persona durante un año. $X = N(\mu, 2)$

El tamaño de la muestra es $n = 850$ y la media obtenida en la muestra es $\bar{x} = 7$.

A. Si el nivel de confianza es del 94% hallamos el error asociado.

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88$$

$$\text{El error es } z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot \frac{2}{\sqrt{850}} = 0,12896\dots$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (7 - 0,129, 7 + 0,129) = (6,871, 7,129)$$

B. La mitad del error del apartado anterior es $\text{Error} = \frac{0,129}{2} = 0,0645$

Si el nivel de confianza es del 97% hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

$$\text{El error debe ser } 0,0645 \text{ y con la fórmula es } \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{4,34}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{4,34}{\sqrt{n}} = 0,0645 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{4,34}{0,0645} \Rightarrow n = \left(\frac{4,34}{0,0645} \right)^2 = 4527,51$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 4528 personas.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2017**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Resolver la ecuación matricial $(A+X)B = C$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ con determinante $|M| = 8$, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

B2. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix}$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0.05x^2 + 0.7x + 30$, que depende del número de tiendas, x , que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

B. [1,75 PUNTOS] La gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7}$ tiene como asíntota la recta $y = 2x - 3$. Determinar los valores de los parámetros a y b .

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El peso de las manzanas que un agricultor cosecha sigue una distribución normal con desviación típica de 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.

B. [1,5 PUNTOS] Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS] Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.

El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A. Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A1. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + ax + b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$.

A2. [1 PUNTO] Para $a = -2$ y $b = -3$ determinar las asíntotas verticales de la función resultante

$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [0,75 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3}$. ¿En qué puntos es discontinua?
¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Este último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

- A.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?
- B.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?
- C.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria, pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la Selectividad en junio de 2016?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]****A. [3 PUNTOS]** Resolver la ecuación matricial $(A+X)B = C$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ con determinante $|M| = 8$, calcular:

$$\mathbf{B1. [0,25 PUNTOS]} \quad \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B2. [0,25 PUNTOS]} \quad \begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A.} \quad (A+X)B = C \Rightarrow AB + XB = C \Rightarrow XB = C - AB$$

Si B es invertible podemos despejar X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 2 = 7 \neq 0$$

Por tanto, existe B^{-1} . Podemos despejar X en la ecuación matricial anterior.

$$XB = C - AB \Rightarrow XBB^{-1} = (C - AB)B^{-1} \Rightarrow X = (C - AB)B^{-1}$$

Calculamos la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $X = (C - AB)B^{-1}$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1-12+4 & 6+12-4 & -4-8+12 \\ -1-15-5 & -6+15+5 & 4-10-15 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 14 & 0 \\ -21 & 14 & -21 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

B. Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\text{B1. } |M| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = |M^T| = |M| = 8$$

$$\text{B2. } \begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -12|M| = -12 \cdot 8 = -96$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0.05x^2 + 0.7x + 30$, que depende del número de tiendas, x , que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

B. [1,75 PUNTOS] La gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7}$ tiene como asíntota la recta $y = 2x - 3$.

Determinar los valores de los parámetros a y b .

A. Obtengamos la función que expresa su ganancia mensual:

$$f(x) = 1500 + (-0.05x^2 + 0.7x + 30) - 425$$

$$f(x) = -0.05x^2 + 0.7x + 1105$$

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de un extremo de la función.

$$f(x) = -0.05x^2 + 0.7x + 1105 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = -0.1x + 0.7 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.1x + 0.7 = 0 \Rightarrow x = \frac{0.7}{0.1} = 7$$

Con la derivada segunda averiguamos si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = -0.1x + 0.7 \Rightarrow f''(x) = -0.1 \Rightarrow f''(7) = -0.1 < 0$$

La función presenta un máximo en $x = 7$. Debe de incluir 7 tiendas al mes como clientes para maximizar sus ingresos.

B. Una asíntota oblicua tiene como ecuación $y = mx + n$, siendo $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 5}{2x^2 - 7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cancel{x^2}}{2 \cancel{x^2}} = \frac{a}{2}$$

Como la asíntota es $y = 2x - 3$, entonces debe ser $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

Como $m = 2$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + bx + 5}{2x - 7} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{4x^2} + bx + 5 - \cancel{4x^2} + 14x}{2x - 7} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b+14)x + 5}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b+14)\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{b+14}{2} \end{aligned}$$

Como la asíntota es $y = 2x - 3$, entonces debe ser $\frac{b+14}{2} = -3 \Rightarrow b+14 = -6 \Rightarrow \boxed{b = -20}$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = -20$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El peso de las manzanas que un agricultor cosecha sigue una distribución normal con desviación típica de 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.

B. [1,5 PUNTOS] Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

Llamemos X = Peso de las manzanas de un agricultor. $X = N(\mu, 25)$

A. $\bar{x} = 227 \text{ g}; \quad n = 150$

Con el nivel de confianza del 92% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(227 - 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}}, 227 + 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}} \right)$$

El intervalo de confianza es (223'428, 230'572)

B. Para un nivel de confianza del 98% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

Como el error anterior era de $1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}} = 3,57$. Ahora debe de ser la tercera parte y esto es 1,1.

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de n .

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,19 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 1,19 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{25}{1,19} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,325 \cdot \frac{25}{1,19} \right)^2 = 2385,79$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2386 manzanas.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS] Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias. El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A. Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Llamando x a los armarios del tipo A producidos cada día e y a los armarios del tipo B.

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Armarios del modelo A (x)	$3x$	$70x$
Armarios del modelo B (y)	$6y$	$160y$
TOTAL	$3x + 6y$	$70x + 160y$

La función que deseamos maximizar es el beneficio $f(x, y) = 70x + 160y$.

Expresemos las restricciones del problema en inecuaciones.

En total se disponen de un máximo de $12 \cdot 8 = 96$ horas diarias de trabajo $\rightarrow 3x + 6y \leq 96$.

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo $\rightarrow x + y \geq 15$

El número de unidades del modelo B (y) debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A (x) $\rightarrow y \leq \frac{x}{2}$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \geq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 3x + 6y \leq 96 \Rightarrow x + 2y \leq 32 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región del plano que cumple todas estas restricciones. Para ello dibujamos las rectas asociadas.

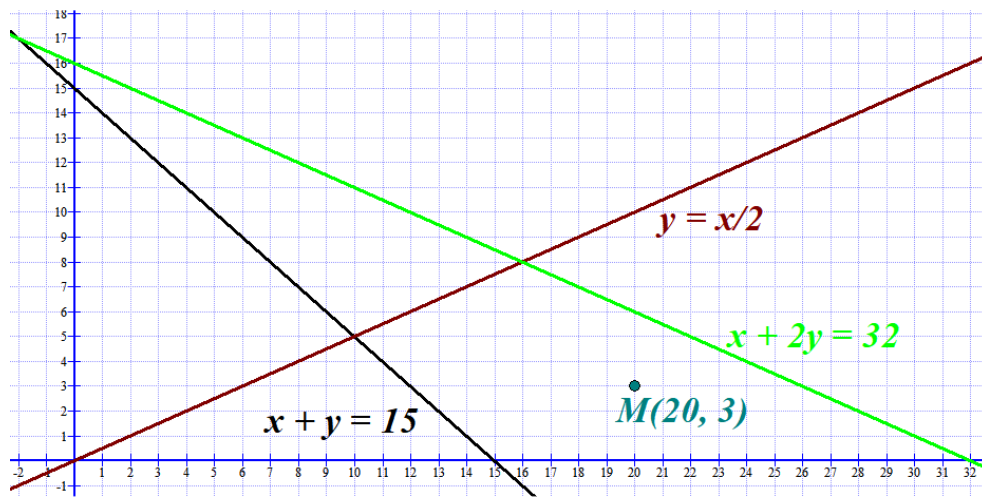
$$x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

x	$y = 15 - x$
0	15
10	5

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
2	1
10	5

$$x + 2y = 32 \Rightarrow y = \frac{32 - x}{2}$$

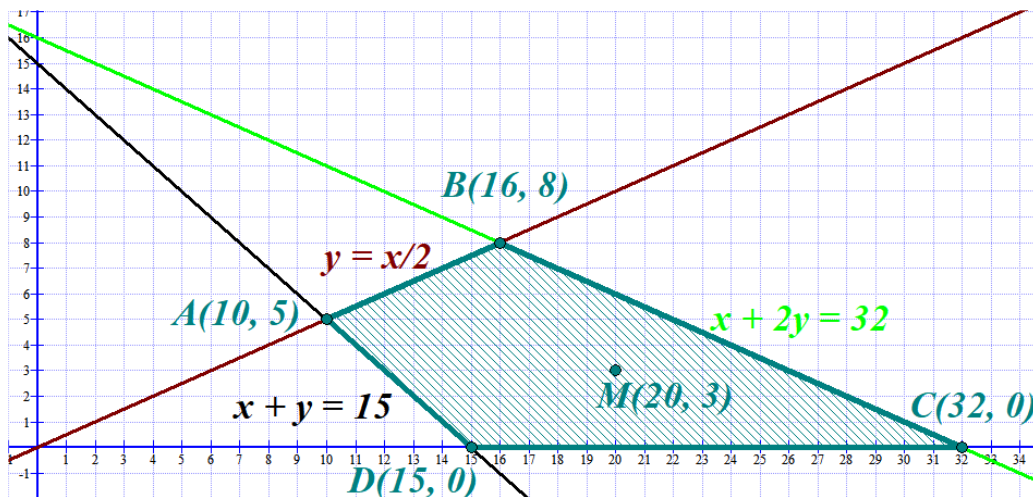
x	$y = \frac{32 - x}{2}$
0	16
12	10



Probamos si el punto $M(20, 3)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ 20 + 3 \geq 15 \\ 3 \leq \frac{20}{2} \\ 20 + 6 \leq 32 \end{array} \right\} \text{ Si se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la delimitada por las tres rectas y el eje OX que contiene al punto $M(20, 3)$. Es la región rayada del dibujo siguiente.



Valoramos la función $f(x, y) = 70x + 160y$ en cada uno de los vértices.

$$A(10, 5) \rightarrow f(10, 5) = 700 + 800 = 1500$$

$$B(16, 8) \rightarrow f(16, 8) = 1120 + 1280 = 2400 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(32, 0) \rightarrow f(32, 0) = 2240 + 0 = 2240$$

$$D(15, 0) \rightarrow f(15, 0) = 1050 + 0 = 1050$$

El máximo se alcanza en el punto $B(16, 8)$. Es decir, los máximos beneficios diarios se obtienen fabricando 16 armarios del modelo A y 8 del modelo B, siendo ese beneficio máximo de 2400 €.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A1. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + ax + b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$.

A2. [1 PUNTO] Para $a = -2$ y $b = -3$ determinar las asíntotas verticales de la función resultante $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [0,75 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

A1. La función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + ax + b}$ pasa por $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$, entonces $f(-3) = \frac{9}{4}$.

$$f(-3) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3(-3)^2}{(-3)^2 + a(-3) + b} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{27}{9 - 3a + b} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108 = 81 - 27a + 9b \Rightarrow 27 = -27a + 9b \Rightarrow \boxed{3 = -3a + b}$$

Además, como en $x = -3$ hay un extremo la derivada debe anularse.

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + ax + b} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x(x^2 + ax + b) - (2x + a)3x^2}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{\cancel{6x^3} + 6ax^2 + 6bx - \cancel{6x^3} - 3ax^2}{(x^2 + ax + b)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3ax^2 + 6bx}{(x^2 + ax + b)^2} \left. \vphantom{\begin{matrix} f'(x) = \frac{3ax^2 + 6bx}{(x^2 + ax + b)^2} \\ f'(-3) = 0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \frac{3a(-3)^2 + 6b(-3)}{((-3)^2 + a(-3) + b)^2} = 0 \Rightarrow 27a - 18b = 0 \Rightarrow \boxed{3a - 2b = 0}$$

Si juntamos las dos condiciones obtenemos un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{matrix} 3a - 2b = 0 \\ -3a + b = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Sumamos las dos ecuaciones} \\ -b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3a + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-6}{3} = -2}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = -3$.

A2. Para $a = -2$ y $b = -3$ la función resultante es $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$. Sus asíntotas verticales son $x = a$, siendo a el valor que anula el denominador de la función.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Las asíntotas verticales son $x = 3$ y $x = -1$.

Estudiemos la posición relativa de asíntotas y función, para ello estudiamos el valor de los límites laterales.

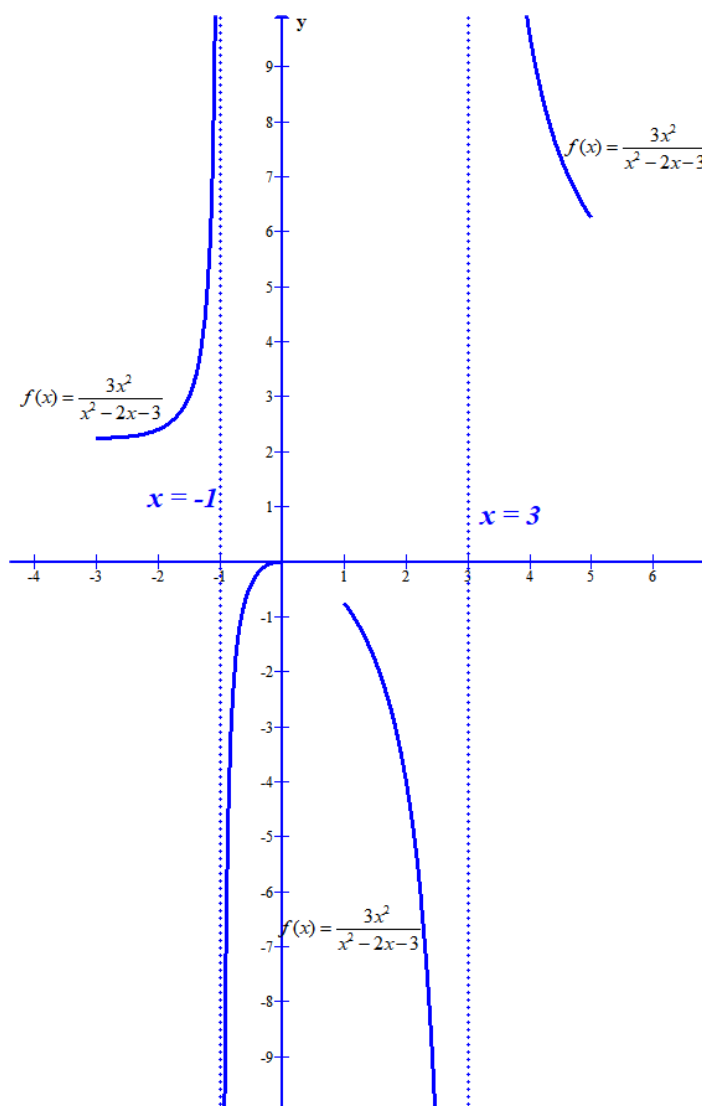
En $x = 3$ los límites son

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{27}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = 2,9 \\ \frac{3 \cdot 2,9^2}{2,9^2 - 2 \cdot 2,9 - 3} = \frac{+}{-} = - \end{array} \right\} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{27}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = 3,1 \\ \frac{3 \cdot 3,1^2}{3,1^2 - 2 \cdot 3,1 - 3} = \frac{+}{+} = + \end{array} \right\} = +\infty \end{array} \right.$$

En $x = -1$ tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{3}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = -1,1 \\ \frac{3 \cdot (-1,1)^2}{(-1,1)^2 - 2 \cdot (-1,1) - 3} = \frac{+}{+} = + \end{array} \right\} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{3}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = -0,9 \\ \frac{3 \cdot (-0,9)^2}{(-0,9)^2 - 2 \cdot (-0,9) - 3} = \frac{+}{-} = - \end{array} \right\} = -\infty \end{array} \right.$$

La gráfica de la función es:



B. La discontinuidad de una función racional aparece en los valores que anulan el denominador.

Si la función es $f(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3}$, averigüemos cuando el denominador se anula y el tipo de discontinuidad que aparece.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Calculemos los límites en esos valores.

En $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{3+3-6}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Factorizamos denominador y numerador.

$$\text{Denominador} \rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$\text{Numerador} \rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 3(x-2)(x+1)$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x-2) \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x-2)}{(x-3)} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable redefiniendo la función. Cambiando $f(-1) = \frac{9}{4}$ se evitaría la discontinuidad.

En $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{27-9-6}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Esta discontinuidad es inevitable.

La nueva función que evita la discontinuidad en $x = -1$, aunque sigue siendo discontinua en $x = 3$

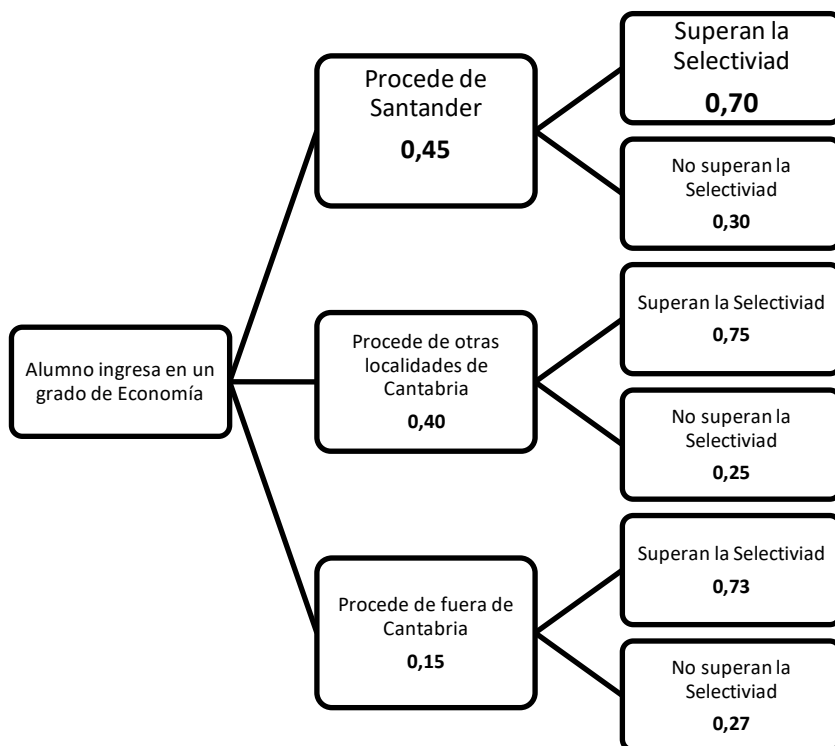
$$\text{Sería } f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 3 \\ \frac{9}{4} & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Este último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

- A.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?
- B.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?
- C.** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria, pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la Selectividad en junio de 2016?

Realizamos un diagrama de árbol para ayudarnos a entender la situación planteada en el problema.



Apoyándonos en este diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

A. $P(\text{Sea de Santander y Supere Selectividad}) = 0,45 \cdot 0,70 = \boxed{0,315}$

B. Llamamos A = “Ser de Santander”, B = “Ser de otra localidad de Cantabria”, C = “Ser de fuera de Cantabria” y S = “Superar la selectividad”. El suceso $\bar{S}$ = “No superar la selectividad”. Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P(A)P(S/A) + P(B)P(S/B) + P(C)P(S/C) = \\
 &= 0,45 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,75 + 0,15 \cdot 0,73 = 0,7245
 \end{aligned}$$

C. Nos piden calcular $P(B/\bar{S})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{S}) = \frac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(B)P(\bar{S}/B)}{1 - P(S)} = \frac{0,4 \cdot 0,25}{1 - 0,7245} = \frac{200}{551} \approx 0,363$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2017**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja del tipo A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:

- A. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
- B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
- D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.
- E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, $3/5$, $2/3$ y $5/6$. Si los tres disparan simultáneamente:

- A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?
- B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?
- C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

A. [3 PUNTOS] Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten k euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro k), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5}, & \text{si } -1 < x \leq 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2}, & \text{si } 7 < x \end{cases}$$

determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales es continua en $x = -1$ y $x = 7$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1200 personas da como resultado un sueldo medio de 1545 euros.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN N° 1****Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja del tipo A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

Las variables de decisión son: x número de cajas de tipo A y número de cajas de tipo B
Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Kg de manzanas	Kg de naranjas	Ingresos
Caja tipo A (x)	$5x$	$2x$	$7,5x$
Caja tipo B (y)	$5y$	$3y$	$8,5y$
Total	$5x + 5y$	$2x + 3y$	$7,5x + 8,5y$

La función a maximizar es $f(x, y) = 7,5x + 8,5y$.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 5y \leq 50 \\ 2x + 3y \leq 27 \end{array} \right\}$$

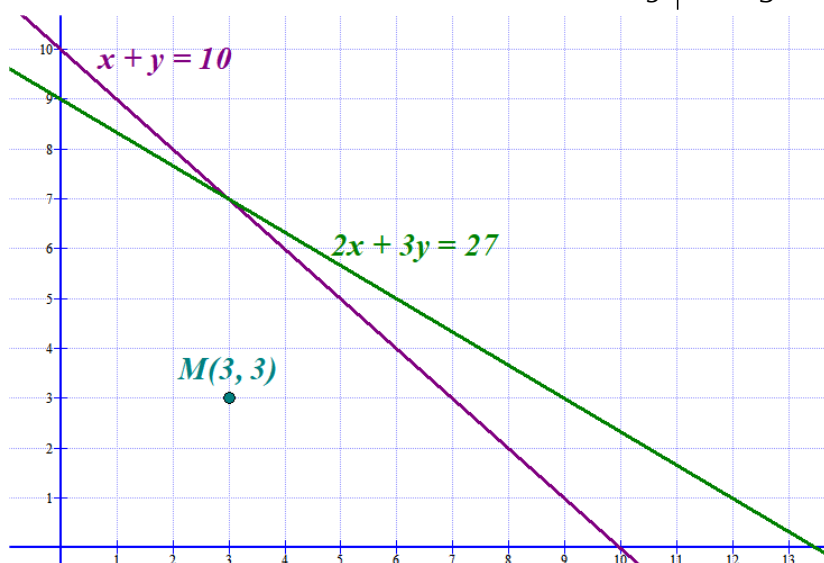
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$5x + 5y = 50 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

x	$y = 10 - x$
0	10
10	0

$$2x + 3y = 27 \Rightarrow 3y = 27 - 2x \Rightarrow y = \frac{27 - 2x}{3}$$

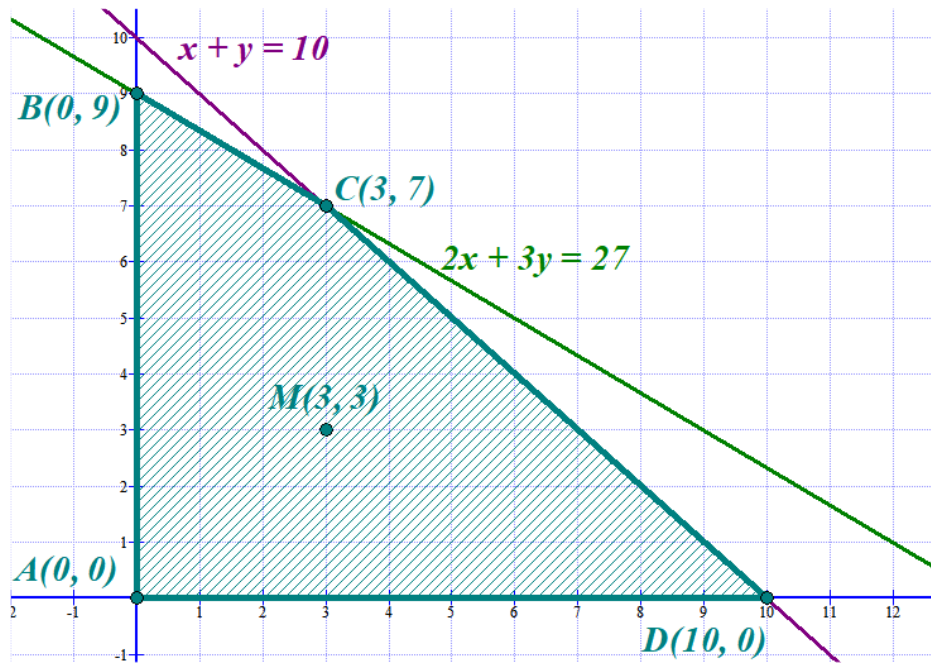
x	$y = \frac{27 - 2x}{3}$
0	9
9	3



Probamos si el punto $M(3, 3)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ 15 + 15 \leq 50 \\ 6 + 9 \leq 27 \end{array} \right\} \text{ Si las cumple}$$

La región factible es la delimitada por los ejes de coordenadas y las dos rectas que contiene al punto M .



Calculamos el valor de la función a maximizar $f(x, y) = 7,5x + 8,5y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(9, 0) \rightarrow f(9, 0) = 67,5 + 0 = 67,5$$

$$C(3, 7) \rightarrow f(3, 7) = 22,5 + 59,5 = 82 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(10, 0) \rightarrow f(10, 0) = 75 + 0 = 75$$

Los máximos ingresos se obtienen en el punto $C(3, 7)$ que significa hacer 3 cajas tipo A y 7 del tipo B.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:

- A.** [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.
E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

A. Puntos de corte con eje OX ($y = 0$):

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte con OX son A(0, 0), B(1, 0) y C(-2, 0)

Puntos de corte con eje OY ($x = 0$): $f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 = 0$

El punto de corte con el eje OY es A(0, 0)

B. Usaremos la derivada de la función: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$.

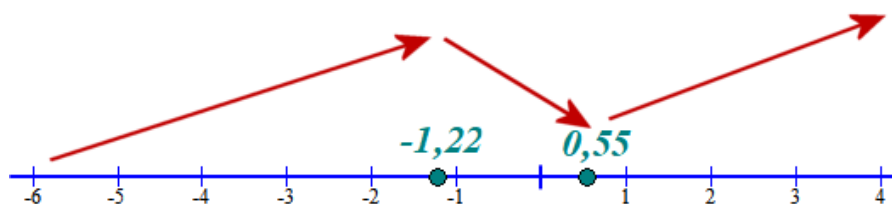
Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} = \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{28}}{6} = 0,55 \\ x = \frac{-2 - \sqrt{28}}{6} = -1,22 \end{cases}$$

El dominio de la función ($\mathbb{R}$) lo dividimos en 3 intervalos o semirrectas.

- En la semirrecta $(-\infty, -1,22)$. Tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 2 = 12 - 4 - 2 = 6 > 0$. La función crece.
- En el intervalo $(-1,22, 0,55)$. Tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 0 + 0 - 2 = -2 < 0$. La función decrece.
- En la semirrecta $(0,55, +\infty)$. Tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 - 2 = 14 > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en los intervalos $(-\infty, -1,22) \cup (0,55, +\infty)$ y decrece en $(-1,22, 0,55)$.

La función presenta un máximo local en $x = -1,22$ y un mínimo local en $x = 0,55$.

C. Calculamos la derivada segunda y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad antes, entre y después de estos valores obtenidos.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada segunda vale $f''(-2) = -12 + 2 = -10 < 0$. La función es cóncava ($\cap$).
- En el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = 2 > 0$. La función es convexa ($\cup$).

En el punto de abscisa $x = -\frac{1}{3}$ existe un punto de inflexión. Siendo cóncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y convexa en $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

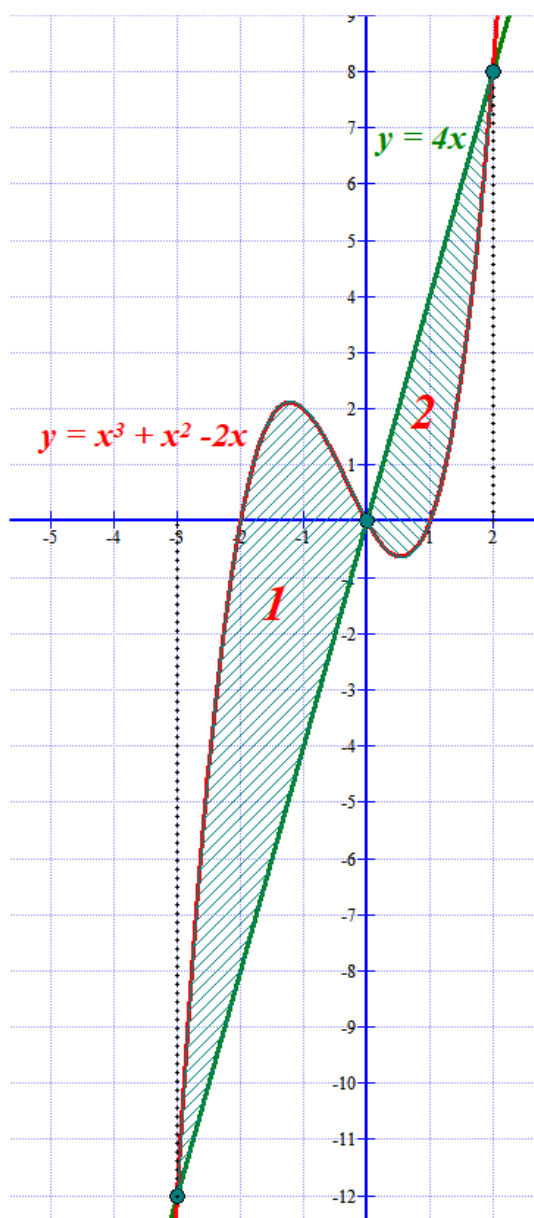
D. Determinemos los posibles puntos de corte de recta y función:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 - 2x \\ y = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 4x \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función y de la recta.

x	$y = x^3 + x^2 - 2x$	x	$y = 4x$
0	0	0	0
1	0	1	4
2	$8 + 4 - 4 = 8$	2	8
-3	$-27 + 9 + 6 = -12$	-3	-12



E. Al tener tres puntos de corte el área de la región es la suma del valor absoluto de dos integrales definidas (región 1 + región 2).

$$\text{Área} = \text{Área región 1} + \text{Área región 2} = \int_{-3}^0 (x^3 + x^2 - 2x - 4x) dx + \int_0^2 (4x - (x^3 + x^2 - 2x)) dx =$$

$$= \int_{-3}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx + \int_0^2 (-x^3 - x^2 + 6x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-3}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0 \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - 3(-3)^2 \right] + \left[-\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 3(2)^2 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0 \right] =$$

$$= -\left(\frac{81}{4} - 9 - 27 \right) - 4 - \frac{8}{3} + 12 = -\frac{81}{4} + 36 + 8 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{253}{12} = 21,08 u^2}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, $3/5$, $2/3$ y $5/6$. Si los tres disparan simultáneamente:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?

Llamamos A_1 , A_2 y A_3 a los sucesos acertar primer tirador, segundo tirador o tercer tirador, respectivamente.

La probabilidad de acertar el primer tirador es $3/5$ y de fallar es $2/5$. $P(A_1) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{A_1}) = \frac{2}{5}$

La probabilidad de acertar el 2º es $2/3$ y de fallar es $1/3$. $P(A_2) = \frac{2}{3}$; $P(\overline{A_2}) = \frac{1}{3}$

La probabilidad de acertar el 3º es $5/6$ y de fallar es $1/6$. $P(A_3) = \frac{5}{6}$; $P(\overline{A_3}) = \frac{1}{6}$

A. Para que acierte uno solo de los tiradores, debe acertar uno de ellos y fallar los otros dos.

$$\begin{aligned} P(\text{Acierta solo uno de los tiradores}) &= \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3+4+10}{90} = \boxed{\frac{17}{90} \approx 0,188}$$

B. La probabilidad de que los tres acierten es el producto de las probabilidades que cada uno tiene de acertar.

$$P(\text{Aciertan los 3 tiradores}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{90} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0,33}$$

C. Como este suceso puede pasar de muchas formas distintas calculamos la probabilidad pedida usando el suceso contrario (No acierte ninguno de ellos).

$$P(\text{Acerte al menos uno de ellos}) = 1 - P(\text{Fallan los 3 tiradores}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{90} = \boxed{\frac{88}{90} \approx 0,977}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]**

A. [3 PUNTOS] Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten k euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro k), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

A. Para discutir el sistema consideramos las matrices asociadas y utilizando el teorema de Rouché-Frobenius decidimos su compatibilidad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0$$

El rango de A/B puede ser 3. Calculemos su determinante.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4k - 3840 - (2880 - 4k) = 8k - 6720$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A/B| = 0 \Rightarrow 8k - 6720 = 0 \Rightarrow k = \frac{6720}{8} = 840$$

Hay dos casos distintos. Veamos que ocurre en cada uno de ellos.

CASO 1. $k \neq 840$

En este caso el determinante de la matriz ampliada es no nulo y por tanto su rango es 3. El rango de A es 2. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 2. $k = 840$

En este caso el determinante de la matriz ampliada es nulo y el rango de la matriz ampliada es 2 como el de la matriz de los coeficientes. Y también es igual al número de incógnitas (2). El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

Pide resolverlo en este caso. El sistema queda
$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = 840 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$
. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = 840 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = 840 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 4y = 480 \\ 8y + 6y = 840 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y = 480 \\ 14y = 840 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{480}{8} = 60 \\ y = \frac{840}{14} = 60 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 60 \Rightarrow x = 120}$$

Para $k = 840$ el empleado puede acabar 120 unidades del primer modelo y 60 del segundo.

B. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada A/B del apartado anterior (en el caso 2) y ya

hemos comprobado que su determinante es nulo, por lo que la matriz no tiene inversa.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5}, & \text{si } -1 < x \leq 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2}, & \text{si } 7 < x \end{cases}$$

determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales es continua en $x = -1$ y $x = 7$.

A. Llamamos x al número de euros que baja el precio del artículo.

Si vendo a 50 euros el beneficio que consigue por cada artículo es $50 - 35 = 15$.

Si descuento x euros el nuevo beneficio es $15 - x$.

Al hacer este descuento de x euros vendo $20 + 4x$ unidades.

El beneficio es una función de x :

$$f(x) = (15 - x)(20 + 4x) = 300 + 60x - 20x - 4x^2 = -4x^2 + 40x + 300$$

Para hallar con que descuento se obtiene el máximo beneficio, derivo esta función y la igualo a cero.

$$f(x) = -4x^2 + 40x + 300 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -8x + 40 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow -8x + 40 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{40}{8} = 5}$$

$$\text{Como } f'(x) = -8x + 40 \Rightarrow f''(x) = -8 \Rightarrow f''(5) = -8 < 0$$

Para $x = 5$ la función tiene un máximo.

Con el descuento de 5 € se consigue un máximo beneficio. Es decir, el precio debe ser de 45 € por artículo.

B. Hacemos que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5}, & \text{si } -1 < x \leq 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2}, & \text{si } 7 < x \end{cases}$ sea continua en $x = -1$

- Existe $f(-1) = a - 5 - 2 = a - 7$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} ax^2 + 5x - 2 = a - 7$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{-1+3}{1+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow a - 7 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}}$

Hacemos que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5}, & \text{si } -1 < x \leq 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2}, & \text{si } 7 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 7$.

- Existe $f(7) = \frac{7+3}{7^2+5} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{5}{27}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{bx+1}{(x-5)^2} = \frac{7b+1}{4}$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow$

$$\frac{7b+1}{4} = \frac{5}{27} \Rightarrow 189b + 27 = 20 \Rightarrow 189b = -7 \Rightarrow b = \frac{-7}{189} = \frac{-1}{27}$$

Los valores buscados son $a = \frac{22}{3}$ y $b = \frac{-1}{27}$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1200 personas da como resultado un sueldo medio de 1545 euros.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

Llamamos X = Sueldo mensual de un trabajador. $X = N(\mu, 310)$

A. La media muestral es $\bar{x} = 1545$ €. El tamaño de la muestra es $n = 1200$.

Con un nivel de confianza del 97% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(1545 - 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}}, 1545 + 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}} \right)$$

El intervalo de confianza es (1525'58, 1564'42)

B. Para un nivel de confianza del 98% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

Como el error anterior era de $2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}} = 19,42$. La mitad es 9,71 €. Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de n .

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9,71 \Rightarrow 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{n}} = 9,71 \Rightarrow 2,17 \cdot \frac{310}{9,71} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,17 \cdot \frac{310}{9,71} \right)^2 = 5533,45$$

El tamaño mínimo de la muestra es 5534 trabajadores.