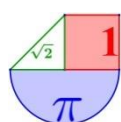
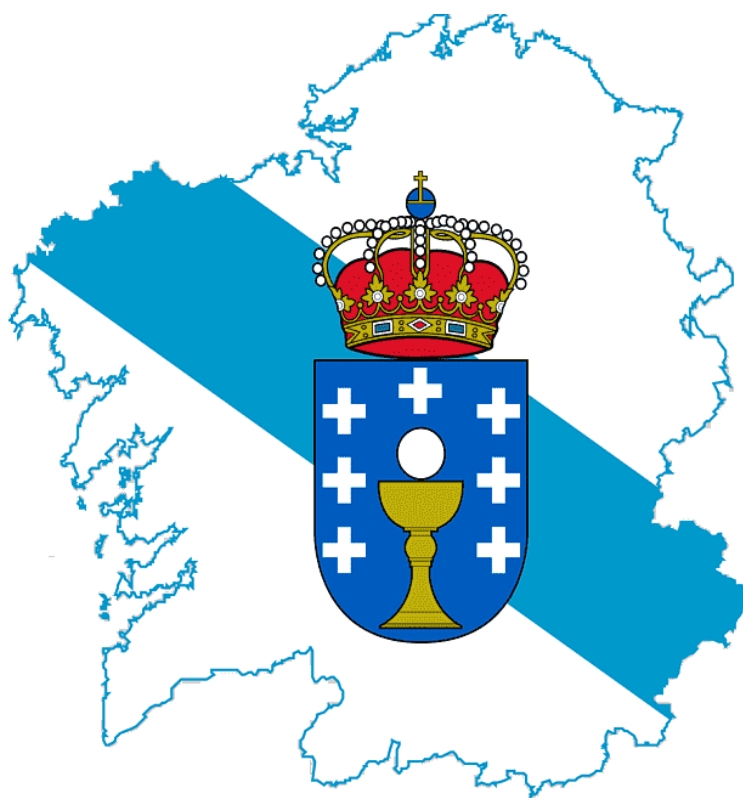


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU Galicia
Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Galicia desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

Convocatoria extraordinaria 2026	3
Convocatoria ordinaria 2026.....	17
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2025	31
Convocatoria ordinaria 2025.....	44
Convocatoria extraordinaria 2024	59
Convocatoria ordinaria 2024.....	71
Convocatoria extraordinaria 2023	82
Convocatoria ordinaria 2023.....	94
Convocatoria extraordinaria 2022	105
Convocatoria ordinaria 2022.....	116
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2021	128
ABAU Ordinaria 2021	138
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020	149
CONVOCATORIA ORDINARIA 2020	158
XULLO 2019	169
XUÑO 2019	182
SETEMBRO 2018.....	195
XUÑO 2018	209
SETEMBRO 2017	224
XUÑO 2017	238



PAU
Convocatoria extraordinaria 2026
**MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II**

CÓDIGO 40

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: las preguntas 1 y 2 sin apartados optativos y las preguntas 3 y 4 con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

El peso relativo de la población de Galicia en el conjunto de España ha disminuido en los últimos años y, al mismo tiempo, la comunidad se encuentra inmersa en un proceso de envejecimiento demográfico que afecta al conjunto de Europa. En este contexto, aproximadamente el 26 % de la población residente en la provincia de A Coruña tiene 65 años o más; en Lugo, este porcentaje asciende al 30 %; en Ourense, alcanza el 32 %; y en Pontevedra, se sitúa en el 24 %.

En enero de 2025, la población total de Galicia se situaba en torno a los 2.700.000 habitantes. De este total, la provincia de A Coruña concentraba aproximadamente el 41,5 % de la población residente. Por su parte, la provincia de Lugo representaba cerca del 12 % del conjunto de la población gallega, mientras que la provincia de Ourense agrupaba alrededor del 11,5 %. Finalmente, la provincia de Pontevedra reunía el 35 % restante de la población total de la comunidad autónoma.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

1.1. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más.

1.2. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Determine los valores de c y d para que $A \cdot B = B \cdot A$.

2.2. Para $c = 2$ y $d = 0$, despeje la matriz X en la ecuación matricial $B \cdot X - A^t = X$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . A continuación, calcule X .

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (3 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1.

CONTEXTO

Todos los años, en las semanas previas a la Navidad, arranca la temporada de la captura de la centolla en Galicia. La apertura de la veda de este crustáceo genera mucha expectación. En una lonja de un municipio costero de Galicia se estima que los datos referentes a las capturas diarias de centolla (en cientos de kilogramos) durante los cinco primeros días de la última campaña vienen dadas por la función

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en días.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. Determine los períodos de aumento y disminución de las capturas diarias de centolla. Contextualice las respuestas.

3.1.2. ¿A cuánto ascienden las capturas diarias máximas? ¿En qué momento o momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.1.3. Teniendo en cuenta el modelo anterior, calcule la cantidad total de capturas que se han

producido durante los cinco primeros días de la campaña $\left(\int_0^5 C(t) dt\right)$

3.2

CONTEXTO

Para ayudar a los inversores, se utilizan diversos modelos matemáticos que estiman el valor de las acciones de las empresas que cotizan en bolsa según el tiempo transcurrido. Si bien no pueden predecir exactamente el futuro, constituyen una herramienta para tomar decisiones y para interpretar datos reales.

El valor de una acción (en euros) de una empresa tecnológica que cotiza en bolsa se estima que viene dado por la función

$$V(t) = \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30, \quad t \geq 0$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde el momento en el que la acción ha salido a la venta.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos en los que el valor de la acción ha crecido y en los que ha decrecido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuál es el valor máximo que ha alcanzado la acción? ¿Y cuál es el valor mínimo? ¿En qué momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Teniendo en cuenta la función utilizada, ¿qué ocurrirá con el valor de la acción con el paso del tiempo? Justifique su respuesta.

PREGUNTA 4. ESTADÍSTICA Y ÁLGEBRA. (3 puntos)

Responda uno de los siguientes dos apartados de Estadística: 4.1. o 4.2. (1,5 puntos)

4.1. El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal con desviación típica igual a 2 euros. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio mensual en fotocopias de dichos estudiantes teniendo en cuenta que en una muestra de 36 estudiantes resultó un gasto medio de 13,5 euros.

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$$P(Z < 0,90) = 0,816 ; P(Z < 1,28) = 0,90 ; P(Z > 1,645) = 0,05 ; P(Z > 1,96) = 0,025.$$

4.2. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.60, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.24 \text{ y } P(B/A) = 0.90.$$

Calcule $P(B)$

Responda uno de los siguientes dos apartados de Álgebra: 4.3. o 4.4. (1,5 puntos)

4.3. Una bodega cuenta con una planta de embotellado en la que embotellan 1300 botellas por hora utilizando tres máquinas: M1, M2 y M3. Se sabe que la máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas. También se sabe que ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas. Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema y exprese en forma matricial.

4.4. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \leq 2(y+1) \qquad y \leq 2(x+1) \qquad x+y \leq 5$$

Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

El peso relativo de la población de Galicia en el conjunto de España ha disminuido en los últimos años y, al mismo tiempo, la comunidad se encuentra inmersa en un proceso de envejecimiento demográfico que afecta al conjunto de Europa. En este contexto, aproximadamente el 26 % de la población residente en la provincia de A Coruña tiene 65 años o más; en Lugo, este porcentaje asciende al 30 %; en Ourense, alcanza el 32 %; y en Pontevedra, se sitúa en el 24 %.

En enero de 2025, la población total de Galicia se situaba en torno a los 2.700.000 habitantes. De este total, la provincia de A Coruña concentraba aproximadamente el 41,5 % de la población residente. Por su parte, la provincia de Lugo representaba cerca del 12 % del conjunto de la población gallega, mientras que la provincia de Ourense agrupaba alrededor del 11,5 %. Finalmente, la provincia de Pontevedra reunía el 35 % restante de la población total de la comunidad autónoma.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

1.1. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más.

1.2. Calcule la probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense.

Llamamos A al suceso "la persona elegida es residente en A Coruña", B a "la persona elegida es residente en Lugo", C a "la persona elegida es residente en Ourense", D a "la persona elegida es residente en Pontevedra" y V a "la persona elegida tiene 65 años o más".

Con los datos proporcionados establecemos las siguientes probabilidades.

$$P(A) = 0.415, P(B) = 0.12, P(C) = 0.115, P(D) = 0.35,$$

$$P(V/A) = 0.26, P(V/B) = 0.3, P(V/C) = 0.32, P(V/D) = 0.24$$

1.1. Debemos calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap A) + P(V \cap B) + P(V \cap C) + P(V \cap D) = \\ &= P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) + P(D)P(V/D) = \\ &= 0.415 \cdot 0.26 + 0.12 \cdot 0.3 + 0.115 \cdot 0.32 + 0.35 \cdot 0.24 = \boxed{0.2647} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona residente en Galicia tenga 65 años o más es de 0.2647.

1.2. Debemos calcular $P(C/\bar{D})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \{C \cap \bar{D} = C\} = \frac{P(C)}{1 - P(D)} = \frac{0.115}{1 - 0.35} = \boxed{\frac{23}{130} \approx 0.177}$$

La probabilidad de que una persona residente en Galicia, sabiendo que no reside en la provincia de Pontevedra, sea residente en la provincia de Ourense vale $\frac{23}{130} \approx 0.177$.

Hemos utilizado que

$$C \cap \bar{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La persona reside en Ourense} \\ \text{y no reside en Pontevedra} \end{array} \right\} = \{ \text{La persona reside en Ourense} \} = C$$

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**2.1.** Determine los valores de c y d para que $A \cdot B = B \cdot A$.**2.2.** Para $c = 2$ y $d = 0$, despeje la matriz X en la ecuación matricial $B \cdot X - A^t = X$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . A continuación, calcule X .**2.1.** Resolvemos la igualdad $AB = BA$.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -d & c \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -d = 3 \\ c = 1 \\ -1 = -c \\ 3 = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ c = 1 \\ c = 1 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=1} \\ \boxed{d=-3} \end{cases}$$

Se cumple la igualdad para $c = 1$ y $d = -3$.**2.2.** Para $c = 2$ y $d = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.Despejamos X en la ecuación matricial.

$$B \cdot X - A^t = X \Rightarrow B \cdot X - X = A^t \Rightarrow (B - Id) X = A^t \Rightarrow X = (B - Id)^{-1} A^t$$

Hallamos la inversa de la matriz $B - Id$.

$$B - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B - Id| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$(B - Id)^{-1} = \frac{Adj((B - Id)^t)}{|B - Id|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X .

$$X = (B - Id)^{-1} A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -3-1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.**CONTEXTO**

Todos los años, en las semanas previas a la Navidad, arranca la temporada de la captura de la centolla en Galicia. La apertura de la veda de este crustáceo genera mucha expectación. En una lonja de un municipio costero de Galicia se estima que los datos referentes a las capturas diarias de centolla (en cientos de kilogramos) durante los cinco primeros días de la última campaña vienen dadas por la función

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en días.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. Determine los períodos de aumento y disminución de las capturas diarias de centolla.

Contextualice las respuestas.

3.1.2. ¿A cuánto ascienden las capturas diarias máximas? ¿En qué momento o momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.1.3. Teniendo en cuenta el modelo anterior, calcule la cantidad total de capturas que se han producido durante los cinco primeros días de la campaña $\left(\int_0^5 C(t) dt\right)$

3.1.1. Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$C(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \Rightarrow C'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \in [0, 5] \\ \frac{6-2}{2} = 2 \in [0, 5] \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos que pertenece al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 2$ y $t = 4$.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 5]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $C'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4, 5]$.

La función crece en $[0, 2) \cup (4, 5]$ y decrece en $(2, 4)$.

Las capturas diarias de centolla crecieron durante los dos primeros días, disminuyeron hasta el cuarto día y volvieron a aumentar hasta el quinto día.

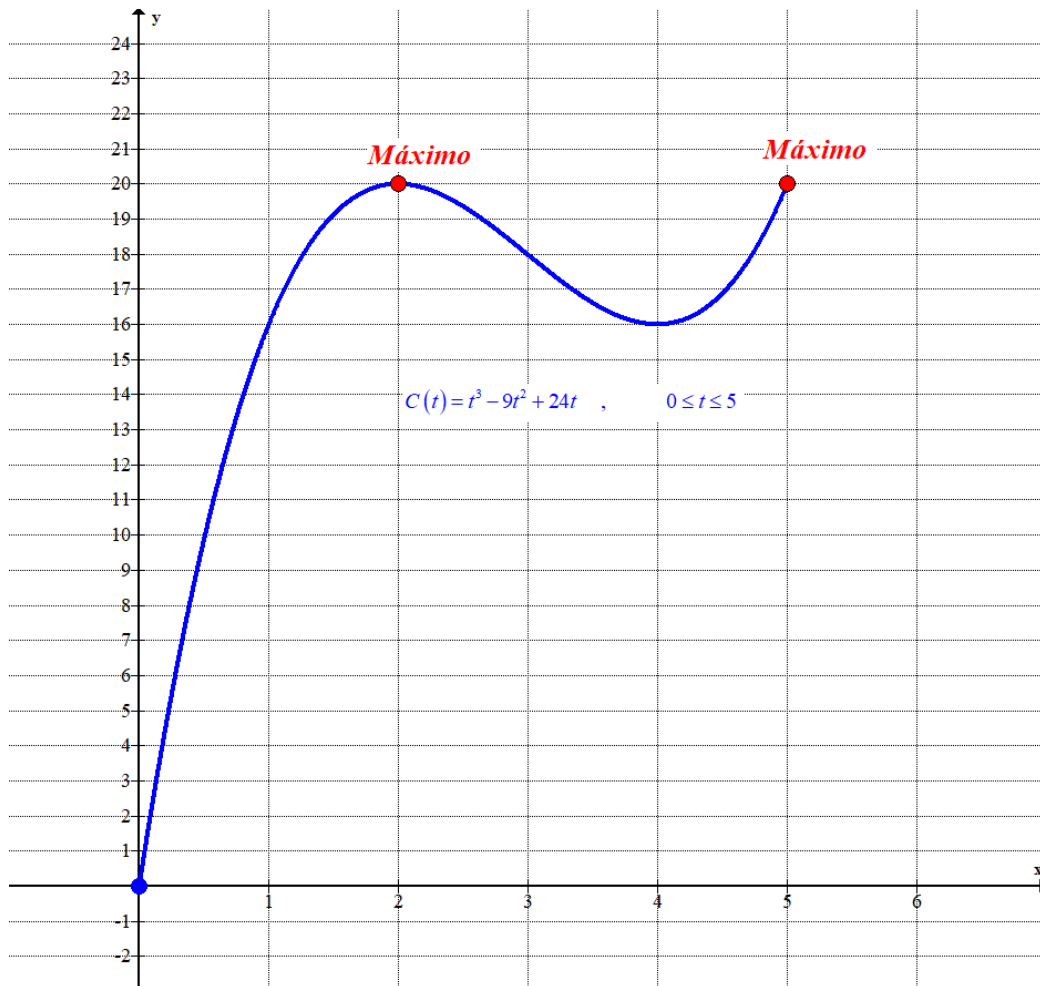
3.1.2. Por lo estudiado en el apartado anterior tenemos que la función presenta un máximo relativo para $t = 2$. Valoramos la función en este punto y en los extremos del intervalo de estudio para decidir donde está el máximo absoluto.

$$C(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0$$

$$C(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$$

$$C(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 = 20$$

Las capturas máximas se obtuvieron el segundo y el quinto día con la captura de 2000 kilos de centolla.



3.1.3. Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^5 C(t) dt &= \int_0^5 t^3 - 9t^2 + 24t dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{9t^3}{3} + \frac{24t^2}{2} \right]_0^5 = \left[\frac{t^4}{4} - 3t^3 + 12t^2 \right]_0^5 = \\ &= \left[\frac{5^4}{4} - 3 \cdot 5^3 + 12 \cdot 5^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 \right] = \frac{625}{4} - 375 + 300 = \boxed{81.25} \end{aligned}$$

La cantidad total de capturas que se han producido durante los cinco primeros días de la campaña es de 8125 kilos.

3.2**CONTEXTO**

Para ayudar a los inversores, se utilizan diversos modelos matemáticos que estiman el valor de las acciones de las empresas que cotizan en bolsa según el tiempo transcurrido. Si bien no pueden predecir exactamente el futuro, constituyen una herramienta para tomar decisiones y para interpretar datos reales.

El valor de una acción (en euros) de una empresa tecnológica que cotiza en bolsa se estima que viene dado por la función

$$V(t) = \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30, \quad t \geq 0$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde el momento en el que la acción ha salido a la venta.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos en los que el valor de la acción ha crecido y en los que ha decrecido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuál es el valor máximo que ha alcanzado la acción? ¿Y cuál es el valor mínimo? ¿En qué momentos se producen? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Teniendo en cuenta la función utilizada, ¿qué ocurrirá con el valor de la acción con el paso del tiempo? Justifique su respuesta.

3.2.1. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

El dominio de la función son todos los números reales.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función $V(t)$.

$$V(t) = \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 \Rightarrow V'(t) = \frac{-40(t^2 - 4t + 5) - (2t - 4)(80 - 40t)}{(t^2 - 4t + 5)^2} =$$

$$= \frac{-40t^2 + 160t - 200 - (160t - 80t^2 - 320 + 160t)}{(t^2 - 4t + 5)^2} = \frac{40t^2 - 160t + 120}{(t^2 - 4t + 5)^2}$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow \frac{40t^2 - 160t + 120}{(t^2 - 4t + 5)^2} = 0 \Rightarrow 40t^2 - 160t + 120 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=t} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 1$ y $t = 3$.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$V'(0.5) = \frac{40 \cdot 0.5^2 - 160 \cdot 0.5 + 120}{(0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 5)^2} = \frac{800}{169} > 0. \text{ La función crece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$V'(2) = \frac{40 \cdot 2^2 - 160 \cdot 2 + 120}{(2^2 - 4 \cdot 2 + 5)^2} = -40 < 0. \text{ La función decrece en } (1,3).$$

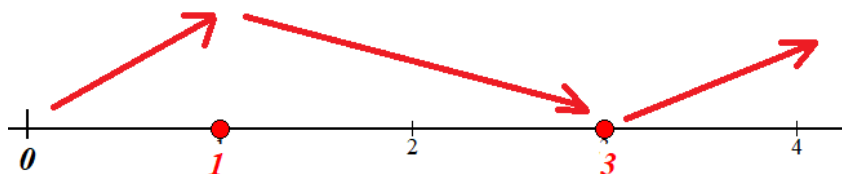
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale

$$V'(4) = \frac{40 \cdot 4^2 - 160 \cdot 4 + 120}{(4^2 - 4 \cdot 4 + 5)^2} = \frac{120}{25} > 0. \text{ La función crece en } (3, +\infty).$$

La función crece en $[0,1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

El valor de la acción ha crecido en el primer mes y a partir del tercer mes. Ha decrecido entre el primer y el tercer mes.

3.2.2. Hemos visto que el valor de la acción sigue el esquema siguiente:



Valoramos la función en $t = 0$, $t = 1$ y en $t = 3$ para decidir el valor mínimo y máximo de la función.

$$\left. \begin{aligned} V(0) &= \frac{80 - 40 \cdot 0}{0^2 - 4 \cdot 0 + 5} + 30 = 46 \\ V(1) &= \frac{80 - 40 \cdot 1}{1^2 - 4 \cdot 1 + 5} + 30 = 50 \text{ Máximo} \\ V(3) &= \frac{80 - 40 \cdot 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 5} + 30 = 10 \text{ Mínimo} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} V(t) &= \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 = 0 + 30 = 30 \end{aligned} \right\}$$

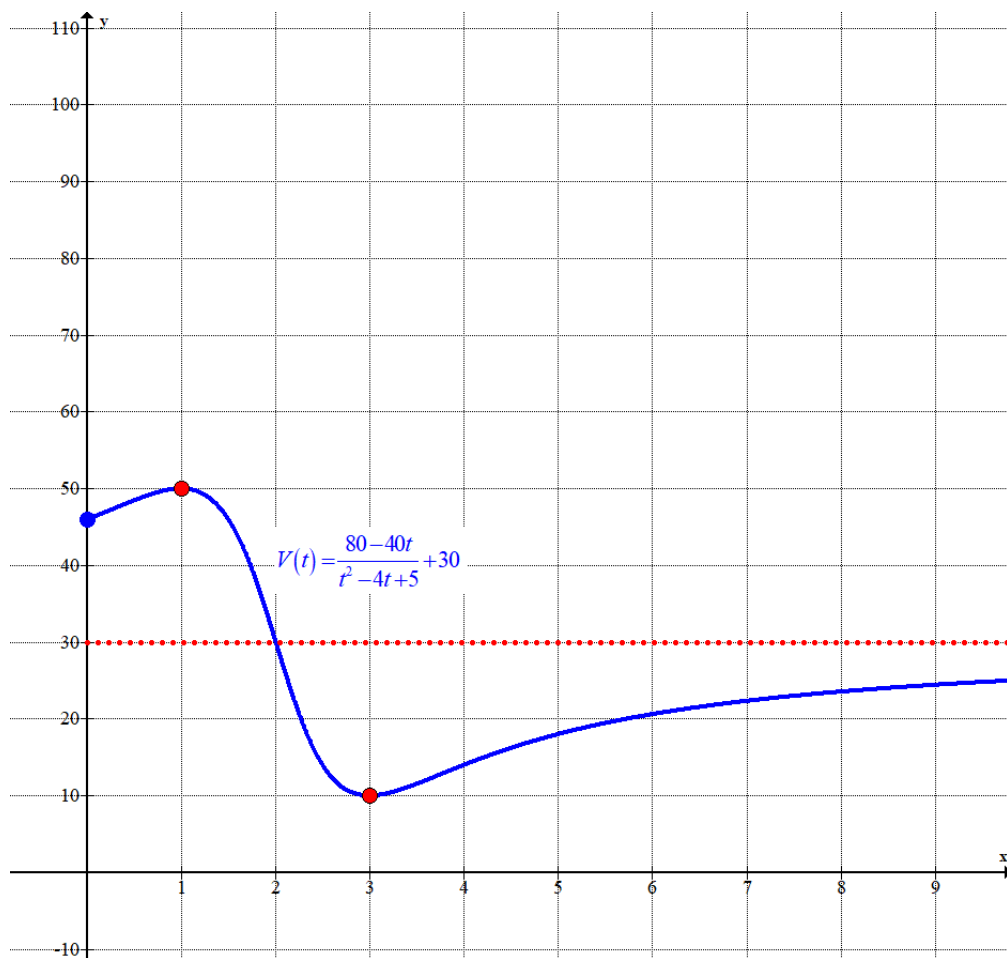
El valor mínimo de acción es de 10 euros y se produce a los tres meses. El valor máximo de la acción es de 50 euros y se produce en el primer mes.

3.2.3. Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80 - 40t}{t^2 - 4t + 5} + 30 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{80}{t^2} - \frac{40t}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} - \frac{4t}{t^2} + \frac{5}{t^2}} + 30 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{80}{t^2} - \frac{40}{t}}{1 - \frac{4}{t} + \frac{5}{t^2}} + 30 =$$

$$= \frac{\frac{80}{\infty} - \frac{40}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty} + \frac{5}{\infty}} = \frac{0-0}{1-0+0} + 30 = 0 + 30 = \boxed{30}$$

El valor de la acción con el paso del tiempo tiende a ser de 30 €.



4.1. El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal con desviación típica igual a 2 euros. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio mensual en fotocopias de dichos estudiantes teniendo en cuenta que en una muestra de 36 estudiantes resultó un gasto medio de 13,5 euros.

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

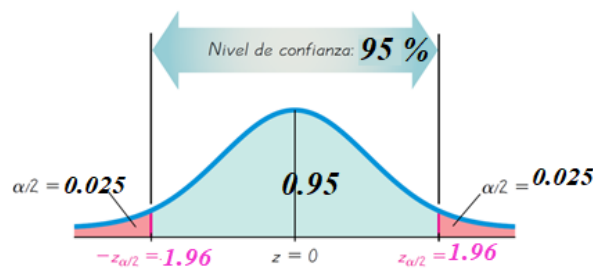
$P(Z < 0,90) = 0,816$; $P(Z < 1,28) = 0,90$; $P(Z > 1,645) = 0,05$; $P(Z > 1,96) = 0,025$.

Sea X = El gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto. $X = N(\mu, 2)$.

El tamaño de la muestra es $n = 36$. La media muestral es $\bar{x} = 13.5$ euros.

Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow \{P(Z > 1,96) = 0,025\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}} \approx 0.6533 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media del gasto mensual en fotocopias de los alumnos de un instituto es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (13.5 - 0.6533, 13.5 + 0.6533) = (12.8467, 14.1533)$$

4.2. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.60, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.24 \text{ y } P(B/A) = 0.90.$$

Calcule $P(B)$

Utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.24 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.24 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.24 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 1 - 0.24 = 0.76}$$

Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = 0.90 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.9 \\ P(A) = 0.60 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.6} = 0.9 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.6 = 0.54}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 0.76 \\ P(A \cap B) = 0.54 \\ P(A) = 0.60 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.76 = 0.6 + P(B) - 0.54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.76 - 0.6 + 0.54 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.7}$$

4.3. Una bodega cuenta con una planta de embotellado en la que embotellan 1300 botellas por hora utilizando tres máquinas: M1, M2 y M3. Se sabe que la máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas. También se sabe que ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas. Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema y expréselo en forma matricial.

Llamamos “x”, “y”, “z” al número de botellas por hora que embotellan las máquinas M1, M2 y M3, respectivamente.

“Se embotellan 1300 botellas por hora utilizando las tres máquinas: M1, M2 y M3” $\rightarrow x + y + z = 1300$.

“La máquina M1 es más rápida que la máquina M2, ya que embotella un 25 % más de botellas” $\rightarrow x = 1.25y$.

“Ayer tuvieron que prescindir de la máquina M2 por tener una avería, y que utilizando dos horas la máquina M1 y tres horas la máquina M3 embotellaron 2030 botellas” $\rightarrow 2x + 3z = 2030$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x = 1.25y \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x - 1.25y = 0 \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1.25 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 0 \\ 2030 \end{pmatrix}$$

No lo pide, pero lo resolvemos para comprobar que lo hemos planteado bien.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x = 1.25y \\ 2x + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.25y + y + z = 1300 \\ 2 \cdot 1.25y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.25y + z = 1300 \\ 2.5y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1300 - 2.25y \\ 2.5y + 3z = 2030 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.5y + 3(1300 - 2.25y) = 2030 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.5y + 3900 - 6.75y = 2030 \Rightarrow -4.25y = -1870 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1870}{4.25} = 440} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1.25 \cdot 440 = 550} \\ \boxed{z = 1300 - 2.25 \cdot 440 = 310} \end{cases}$$

La máquina M1 embotella 550 botellas por hora, la máquina M2 440 botellas y la M3 310 botellas por hora.

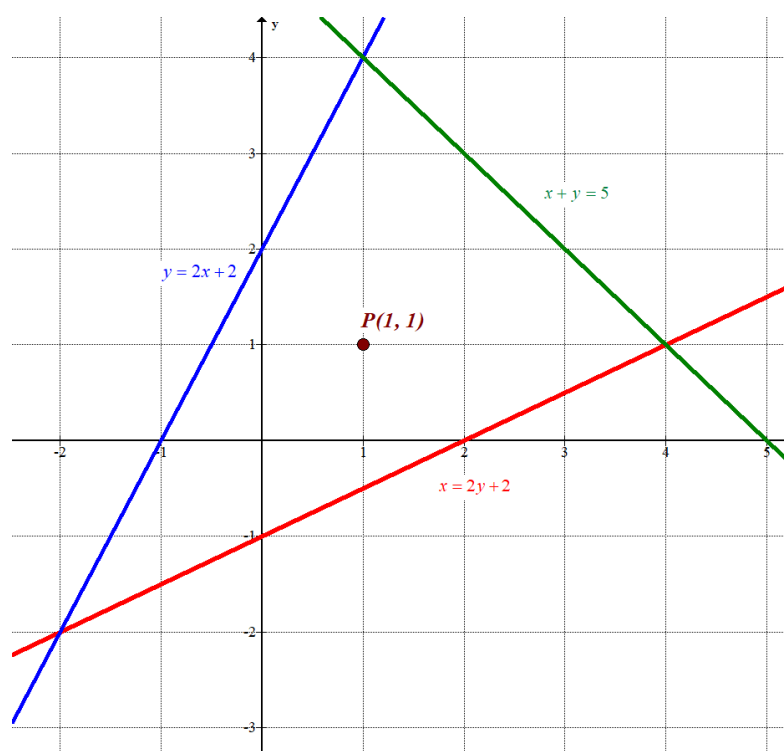
4.4. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \leq 2(y+1) \quad y \leq 2(x+1) \quad x+y \leq 5$$

Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

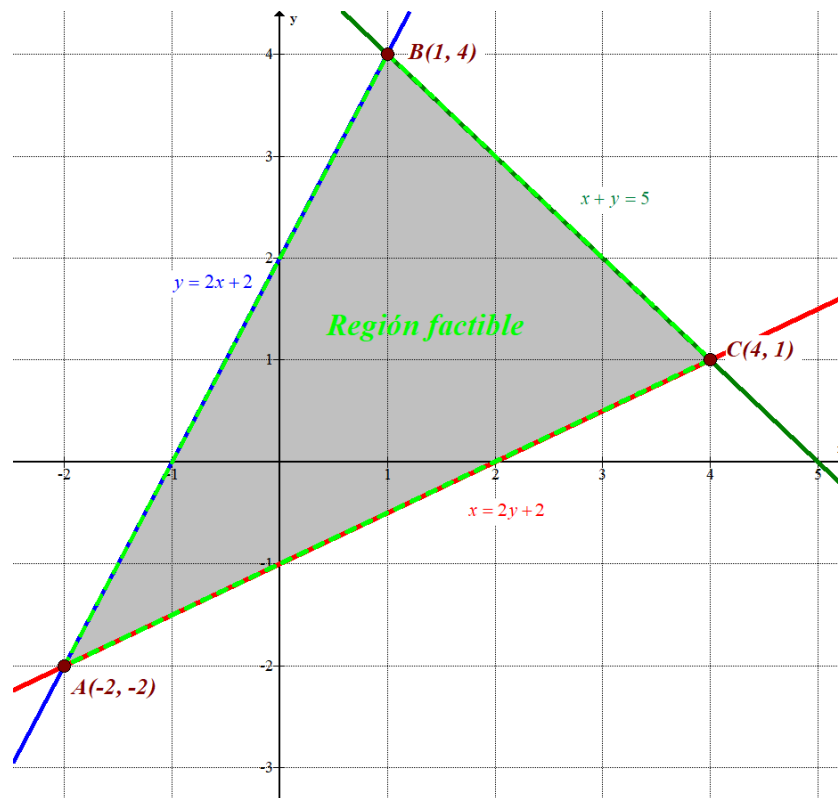
$x = 2y + 2$		$y = 2x + 2$		$x + y = 5$	
x	$y = \frac{x-2}{2}$	x	$y = 2x + 2$	x	$y = 5 - x$
0	-1	0	2	0	5
2	0	1	4	3	2
4	1	2	6	5	0



Como las inecuaciones son $x \leq 2(y+1)$ $y \leq 2(x+1)$ $x+y \leq 5$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas verde y azul, y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$1 \leq 2(1+1) \quad 1 \leq 2(1+1) \quad 1+1 \leq 5 \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Comprobamos que las coordenadas de los vértices son las indicadas en la imagen.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2(y+1) = 2y + 2 \\ y = 2(x+1) = 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2(2y + 2) + 2 = 4y + 4 + 2 = 4y + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 = 3y \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2(-2) + 2 = -2 \Rightarrow \boxed{A(-2, -2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x + 2 = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{B(1, 4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2 + y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{C(4, 1)}$$

Los vértices de la región factible son los puntos $A(-2, -2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 1)$.



PAU
Convocatoria ordinaria 2026
**MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS
CIENCIAS SOCIAIS II**

CÓDIGO 40

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: las preguntas 1 y 2 sin apartados optativos y las preguntas 3 y 4 con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

En un ayuntamiento gallego, se realizó una encuesta a estudiantes que estaban preparando las pruebas de acceso a la universidad (PAU) de 2026. La mayoría estudian en casa y/o en la biblioteca municipal. Otras opciones que tuvieron menos respuestas fueron: cafeterías tranquilas, zonas de descanso del centro comercial y medios de transporte público. El 80 % estudia en casa o en la biblioteca municipal, el 15 % estudia en casa y en la biblioteca municipal y el 40 % no estudia en casa.

En el caso de que un porcentaje superior al 30 % estudie en la biblioteca municipal, los responsables del ayuntamiento ampliarán su horario durante los días anteriores a las PAU 2026. **Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.**

1.1. Si al elegir una persona de la encuesta dice que estudia en casa, ¿cuál es la probabilidad de que no lo haga en la biblioteca municipal?

1.2. ¿Ampliarán los responsables del ayuntamiento el horario de la biblioteca municipal durante los días anteriores a las PAU 2026? Justifique la respuesta.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$2x \geq 3y - 7$$

$$x + y + 1 \geq 0$$

$$x \leq 3$$

$$x + 2y \leq 7$$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (3 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1.**CONTEXTO**

El beneficio de una empresa depende básicamente de sus ventas. Cuando las ventas son pequeñas, el beneficio puede ser negativo debido a los costes fijos. También puede ser negativo cuando las ventas son grandes debido al aumento de los costes de producción. El beneficio diario de una empresa, en cientos de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -x^2 + 10x - 16$$

donde x son los miles de unidades vendidas al día, con $1 \leq x \leq 9$.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo que puede obtener la empresa? ¿Cuántas unidades debe vender para alcanzarlo? Contextualice las respuestas.

3.1.2. Determine los valores de x para los que la empresa obtiene beneficios positivos. Contextualice la respuesta.

3.1.3. Calcule el beneficio medio (B_m) obtenido por la empresa cuando vende entre 3000 y 7000 unidades, sabiendo que viene dado por

$$B_m = \frac{1}{7-3} \int_3^7 B(x) dx$$

3.2

CONTEXTO

En el año 2025 las reservas de agua de varios embalses gallegos se han visto comprometidas a causa de la falta de precipitaciones y del aumento de la evaporación del agua debida a las altas temperaturas. Esta situación ha provocado que a finales del verano se haya activado la prealerta por escasez moderada de agua en muchos municipios gallegos, viéndose afectada cerca del 30 % de la población de Galicia. En concreto, en un determinado embalse, se estima que las reservas acumuladas de agua (medidas en porcentaje de su capacidad) vienen dadas por la función

$$R(t) = \begin{cases} 96 - 2(t-3)^2, & 0 \leq t \leq 6 \\ 5(t-9)^2 + 33, & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en meses contados a partir del día 1 de enero de 1025.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos del año en los que las reservas de agua han aumentado y disminuido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuáles han sido las reservas mínimas? ¿En qué momento o momentos se han producido? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Utilizando la información de los apartados anteriores represente gráficamente la evolución de las reservas de agua del embalse a lo largo del año 2025.

PREGUNTA 4. ESTADÍSTICA Y ÁLGEBRA. (3 puntos)

Responda uno de los siguientes dos apartados de Estadística: 4.1. o 4.2. (1,5 puntos)

4.1. La cantidad de agua (en litros) que se consume en el lavado de un coche en una estación de autolavado se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 20$ litros. Tomada una muestra de $n = 64$ coches, se ha determinado que el consumo medio de agua está comprendido entre 76,1 litros y 85,9 litros. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado esta afirmación?

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$$P(Z < 2,05) = 0,98 ; P(Z < 2,326) = 0,99; P(Z > 1,645) = 0,05; P(Z > 1,96) = 0,025.$$

4.2. El 90 % de los individuos de una población tienen cuenta bancaria. Elegidos 5 individuos de esa población.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que todos tengan cuenta bancaria?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 individuos, menos de 2 tengan cuenta bancaria.

Responda uno de los siguientes dos apartados de Álgebra: 4.3. o 4.4. (1,5 puntos)

4.3. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear la siguiente igualdad matricial $A \cdot B = C$.

4.4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores de k para los que la matriz $A^t \cdot B$ tenga inversa, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

En un ayuntamiento gallego, se realizó una encuesta a estudiantes que estaban preparando las pruebas de acceso a la universidad (PAU) de 2026. La mayoría estudian en casa y/o en la biblioteca municipal. Otras opciones que tuvieron menos respuestas fueron: cafeterías tranquilas, zonas de descanso del centro comercial y medios de transporte público. El 80 % estudia en casa o en la biblioteca municipal, el 15 % estudia en casa y en la biblioteca municipal y el 40 % no estudia en casa.

En el caso de que un porcentaje superior al 30 % estudie en la biblioteca municipal, los responsables del ayuntamiento ampliarán su horario durante los días anteriores a las PAU 2026. **Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.**

1.1. Si al elegir una persona de la encuesta dice que estudia en casa, ¿cuál es la probabilidad de que no lo haga en la biblioteca municipal?

1.2. ¿Ampliarán los responsables del ayuntamiento el horario de la biblioteca municipal durante los días anteriores a las PAU 2026? Justifique la respuesta.

Llamamos A al suceso "estudiar en casa", B a "estudiar en la biblioteca municipal" y C a "estudiar en otro lugar distinto a la casa y la biblioteca municipal".

Por la información proporcionada conocemos las siguientes probabilidades:

El 80 % estudia en casa o en la biblioteca municipal $\rightarrow P(A \cup B) = 0.80$.

El 15 % estudia en casa y en la biblioteca municipal $\rightarrow P(A \cap B) = 0.15$

El 40 % no estudia en casa $\rightarrow P(A^c) = 0.40$.

Podemos deducir la probabilidad del suceso A.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.40 = 0.60$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos para obtener la probabilidad del suceso B:

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.80 \\ P(A \cap B) = 0.15 \\ P(A) = 0.60 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.8 = 0.6 + P(B) - 0.15 \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.8 - 0.6 + 0.15 = \boxed{0.35}$$

1.1. Nos piden determinar el valor de $P(B^c / A)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B^c / A) = 1 - P(B / A) = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \frac{0.15}{0.6} = \frac{0.6 - 0.15}{0.6} = \boxed{0.75}$$

1.2. Sabemos que $P(B) = 0.35$, lo que implica que el 35% de los estudiantes lo harán en la biblioteca municipal. Al ser superior al 30% se deben ampliar los horarios de apertura de la biblioteca municipal.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$2x \geq 3y - 7$

$x + y + 1 \geq 0$

$x \leq 3$

$x + 2y \leq 7$

Responda estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**2.1.** Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.**2.2.** Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.**2.1.** Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$2x = 3y - 7$

$x + y + 1 = 0$

$x = 3$

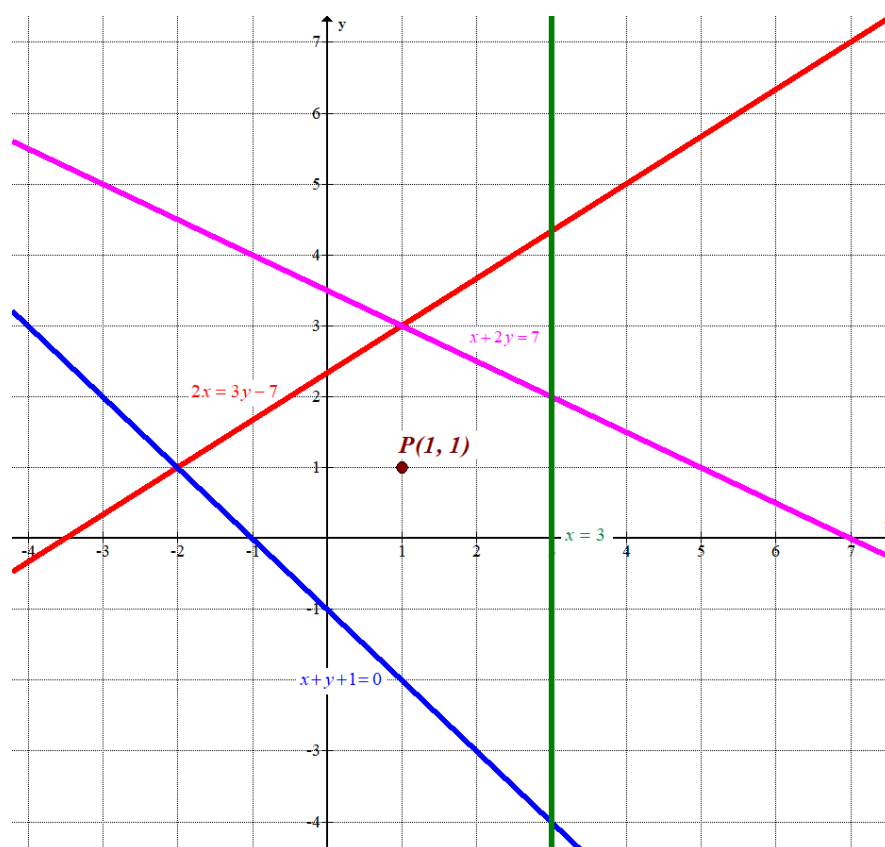
$x + 2y = 7$

x	$y = \frac{2x+7}{3}$
-2	1
1	3
4	5

x	$y = -1 - x$
-2	1
1	-2
4	-5

$x = 3$	y
3	1
3	2
3	3

x	$y = \frac{7-x}{2}$
-1	4
1	3
3	2



Como las inecuaciones son

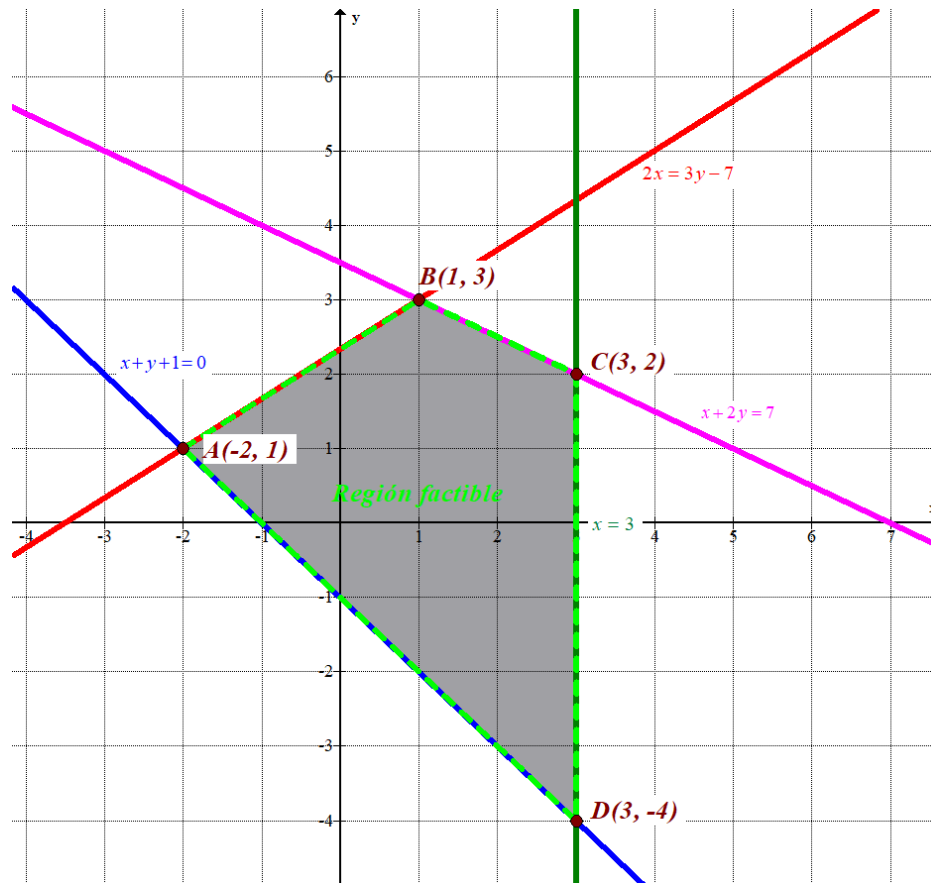
$$\left. \begin{array}{l} 2x \geq 3y - 7 \\ x + y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \leq 7 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada por}$$

debajo de las rectas rosa y roja, a la izquierda de la recta vertical verde y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 \geq 3 \cdot 1 - 7 \\ 1 + 1 + 1 \geq 0 \\ 1 \leq 3 \\ 1 + 2 \cdot 1 \leq 7 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(3, 2)$ y $D(3, -4)$.

2.2. Valoramos la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(-2, 1) \rightarrow f(-2, 1) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1$$

$$B(1, 3) \rightarrow f(1, 3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$

$$C(3, 2) \rightarrow f(3, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ Máximo}$$

$$D(3, -4) \rightarrow f(3, -4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -6 \text{ Mínimo}$$

El valor mínimo es -6 y se alcanza en el punto $D(3, -4)$.

El valor máximo es 12 y se alcanza en el punto $C(3, 2)$.

3.1.**CONTEXTO**

El beneficio de una empresa depende básicamente de sus ventas. Cuando las ventas son pequeñas, el beneficio puede ser negativo debido a los costes fijos. También puede ser negativo cuando las ventas son grandes debido al aumento de los costes de producción. El beneficio diario de una empresa, en cientos de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -x^2 + 10x - 16$$

donde x son los miles de unidades vendidas al día, con $1 \leq x \leq 9$.

Responda estos tres apartados: 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

3.1.1. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo que puede obtener la empresa? ¿Cuántas unidades debe vender para alcanzarlo? Contextualice las respuestas.

3.1.2. Determine los valores de x para los que la empresa obtiene beneficios positivos. Contextualice la respuesta.

3.1.3. Calcule el beneficio medio (B_m) obtenido por la empresa cuando vende entre 3000 y 7000 unidades, sabiendo que viene dado por

$$B_m = \frac{1}{7-3} \int_3^7 B(x) dx$$

3.1.1. Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$B(x) = -x^2 + 10x - 16 \Rightarrow B'(x) = -2x + 10$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Hemos encontrado un punto crítico que pertenece al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 5$.

- En el intervalo $[1, 5)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale $B'(2) = -2 \cdot 2 + 10 = 6 > 0$. La función crece en $[1, 5)$.
- En el intervalo $(5, 9]$ consideramos $x = 6$ y la derivada vale $B'(6) = -2 \cdot 6 + 10 = -2 < 0$. La función decrece en $(5, 9]$.

La función crece en $[1, 5)$ y decrece en $(5, 9]$.

La función tiene un máximo en $x = 5$.

Como $B(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 16 = 9$ el beneficio máximo que se puede obtener es de 900 euros que se consiguen con la venta de 5000 unidades diarias.

3.1.2. Buscamos los valores de ventas para los que los beneficios son nulos.

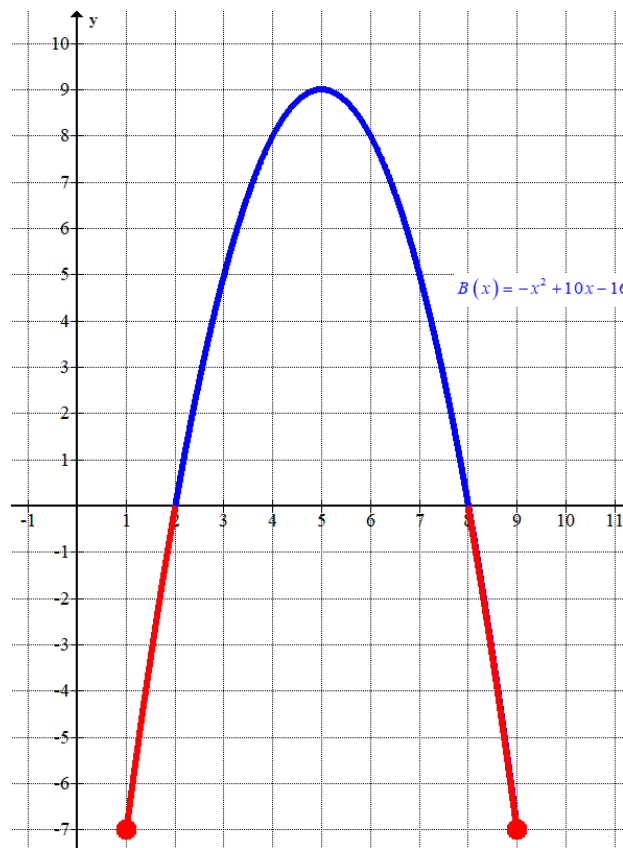
$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 10x - 16 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 10x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-10+6}{-2} = 2 = x \\ \frac{-10-6}{-2} = 8 = x \end{cases}$$

La función beneficios es continua y crece de 1 a 5. Como los beneficios son nulos en $x = 2$, entonces podemos afirmar que los beneficios son negativos de 1 a 2.

La función beneficios es continua y decrece de 5 a 9. Como los beneficios son nulos en $x = 8$ entonces podemos afirmar que los beneficios son negativos de 8 a 9.

Los beneficios son positivos con unas ventas entre 2000 y 8000 unidades.



3.1.3. Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned}
 B_m &= \frac{1}{7-2} \int_2^7 B(x) dx = \frac{1}{7-2} \int_2^7 -x^2 + 10x - 16 dx = \\
 &= \frac{1}{4} \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 16x \right]_2^7 = \frac{1}{4} \left(\left[-\frac{7^3}{3} + 5 \cdot 7^2 - 16 \cdot 7 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 5 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 \right] \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(-\frac{343}{3} + 245 - 112 - (-9 + 20 - 32) \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{343}{3} + 145 \right) = \boxed{\frac{23}{3} \approx 7.6667}
 \end{aligned}$$

El beneficio medio (B_m) obtenido por la empresa cuando vende entre 3000 y 7000 unidades es de 766.67 euros.

3.2**CONTEXTO**

En el año 2025 las reservas de agua de varios embalses gallegos se han visto comprometidas a causa de la falta de precipitaciones y del aumento de la evaporación del agua debida a las altas temperaturas. Esta situación ha provocado que a finales del verano se haya activado la prealerta por escasez moderada de agua en muchos municipios gallegos, viéndose afectada cerca del 30 % de la población de Galicia. En concreto, en un determinado embalse, se estima que las reservas acumuladas de agua (medidas en porcentaje de su capacidad) vienen dadas por la función

$$R(t) = \begin{cases} 96 - 2(t-3)^2, & 0 \leq t \leq 6 \\ 5(t-9)^2 + 33, & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

en donde la variable t representa el tiempo transcurrido en meses contados a partir del día 1 de enero de 1025.

Responda estos tres apartados: 3.2.1., 3.2.2. y 3.2.3.

3.2.1. Determine los períodos del año en los que las reservas de agua han aumentado y disminuido. Contextualice las respuestas.

3.2.2. ¿Cuáles han sido las reservas mínimas? ¿En qué momento o momentos se han producido? Contextualice las respuestas.

3.2.3. Utilizando la información de los apartados anteriores represente gráficamente la evolución de las reservas de agua del embalse a lo largo del año 2025.

3.2.1. Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función $R(x)$.

$$R(t) = \begin{cases} 96 - 2(t-3)^2, & 0 \leq t \leq 6 \\ 5(t-9)^2 + 33, & 6 < t \leq 12 \end{cases} \Rightarrow R'(t) = \begin{cases} -4(t-3), & 0 \leq t < 6 \\ 10(t-9), & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4(t-3) = 0 \rightarrow t = 3 \in [0, 6) \\ 10(t-9) = 0 \rightarrow t = 9 \in (6, 12] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 0, t = 3, t = 6, t = 9$ y $t = 12$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $R'(1) = -4(1-3) = 8 > 0$. La función crece en $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 6)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $R'(4) = -4(4-3) = -4 < 0$. La función decrece en $(3, 6)$.
- En el intervalo $(6, 9)$ tomamos $t = 7$ y la derivada vale $R'(7) = 10(7-9) = -20 < 0$. La función decrece en $(6, 9)$.
- En el intervalo $(9, 12]$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $R'(10) = 10(10-9) = 10 > 0$. La función crece en $(9, 12]$.

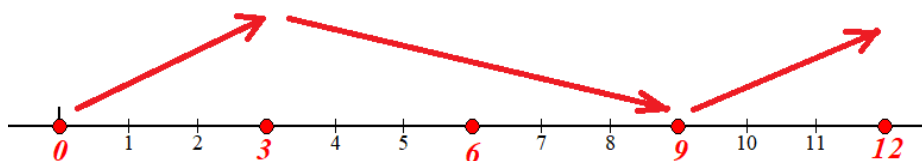
Comprobamos que la función es continua en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} R(6) &= 96 - 2(6-3)^2 = 96 - 18 = 78 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} 96 - 2(t-3)^2 = 78 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} R(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} 5(t-9)^2 + 33 = 5 \cdot 9 + 33 = 78 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 6^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} R(t) = R(6) = 78$$

La función es continua en $t = 6$. La función crece en $[0, 3) \cup (9, 12]$ y decrece en $(3, 9)$.

Las reservas aumentan en los tres primeros meses y en los tres últimos del año 2025. Las reservas disminuyen durante el resto del año.

3.2.2. Hemos visto que la función reservas sigue el esquema siguiente:



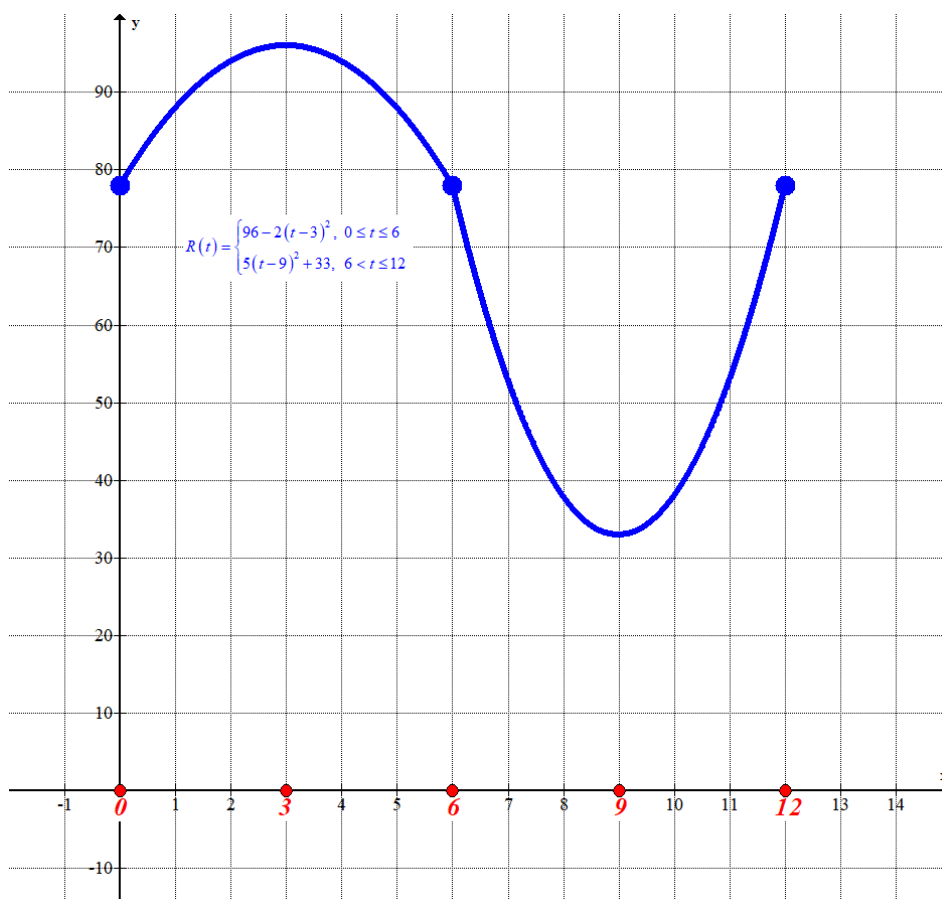
Valoramos la función reservas en $t = 0$ y en $t = 9$ para decidir el valor mínimo de la función.

$$\left. \begin{aligned} R(0) &= 96 - 2(0-3)^2 = 78 \\ R(9) &= 5(9-9)^2 + 33 = 33 \end{aligned} \right\}$$

El valor mínimo de las reservas es del 33% que se produce en el mes 9 (septiembre).

3.2.3. Con la tabla de valores y lo estudiado dibujamos la gráfica de la función.

t	$R(t)$
0	78
3	96
6	78
9	33
12	78



4.1. La cantidad de agua (en litros) que se consume en el lavado de un coche en una estación de autolavado se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 20$ litros. Tomada una muestra de $n = 64$ coches, se ha determinado que el consumo medio de agua está comprendido entre 76,1 litros y 85,9 litros. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado esta afirmación?

Nota: Para resolver el apartado anterior puede emplearse alguno de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$P(Z < 2,05) = 0,98$; $P(Z < 2,326) = 0,99$; $P(Z > 1,645) = 0,05$; $P(Z > 1,96) = 0,025$.

Sea X = La cantidad de agua (en litros) que se consume en el lavado de un coche en una estación de autolavado. $X = N(\mu, 20)$.

El intervalo de confianza es (76.1, 85.9), por lo que el error cometido es $\frac{85.9 - 76.1}{2} = 4.9$ litros.

Utilizando la fórmula del error obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{64}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{4.9}{2.5} = 1.96$$

Buscamos en la tabla de la normal el valor de $1 - \frac{\alpha}{2}$ para $z_{\alpha/2} = 1.96$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Obtenemos el nivel de confianza.



$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow 1 - 0.975 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$$

El nivel de confianza con el que se ha realizado la afirmación es del 95%.

4.2. El 90 % de los individuos de una población tienen cuenta bancaria. Elegidos 5 individuos de esa población.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que todos tengan cuenta bancaria?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 individuos, menos de 2 tengan cuenta bancaria.

Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de individuos con cuenta bancaria de un grupo de 5 individuos elegidos al azar.

Esta variable es una binomial con parámetros $n = \text{número de repeticiones} = 5$ y $p = \text{probabilidad de que un individuo de la población tenga cuenta bancaria} = 0.90$.

$X = B(5, 0.9)$.

4.2.1. Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.9^5 \cdot 0.1^0 = 0.9^5 \approx \boxed{0.5905}$$

4.2.2. Nos piden calcular $P(X < 2)$.

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \binom{5}{0} 0.9^0 \cdot 0.1^5 + \binom{5}{1} 0.9^1 \cdot 0.1^4 = 0.1^5 + 5 \cdot 0.9 \cdot 0.1^4 = \boxed{0.00046}$$

4.3. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear la siguiente igualdad matricial $A \cdot B = C$.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+1+b \\ a-b \\ 2a+1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a+1+b=1 \\ \Rightarrow a-b=c \\ 2a+1-b=c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+b=0 \\ a-b-c=0 \\ 2a-b-c=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

4.4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores de k para los que la matriz $A^t \cdot B$ tenga inversa, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

Obtenemos la expresión de la matriz $A^t \cdot B$.

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+k+k^2 \\ 1+2+3 & 1+2k+3k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1+k+k^2 \\ 6 & 1+2k+3k^2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de $A^t \cdot B$.

$$|A^t \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 1+k+k^2 \\ 6 & 1+2k+3k^2 \end{vmatrix} = 3 + \cancel{6k} + 9k^2 - 6 - \cancel{6k} - 6k^2 = -3 + 3k^2$$

$$|A^t \cdot B| = 0 \Rightarrow -3 + 3k^2 = 0 \Rightarrow -1 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{1} = \pm 1}$$

La matriz $A^t \cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de k distinto de 1 y de -1 .



PAU
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2025
MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS
SOCIAIS II

CÓDIGO 40

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Una de las principales novedades de las pruebas PAU 2025 es que el examen de cada materia debe incluir un ejercicio obligatorio y de carácter “más competencial”. Aunque las notas se publican la semana siguiente de haberse realizado el examen, los miembros del grupo de trabajo de la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II están interesados en determinar cuanto antes si se han producido cambios relevantes en la nota media de la materia que coordinan con relación a las notas de cursos pasados.

Con este objetivo han contactado previamente con un grupo de correctores, de los que cada uno de ellos se ha comprometido a corregir un máximo de 25 exámenes el primer día. Por los datos de otros cursos, las notas de esta materia pueden suponerse que siguen una distribución normal con desviación típica igual a 1,5.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. Si se quiere estimar esta nota media con un error máximo de 0,25, empleando un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el número mínimo de correctores que se necesitan?

1.2. Una vez corregidos los 100 primeros exámenes, la nota media resultó ser igual a 7,2. A partir de esta muestra, calcule un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95% de la nota media.

1.3. Una vez corregidos todos los exámenes, se eligen 25 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 si sabemos que $\mu=7,3$?

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A.

2.1.2. Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).

2.1.3. Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = BA^t$ y calcúlela.

2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \leq 4 \qquad 3x \leq 4 + 5y \qquad y \leq 7x + 12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)**Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

3.1. La evolución del precio (en euros) de un protector de pantalla para móvil a lo largo del año 2024 viene dado por la función

$$P(t) = \begin{cases} 9 - t^2 + 8t & \text{si } 0 \leq t < 7 \\ (t-10)^2 + 7 & \text{si } 7 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

3.1.1. ¿Cuál fue el precio inicial de ese protector de pantalla? ¿Cuál ha sido su precio al final del año?

3.1.2. Determine en qué períodos ha aumentado y disminuido el precio del protector.

3.1.3. ¿Cuál ha sido el precio máximo alcanzado? ¿Y el mínimo? ¿En qué momentos se producen? Razone las respuestas.

3.2. Dada la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

3.2.1. Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

3.2.2. Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f y las rectas $x=1$, $x=2$ e $y=4$.

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A/B) = 1/2, P(B/A) = 1/3 \text{ y } P(A \cup B) = 1/4.$$

4.1.1. Calcule $P(A \cap B)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.2. Un estudio revela que el 40% de los automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año son propulsados por un motor con tecnología híbrida. Si en un control de carreteras son inspeccionados 5 automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Una de las principales novedades de las pruebas PAU 2025 es que el examen de cada materia debe incluir un ejercicio obligatorio y de carácter “más competencial”. Aunque las notas se publican la semana siguiente de haberse realizado el examen, los miembros del grupo de trabajo de la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II están interesados en determinar cuanto antes si se han producido cambios relevantes en la nota media de la materia que coordinan con relación a las notas de cursos pasados.

Con este objetivo han contactado previamente con un grupo de correctores, de los que cada uno de ellos se ha comprometido a corregir un máximo de 25 exámenes el primer día. Por los datos de otros cursos, las notas de esta materia pueden suponerse que siguen una distribución normal con desviación típica igual a 1,5.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. Si se quiere estimar esta nota media con un error máximo de 0,25, empleando un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el número mínimo de correctores que se necesitan?

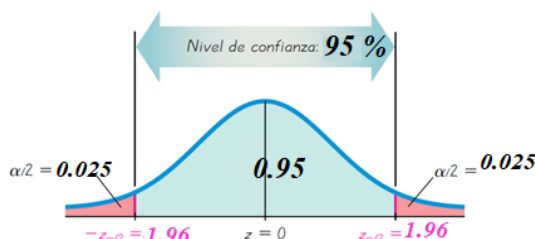
1.2. Una vez corregidos los 100 primeros exámenes, la nota media resultó ser igual a 7,2. A partir de esta muestra, calcule un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95% de la nota media.

1.3. Una vez corregidos todos los exámenes, se eligen 25 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 si sabemos que $\mu=7,3$?

Llamamos X a la variable aleatoria que nos da la nota de un alumno en el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU 2025. $X = N(\mu, 1.5)$.

1.1. Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.25 = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.25 = \frac{2.94}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.94}{0.25} \Rightarrow n = \left(\frac{2.94}{0.25} \right)^2 = 138.2976$$

El número mínimo de exámenes que se deben corregir es de 139. Si lo dividimos entre 25 nos queda 5.56. El número mínimo de correctores es de 6.

1.2. Tamaño de la muestra = $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 7.2$.

Con un nivel de confianza del 95 % sabemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 0.294$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (7.2 - 0.294, 7.2 + 0.294) = (6.906, 7.494)$$

1.3. Sabemos que $X = N(7.3, 1.5)$. La distribución de las medias muestrales de tamaño 25 sigue una

ley normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.5}{\sqrt{25}} = 0.3$,

Tenemos que $\bar{X}_{25} = N(7.3, 0.3)$.

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{25} \geq 7)$.

$$P(\bar{X}_{25} > 7) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{7 - 7.3}{0.3}\right) = P(Z > -1) =$$

$$= P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8413}$$

z	0.00	
0.0	0.5000	C
0.1	0.5398	C
0.2	0.5793	C
0.3	0.6179	C
0.4	0.6554	C
0.5	0.6915	C
0.6	0.7257	C
0.7	0.7580	C
0.8	0.7881	C
0.9	0.8159	C
1.0	0.8413	C
1.1	0.8643	C

La probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 es de 0.8413.

2.1. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A.**2.1.2.** Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).**2.1.3.** Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = BA^t$ y calcúlela.**2.1.1.** Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Calculamos BA^t .

$$BA^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2 & 0-2+1 & -1+0+1 \\ 2+0-4 & 0+4-2 & 2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA + B = BA^t \Rightarrow XA = BA^t - B \Rightarrow X = (BA^t - B)A^{-1}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$BA^t - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = (BA^t - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-1-1 & 0+1+0 & 4+1+1 \\ 4+2+2 & 0-2+0 & -8-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}$.

2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \leq 4$$

$$3x \leq 4 + 5y$$

$$y \leq 7x + 12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 4$$

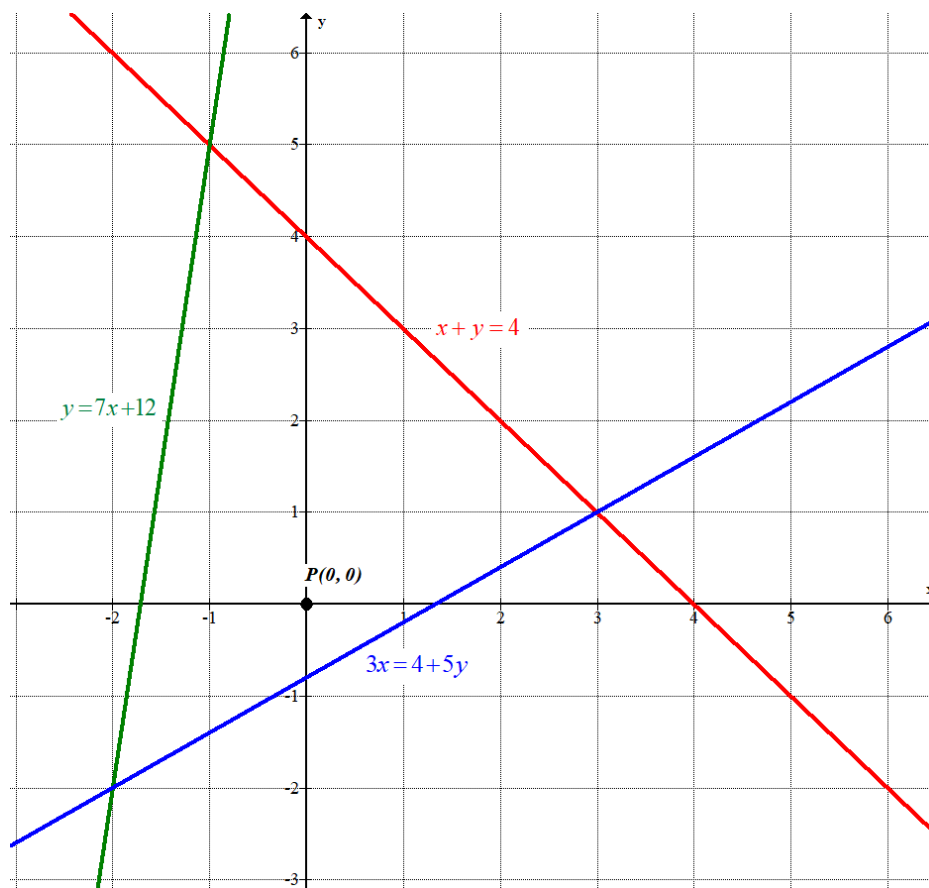
x	$y = 4 - x$
-1	5
0	4
3	1

$$3x = 4 + 5y$$

x	$y = \frac{3x - 4}{5}$
-2	-2
3	1
8	4

$$y = 7x + 12$$

x	$y = 7x + 12$
-2	-2
-1	5
0	12



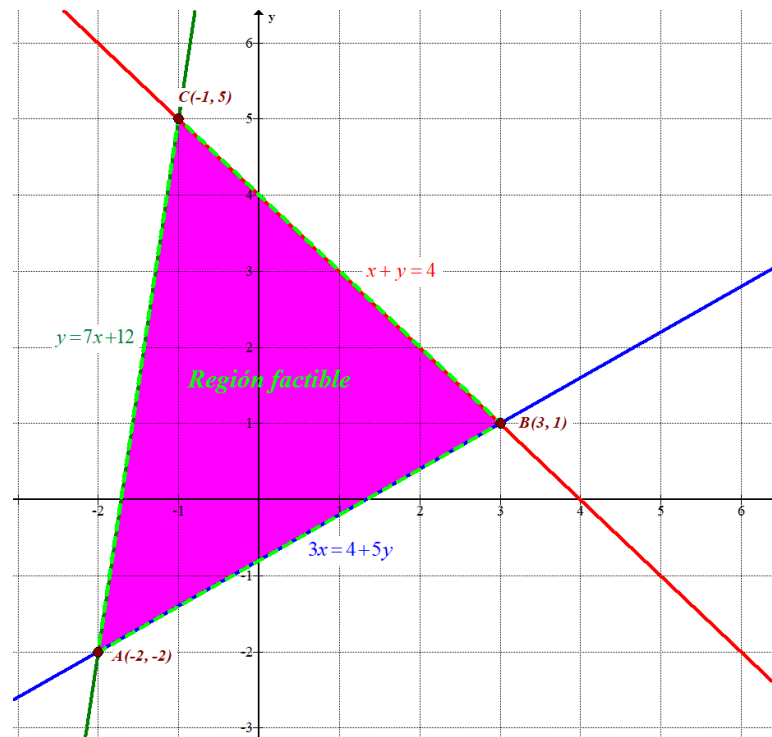
Como las inecuaciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 3x \leq 4 + 5y \\ y \leq 7x + 12 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada por

debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(0, 0)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

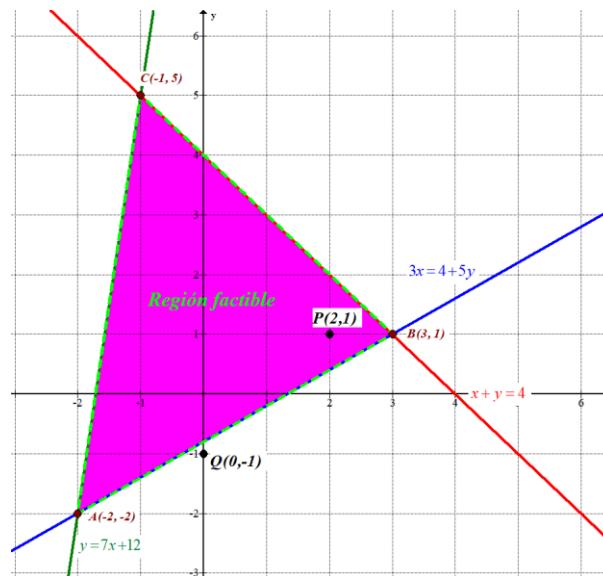
$$\left. \begin{array}{l} 0 + 0 \leq 4 \\ 3 \cdot 0 \leq 4 + 5 \cdot 0 \\ 0 \leq 7 \cdot 0 + 12 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos $A(-2, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, 5)$.

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.



Se observa que el punto $P(2, 1)$ si pertenece a la región factible y el punto $Q(0, -1)$ está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x, y) = 6x - 10y$ en cada vértice en busca del valor máximo y mínimo.

$$A(-2, -2) \rightarrow f(-2, -2) = 6(-2) - 10(-2) = 8$$

$$B(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = 6 \cdot 3 - 10 \cdot 1 = 8$$

$$C(-1, 5) \rightarrow f(-1, 5) = 6(-1) - 10 \cdot 5 = -56 \text{ ; } \text{Mínimo!}$$

El valor mínimo es -56 y se alcanza en el punto $C(-1, 5)$.

El valor máximo es 8 y se alcanza en los punto $A(-2, -2)$ y $B(3, 1)$. Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$.

3.1. La evolución del precio (en euros) de un protector de pantalla para móvil a lo largo del año 2024 viene dado por la función

$$P(t) = \begin{cases} 9 - t^2 + 8t & \text{si } 0 \leq t < 7 \\ (t-10)^2 + 7 & \text{si } 7 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

3.1.1. ¿Cuál fue el precio inicial de ese protector de pantalla? ¿Cuál ha sido su precio al final del año?

3.1.2. Determine en qué períodos ha aumentado y disminuido el precio del protector.

3.1.3. ¿Cuál ha sido el precio máximo alcanzado? ¿Y el mínimo? ¿En qué momentos se producen? Razone las respuestas.

3.1.1. Hallamos el valor de la función para $t = 0$: $P(0) = 9 - 0^2 + 8 \cdot 0 = 9$

El precio inicial es de 9 euros.

Hallamos el valor de la función para $t = 12$: $P(12) = (12 - 10)^2 + 7 = 11$

El precio al final del año es de 11 euros.

3.1.2. Averiguamos si la función es continua en $t = 7$.

$$\left. \begin{aligned} P(7) &= (7-10)^2 + 7 = 16 \\ \lim_{t \rightarrow 7^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 7^+} (t-10)^2 + 7 = 16 \\ \lim_{t \rightarrow 7^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 7^-} 9 - t^2 + 8t = 9 - 7^2 + 8 \cdot 7 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 7^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 7^-} P(t) = P(7) = 16$$

La función es continua en $t = 7$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$P'(t) = \begin{cases} -2t + 8 & \text{si } 0 \leq t < 7 \\ 2(t-10) & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 8 = 0 \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4 \in [0, 7) \\ 2(t-10) = 0 \rightarrow t = 10 \in (7, 12] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 4$, $t = 7$ y $t = 10$.

- En el intervalo $[0, 4)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = -2 + 8 = 6 > 0$. La función crece en $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, 7)$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $P'(5) = -2 \cdot 5 + 8 = -2 < 0$. La función decrece en $(4, 7)$.
- En el intervalo $(7, 10)$ consideramos $t = 8$ y la derivada vale $P'(8) = 2(8 - 10) = -4 < 0$. La función decrece en $(7, 10)$.
- En el intervalo $(10, 12]$ consideramos $t = 11$ y la derivada vale $P'(11) = 2(11 - 10) = 2 > 0$. La función crece en $(10, 12]$.

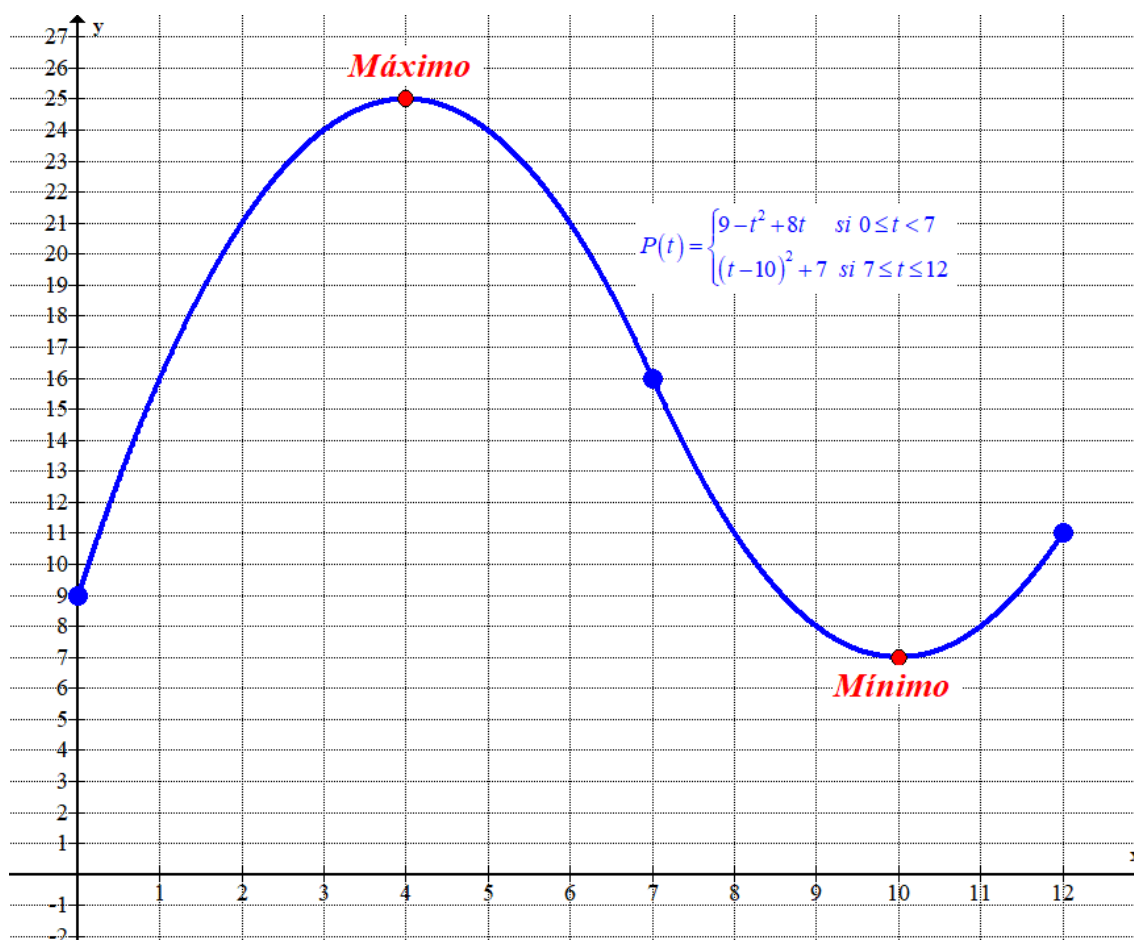
La función crece en $[0, 4) \cup (10, 12]$ y decrece en $(4, 10)$.

3.1.3. La función tiene un máximo en $t = 4$ y un mínimo relativo en $t = 10$.

Obtenemos el precio del protector en los puntos críticos y en los extremos de los intervalos de definición para decidir el máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[0, 12]$.

$$\left. \begin{aligned} P(0) &= 9 \\ P(4) &= 9 - 4^2 + 8 \cdot 4 = 25 \text{ Máximo absoluto} \\ P(10) &= (10 - 10)^2 + 7 = 7 \text{ Mínimo absoluto} \\ P(12) &= 11 \end{aligned} \right\}$$

El precio mínimo se alcanza en el décimo mes siendo de 7 euros. El precio máximo se alcanza el cuarto mes siendo este de 25 euros.



3.2. Dada la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

3.2.1. Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

3.2.2. Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f y las rectas $x=1$, $x=2$ e $y=4$.

3.2.1. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -8x^2 + 24x - 10 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -8x^2 + 24x - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{12+8}{8} = 2.5 \rightarrow A(2.5, 0) \\ \frac{12-8}{8} = 0.5 \rightarrow B(0.5, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -8x^2 + 24x - 10 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = -8 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow C(0, -10)$$

Los puntos de corte con los ejes son $A(2.5, 0)$, $B(0.5, 0)$ y $C(0, -10)$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -16x + 24 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -16x + 24 = 0 \Rightarrow 16x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{16} = 1.5$$

Sustituyo este valor en la segunda derivada.

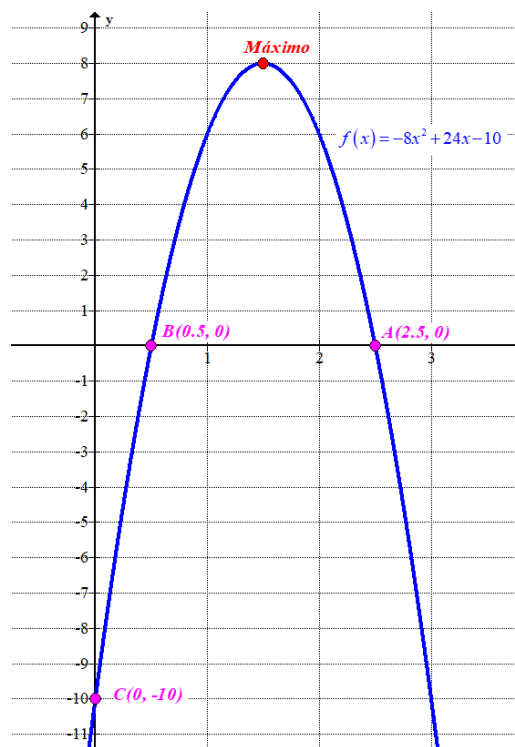
$$f''(x) = -16 \Rightarrow f''(1.5) = -16 < 0$$

La función tiene un máximo relativo en $x = 1.5$.

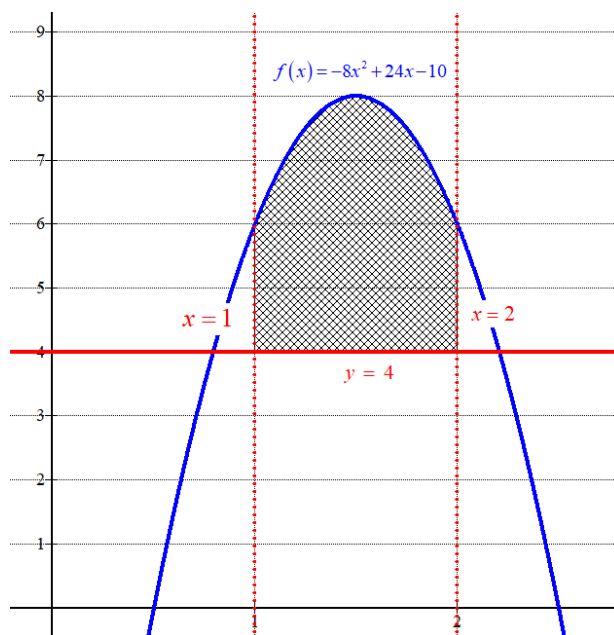
La función crece en $(-\infty, 1.5)$ y decrece en $(1.5, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$
0	-10
0.5	0
1.5	8
2.5	0
3	-10



3.2.2. Dibujamos el recinto del cual queremos hallar el área.



El área que deseamos calcular es el valor de la integral definida entre 1 y 2 de la diferencia de las dos funciones (parábola y recta horizontal).

$$\text{Área} = \int_1^2 -8x^2 + 24x - 10 - (4) dx = \int_1^2 -8x^2 + 24x - 14 dx = \left[\frac{-8x^3}{3} + 12x^2 - 14x \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{-8 \cdot 2^3}{3} + 12 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 \right] - \left[\frac{-8 \cdot 1^3}{3} + 12 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 \right] = \frac{-64}{3} + 48 - 28 + \frac{8}{3} - 12 + 14 = \boxed{\frac{10}{3} u^2}$$

El área del recinto limitado por la gráfica de la función f y las rectas $x=1$, $x=2$ e $y=4$ tiene un valor de $\frac{10}{3} \approx 3.333$ unidades cuadradas.

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A/B)=1/2, P(B/A)=1/3 \text{ y } P(A \cup B)=1/4.$$

4.1.1. Calcule $P(A \cap B)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.1.1. Utilizamos el teorema de Bayes y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A/B)=1/2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(B/A)=1/3 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A \cup B)=1/4 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3P(A \cap B) + 2P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow 4P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{16}}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

4.1.2. Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A) = 3P(A \cap B) = \frac{3}{16}$$

$$P(B) = 2P(A \cap B) = \frac{2}{16}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{16} \\ P(A)P(B) = \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{16} = \frac{3}{128} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{128} = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

4.2. Un estudio revela que el 40% de los automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año son propulsados por un motor con tecnología híbrida. Si en un control de carreteras son inspeccionados 5 automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida.

4.2.1. Llamamos X a la variable que cuenta el número de coches con tecnología híbrida de un grupo de 5. Esta variable es binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0.40$. $X = B(5, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^5 = 0.6^5 = \frac{243}{3125} = \boxed{0.07776}$$

La probabilidad de que ninguno de los cinco coches inspeccionados cuente con un motor con tecnología híbrida vale 0.07776.

4.2.2. Debemos calcular $P(X > 3)$.

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} 0.4^4 \cdot 0.6^1 + \binom{5}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^0 = \\ &= 5 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6 + 0.4^5 = \frac{272}{3125} = \boxed{0.08704} \end{aligned}$$

La probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida tiene un valor de 0.08704.



PAU
Convocatoria ordinaria 2025
**MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS
CIENCIAS SOCIAIS II**

CÓDIGO 40

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelera luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelera luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelera luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelera luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelera luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A , A^{-1} .

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A , $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4$$

$$x + y \leq 8$$

$$3x + 2y \geq -2$$

$$x - 2 \leq 2y$$

- 2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
- 2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.
- 2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

- 3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.
- 3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.
- 3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

- 3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.
- 3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.40, P(A \cap B) = 0.21 \text{ y } P(A/B) = 0.60.$$

- 4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.
- 4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

- 4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.
- 4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelera luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelera luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelera luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelera luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelera luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

Llamamos A al suceso "conocer la nueva crema por prensa escrita" y B a "conocer la nueva crema por buzoneo".

Como se suponen sucesos independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$.

1.1. Debemos comprobar si $P(A \cup B)$ es mayor o menor de 0.6. Calculamos esta probabilidad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58 < 0.60$$

Al ser la probabilidad menor de 0.6 la empresa lanzará la segunda campaña.

1.2. Llamamos C al suceso "conocer la nueva crema por cartelera luminosa". Nos dicen que $P(C/B) = 0.25$ y que $P(B/C) = 0.20$.

Nos piden calcular y comparar $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

$$P(C/B) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap C) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1$$

$$P(B/C) = 0.20 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0.20 \Rightarrow \frac{0.1}{P(C)} = 0.20 \Rightarrow P(C) = 0.5$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.3 \\ P(B) = 0.4 \\ P(C) = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) < P(B) < P(C), \text{ el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida es la cartelera luminosa.}$$

1.3. Nos preguntan ¿Son incompatibles los sucesos $A = \text{"conocer la nueva crema por prensa escrita"}$ y $B = \text{"conocer la nueva crema por buzoneo"}$?

Para ello debe ser $A \cap B = \emptyset$ y para ello debería ser $P(A \cap B) = 0$.

Como $P(A \cap B) = 0.12 \neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A , A^{-1} .

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A , $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.1.1. Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 - 6 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Utilizamos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX - A^t = X \Rightarrow AX - X = A^t \Rightarrow (A - I)X = A^t \Rightarrow X = (A - I)^{-1} A^t$$

Calculamos la inversa de la matriz $(A - I)$.

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 0 = 4 \neq 0$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A-I)^t)}{|A-I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = (A-I)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1+2 & 2-3/2 & 3-3/2-1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4$$

$$x + y \leq 8$$

$$3x + 2y \geq -2$$

$$x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x = y - 4$$

$$x + y = 8$$

$$3x + 2y = -2$$

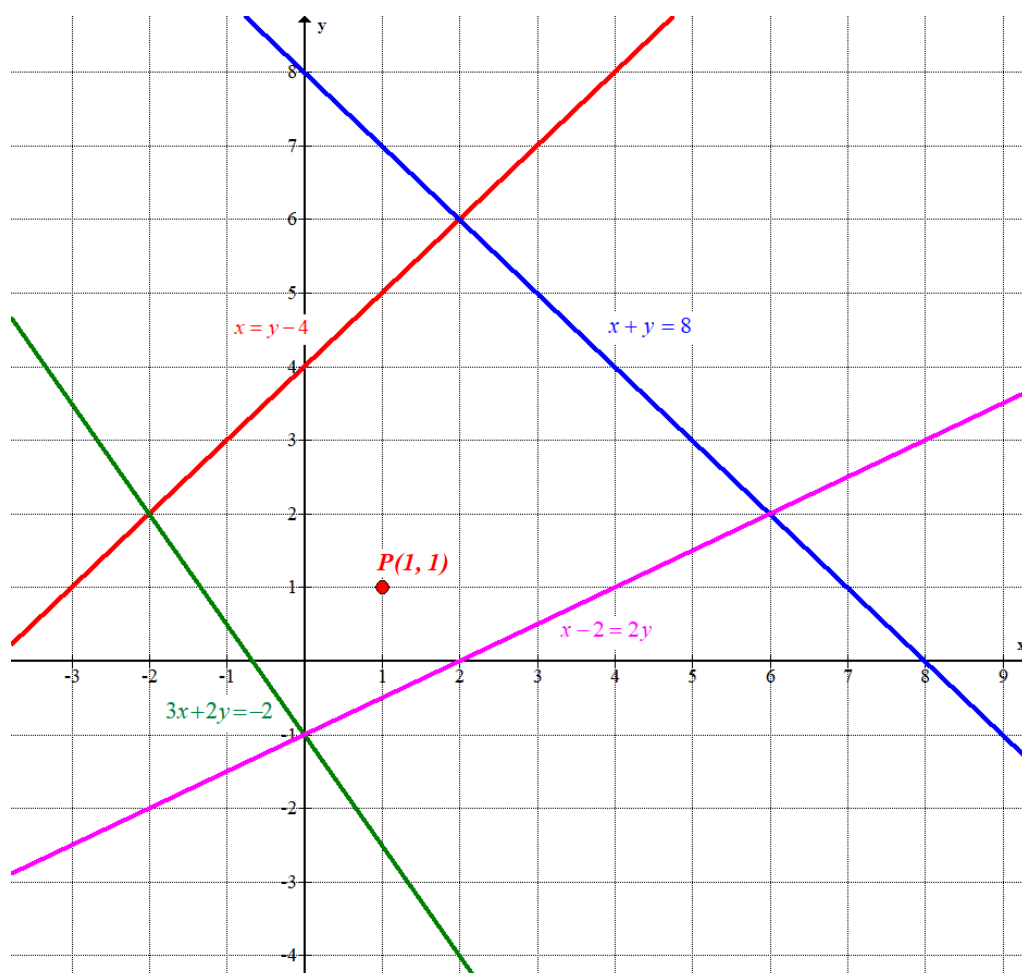
$$x - 2 = 2y$$

x	y = x + 4
-2	2
0	4
2	6

x	y = 8 - x
2	6
6	2
8	0

x	y = $\frac{-2-3x}{2}$
-2	2
0	-1
2	-4

x	y = $\frac{x-2}{2}$
0	-1
2	0
6	2



Como las inecuaciones son

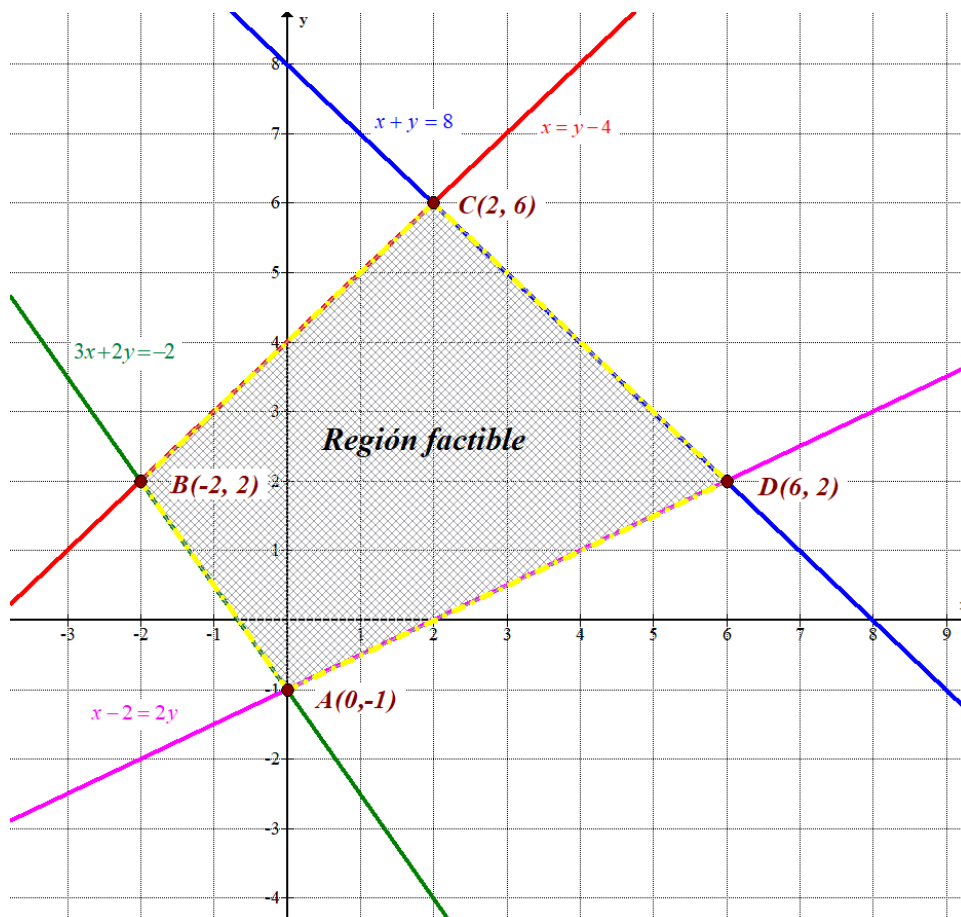
$$\left. \begin{array}{l} x \geq y - 4 \\ x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \geq -2 \\ x - 2 \leq 2y \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada por}$$

debajo de las rectas azul y roja y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

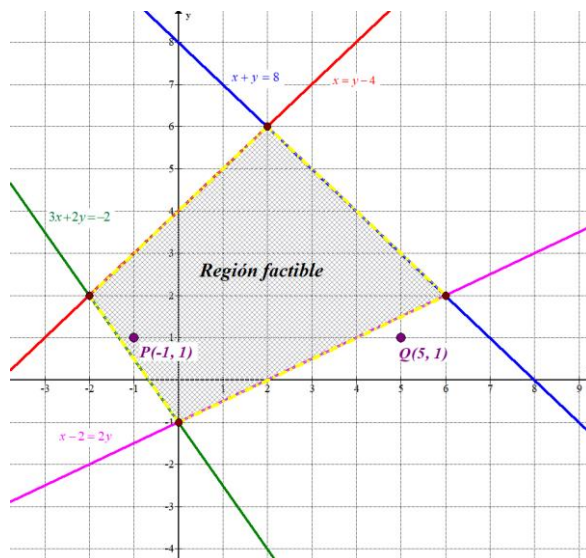
$$\left. \begin{array}{l} 1 \geq 1 - 4 \\ 1 + 1 \leq 8 \\ 3 + 2 \geq -2 \\ 1 - 2 \leq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \geq -3 \\ 2 \leq 8 \\ 5 \geq -2 \\ -1 \leq 2 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos $A(0, -1)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 6)$ y $D(6, 2)$.

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.



Se observa que el punto $P(-1, 1)$ si pertenece y el punto $Q(5, 1)$ está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x, y) = 2x - 4y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, -1) \rightarrow f(0, -1) = 2 \cdot 0 - 4(-1) = 4 \text{ Máximo}$$

$$B(-2, 2) \rightarrow f(-2, 2) = 2(-2) - 4 \cdot 2 = -12$$

$$C(2, 6) \rightarrow f(2, 6) = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 6 = -20 \text{ Mínimo}$$

$$D(6, 2) \rightarrow f(6, 2) = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ Máximo}$$

El valor mínimo es -20 y se alcanza en el punto $C(2, 6)$.

El valor máximo es 4 y se alcanza en los punto $A(0, -1)$ y en $D(6, 2)$. Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$. Además de los puntos A y D se alcanza en infinitos puntos, por ejemplo, en $(2, 0)$, $(4, 1)$, ...etc.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.

3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

3.1.1. Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$\begin{aligned} B(t) &= (4-t)(t-1)^2 \Rightarrow B'(t) = (-1)(t-1)^2 + (4-t)2(t-1) = \\ &= -(t^2 + 1 - 2t) + 2(4t - 4 - t^2 + t) = -t^2 - 1 + 2t + 8t - 8 - 2t^2 + 2t = -3t^2 + 12t - 9 \end{aligned}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 12t - 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=t} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos que pertenecen al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale
 $B'(0.5) = -3 \cdot 0.5^2 + 12 \cdot 0.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale
 $B'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = 3 > 0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,4]$ consideramos $t = 3.5$ y la derivada vale
 $B'(3.5) = -3 \cdot 3.5^2 + 12 \cdot 3.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $(3,4]$.

La función decrece en $[0,1) \cup (3,4]$ y crece en $(1,3)$.

La función tiene un mínimo en $t = 1$ y un máximo relativo en $t = 3$.

Como $B(1) = (4-1)(1-1)^2 = 0$ las coordenadas del mínimo relativo son $(1, 0)$.

Como $B(3) = (4-3)(3-1)^2 = 4$ las coordenadas del máximo relativo son $(3, 4)$.

3.1.2. Buscamos los candidatos a puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

$$B'(t) = -3t^2 + 12t - 9 \Rightarrow B''(t) = -6t + 12$$

$$B''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $t = 2$.

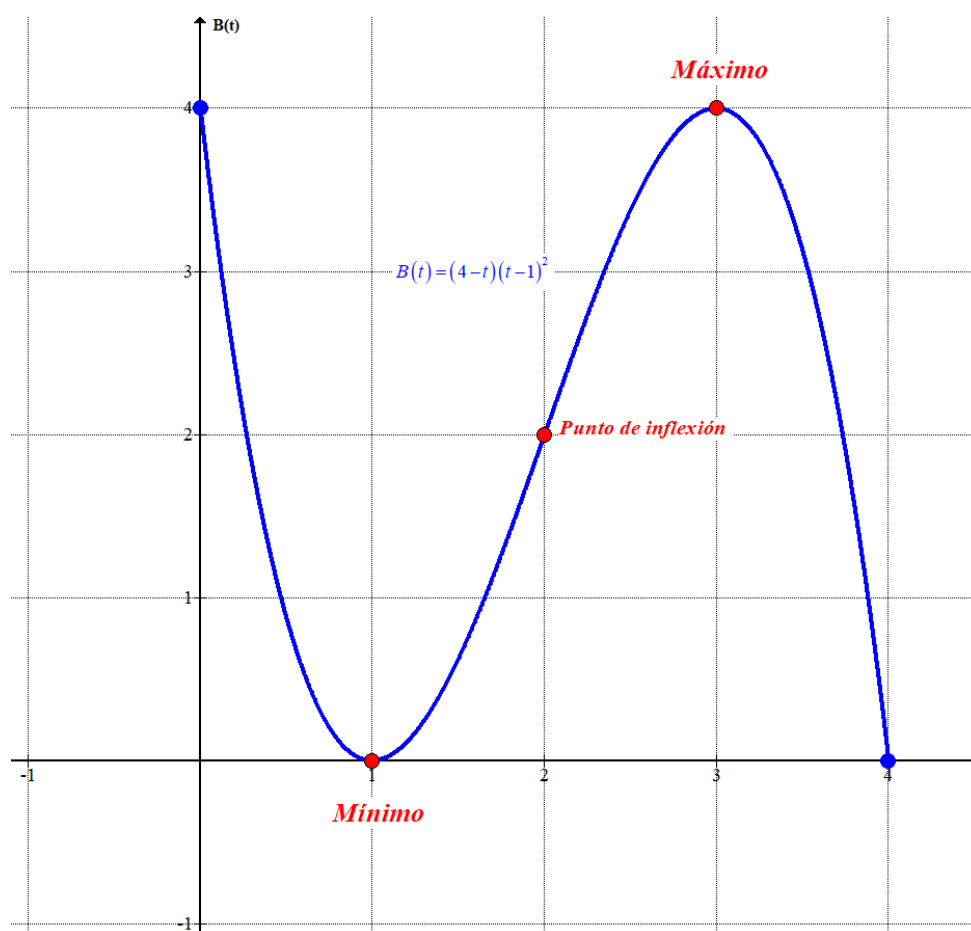
- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la segunda derivada vale $B''(1) = -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4]$ consideramos $t = 3$ y la segunda derivada vale $B''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(2, 4]$.

La función presenta un punto de inflexión en $t = 2$.

Como $B(2) = (4-2)(2-1)^2 = 2$ las coordenadas del punto de inflexión son $(2, 2)$.

3.1.3. Con los datos obtenidos y completando una tabla de valores dibujamos la gráfica de la función.

t	$B(t) = (4-t)(t-1)^2$
0	4
1	0
2	2
3	4
4	0



3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.

3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

3.2.1. Si la función pasa por el punto $(4, 5)$ se cumple que $f(4) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx - 3 \\ f(4) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = a \cdot 4^2 + 4b - 3 \Rightarrow 16a + 4b = 8 \Rightarrow 4a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 2 - 4a}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + (2 - 4a)x - 3$.

Si la función tiene un mínimo en $x = 1$ entonces $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + (2 - 4a)x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2 - 4a \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + 2 - 4a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Obtenemos el valor de b siendo $a = 1 \rightarrow b = 2 - 4 \cdot 1 = -2$.

La función queda $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Comprobamos que la segunda derivada es positiva para $x = 1$.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2 > 0$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$ la función queda $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

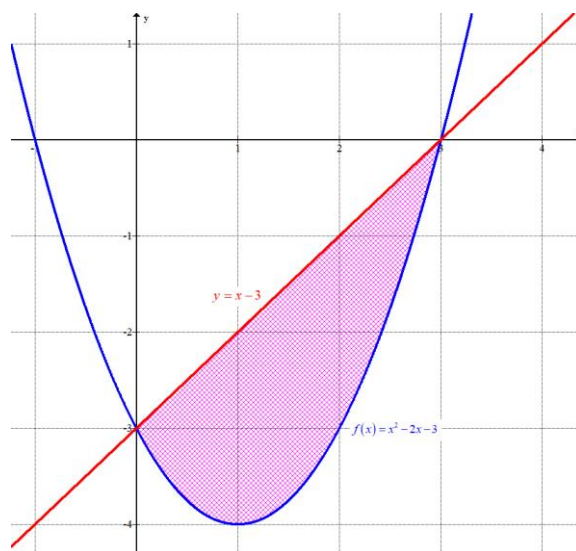
Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 3 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{array} \right.$$

El área que deseamos calcular es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} & \int_0^3 x^2 - 2x - 3 - (x - 3) dx = \\ &= \int_0^3 x^2 - 2x - 3 - x + 3 dx = \\ &= \int_0^3 x^2 - 3x dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{3^3}{3} - 3 \frac{3^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3 \frac{0^2}{2} \right] = 9 - \frac{27}{2} = \boxed{-4.5} \end{aligned}$$



El área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$ tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.40, P(A \cap B) = 0.21 \text{ y } P(A/B) = 0.60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.1.1. Determinamos el valor de $P(B)$.

$$P(A/B) = 0.60 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow \frac{0.21}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow P(B) = \frac{0.21}{0.6} = 0.35$$

Hallamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.40 + 0.35 - 0.21 = 0.54$$

Hallamos $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ usando una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.54 = 0.46$$

Hallamos $P(\bar{B}/A)$ utilizando el teorema de Bayes.

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.40 - 0.21}{0.40} = \frac{19}{40} = 0.475$$

4.1.2. Para que dos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.21 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.35 = 0.14 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.21 \neq 0.14 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

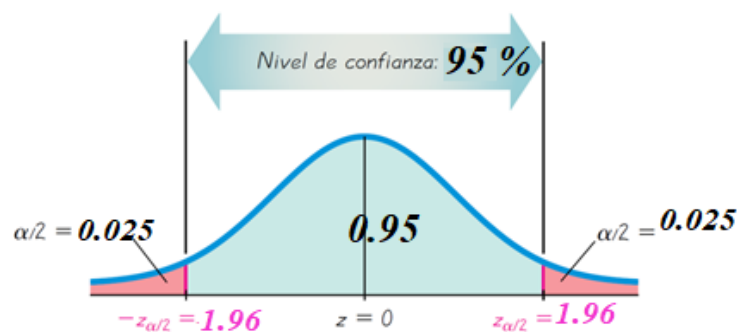
4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

4.2.1. Tamaño de la muestra = $n = 100$. La proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica vale $pr = \frac{80}{100} = 0.8$.

Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9744	0.9749	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.0784$$

El intervalo de confianza es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.8 - 0.0784, 0.8 + 0.0784) = (0.7216, 0.8784)$$

4.2.2. La distribución de las proporciones sigue una ley normal con media $\mu = pr = \frac{8}{10} = 0.8$ y con

desviación típica $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.04$. $p = N(0.8, 0.04)$

Nos piden calcular $P(p > 0.87)$.

$$P(p > 0.87) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{0.87 - 0.8}{0.04}\right) = P(Z > 1.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9599 = \boxed{0.0401}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8769
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9684

La probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87% es de 0.0401.



ABAU
Convocatoria extraordinaria 2024 CÓDIGO 40
**MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS
CIENCIAS SOCIAIS II**

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

- Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A .
- Justifique cual es el rango de A si $k = -5$.
- Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B . Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A , como máximo, el doble de metros que al distribuidor B .

- Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto $P(4, 16)$.

- Calcule los valores de a, b, c .
- Realice la representación gráfica de la función $f(x)$ y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX .

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x :

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

- Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.
- ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee. Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

- Escuche música y no lea.
- Lea y no escuche música.
- Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A .
 b) Justifique cual es el rango de A si $k = -5$.
 c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix} = k - 24 - 6 + 3 - 4k + 12 = -3k - 15$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3k - 15 = 0 \Rightarrow -3k = 15 \Rightarrow \boxed{k = \frac{15}{-3} = -5}$$

Su determinante se anula para $k = -5$. La matriz A no tiene inversa para $k = -5$.

b) Si $k = -5$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna primeras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7 \neq 0$.

Para $k = -5$ el rango de A es 2.

c) Para $k = -2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, su determinante es no nulo y existe la inversa. La

calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 24 - 6 + 3 + 8 + 12 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

- a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
 b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
 c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

- a) Llamamos “x” al número de metros que se compra al distribuidor A e “y” al número de metros de tela que se compra al distribuidor B.

Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

“Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700” $\rightarrow$
 $200 \leq x \leq 700$; $200 \leq y \leq 700$.

“La fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros” $\rightarrow x + y \geq 600$.

“La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B” $\rightarrow x \leq 2y$.

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$

La función que queremos minimizar son los costes: $C(x, y) = 2x + 3y$.

- b) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 600$

x	y = 600 - x
0	600
400	200
600	0

$x = 2y$

x	y = $\frac{x}{2}$
0	0
200	100
400	200

$x = 200$

x = 200	y
200	0
200	200
200	400

$x = 700$

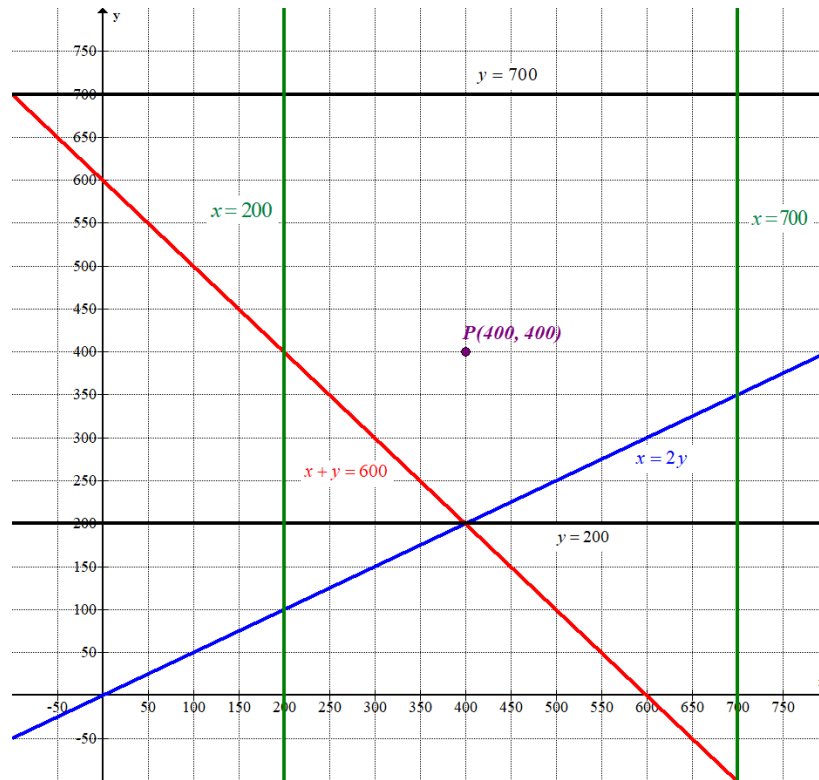
x = 700	y
700	0
700	200
700	300

$y = 200$

x	y = 200
0	200
100	200
400	200

$y = 700$

x	y = 700
0	700
100	700
400	700

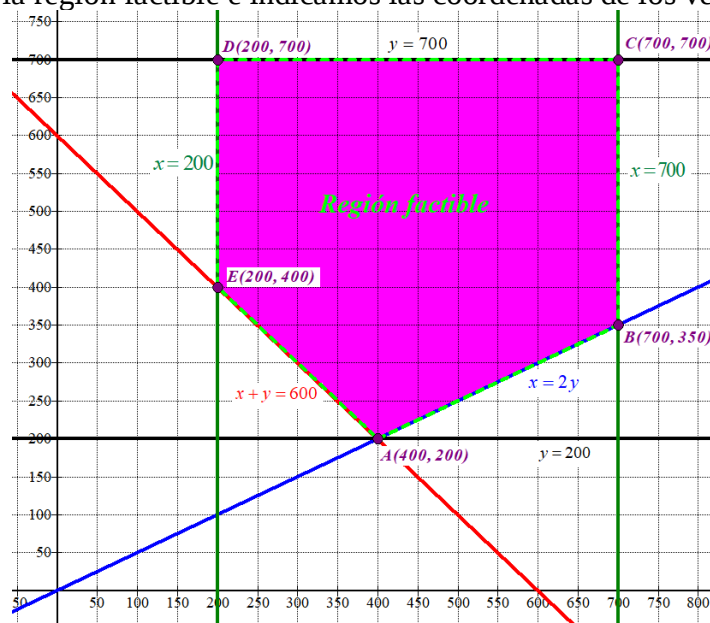


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada entre

las rectas verticales verdes y las rectas horizontales negras, por encima de las rectas azul y roja. Comprobamos que el punto $P(400, 400)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq 400 \leq 700 \\ 200 \leq 400 \leq 700 \\ 400 + 400 \geq 600 \\ 400 \leq 2 \cdot 400 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(400, 200), B(700, 350), C(700, 700), D(200, 700) y E(200, 400).

- c) Valoramos la función costes $C(x, y) = 2x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(400, 200) \rightarrow C(400, 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 1400 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(700, 350) \rightarrow C(700, 350) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 350 = 2450$$

$$C(700, 700) \rightarrow C(700, 700) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 700 = 3500$$

$$D(200, 700) \rightarrow C(200, 700) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 700 = 2500$$

$$E(200, 400) \rightarrow C(200, 400) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 400 = 1600$$

El coste mínimo es 1400 € y se alcanza en el punto A(400, 200) que significa comprar 400 metros de tela al distribuidor A y 200 al distribuidor B.

EJERCICIO 3. Análisis. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función $f(x)$ y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

a) Si la función pasa por el origen de coordenadas (0, 0) debe cumplir $f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = c}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + bx$. Si la función tiene un máximo en el punto P (4, 16) significa que $f(4) = 16$, que $f'(4) = 0$ y que $f''(4) < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx \\ f(4) = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 \Rightarrow 16 = 16a + 4b \Rightarrow 4 = 4a + b \Rightarrow \boxed{b = 4 - 4a}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 8a + b \Rightarrow \boxed{b = -8a}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = 4 - 4a \\ b = -8a \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 4a = -8a \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{4} = -1} \Rightarrow \boxed{b = -8(-1) = 8}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 8$ y $c = 0$.

La función queda $f(x) = -x^2 + 8x$, por lo que la segunda derivada es $f''(x) = -2$ y $f''(4) = -2 < 0$.

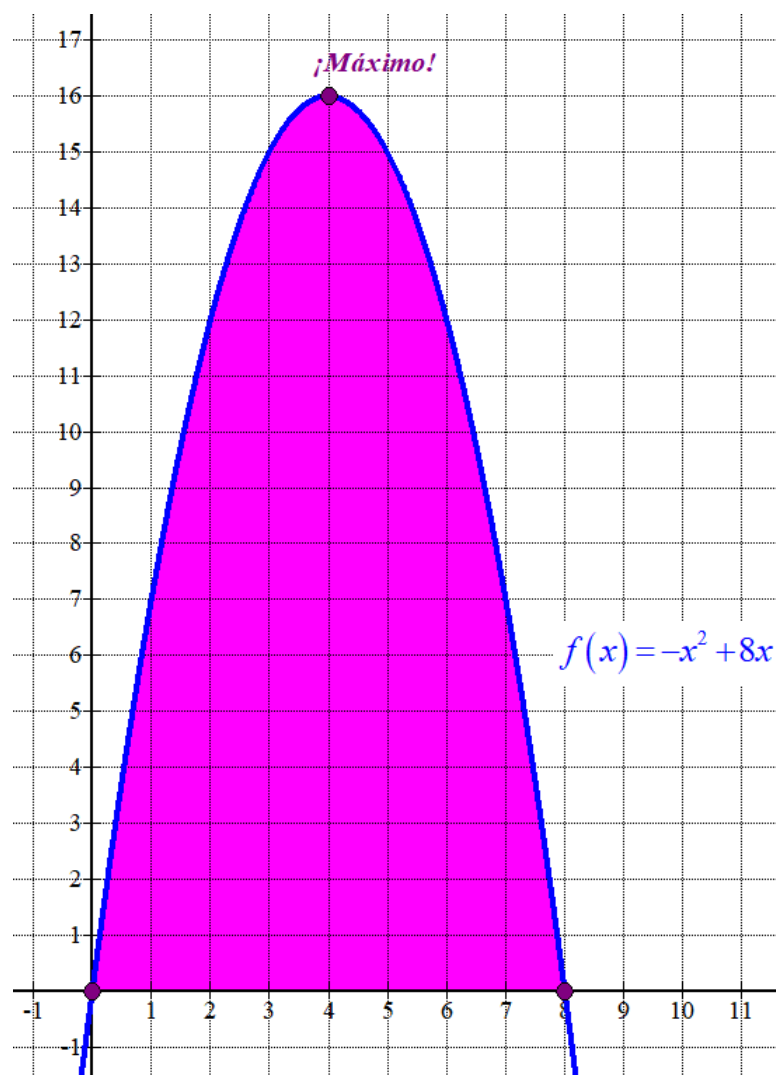
b) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 8x$ es una parábola. Sabemos que tiene un máximo en el punto (4, 16).

Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 8x \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 8x = 0 \Rightarrow -x(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, representamos su gráfica y la región del plano encerrada entre la gráfica y el eje OX.

x	$f(x) = -x^2 + 8x$
0	0
2	12
4	16 <i>Máximo</i>
6	12
8	0



El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX es el valor de la integral definida entre 0 y 8 de la función.

Por el dibujo observamos que el área va a tener un valor grande.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^8 f(x) dx = \int_0^8 -x^2 + 8x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^8 = \\ &= \left[-\frac{8^3}{3} + 4 \cdot 8^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2 \right] = \boxed{\frac{256}{3} \approx 85.333 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX tiene un valor aproximado de 85.33 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x :

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

a) El coste de la fabricación de x unidades es $C(x) = 80 + 11.25x$.

Los ingresos son el producto del número de unidades por su precio.

$$I(x) = x \cdot P(x) = x \cdot \left(-\frac{x^2}{20} + x + 55 \right) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x, \quad 0 \leq x \leq 30$$

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x - (80 + 11.25x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \quad 0 \leq x \leq 30$$

b) Derivamos la función beneficio y buscamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \Rightarrow B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 40x + 875 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-3)(875)}}{2(-3)} = \frac{-40 \pm 110}{-6} = \begin{cases} \frac{-40 + 110}{-6} = \frac{-20}{3} \notin [0, 30] \\ \frac{-40 - 110}{-6} = 25 \in [0, 30] \end{cases}$$

La función beneficio tiene un punto crítico en $x = 25$, averiguamos si es máximo o mínimo sustituyendo este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 \Rightarrow B''(x) = \frac{-6x}{20} + 2 \Rightarrow B''(25) = \frac{-6 \cdot 25}{20} + 2 = \frac{-11}{2} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficio tiene un valor máximo relativo en $x = 25$. Como esta función crece entre 0 y 25 y decrece entre 25 y 30 este máximo será máximo absoluto.

$$\text{Calculamos el beneficio máximo: } B(25) = \frac{-25^3}{20} + 25^2 + 43.75 \cdot 25 - 80 = 857.5.$$

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 857.5 € con la producción de 25 unidades.

$$\text{Calculamos el precio por unidad para } x = 25: P(25) = -\frac{25^2}{20} + 25 + 55 = 48.75 \text{ euros por unidad.}$$

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

- Escuche música y no lea.
- Lea y no escuche música.
- Haga solamente una de las dos cosas.
- ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Llamamos L al suceso “ser lector”, M al suceso “escuchar música”.

Con los datos que nos proporcionan tenemos que el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, por lo que el restante 20 % ni lee ni escucha música.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Escucha música	No escucha música	
Lee	35		
No lee		20	60
			100

Completamos la tabla.

	Escucha música	No escucha música	
Lee	35	5	40
No lee	40	20	60
	75	25	100

Con los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

- Hay un 40 % de los entrevistados que escucha música y no lee. La probabilidad de que al elegir una persona al azar escuche música y no lea es de 0.4.
- Hay un 5 % de los entrevistados que lee y no escucha música. La probabilidad de que al elegir una persona al azar lea y no escuche música es de 0.05.
- Que haga solamente una de las dos cosas es escuchar música y no leer o no escuchar música y leer. Sería 40 % + 5 % = 45 % de los entrevistados. La probabilidad de que al elegir una persona al azar solo haga una de las cosas es de 0.45.
- Para que sean independientes los sucesos L y M debe cumplirse $P(L \cap M) = P(L)P(M)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(L \cap M) = 0.35 \\ P(L)P(M) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(L \cap M) = 0.35 \neq 0.3 = P(L)P(M)$$

Los sucesos “escuchar música” y “leer” no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.

- a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.
 b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

- a) X = La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria.

$$X = N(\mu, 6)$$

Tamaño de la muestra = $n = 9$.

Media muestral $\bar{x} = 244$ centímetros.

Con un nivel de confianza del 98 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}} = 4.66 \text{ centímetros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (244 - 4.66, 244 + 4.66) = (239.34, 248.66)$$

- b) X = La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria.

$$X = N(244, 6)$$

$$X = N(244, 6) \rightarrow \bar{X}_{16} = N\left(244, \frac{6}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{16} = N(244, 1.5)$$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{16} \leq 242)$.

$$P(\bar{X}_{16} \leq 242) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{242 - 244}{1.5}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.33) = P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

La probabilidad de la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros es de 0.0918.



ABAU
Convocatoria ordinaria 2024
**MATEMÁTICAS APLICADAS
A LAS CIENCIAS SOCIAIS II**

CÓDIGO 40

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B , siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B .
b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$

- a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t - 4)^2 & 0 \leq t < 6 \\ (t - 10)^2 + 8 & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

- a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.
b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.
c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 4. Análisis. Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

- a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2, 8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0, 16)$.
b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5% de los hipertensos padecen obesidad.

- a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?
- b) ¿Son independientes los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos”?
- c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

- a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.
- b) Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu=97$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B , siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B .

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

a) Averiguamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 1 - 2 - 0 = -1 \neq 0$$

Su determinante es no nulo y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de B .

¿El rango de B es 3?

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 1 - 0 - 1 + 1 = 0$$

Su determinante es nulo y el rango de B es menor que 3.

¿El rango de B es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera. Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$\text{Menor} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

El rango de la matriz B es 2.

b) Despejamos X de la ecuación $X \cdot A + B = A \cdot B^t$.

$$X \cdot A + B = A \cdot B^t \Rightarrow X \cdot A = A \cdot B^t - B \Rightarrow X = (A \cdot B^t - B)A^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-1 & 0-1+1 & 0-1+1 \\ -1+1-2 & -1-1+2 & 0-1+2 \\ 1+0-2 & 1+0-2 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A \cdot B^t - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0+1 & 2-1-1 & 1-1-1 \\ -6+0+0 & 6+1+0 & 3+1+0 \\ 6+0-3 & -6+0+3 & -3+0+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40$$

$$x + y \geq 5$$

$$3x + y \leq 45$$

$$x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

a) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 40$$

x	y = $\frac{40-x}{2}$
0	20
10	15
40	0

$$x + y = 5$$

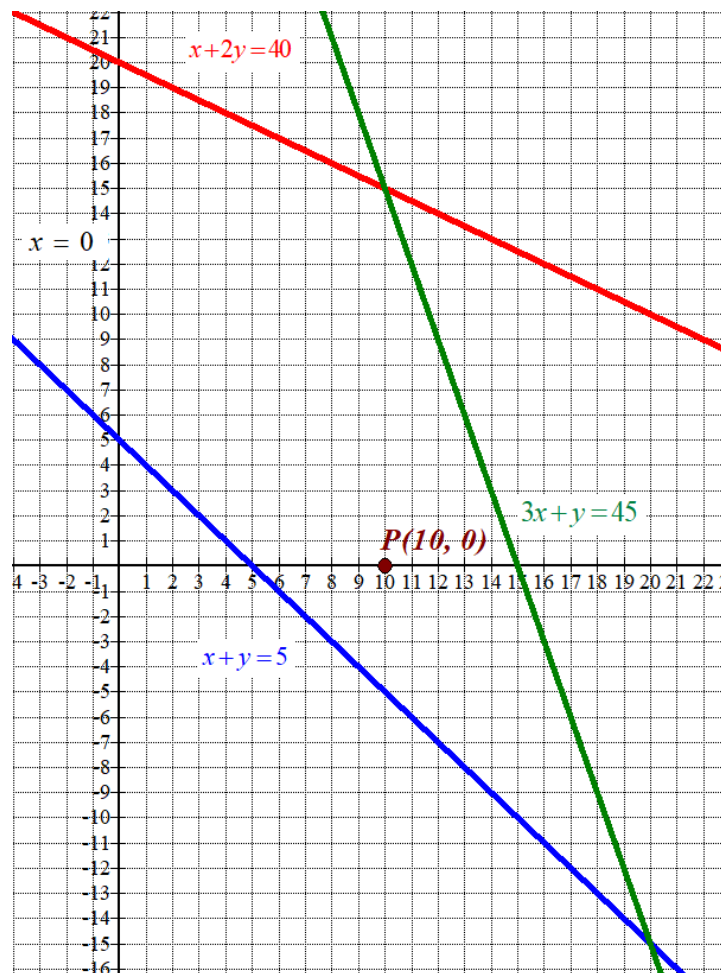
x	y = 5 - x
0	5
5	0
20	-15

$$3x + y = 45$$

x	y = 45 - 3x
0	45
10	15
20	-15

$$x = 0$$

x = 0	y
0	0
0	5
0	20



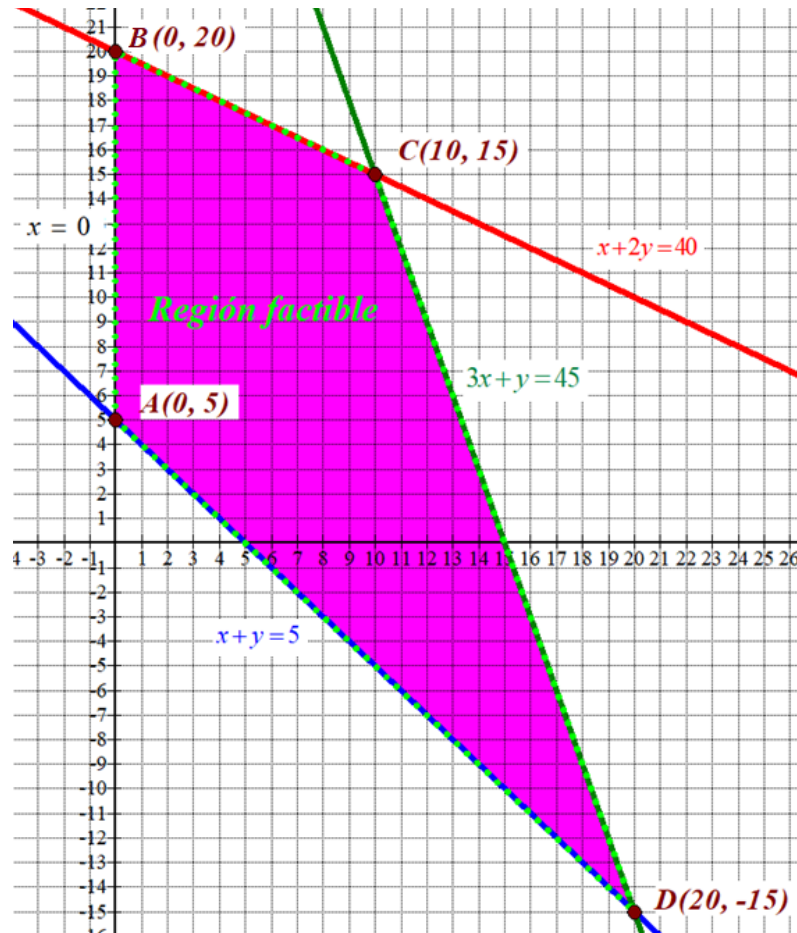
Como las inecuaciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 40 \\ x + y \geq 5 \\ 3x + y \leq 45 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada a la

derecha del eje OY, por encima de la recta azul y por debajo de las rectas verde y roja.

Comprobamos que el punto P(10, 0) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 2 \cdot 0 \leq 40 \\ 10 + 0 \geq 5 \\ 3 \cdot 10 + 0 \leq 45 \\ 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, 5), B(0, 20), C(10, 15) y D(20, -15).

b) Valoramos la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, 5) \rightarrow f(0, 5) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15$$

$$B(0, 20) \rightarrow f(0, 20) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 20 = -60 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(10, 15) \rightarrow f(10, 15) = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 15 = -25$$

$$D(20, -15) \rightarrow f(20, -15) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot (-15) = 85 \text{ ¡Máximo!}$$

El valor mínimo es -60 y se alcanza en el punto B(0, 20) y el valor máximo es 85 y se alcanza en el punto D(20, -15).

EJERCICIO 3. Análisis. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2 & 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2 + 8 & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

- a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.
- b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.
- c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

a) La función es continua en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} N(6) &= (6-10)^2 + 8 = 24 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} 28 - (t-4)^2 = 28 - (6-4)^2 = 24 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} (t-10)^2 + 8 = 24 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) = 24$$

La función es continua en su intervalo de definición $[0, 12]$

Calculamos la derivada de la función y buscamos sus puntos críticos.

$$N'(t) = \begin{cases} -2(t-4) & 0 \leq t < 6 \\ 2(t-10) & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

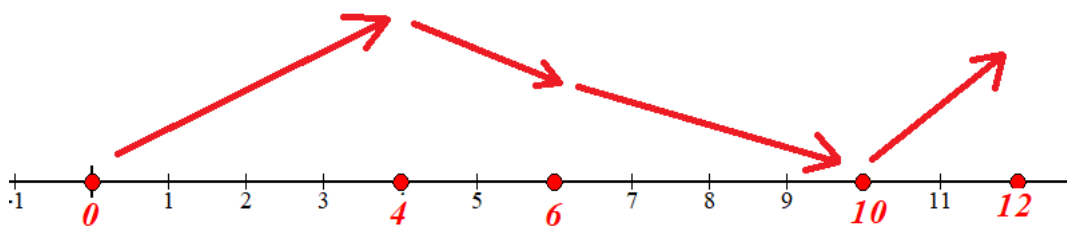
$$N'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2(t-4) = 0 \rightarrow t = 4 \in (0, 6) \\ 2(t-10) = 0 \rightarrow t = 10 \in (6, 12) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de $t = 4$, entre 4 y 6, entre 6 y 10, por último, entre 10 y 12.

- En el intervalo $[0, 4)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $N'(2) = -2(2-4) = 4 > 0$. La función crece en $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $N'(5) = -2(5-4) = -2 < 0$. La función decrece en $(4, 6)$.
- En el intervalo $(6, 10)$ tomamos $t = 8$ y la derivada vale $N'(8) = 2(8-10) = -4 < 0$. La función decrece en $(6, 10)$.
- En el intervalo $(10, 12]$ tomamos $t = 11$ y la derivada vale $N'(11) = 2(11-10) = 2 > 0$. La función crece en $(10, 12]$.

La función crece en $[0, 4) \cup (10, 12]$ y decrece en $(4, 10)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un valor máximo en $t = 4$, siendo este valor $N(4) = 28 - (4 - 4)^2 = 28$.

La función tiene un mínimo en $t = 10$, siendo este valor $N(10) = (10 - 10)^2 + 8 = 8$.

Conclusión: El número de vehículos vendidos crece los cuatro primeros meses, decrece del mes cuarto al mes décimo y vuelve a crecer en los últimos dos meses del año.

Valoramos el número de coches vendidos en el mes 0, 4, 10 y 12 para decidir donde se encuentra el máximo y mínimo absoluto.

$$N(0) = 28 - (0 - 4)^2 = 12$$

$$N(4) = 28 - (4 - 4)^2 = 28$$

$$N(10) = (10 - 10)^2 + 8 = 8$$

$$N(12) = (12 - 10)^2 + 8 = 12$$

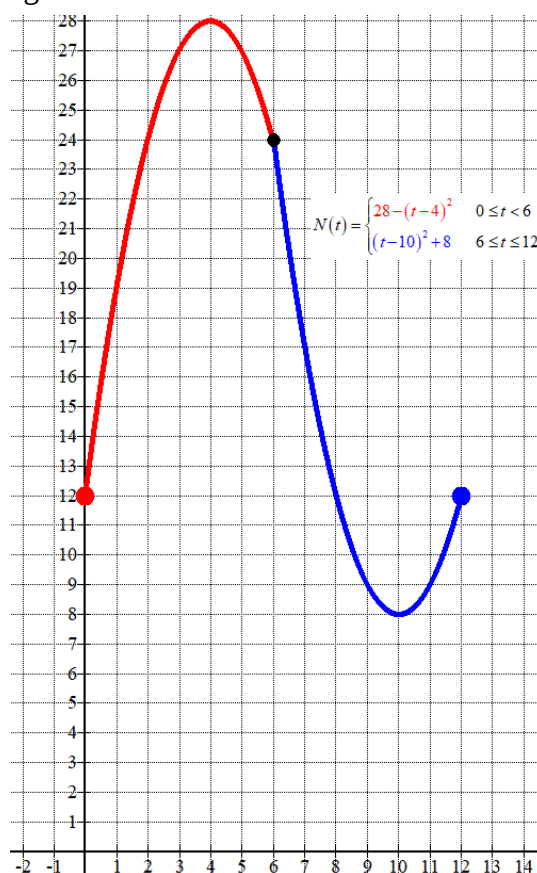
El máximo número de coches vendidos es 28 en el cuarto mes.

El número mínimo de coches vendidos es 8 en el mes décimo.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$N(t) = 28 - (t - 4)^2 \quad 0 \leq t < 6$
0	12
4	28
5	27

t	$(t - 10)^2 + 8 \quad 6 \leq t \leq 12$
6	24
10	8
12	12



c) Observando la gráfica vemos que se venden 12 coches en el mes 0, en el mes 8 y en el mes 12. Se venden menos de 12 unidades en el mes noveno, décimo y undécimo.

EJERCICIO 4. Análisis. Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

- a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$.
 b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

a) Si la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ significa que $f(2) = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c \\ f(2) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = a \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 8 = 8a - 8 + 2b + c \Rightarrow \boxed{8a + 2b + c = 16}$$

Si la función tiene un extremo relativo en $(0,16)$ significa que la función pasa por $(0, 16)$ y que la derivada se anula para $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c \\ f(0) = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 = a \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 16}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación obtenida.

$$\left. \begin{array}{l} 8a + 2b + c = 16 \\ c = 16 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 8a + 0 + 16 = 16 \Rightarrow 8a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Los valores buscados son $a = 0, b = 0$ y $c = 16$.

b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$ la función queda $f(x) = -2x^2 + 16$.

Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con la recta $y = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -2x^2 + 16 \\ y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = -2x^2 + 16 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

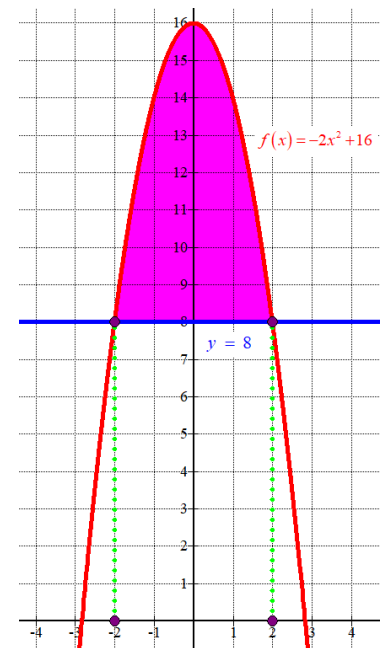
El área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_{-2}^2 -2x^2 + 16 - 8 dx = \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left[-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{2(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \approx 21.33$$

El área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$ tiene un valor aproximado de 21.33 unidades cuadradas.



EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5% de los hipertensos padecen obesidad.

- a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?
 b) ¿Son independientes los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos”?
 c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

Llamamos G al suceso “ser obeso”, H al suceso “ser hipertenso”.

Si el 27,5% de los hipertensos padecen obesidad tenemos que $P(G/H) = 0.275$.

También sabemos que $P(G) = 0.20$ y que $P(G \cap H) = 0.11$.

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} \Rightarrow 0.275 = \frac{0.11}{P(H)} \Rightarrow P(H) = \frac{0.11}{0.275} = 0.4$$

- a) Calculamos $P(G \cup H)$.

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = 0.20 + 0.40 - 0.11 = 0.49$$

El porcentaje de la población que padece obesidad o es hipertenso es del 49 %.

- b) Hay que ver si se cumple $P(G \cap H) = P(G)P(H)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(G \cap H) = 0.11 \\ P(G)P(H) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \end{array} \right\} \Rightarrow P(G \cap H) = 0.11 \neq 0.08 = P(G)P(H)$$

Al tener distinto valor podemos afirmar que los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos” no son independientes.

- c) Nos piden calcular $P(H/\bar{G})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H/\bar{G}) = \frac{P(H \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{P(H) - P(H \cap G)}{1 - P(G)} = \frac{0.40 - 0.11}{1 - 0.2} = \boxed{\frac{29}{80} = 0.3625}$$

La probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso es de 0.3625.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

b) Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu=97$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

a) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta. $X = N(\mu, 15)$

Tamaño de la muestra = $n = 25$.

Media muestral $\bar{x} = 97$ horas.

Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{25}} = 5,88$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (97 - 5,88, 97 + 5,88) = (91,12, 102,88)$$

b) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta.

$$X = N(97, 15) \rightarrow \overline{X}_{36} = N\left(97, \frac{15}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{36} = N(97, 2,5)$$

Nos piden calcular $P(90 \leq \overline{X}_{36} \leq 104)$.

$$P(90 \leq \overline{X}_{36} \leq 104) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{90 - 97}{2,5} \leq Z \leq \frac{104 - 97}{2,5}\right) =$$

$$= P(-2,8 \leq Z \leq 2,8) = P(Z \leq 2,8) - P(Z \leq -2,8) =$$

$$= P(Z \leq 2,8) - P(Z \geq 2,8) = P(Z \leq 2,8) - [1 - P(Z \leq 2,8)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0,9974 - (1 - 0,9974) = \boxed{0,9948}$$

La probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas es de 0.9948.



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria extraordinaria 2023

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A .

c) Expresé en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.

Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.

b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

EJERCICIO 3. Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{si } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}$$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.

b) Represente gráficamente la función $N(t)$. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $N(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 5$.

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro " a " para que $f(x)$ tenga un punto crítico en $x_0 = 3$.

b) Para $a = 3$, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. **b)** Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? **c)** ¿Son independientes los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A”?

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 300$ €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ y 1748€

a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? **b)** Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu = 1650$ €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.b) Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A .c) Expresé en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

a) La matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a + 0 - 2a - 0 + 2 = -3a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

La matriz A tiene inversa si $a \neq \frac{2}{3}$.b) Para $a = 1$ se cumple $a \neq \frac{2}{3}$ y la matriz A tiene inversa. La calculamos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 2 - 0 + 2 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Pasamos el sistema a una expresión matricial.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 1 + 3 \\ 2 - 1 - 2 \\ 4 - 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.

Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.

b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

a) Llamamos x = número de toneladas de jurel, y = número de toneladas de caballa.

Los ingresos vienen expresados por la función: $I(x, y) = 5000x + 6000y$

Las restricciones son:

“Las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas” $\rightarrow x + y \leq 30$

“La cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa” $\rightarrow x \leq 3y$

“La cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm” $\rightarrow y \leq 18$

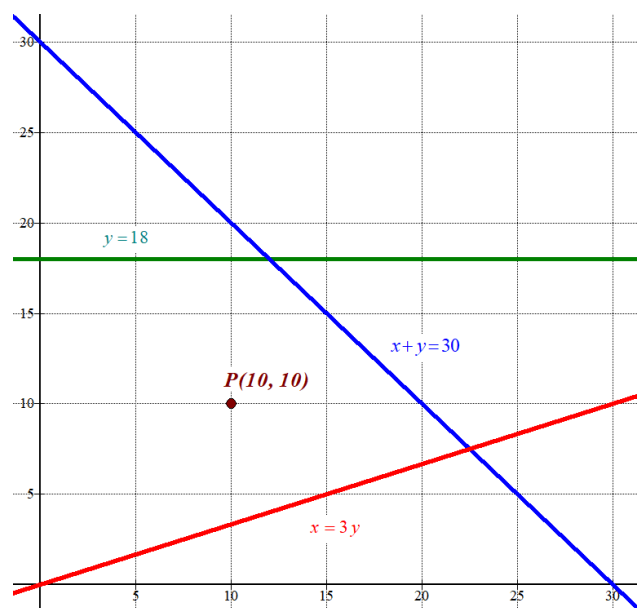
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 3y \\ x + y \leq 30 \\ y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 3y$	$x + y = 30$	$y = 18$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = \frac{x}{3}$	$x \mid y = 30 - x$	$x \mid y = 18$	Primer cuadrante
0 $\mid$ 0	0 $\mid$ 30	0 $\mid$ 18	
3 $\mid$ 1	12 $\mid$ 18	12 $\mid$ 18	
18 $\mid$ 6	30 $\mid$ 0	20 $\mid$ 18	

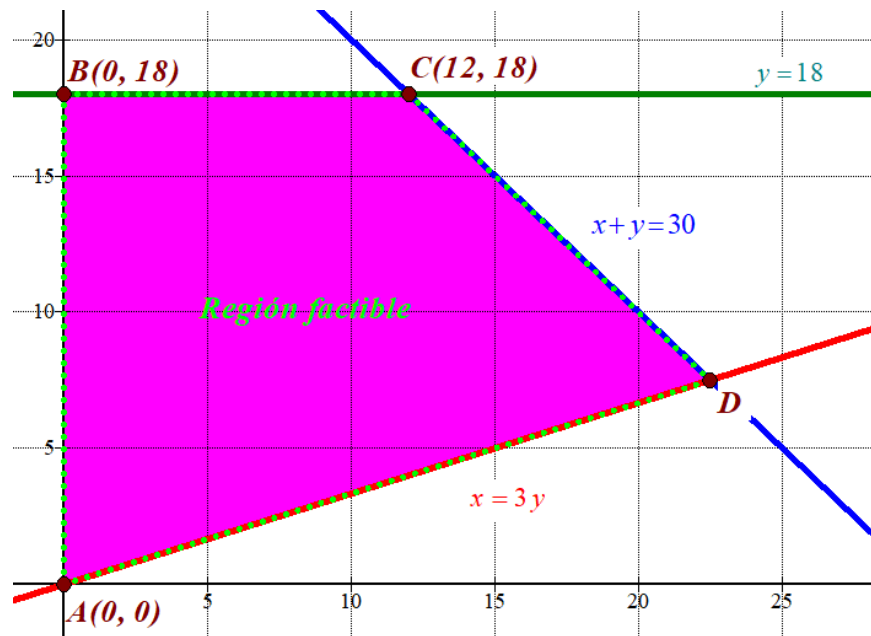


Como las restricciones del problema son
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 3y \\ x + y \leq 30 \\ y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y verde, y por encima de la roja.}$$

Comprobamos que el punto P(10, 10) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 30 \\ 10 + 10 \leq 30 \\ 10 \leq 18 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 18 \\ x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 18 = 30 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \boxed{C(12, 18)}$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + y = 30 \Rightarrow 4y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{4} = 7.5 \Rightarrow x = 3 \cdot 7.5 = 22.5 \Rightarrow \boxed{D(22.5, 7.5)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 18); C(12, 18) y D(22.5, 7.5).

Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 5000x + 6000y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 18) \rightarrow I(0, 18) = 0 + 6000 \cdot 18 = 108.000$$

$$C(12, 18) \rightarrow I(12, 18) = 5000 \cdot 12 + 6000 \cdot 18 = 168.000 \text{ ¡Máximo!}$$

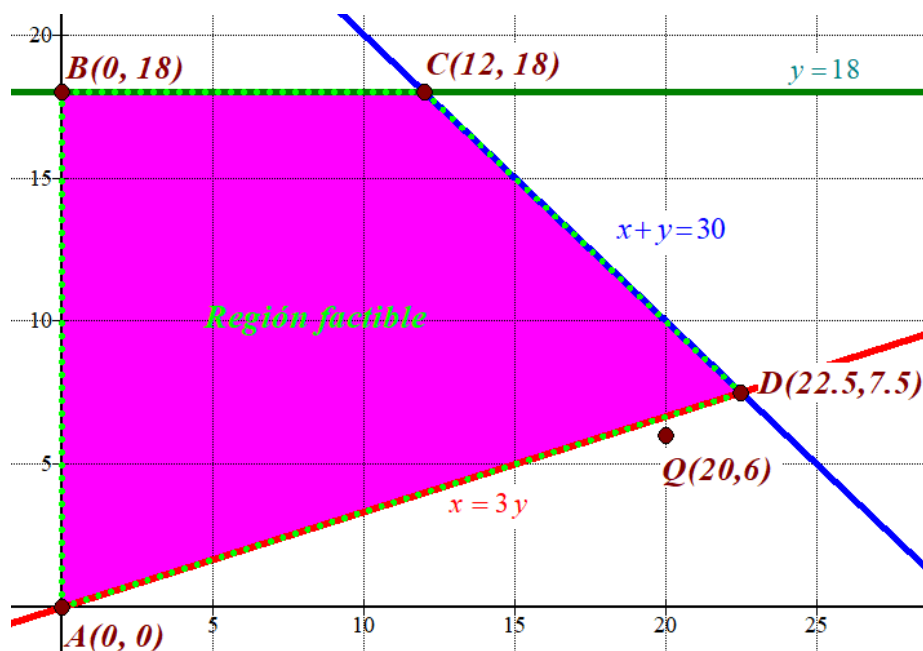
$$D(22.5, 7.5) \rightarrow I(22.5, 7.5) = 5000 \cdot 22.5 + 6000 \cdot 7.5 = 157.500$$

Los ingresos máximos son de 168.000 € y se produce en el vértice C (12, 18) que significa capturar 12 toneladas de jurel y 18 toneladas de caballa.

- c) Los valores proporcionados corresponden con el punto Q(20, 6). Comprobamos si cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 3 \cdot 6 \\ 20 + 6 \leq 30 \\ 6 \leq 18 \\ 20 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \text{No se cumplen todas las normas sobre cuotas pesqueras.}$$

También se puede comprobar visualmente que el punto Q(20, 6) no pertenece a la región factible.



EJERCICIO 3. Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8-t(t-2) & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t-1 & \text{si } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}$$

- a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.
b) Represente gráficamente la función $N(t)$. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $N(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 5$.

a) Utilizamos la derivada y según sea su signo la función crece o decrece.

$$N(t) = \begin{cases} 8-t(t-2) = 8-t^2+2t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t-1 & \text{si } 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

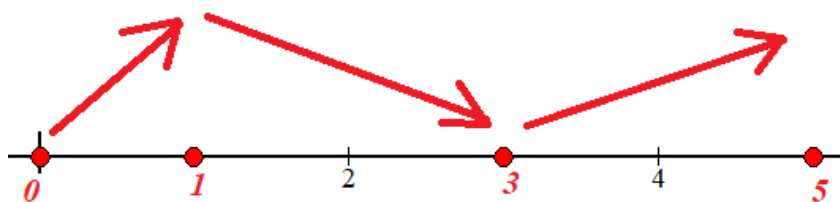
$$N'(t) = \begin{cases} -2t+2 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 2 & \text{si } 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow -2t+2=0 \Rightarrow t=1 \in [0,3)$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 0$, $t = 1$ y $t = 3$.

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $N'(0.5) = -1+2=1 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $N'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, 5)$ la derivada es siempre positiva: $N'(t) = 2 > 0$. La función crece en $(3, 5)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0, 1) \cup (3, 5)$ y decrece en $(1, 3)$.

Comprobamos si la función es continua en el cambio de definición $t = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} N(3) = 8 - 3(3-2) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} 8 - t(t-2) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} 2t - 1 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow N(3) = \lim_{t \rightarrow 3^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} N(t) = 5$$

La función es continua en $t = 3$. La función es continua en todo su dominio.

En $t = 1$ la función presenta un máximo relativo y en $t = 3$ presenta un mínimo relativo.

Calculamos las ventas en $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$ y $t = 5$.

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= 8 - 0(0 - 2) = 8 \\ N(1) &= 8 - 1(1 - 2) = 9 \text{ ; Máximo!} \\ N(3) &= 8 - 3(3 - 2) = 5 \text{ ; Mínimo!} \\ N(5) &= 2 \cdot 5 - 1 = 9 \text{ ; Máximo!} \end{aligned} \right\}$$

El máximo absoluto de ventas se produce en los meses 1 y 5 siendo estas ventas de 9000 ejemplares.

El número mínimo de ventas se produce al tercer mes siendo estas ventas de 5000 ejemplares.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

$$0 \leq t \leq 3$$

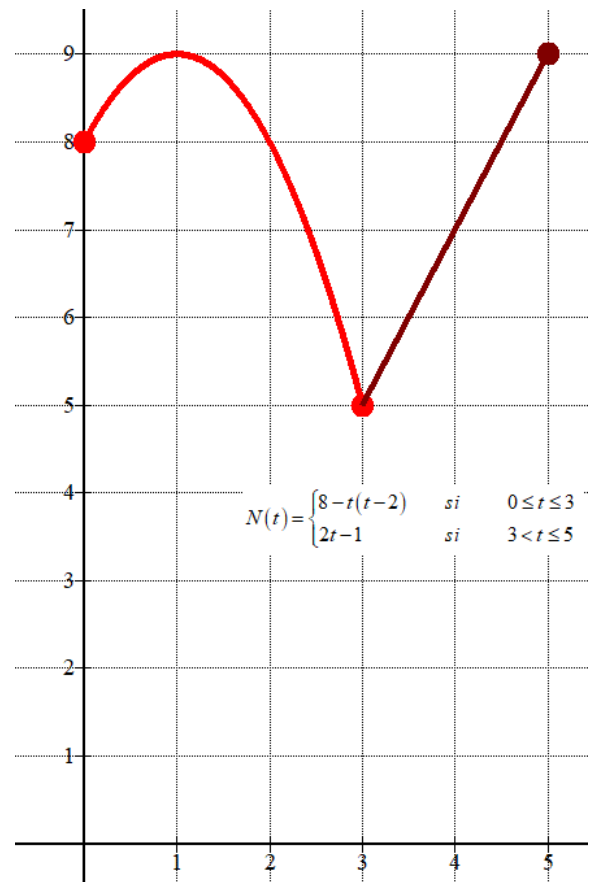
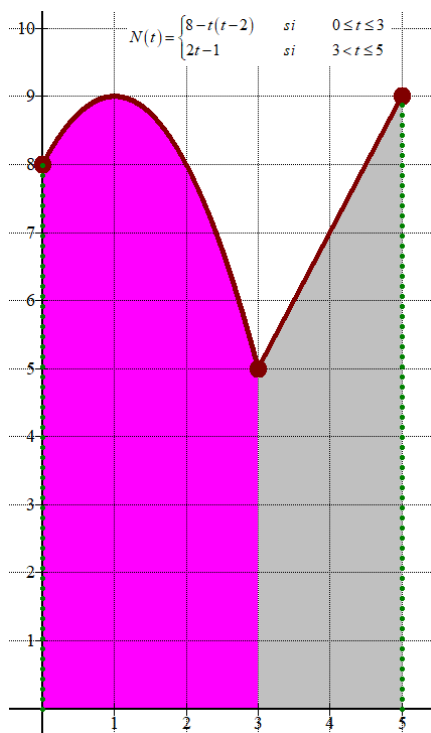
t	$N(t) = 8 - t(t - 2)$
0	8
1	9
3	5

$$3 < t \leq 5$$

t	$N(t) = 2t - 1$
3.5	6
4	7
5	9

Calculamos el área de la región pedida usando el cálculo integral.

La región aparece representada en el dibujo inferior.



$$\text{Área} = \int_0^3 -t^2 + 2t + 8 dt + \int_3^5 2t - 1 dt =$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 + 8t \right]_0^3 + \left[t^2 - t \right]_3^5 =$$

$$= \left(\left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 8 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 0^2 + 8 \cdot 0 \right] \right) + \left(\left[5^2 - 5 \right] - \left[3^2 - 3 \right] \right) = 24 + 20 - 6 = \boxed{38 \text{ u}^2}$$

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

- a) Calcule los valores del parámetro "a" para que $f(x)$ tenga un punto crítico en $x_0 = 3$.
 b) Para $a = 3$, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

a) Si la función presenta un punto crítico en $x_0 = 3$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(3) = 0$

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a}x + ax^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{a} - ax^{-2} = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} \\ f'(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{a}{3^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{9} \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $a = 3$.

b) Para $a = 3$ la función queda $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $x \neq 0$.

Buscamos sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{1}{3}x + 3x^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} - 3x^{-2} = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x = 0$ excluido del dominio de la función.

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(-4)^2} = \frac{7}{48} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -3)$.

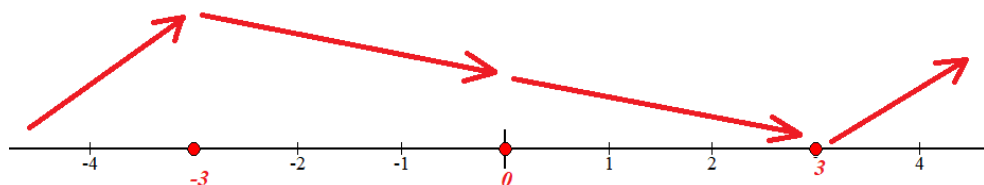
- En el intervalo $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(-1)^2} = \frac{-8}{3} < 0$. La

función decrece en $(-3, 0)$.

- En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1}{3} - \frac{3}{1^2} = \frac{-8}{3} < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{1}{3} - \frac{3}{4^2} = \frac{7}{48} > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-3, 0) \cup (0, 3)$

La función tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Para estudiar la concavidad y convexidad utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - 3x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 0 + 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$$

Esta expresión de la segunda derivada cambia de signo en $x = 0$, valor excluido del dominio. Por lo que la función no presenta puntos de inflexión.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale

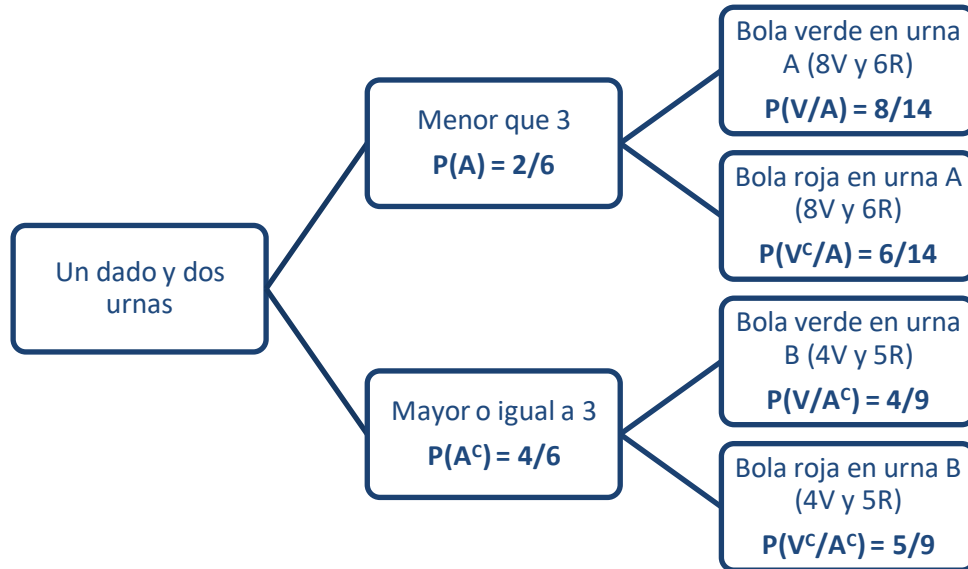
$$f''(-1) = \frac{6}{(-1)^3} = -6 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = \frac{6}{1^3} = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(0, +\infty)$.

Resumiendo: La gráfica de la función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es convexa ($\cup$) en el intervalo $(0, +\infty)$. No presenta puntos de inflexión.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar, **a)** Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. **b)** Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? **c)** ¿Son independientes los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A”?

Llamamos A al suceso “Sacar un número menor que 3 al lanzar un dado”, V a “sacar bola verde de la urna” y V^C a “sacar bola roja de la urna”. Organizamos los datos en un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(V^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V^C) = P(A)P(V^C / A) + P(A^C)P(V^C / A^C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{14} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{97}{189} \approx 0.513$$

b) Nos piden calcular $P(A/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A)P(V/A)}{1 - P(V^C)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{14}}{1 - \frac{97}{189}} = \frac{9}{23} \approx 0.391$$

c) Los sucesos V^C y A son independientes si se cumple que $P(A \cap V^C) = P(A)P(V^C)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap V^C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{7} \\ P(A) = \frac{2}{6} \\ P(V^C) = \frac{97}{189} \end{array} \right\} \rightarrow P(A)P(V^C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{97}{189} = \frac{97}{567} \left\{ \Rightarrow \text{ii} P(A \cap V^C) = \frac{1}{7} \neq \frac{97}{567} = P(A)P(V^C) !! \right.$$

Los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 300$ €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ y 1748€
a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? **b)** Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu = 1650$ €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

a) X = El salario (en €) de los trabajadores de una empresa. $X = N(\mu, 300)$

Tamaño de la muestra = $n = 36$. Intervalo de confianza = (1552, 1748)

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza $\rightarrow \bar{x} = \frac{1552+1748}{2} = 1650$ €.

El salario medio de los trabajadores de la muestra es de 1650 €.

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1748-1552}{2} = 98 \text{ €}$$

Aplicamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 98 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{36}} \Rightarrow 98 = z_{\alpha/2} \cdot 50 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{98}{50} = 1.96$$

Hallamos el nivel de confianza para un valor de $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

El nivel de confianza establecido en el ejercicio es del 95 %.

b) X = El salario (en €) de los trabajadores de una empresa.

$$X = N(1650, 300) \rightarrow \overline{X}_{36} = N\left(1650, \frac{300}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{36} = N(1650, 50)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{36} > 1590)$.

$$P(\overline{X}_{36} > 1590) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1590-1650}{50}\right) = P(Z > -1.2) =$$

$$= P(Z < 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8849}$$



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria ordinaria 2023

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcule $A \cdot B$.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2×2 .

EJERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

EJERCICIO 3. Análisis. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función $N(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

EJERCICIO 4. Análisis. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho

establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

- a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?
- b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?
- c) ¿Son independientes los sucesos “realizar alguna compra en ese establecimiento” y “recibir publicidad del mismo”? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

- a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.
- b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcule $A \cdot B$.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2×2 .

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+3 & -1+0+3 \\ 0+2-1 & 0+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$

b) Despejamos X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C + I$.

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} (C + I) \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} (C + I)$$

Comprobamos si $A \cdot B$ tiene inversa y la calculamos.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^t)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X .

$$C + I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} (C + I) = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2+0 & 2+0 \\ -2+0 & 2+0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. **b)** Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. **c)** Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

a) Llamamos x = número de plantas A, y = número de plantas B.

Resumimos los datos en una tabla.

	Costes mensuales	Nº empleados	Beneficio
Nº plantas A (x)	$1000x$	$8x$	$24000x$
Nº plantas B (y)	$2000y$	$4y$	$20000y$
	$1000x + 2000y$	$8x + 4y$	$24000x + 20000y$

Las restricciones son:

“El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B” $\rightarrow x \leq 2y$

“Los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados” $\rightarrow 1000x + 2000y \leq 42000$;
 $8x + 4y \leq 120$

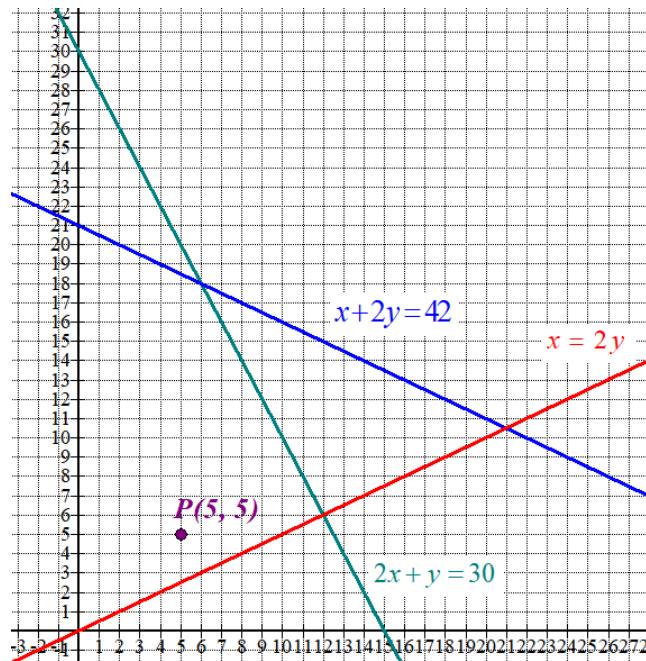
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ 1000x + 2000y \leq 42000 \\ 8x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 2y$	$x + 2y = 42$	$2x + y = 30$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{x}{2} \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 12 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{42-x}{2} \\ \hline 0 & 21 \\ 6 & 18 \\ 42 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 30 - 2x \\ \hline 0 & 30 \\ 6 & 18 \\ 12 & 6 \\ 15 & 0 \end{array}$	Primer cuadrante

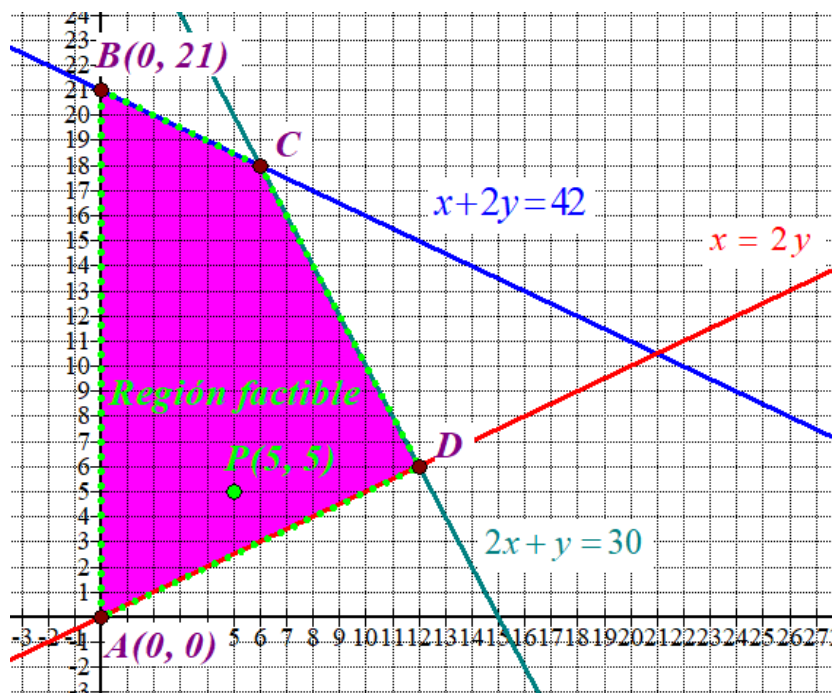


Como las restricciones del problema son
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y verde, y por encima de la roja.}$$

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \leq 2 \cdot 5 \\ 5 + 2 \cdot 5 \leq 42 \\ 2 \cdot 5 + 5 \leq 30 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 30 \\ x + 2y = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 2x \\ x + 2y = 42 \end{cases} \Rightarrow x + 2(30 - 2x) = 42 \Rightarrow x + 60 - 4x = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = -18 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 30 - 12 = 18 \Rightarrow C(6, 18)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 2y + y = 30 \Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow D(12, 6)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 21); C(6, 18) y D(12, 6).

c) La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x, y) = 24000x + 20000y$$

Valoramos la función objetivo en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 21) \rightarrow B(0, 21) = 0 + 420000 = 420000$$

$$C(6, 18) \rightarrow B(6, 18) = 24000 \cdot 6 + 20000 \cdot 18 = 504000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(12, 6) \rightarrow B(12, 6) = 24000 \cdot 12 + 20000 \cdot 6 = 408000$$

El máximo beneficio es de 504 000 € y se produce en el vértice C (6, 18) que significa 6 plantas de producción A y 18 de B.

EJERCICIO 3. Análisis. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función $N(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

- Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.
- Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).
- Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

a) Utilizamos la derivada y según su signo la función crece o decrece.

$$N'(t) = 3t^2 - 48t + 180$$

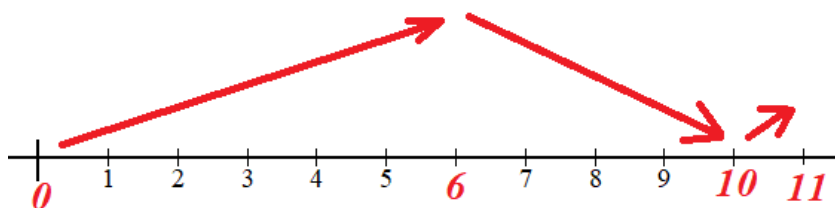
$$N'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0 \Rightarrow t^2 - 16t + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(60)}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = 10 = t \\ \frac{16-4}{2} = 6 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0, 6)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $N'(1) = 3 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 180 = 135 > 0$. La función crece en $(0, 6)$.
- En el intervalo $(6, 10)$ tomamos $t = 7$ y la derivada vale $N'(7) = 3 \cdot 7^2 - 48 \cdot 7 + 180 = -9 < 0$. La función decrece en $(6, 10)$.
- En el intervalo $(10, 11)$ tomamos $t = 10.5$ y la derivada vale $N'(10.5) = 3 \cdot 10.5^2 - 48 \cdot 10.5 + 180 = 6.75 > 0$. La función crece en $(10, 11)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0, 6) \cup (10, 11)$ y decrece en $(6, 10)$.

b) $N(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$.

En el año 11 hay depositados 8407 millones de litros en el embalse.

- c) Observando el esquema de evolución de la función del dibujo superior el máximo absoluto solo puede estar en el año 6 o en el 11. Comparamos los valores de la función en dichos años.

$$\left. \begin{array}{l} N(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8000 = 8432 \\ N(11) = 8407 \end{array} \right\} \Rightarrow N(6) > N(11)$$

El año 6 tuvo la mayor cantidad de agua depositada, siendo esta de 8432 millones de litros.

EJERCICIO 4. Análisis. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

- a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.
- b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas.
- c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Si $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$ significa que la derivada segunda se anula en dicho valor.

$$B(t) = t(t-a)^2 = t(t^2 - 2at + a^2) = t^3 - 2at^2 + a^2t$$

$$B'(t) = 3t^2 - 4at + a^2 \Rightarrow B''(t) = 6t - 4a$$

$$\left. \begin{array}{l} B''(t) = 6t - 4a \\ B''(6) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6 \cdot 6 - 4a \Rightarrow 4a = 36 \Rightarrow a = \frac{36}{4} = 9$$

El valor buscado es $a = 9$.

b) Para $a = 9$ la función queda $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$.

Hallamos los puntos críticos usando la derivada.

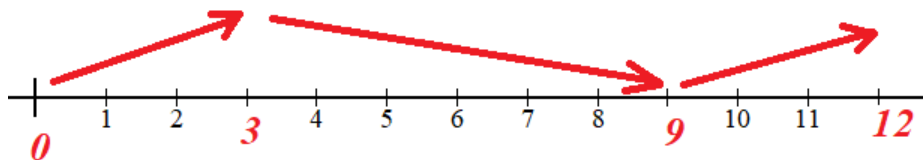
$$\left. \begin{array}{l} B'(t) = 3t^2 - 36t + 81 \\ B'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(27)}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = 9 = t \\ \frac{12-6}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $B'(1) = 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 48 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 9)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $B'(4) = 3 \cdot 4^2 - 36 \cdot 4 + 81 = -15 < 0$. La función decrece en $(3, 9)$.
- En el intervalo $(9, 12)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10) = 3 \cdot 10^2 - 36 \cdot 10 + 81 = 21 > 0$. La función crece en $(9, 12)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $t = 3$ y un mínimo relativo en $t = 9$.

Valoramos la función en $t = 12$ y lo comparamos con el valor de la función en $t = 3$.

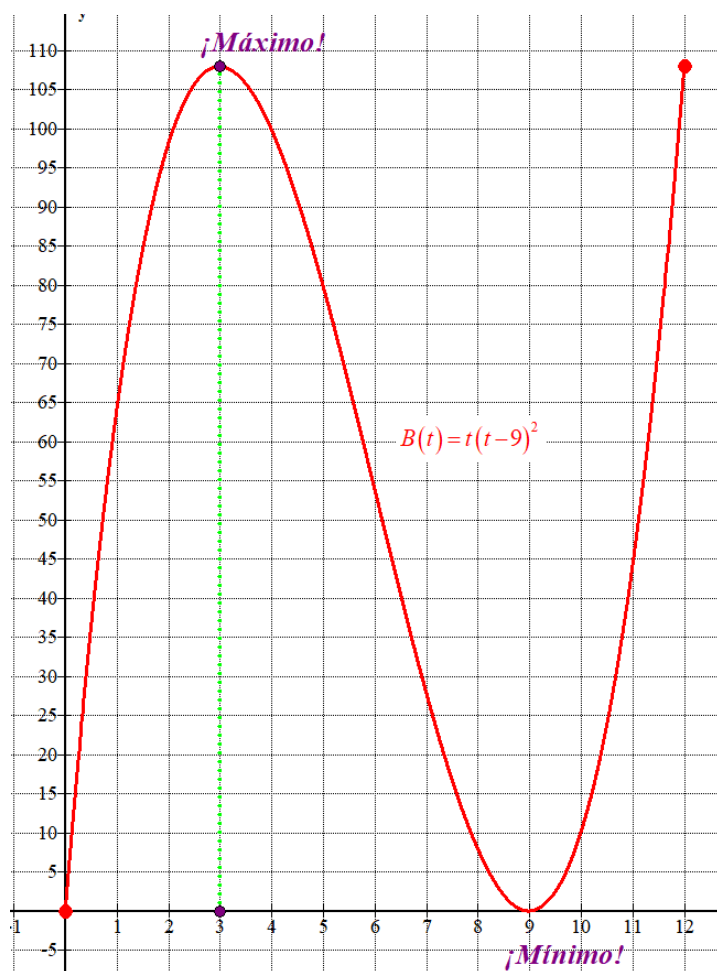
$$B(t) = t(t-9)^2 \Rightarrow \begin{cases} B(3) = 3(3-9)^2 = 108 \\ B(12) = 12(12-9)^2 = 108 \end{cases}$$

La función beneficio toma su máximo valor transcurridos 3 y 12 meses. Este beneficio máximo es de 108 cientos de euros = 10800 euros.

- c) Según el esquema superior la función crece en $(0, 3) \cup (9, 12)$ y decrece en $(3, 9)$.
Realizamos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$$B(t) = t(t-9)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

t	$B(t)$
0	0
1	64
3	108
5	80
9	0
10	10
12	108



EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

- a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?
 b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?
 c) ¿Son independientes los sucesos “realizar alguna compra en ese establecimiento” y “recibir publicidad del mismo”? Justifique la respuesta.

El 90% del 70% reciben publicidad y compran en el establecimiento $\rightarrow \frac{90 \cdot 70}{100} = 63\%$ del total

recibe publicidad y compra en el establecimiento. El restante $70 - 63 = 7\%$ recibe publicidad y no compra en el establecimiento.

El 60% del 30% no reciben publicidad y compra en el establecimiento $\rightarrow \frac{60 \cdot 30}{100} = 18\%$ del total

no recibe publicidad y compra en el establecimiento. El restante $30 - 18 = 12\%$ no recibe publicidad y no compra en el establecimiento.

Llamamos A = Recibe publicidad, C = Compra en el establecimiento.

$$\text{Tenemos que } \begin{cases} P(A) = 0.70; P(A \cap C) = 0.63; P(A \cap \bar{C}) = 0.07 \\ P(\bar{A}) = 0.30; P(\bar{A} \cap C) = 0.18; P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0.12 \end{cases}$$

a) $63\% + 18\% = 81\%$. El 81% de la población compra en el establecimiento.

b) De 100 personas en total hay 81 que realizan alguna compra en el establecimiento, de estos solo 63 han recibido publicidad.

$$P(A/C) = \frac{63}{81} = \boxed{\frac{7}{9} \approx 0.7778}$$

c) Los sucesos A y C son independientes si se cumple que $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap C) = 0.63 \\ P(A) = 0.70 \\ P(C) = 0.81 \end{array} \right\} \rightarrow P(A)P(C) = 0.7 \cdot 0.81 = 0.567 \left. \vphantom{\begin{array}{l} P(A \cap C) = 0.63 \\ P(A) = 0.70 \\ P(C) = 0.81 \end{array}} \right\} \Rightarrow P(A \cap C) = 0.63 \neq 0.567 = P(A)P(C)$$

Los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

- a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.
- b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

a) La proporción de empresas sancionadas es $pr = \frac{30}{120} = 0.25$

Con un nivel de confianza del 90% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

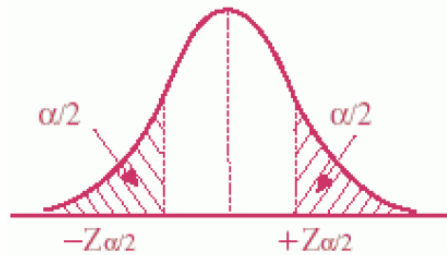
Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{120}} \approx 0.065$$

El intervalo de confianza es $(0.25 - 0.065, 0.25 + 0.065) = (0.185, 0.315)$

b) Con un nivel de confianza del 95% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Si ignoramos los datos iniciales tomamos $pr = \frac{1}{2} = 0.5$ y $qr = \frac{1}{2} = 0.5$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} = \frac{0.02}{1.96} \Rightarrow \frac{0.25}{n} = \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} = 2401$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2401 empresas para que el error sea inferior a 0.02 con un nivel de confianza del 95%.



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria extraordinaria 2022

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices A y B
- Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

- Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

EJERCICIO 3. Análisis. Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12, \quad t \text{ es el tiempo en años y } 1 \leq t \leq 6$$

- Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?
- Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.
- ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Calcule el valor de parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.
- Para $a = 2$ calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntela.
- Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $Y=0$, $X=0$ y $X=2$.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que el 70% de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60% sigue la serie B y el 30% sólo sigue la serie A.

- ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?
- Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?
- Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90% para la media de edad obtenido es (39.25, 44.75),

- a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?
- b) ¿Cuánto vale la media muestral?
- c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95%?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1. Álgebra.** Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices A y B

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

a) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 2A \end{array} \right\} \Rightarrow A - \left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 2A \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación.

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow A \cdot X - X = B \Rightarrow (A - I) X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} B$$

Comprobamos que la matriz $A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y calculamos la matriz X.

$$X = (A - I)^{-1} B \Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 4 & -1 \\ 1 + 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

- Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

a) Llamamos x = número de motores para motos, y = número de motores para coches.

Hacemos una tabla para organizar la información.

	Tiempo en trabajo manual	Tiempo en trabajo de máquina	Beneficio
Nº motores de moto (x)	$60x$	$20x$	$1500x$
Nº de motores de coche (y)	$45y$	$40y$	$2000y$
TOTAL	$60x + 45y$	$20x + 40y$	$1500x + 2000y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x, y) = 1500x + 2000y$$

Las restricciones son:

“La fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina” $\rightarrow$
 $60x + 45y \leq 120 \cdot 60 = 7200$; $20x + 40y \leq 90 \cdot 60 = 5400$

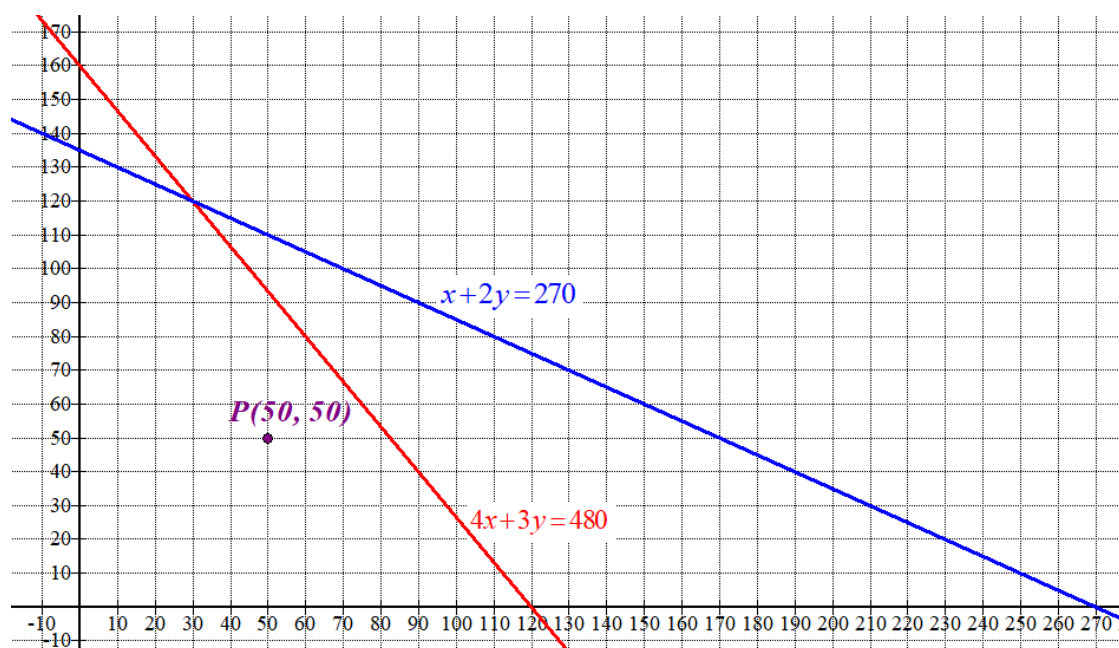
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 45y \leq 7200 \\ 20x + 40y \leq 5400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x + 3y = 480$	$x + 2y = 270$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{480 - 4x}{3} \\ \hline 0 & 160 \\ 30 & 120 \\ 120 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{270 - x}{2} \\ \hline 0 & 135 \\ 30 & 120 \\ 270 & 0 \end{array}$	
		Primer cuadrante



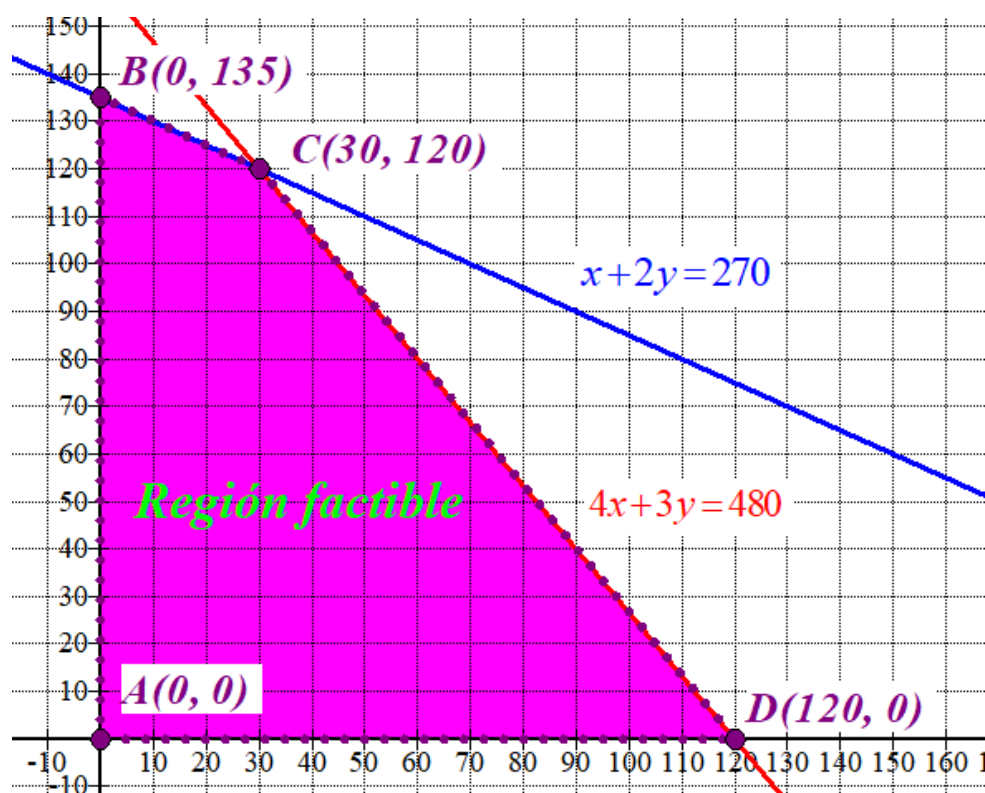
Como las restricciones del problema son $\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(50, 50)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 150 \leq 480 \\ 50 + 100 \leq 270 \\ 50 \geq 0; 50 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 0)$; $B(0, 135)$; $C(30, 120)$ y $D(120, 0)$.

- c) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 1500x + 2000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 135) \rightarrow B(0,135) = 0 + 270000 = 270.000$$

$$C(30, 120) \rightarrow B(30,120) = 45000 + 240000 = 285.000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(120, 0) \rightarrow B(120,0) = 180000 + 0 = 180.000$$

El máximo beneficio es de 285.000 € y se produce en el vértice C (30, 120) que significa ensamblar mensualmente 30 motores de moto y 120 de coche.

EJERCICIO 3. Análisis. Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12, \quad t \text{ es el tiempo en años y } 1 \leq t \leq 6$$

- a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?
 b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.
 c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

a) Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$C'(t) = 3t^2 - \frac{21}{2}t + 30 = 3t^2 - 21t + 30$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 21t + 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = t \\ \frac{7-3}{2} = 2 = t \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[1, 2)$ tomamos $t = 1.5$ y la derivada vale

$$C'(1.5) = 3 \cdot 1.5^2 - 21 \cdot 1.5 + 30 = 5.25 > 0. \text{ La función crece en } [1, 2).$$

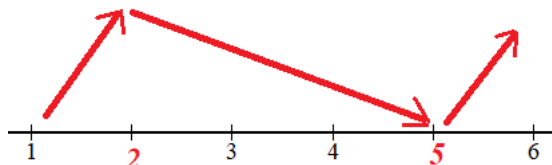
- En el intervalo $(2, 5)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3) = 3 \cdot 3^2 - 21 \cdot 3 + 30 = -6 < 0$.

La función decrece en $(2, 5)$.

- En el intervalo $(5, 6]$ tomamos $t = 5.5$ y la derivada vale

$$C'(5.5) = 3 \cdot 5.5^2 - 21 \cdot 5.5 + 30 = 5.25 > 0. \text{ La función crece en } (5, 6].$$

La función sigue el esquema siguiente:



En $t = 2$ hay un máximo relativo.

Para obtener el máximo absoluto del coste comparamos el coste en $t = 2$ y en $t = 6$.

$$\text{Como } C(2) = 2^3 - \frac{21}{2}2^2 + 30 \cdot 2 - 12 = 14 \quad \text{y} \quad C(6) = 6^3 - \frac{21}{2}6^2 + 30 \cdot 6 - 12 = 6$$

El máximo absoluto del coste se produce en $t = 2$.

El coste máximo es de 1.400.000 € y se produce el segundo año.

b) Según el esquema del apartado a) la función crece en $[1, 2) \cup (5, 6]$ y decrece en $(2, 5)$.

Los costes crecen entre el primer y el segundo año, descienden entre el segundo y el quinto año y vuelven a crecer entre el quinto y el sexto año.

El coste mínimo se produce en $t = 1$ o en $t = 5$. Comparamos los costes en esos años.

$$C(1) = 1^3 - \frac{21}{2}1^2 + 30 \cdot 1 - 12 = 8.5 \quad \text{y} \quad C(5) = 5^3 - \frac{21}{2}5^2 + 30 \cdot 5 - 12 = 0.5$$

El coste mínimo se produce en $t = 5$.

El coste mínimo es de 50.000 € y se produce el quinto año.

c) Como $C(1) = 8.5$ y $C(6) = 6$ el coste inicial es de 850.000 € y el final de 600.000 €.

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Calcule el valor de parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
 b) Para $a = 2$ calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntela.
 c) Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $Y=0$, $X=0$ y $X=2$.

a) Para que sea continua en $\mathbb{R}$ debe serlo en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = -1^2 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - a = 2 - a \\ f(1) &= -1^2 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

b) Para $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y es continua.

Calculamos la derivada en $\mathbb{R} - \{1\}$ y vemos cuando se anula.

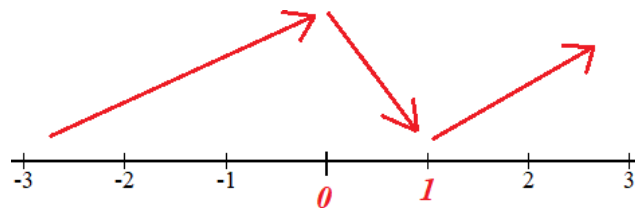
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-\infty, 1) \\ 2 = 0 \quad \text{¡Imposible!} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Tenemos un punto crítico en $x = 0$. Estudiamos el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 1, y después de 1.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -2(-1) = 2 > 0$. La función es creciente en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = -2 \cdot 0.5 = -1 < 0$. La función es decreciente en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2 > 0$. La función es creciente en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

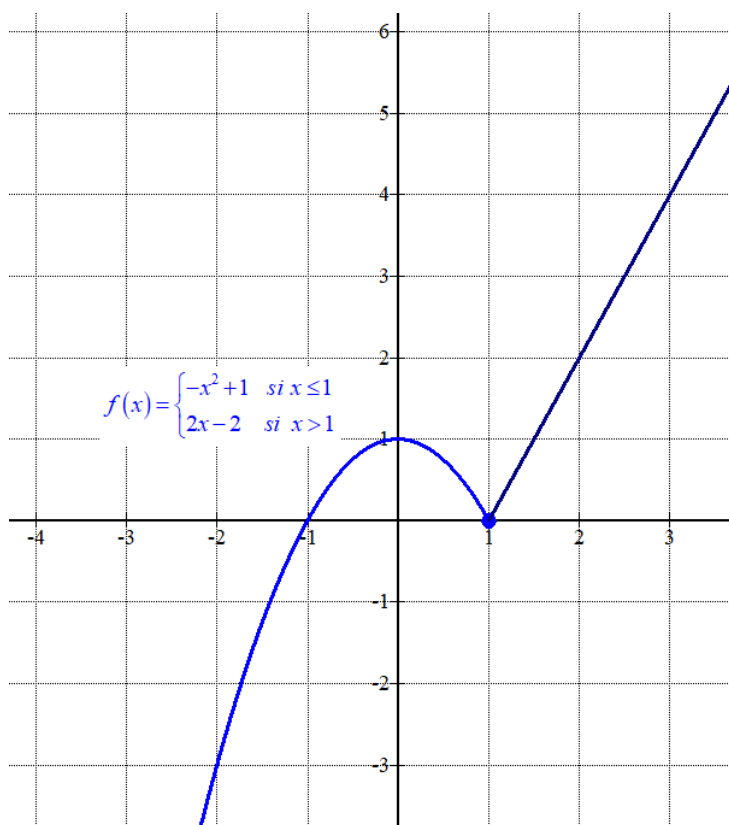


La función presenta un máximo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = -0^2 + 1 = 1$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0, 1)$.

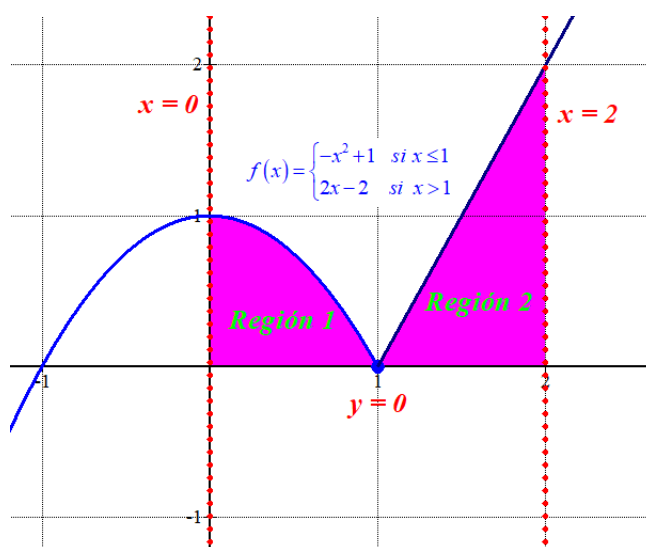
La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = -1^2 + 1 = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$f(x)$
-1	0
0	1
1	0
2	2



c) Nos piden hallar el área de la región del plano pintada de color rosa.



Dividimos la región en dos partes cuya área calculamos por separado.

$$\text{Área 1} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 0 \right] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} u^2$$

$$\text{Área 2} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2x - 2 dx = \left[x^2 - 2x \right]_1^2 = [2^2 - 4] - [1^2 - 2] = 1 u^2$$

El área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $Y=0$, $X=0$ y $X=2$ es la suma del valor de ambas.

$$\text{Área total} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \approx 1.67 u^2$$

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que el 70% de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60% sigue la serie B y el 30% sólo sigue la serie A.

- a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?
 b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?
 c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

Hacemos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Sigue la serie B	No sigue la serie B	
Sigue la serie A		30	70
No sigue la serie A			
	60		100

Completamos la tabla.

	Sigue la serie B	No sigue la serie B	
Sigue la serie A	40	30	70
No sigue la serie A	20	10	30
	60	40	100

- a) Mirando en la tabla el 40 % sigue las dos series.
 b) Mirando en la tabla sumamos los porcentajes de los que siguen las dos, los que siguen la A y no la B y los que siguen la B y no la A: $40 + 30 + 20 = 90$.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad es $\frac{90}{100} = \boxed{0.9}$

- c) Hay 70 % que sigue la serie A y un 40 % sigue la serie A y la B. Aplicando la regla de Laplace

la probabilidad es $\frac{n^{\circ} \text{ seguidores serie A y B}}{n^{\circ} \text{ seguidores serie A}} = \frac{40}{70} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.571}$

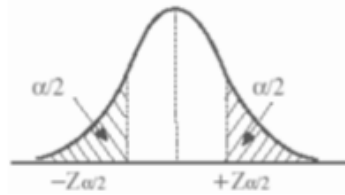
EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90% para la media de edad obtenido es (39.25, 44.75),

- a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?
 b) ¿Cuánto vale la media muestral?
 c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95%?

X = La edad de los trabajadores en las fábricas de una zona. $X = N(\mu, 10)$

- a) Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$



El intervalo de confianza es $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$. El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $\rightarrow \text{Error} = \frac{44.75 - 39.25}{2} = 2.75$

Aplicamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.75 = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.75\sqrt{n} = 16.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{16.45}{2.75} \Rightarrow n = \left(\frac{16.45}{2.75} \right)^2 \approx 35.78$$

El tamaño de la muestra es de 36 trabajadores.

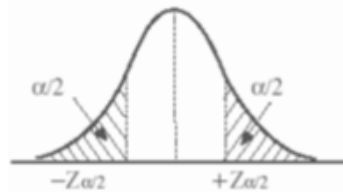
- b) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza ya que el intervalo de confianza es $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$.

$$\text{El intervalo de confianza es } (39.25, 44.75) \rightarrow \bar{x} = \frac{39.25 + 44.75}{2} = 42$$

La media muestral es de 42 años.

- c) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}} \approx \boxed{3.267 \text{ años}}$$



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria ordinaria 2022

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, en donde I representa la matriz identidad de orden 3.
- Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.
- Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A⁺ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A⁺. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A⁺. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

- Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

EJERCICIO 3. Análisis. En una zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado

$$\text{por la función: } N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?
- ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?
- Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- Calcule el valor del parámetro " a " teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.
- Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70% de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30% de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

- a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?
- c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95% para el consumo mensual medio es $[60.1, 69.9]$. Según esta información:

- a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz? b) ¿Cuál es el error máximo cometido?
- c) Determine un intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de luz

SOLUCIONES**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, en donde I representa la matriz identidad de orden 3.
 b) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.
 c) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

$$\begin{aligned} \text{a) } A^2 - B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1 & 1+2 \\ 1+1 & 1+1 & 2+1+1 \\ 1 & 1 & 2+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Veamos si existe la inversa de $A - I$ comprobando que su determinante es no nulo.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa.}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot A + B = A^2 + X \Rightarrow X \cdot A - X = A^2 - B \Rightarrow X(A - I) = A^2 - B \Rightarrow X = (A^2 - B)(A - I)^{-1}$$

Sustituimos en la ecuación los valores obtenidos en los apartados anteriores y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = (A^2 - B)(A - I)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-3 \\ 0 & 1 & 1-1 \\ -2 & 4-3 & 4-6+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A⁺ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A⁺. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A⁺. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

- Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

a) Llamamos x = número de móviles calidad A, y = número de móviles calidad A⁺.

El beneficio que se obtiene por cada móvil de calidad A es de $100 - 70 = 30$ € y por cada uno de calidad A⁺ es de $150 - 90 = 60$ €.

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x, y) = 30x + 60y$$

Las restricciones son:

“La empresa dispone de un capital de 30.000 euros” $\rightarrow 70x + 90y \leq 30000$

“Su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles)” $\rightarrow x + y \leq 350$

“Su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 310 carcasas de aluminio” $\rightarrow y \leq 310$

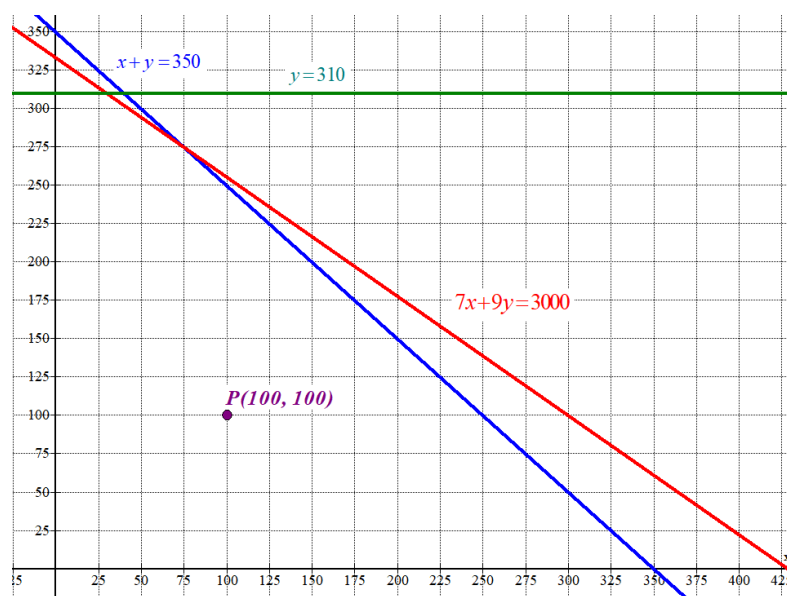
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 70x + 90y \leq 30000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$7x + 9y = 3000$		$x + y = 350$		$y = 310$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = \frac{3000 - 7x}{9}$	x	$y = 350 - x$	x	$y = 310$	Primer cuadrante
0	200	0	350	0	310	
75	275	75	275	50	310	
100	0	350	0			



Como las restricciones del problema son

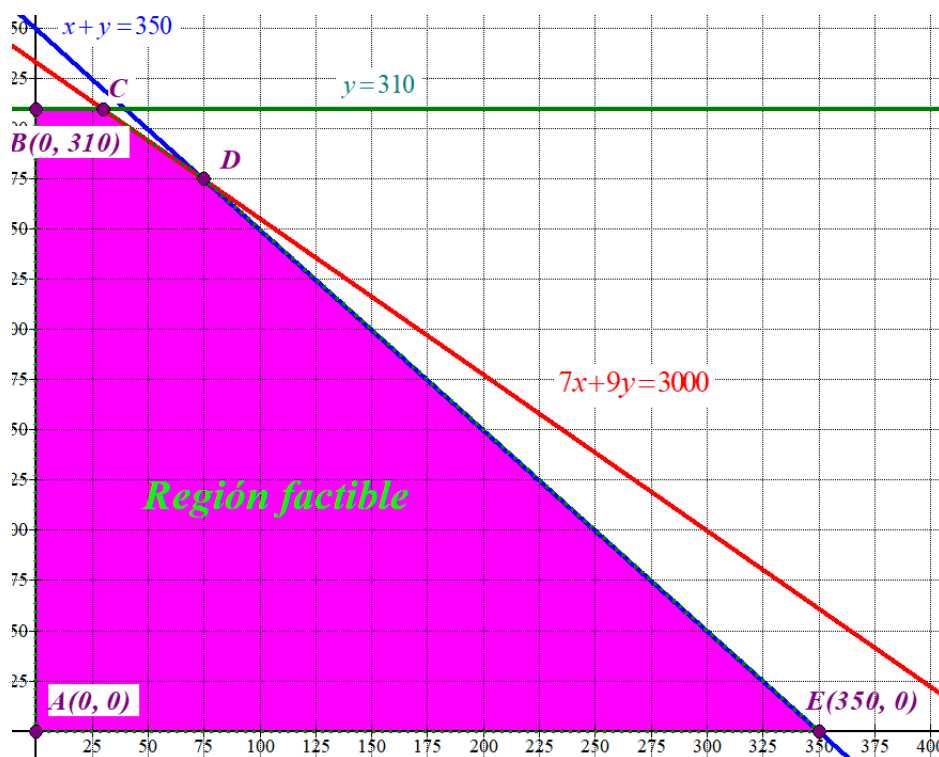
$$\left. \begin{array}{l} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del}$$

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 700 + 900 \leq 3000 \\ 100 + 100 \leq 350 \\ 100 \leq 310 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 310 \\ 7x + 9y = 3000 \end{cases} \Rightarrow 7x + 2790 = 3000 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow C(30, 310)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 7x + 9y = 3000 \\ x + y = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 9y = 3000 \\ y = 350 - x \end{cases} \Rightarrow 7x + 9(350 - x) = 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 3150 - 9x = 3000 \Rightarrow -2x = -150 \Rightarrow x = \frac{150}{2} = 75 \Rightarrow y = 350 - 75 = 275 \Rightarrow D(75, 275)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 310); C(30, 310), D(75, 275) y E(350, 0).

c) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 30x + 60y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 310) \rightarrow B(0, 310) = 0 + 18600 = 18600$$

$$C(30, 310) \rightarrow B(30, 310) = 900 + 18600 = 19500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 275) \rightarrow B(75, 275) = 2250 + 16500 = 18750$$

$$E(350, 0) \rightarrow B(350, 0) = 10500 + 0 = 10500$$

El máximo beneficio es de 19500 € y se produce en el vértice C (30, 310) que significa comprar 30 móviles calidad A y 310 calidad A⁺.

EJERCICIO 3. Análisis. En una zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado

por la función:
$$N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$ ¿Entre qué años crece la función? ¿Entre qué años decrece?
- b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?
- c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

a) Comprobamos si la función es continua en $t = 10$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10^-} N(t) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} N(t) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} 95 - \frac{250}{t} = 95 - \frac{250}{10} = 70 \\ f(10) &= t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10^-} N(t) = \lim_{x \rightarrow 10^+} N(t) = \lim_{x \rightarrow 10} N(t) = 70$$

La función es continua en el intervalo $[0, +\infty)$

Calculamos la función derivada.

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ \frac{250}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

En el intervalo $(10, +\infty)$ la derivada es $N'(t) = \frac{250}{t^2} > 0$. Siempre es positiva y por tanto la función es creciente.

En el intervalo $[0, 10)$ la derivada es $N'(t) = 2t - 8$. Se anula en $t = 4$. Dividimos este intervalo en dos:

- En $[0, 4)$ tomamos $t = 2$ y la derivada es $N'(2) = 4 - 8 = -4 < 0$. La función es decreciente en el intervalo $[0, 4)$.
- En $(4, 10)$ tomamos $t = 8$ y la derivada es $N'(8) = 16 - 8 = 8 > 0$. La función es creciente en el intervalo $(4, 10)$.

Resumiendo: La función $N(t)$ es decreciente en $[0, 4)$ y creciente en $(4, +\infty)$

Decrece entre los años 0 y 4. Crece a partir del año cuarto.

b) El mínimo relativo se encuentra en $t = 4$, es decir, al final del cuarto año. Como $N(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 34$ el número de aves es de 3400.

c) Veamos en que año se observan 5000 o 7500 aves.

$$N(t) = 50 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t + 50 = 50 \rightarrow t^2 - 8t = 0 \Rightarrow t(t-8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} = 50 \rightarrow -\frac{250}{t} = -45 \rightarrow t = \frac{250}{45} = \frac{50}{9} \approx 5.55 \notin (10, +\infty) & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

$$N(t) = 75 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t + 50 = 75 \rightarrow t^2 - 8t - 25 = 0 \rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-25)}}{2} \rightarrow \\ \rightarrow t = \frac{8 \pm 2\sqrt{41}}{2} = \begin{cases} t = 4 + \sqrt{41} \approx 10.4 \notin (0, 10) \\ t = 4 - \sqrt{41} \approx -2.4 \notin (0, 10) \end{cases} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} = 75 \rightarrow -\frac{250}{t} = -20 \rightarrow t = \frac{250}{20} = 12.5 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

El número de aves al comienzo del estudio ($t = 0$) es de 5000, luego decrece, por lo que no nos sirve este valor.

El número de aves al final del año 8 es de 5000 ($N(8) = 5000$). Después crece la población hasta que al final del año 12.5 el número de aves es de 7500 ($N(12.5) = 75$).. A partir de este año el número de aves sigue creciendo y superará las 7500 aves.

Entre los años 8 y 12.5 el número de aves se encuentra entre 5000 y 7500.

Con el paso del tiempo vemos que ocurre con el número de aves calculando el límite de la función $N(t)$ cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 95 - \frac{250}{t} = 95 - \frac{250}{+\infty} = 95$$

Con el paso del tiempo el número de aves tiende a estabilizarse en 9500.

EJERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- a) Calcule el valor del parámetro "a" teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.
 b) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

a) Si presenta un punto de inflexión debe anularse la derivada segunda.

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2a$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

b) Para $a = 6$ la función queda $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Determinamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{6+2}{2} = \boxed{4 = x} \\ \frac{6-2}{2} = \boxed{2 = x} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Corta el eje en tres puntos. El recinto está dividido en dos partes. Calculamos el área de cada una con la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right] = 4 - 16 + 16 = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \left| \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] \right| = |64 - 128 + 64 - 4 + 16 - 16| = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX es la suma de las dos áreas obtenidas: $4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70% de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30% de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

- a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?
 c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad? Justifique la respuesta.

Si 2 de cada 5 son menores de 30 años, eso representa ($2/5 = 40/100$) el 40 %.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Realizan ejercicio físico	No realizan ejercicio físico	
Menores de 30 años	30		40
No es menor de 30 años			
	70		100

Completamos la tabla

	Realizan ejercicio físico	No realizan ejercicio físico	
Menores de 30 años	30	10	40
No es menor de 30 años	40	20	60
	70	30	100

- a) El dato aparece en la tabla en la segunda fila y segunda columna: 20 %
 b) Observando los datos de la tabla hay 30 que no realizan ejercicio y de esos 30 hay 10 que además son menores de 30 años.

$$P(\text{Menor de 30 / No realiza ejercicio}) = \frac{10}{30} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

- c) Calculamos las probabilidades de cada suceso por separado y luego la probabilidad de la intersección.

Llamamos M = “Es menor de 30 años” y F = “Realiza ejercicio físico”.

$$\left. \begin{aligned} P(M) &= \frac{40}{100} = 0.4 \\ P(F) &= \frac{70}{100} = 0.7 \\ P(M \cap F) &= \frac{30}{100} = 0.3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M) \cdot P(F) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 \neq 0.3 = P(M \cap F)$$

Como $P(M) \cdot P(F) \neq P(M \cap F)$ los sucesos M = “Ser menor de 30 años” y F = “Realiza ejercicio físico” no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95% para el consumo mensual medio es [60.1, 69.9]. Según esta información:

- a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz? b) ¿Cuál es el error máximo cometido?
c) Determine un intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de luz

X = Factura de la luz (en euros). $X = N(\mu, \sigma)$

Tamaño de muestra = $n = 36$.

- a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza ya que el intervalo de confianza es $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$.

El intervalo de confianza es [60.1, 69.9] $\rightarrow \bar{x} = \frac{60.1 + 69.9}{2} = 65$

La media muestral es de 65 euros.

- b) El intervalo de confianza es $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$ y la media muestral es 65, por lo que:

$$65 - \text{Error} = 60.1 \rightarrow \text{Error} = 65 - 60.1 = 4.9$$

El error máximo cometido es de 4.9.

- c) Necesitamos el valor de la desviación típica.

Con un nivel de confianza del 95 % obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

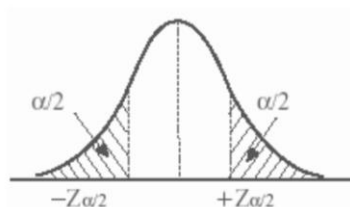
$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

Lo utilizamos para el error obtenido en el apartado b).

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.9 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \sigma = \frac{4.9 \cdot 6}{1.96} = 15$$

Con un nivel de confianza del 90 % obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,645}$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} = 4.1125$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (65 - 4.1125, 65 + 4.1125) = (60.8875, 69.1125)$$



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2021

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los TRES primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Determine los valores x , y , z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
- Calcule A^{-1} para $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$.
- Resuelva el sistema $BA = C$ para $a = 1$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

- Plantee el problema para maximizar los ingresos.
- Represente gráficamente el conjunto de soluciones.
- ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

EJERCICIO 3. Análisis. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2 + 4}$ con $t > 0$

- Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
- Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento.
- ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

EJERCICIO 4. Análisis. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

- Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?
- Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. El 40% de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10%.

- Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?

c) ¿Son independientes los sucesos “no ser español” y “estar satisfecho con la visita”? Razone la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ $B = (a \ 2 \ 3)$ y $C = (4 \ 0 \ 2)$

- a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
 b) Calcule A^{-1} para $x = 3, y = 1, z = 0$.
 c) Resuelva el sistema $B \cdot A = C$ para $a = 1$.

a) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 + \cancel{xyz} - y^2 z - \cancel{xyz} = y^2 - y^2 z = y^2 (1 - z)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow y^2 (1 - z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ o \\ z = 1 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa cuando $y = 0$ o bien $z = 1$.

b) Para $x = 3, y = 1, z = 0$ se cumplen las condiciones del apartado a) y existe la inversa de A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 1$ la matriz B queda $B = (1 \ 2 \ 3)$

$$B \cdot A = C \Rightarrow (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \ 0 \ 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2y+3 \quad y+3z \quad x+2y+3z) = (4 \quad 0 \quad 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y+3=4 \\ y+3z=0 \\ x+2y+3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=1 \\ y=-3z \\ x+2y+3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2(-3z)=1 \\ x+2(-3z)+3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-6z=1 \\ x-6z+3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+6z \\ x-3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+6z-3z=2 \Rightarrow 3z=1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=1+6\frac{1}{3}=3} \\ \boxed{y=-3\frac{1}{3}=-1} \end{array} \right.$$

La solución es $x=3, y=-1, z=\frac{1}{3}$

EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

- Plantee el problema para maximizar los ingresos.
- Represente gráficamente el conjunto de soluciones.
- ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

- a) Llamamos “x” al número de empresas como clientes e “y” al número de clientes particulares.

Planteamos las restricciones como inecuaciones.

“Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes” $\rightarrow x \geq 25$

“El número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas” $\rightarrow y \geq 2x$

“Tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales” $\rightarrow x + y \leq 120$

Juntamos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \end{array} \right\}$$

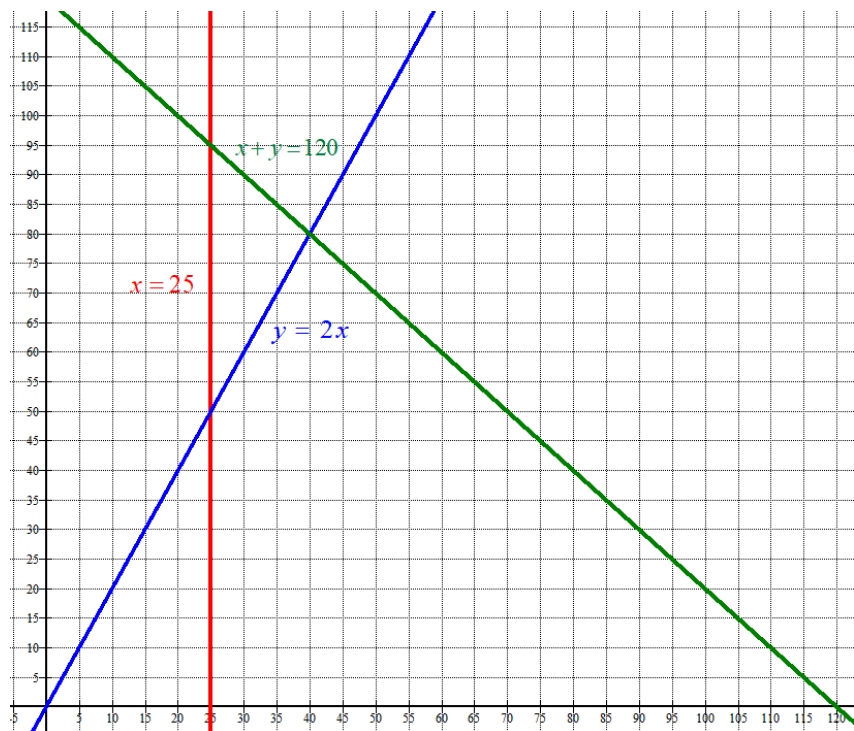
Deseamos maximizar los ingresos que vienen dados en función del número de clientes con la expresión $I(x, y) = 386x + 229y$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región del plano que contiene a los puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x = 25$	
$x = 25$	y
25	0
25	10

$y = 2x$	
x	$y = 2x$
25	50
40	80

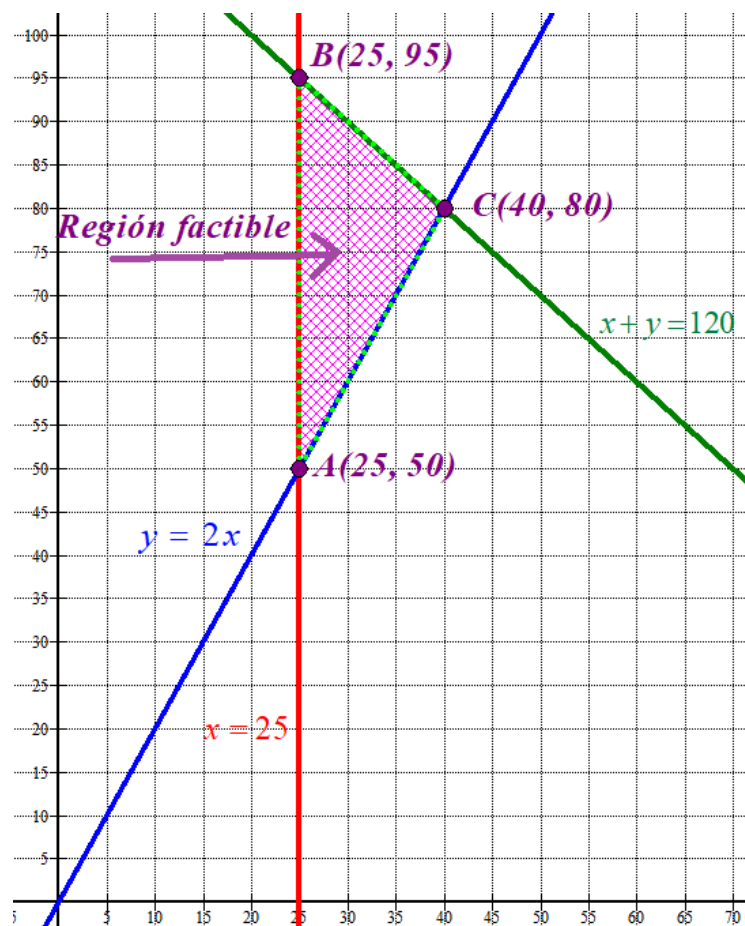
$x + y = 120$	
x	$y = 120 - x$
25	95
40	80



$x \geq 25 \rightarrow$ A la derecha
 Como las restricciones son $y \geq 2x \rightarrow$ Por encima
 $x + y \leq 120 \rightarrow$ Por debajo

la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical roja, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo:



c) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 386x + 229y$ en cada vértice.

$$A(25, 50) \rightarrow I(25, 50) = 21100$$

$$B(25, 95) \rightarrow I(25, 95) = 31405$$

$$C(40, 80) \rightarrow I(40, 80) = 33760$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 33760 € que se consiguen con 40 empresas y 80 clientes particulares.

EJERCICIO 3. Análisis. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2 + 4}$ con $t > 0$

- a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
 b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento.
 c) ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

a) Si el rendimiento a las 4 horas es de 76 se cumple que $r(4) = 76$.

$$\left. \begin{array}{l} r(4) = 76 \\ r(t) = \frac{kt}{t^2 + 4} \end{array} \right\} \Rightarrow 76 = \frac{k \cdot 4}{4^2 + 4} \Rightarrow 76 = \frac{4k}{20} \Rightarrow 76 = \frac{k}{5} \Rightarrow \boxed{k = 76 \cdot 5 = 380}$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero.

$$r(t) = \frac{380t}{t^2 + 4} \Rightarrow r'(t) = \frac{380(t^2 + 4) - 380t(2t)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{380t^2 + 1520 - 720t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$r'(t) = \frac{1520 - 380t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$r'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1520 - 380t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 1520 - 380t^2 = 0 \Rightarrow 4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

El valor crítico es $t = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $r'(1) = \frac{1520 - 380}{(1^2 + 4)^2} = \frac{1140}{25} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, 7]$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $r'(3) = -\frac{1900}{13^2} < 0$. La función decrece en $(2, 7]$.

La función crece en $(0, 2)$ y decrece en $(2, 7]$.

c) El rendimiento máximo se obtiene en $t = 2$, al cabo de 2 horas siendo el rendimiento de

$$r(2) = \frac{760}{2^2 + 4} = 95. \text{ Un rendimiento de 95 en una escala de 0 a 100.}$$

EJERCICIO 4. Análisis. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

- a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?
- b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

a) Los ingresos proceden de las x unidades vendidas a $518 - x^2$ euros por unidad:

$$I(x) = x(518 - x^2) = 518x - x^3$$

Los Beneficios son los ingresos menos los gastos $G(x) = 225 + 275x$:

$$B(x) = 518x - x^3 - (225 + 275x) = 518x - x^3 - 225 - 275x$$

$$B(x) = -x^3 + 243x - 225$$

Hallamos $B(10)$.

$$B(10) = -10^3 + 2430 - 225 = 1205 \text{ €}$$

Si se venden 10 unidades el beneficio es de 1205 €.

b) Derivamos la función e igualamos a cero la derivada del beneficio.

$$B(x) = -x^3 + 243x - 225 \Rightarrow B'(x) = -3x^2 + 243$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{81} = 9$$

Para $x = 9$ hay un punto crítico, vemos si es máximo o mínimo con el signo de la segunda derivada.

$$B'(x) = -3x^2 + 243 \Rightarrow B''(x) = -6x \Rightarrow B''(9) = -54 < 0$$

En $x = 9$ hay un máximo relativo del beneficio.

Hay que producir 9 unidades para obtener un beneficio máximo.

El beneficio asciende a $B(9) = -9^3 + 2187 - 225 = 1233 \text{ €}$.

El precio de venta es $518 - 9^2 = 437 \text{ €}$ por unidad.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. El 40% de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10%.

- a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?
 c) ¿Son independientes los sucesos “no ser español” y “estar satisfecho con la visita”? Razone la respuesta.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener todos los datos relativos a la situación planteada en el ejercicio. Suponemos 100 visitantes.

Si 4 de cada 5 españoles están satisfechos, en porcentaje sería $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$. El 80 % de 40 es

$0.8 \cdot 40 = 32$ españoles están satisfechos con la visita.

El 10 % de los no españoles no están satisfechos con la visita, como son el 60 % de las visitas, entonces $0.10 \cdot 60 = 6$ no españoles no están satisfechos con la visita

	Satisfechos con visita	No satisfechos con visita	
Espanoles	32		40
No espanoles		6	
			100

Completamos la tabla.

	Satisfechos con visita	No satisfechos con visita	
Espanoles	32	8	40
No espanoles	54	6	60
	86	14	100

Respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

- a) Mirando en la tabla tenemos que son 86 las personas no satisfechas con la visita.
 Son 86 de 100, es decir el 86 %.

- b) Miramos en la tabla.

$$P(\text{Satisfecha con visita y no sea española}) = \frac{54}{100} = 0.54$$

- c) Calculamos la probabilidad de cada suceso y la probabilidad de la intersección.

$$\left. \begin{aligned} P(\text{No ser español}) &= \frac{60}{100} = 0.6 \\ P(\text{Estar satisfecho con la visita}) &= \frac{86}{100} = 0.86 \\ P(\text{"No ser español"} \cap \text{"Estar satisfecho con la visita"}) &= \frac{54}{100} = 0.54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0.6 \cdot 0.86 = 0.54 \text{?}$$

No es cierta la igualdad y por tanto no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

- a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?
- b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72%?

- a) Si $X =$ Peso de una naranja para zumo en gramos. $X = N(200, 50)$.

La distribución del peso medio de 25 naranjas sigue una normal con la misma media pero con una desviación típica más pequeña $\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$.

$\bar{X} =$ Peso medio de una muestra de 25 naranjas. $\bar{X} = N(200, 10)$

$$P(175 \leq \bar{X} \leq 215) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{175-200}{10} \leq Z \leq \frac{215-200}{10}\right) =$$

$$= P(-2.5 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -2.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \geq 2.5) =$$

$$= P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 2.5)] = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.9332 - [1 - 0.9938] = \boxed{0.927}$$

- b) $\bar{X} =$ Peso medio de una muestra de n naranjas. $\bar{X} = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\bar{X} \leq 210) = 0.9772 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9772 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.9772 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} = 2 \Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow \boxed{n=100}$$

La muestra es de 100 naranjas.

ABAU Ordinaria 2021

 COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021	Código: 40
---	---	-------------------

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A .
- Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m=1$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2 \quad x + y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del}$$

año.

- Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.
- ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
- Represente la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10, \quad (t \text{ en años})$$

- ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
- Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
- ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
- Calcule $\int_1^2 B(t) dt$.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.
 b) Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para m=1.

- a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2m \quad |A| = 0 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Para que exista la inversa de A el valor de m debe ser distinto de 0.

- b) Para m = 1 existe la inversa de A y puedo despejar de la ecuación matricial la matriz X.

$$X \cdot A + B = C \Rightarrow X \cdot A = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y determinamos X.

$$X = (C - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2+1 & -4-4-1 \\ 0 & 1 & -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

La matriz solución de la ecuación matricial $X \cdot A + B = C$ es $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x+2 \quad x+y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

a) Representamos las rectas que delimitan la región.

$$y = x + 2$$

$$x + y = 6$$

$$x = 5$$

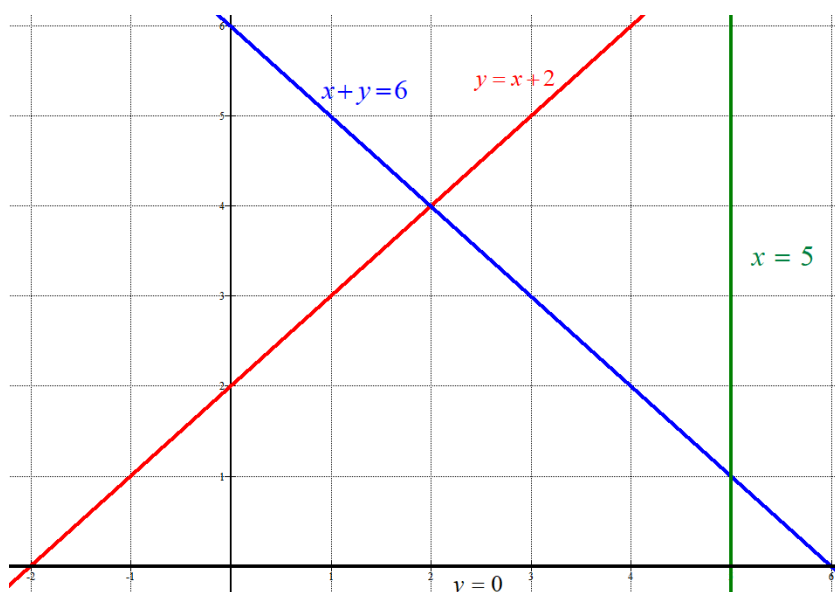
$$y = 0$$

x	y = x + 2
0	2
2	4
4	6

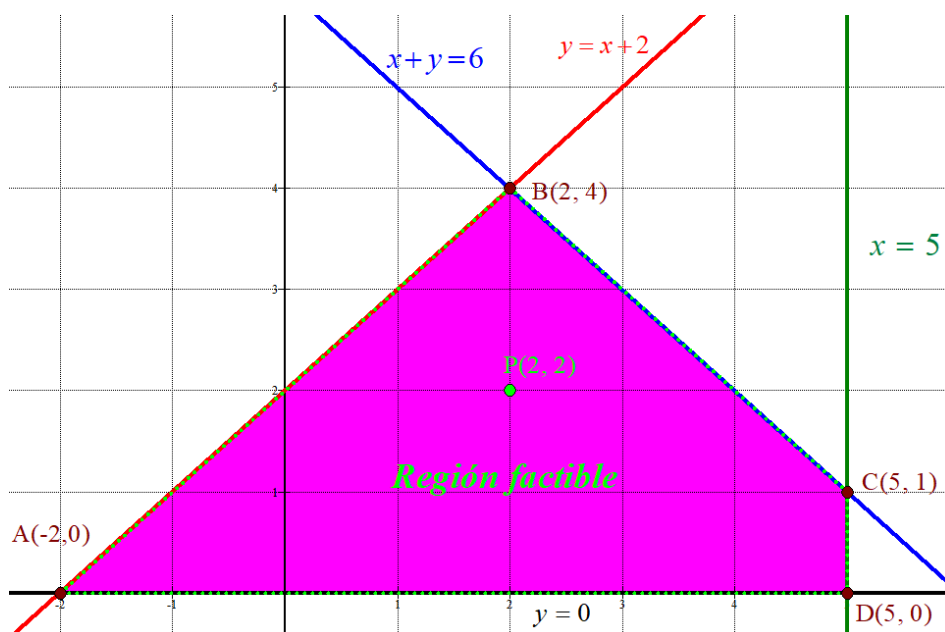
x	y = 6 - x
0	6
2	4
6	0

Recta
vertical

Eje OX



Como las restricciones son $y \leq x + 2$ $x + y \leq 6$ $x \leq 5$ $y \geq 0$ entonces la región está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta negra y a la izquierda de la recta verde. Coloreo de rosa la región factible y marco los vértices de dicha región.



Compruebo que el punto $P(2,2)$ cumple las restricciones.

$$2 \leq 2+2 \quad 2+2 \leq 6 \quad 2 \leq 5 \quad 2 \geq 0 \quad ; \text{Se cumplen todas! La región factible es correcta.}$$

Los vértices son $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$, $C(5, 1)$ y $D(5, 0)$.

- b) Valoramos la función $f(x, y) = x - y$ en cada uno de los vértices y averiguamos el valor mínimo y máximo de la función.

$$A(-2, 0) \rightarrow f(-2, 0) = -2 - 0 = -2$$

$$B(2, 4) \rightarrow f(2, 4) = 2 - 4 = -2$$

$$C(5, 1) \rightarrow f(5, 1) = 5 - 1 = 4$$

$$D(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto $D(5, 0)$ y el mínimo es -2 y se alcanza en toda el segmento AB , en los puntos $A(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, ..., $B(2, 4)$.

- c) El valor máximo es 5 y el mínimo es -2 .

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO₂ (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del}$$

año.

- Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera.
- ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
- Represente la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

a) Estudiamos la continuidad de la función en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} C(6) &= \frac{1}{4}6^2 - 24 + 18 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} 5 - \frac{t}{3} = 5 - 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) = 3.$$

La función es continua en $t = 6$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \Rightarrow C'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & , \quad 0 < t < 6 \\ \frac{2}{4}t - 4 & , \quad 6 < t < 12 \end{cases}$$

En el tramo de 0 a 6 meses la derivada es negativa y la función decrece.

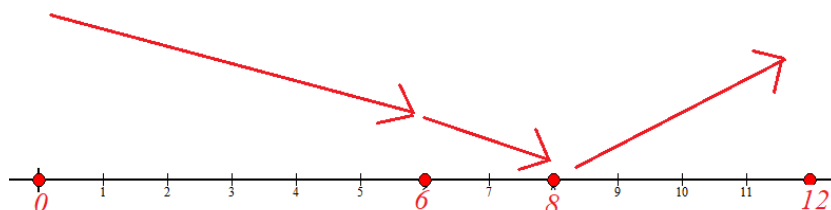
En el tramo de 6 a 12 igualamos a cero la derivada y vemos cuando cambia la función.

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2}{4}t - 4 = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = 4 \Rightarrow t = 8$$

En el mes 8 se produce un cambio de signo.

Del 6 al 8 tomamos $t = 7$ y la derivada es $C'(7) = \frac{2}{4}7 - 4 = -0.5 < 0$. La función decrece del mes 6 al 8.

Del 8 al 12 tomamos $t = 10$ y la derivada es $C'(10) = \frac{2}{4}10 - 4 = 1 > 0$. La función crece del mes 8 al 12.



Como la función es continua el cambio de definición no afecta al decrecimiento en $t = 6$.

Resumiendo: La cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera decrece durante los 8 primeros meses y crece del mes 8 al 12.

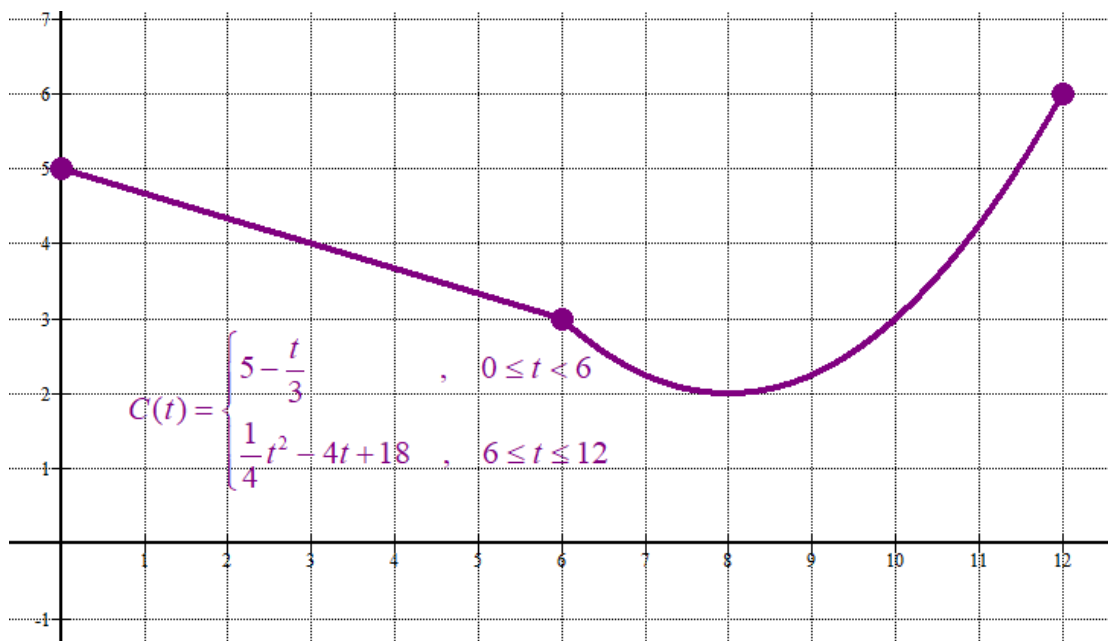
- b) La cantidad mínima se produce en el mes 8 y es de $C(8) = \frac{1}{4}8^2 - 32 + 18 = 2$.

La cantidad máxima se produce en el mes 0 o en el mes 12. Calculamos ambos valores y decidimos.

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 5 - \frac{0}{3} = 5 \\ C(12) = \frac{1}{4}12^2 - 48 + 18 = 6 \end{array} \right\} \text{La cantidad máxima se produce en el mes 12 y su valor es de 6.}$$

- c) Para representar la gráfica hacemos una tabla de valores.

t	$C(t) = 5 - \frac{t}{3}$	t	$C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18$
0	5	6	3
3	4	8	2
6	2 No se incluye	10	$25 - 40 + 18 = 3$
		12	6



EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \leq t \leq 10$, (t en años)

- a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
 b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
 c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
 d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$.

a) $B(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 810 - 3 = 1000 - 1800 + 810 - 3 = 7$

Los beneficios en el año 10 son de 7000 €.

b) Igualamos la derivada a cero.

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \Rightarrow B'(t) = 3t^2 - 36t + 81$$

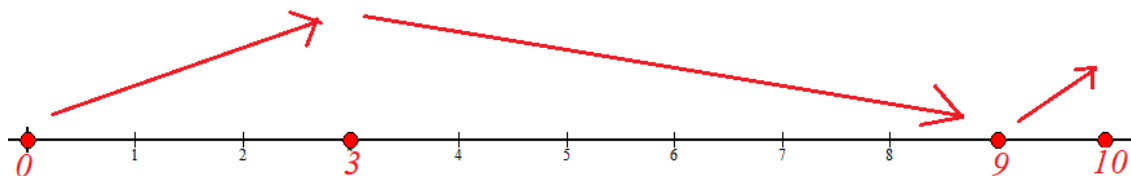
$$B'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = 9 \\ \frac{12-6}{2} = 3 \end{cases}$$

Estudiamos cómo evoluciona la función antes, entre y después de $t = 3$ y $t = 9$

- En $(0, 3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada es $B'(2) = 12 - 72 + 81 = 21 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En $(3, 9)$ tomamos $t = 5$ y la derivada es $B'(5) = 75 - 180 + 81 = -24 < 0$. La función decrece en $(3, 9)$.
- En $(9, 10)$ tomamos $t = 10$ y la derivada es $B'(10) = 300 - 360 + 81 = 21 > 0$. La función crece en $(9, 10)$.

Los beneficios crecen durante los tres primeros años y del año 9 al 10. Decrecen del año 3 al 9.



c) Valoramos los beneficios en $t = 0$, $t = 3$, $t = 9$ y $t = 10$.

$$B(0) = -3$$

$$B(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 3 = 105$$

$$B(9) = 9^3 - 18 \cdot 9^2 + 81 \cdot 9 - 3 = -3$$

$$B(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 7$$

El beneficio máximo se alcanza en el año 3 y es de 105000 €.

El beneficio mínimo se alcanza en el año 0 y 9 y es de -3000 €.

d) Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_1^2 B(t) dt &= \int_1^2 t^3 - 18t^2 + 81t - 3 dt = \left[\frac{t^4}{4} - 18 \frac{t^3}{3} + 81 \frac{t^2}{2} - 3t \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 18 \frac{2^3}{3} + 81 \frac{2^2}{2} - 6 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 18 \frac{1^3}{3} + 81 \frac{1^2}{2} - 3 \right] = 4 - 48 + 162 - 6 - \frac{1}{4} + 6 - \frac{81}{2} + 3 = \frac{321}{4}\end{aligned}$$

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Llamemos H = “Ser hombre”, así $\bar{H}$ = “Ser mujer”

D = “Ser lector/a de prensa deportiva” y $\bar{D}$ = “No ser lector de prensa deportiva”

Los datos del ejercicio son $P(H) = 0.45$; $P(H \cap D) = 0.27$; $P(\bar{H} \cap \bar{D}) = 0.385$.

Construimos una tabla de contingencia para obtener fácilmente el resto de probabilidades.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\bar{D}$)	
Ser hombre (H)	27		45
Ser mujer ($\bar{H}$)		38.5	
			100

Completamos los datos que nos faltan de la tabla.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\bar{D}$)	
Ser hombre (H)	27	18	45
Ser mujer ($\bar{H}$)	16.5	38.5	55
	43.5	56.5	100

a) De 55 mujeres 16.5 leen la prensa. El porcentaje es $\frac{16.5}{55} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$

b) Mujeres son 55 % y hombres que leen la prensa deportiva son 27 %. Los sumamos y hacen un 82%.

c) De 43,5 personas que leen la prensa deportiva son hombres 27. El porcentaje es $\frac{27}{43.5} = \frac{18}{29} \approx 0.62 = 62\%$

d) Comprobamos si H y $\bar{D}$ son incompatibles. Para ello debe ser su intersección vacía.

Los hombres que no leen prensa deportiva son el 18% de la población, luego no es vacío y los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

a) La proporción de personas que están dispuestos a aceptar la subida es $pr = 0.15$

Con un nivel de confianza del 95% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = \frac{0.08}{1.96} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0.15 \cdot 0.85}{n} = \left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.15 \cdot 0.85}{\left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2} \approx 76.53 \end{aligned}$$

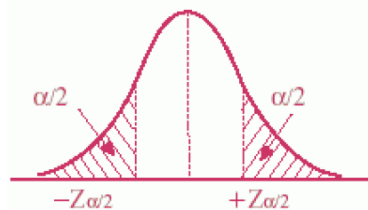
El tamaño mínimo de la muestra es de 77 clientes para que el error sea inferior a 0.08 con un nivel de confianza del 95%.

b) El tamaño de la muestra es $n = 196$.

La proporción de clientes que aceptan la subida es $pr = \frac{37}{196} = 0.19$ y $qr = \frac{196-37}{196} = \frac{159}{196}$.

Con un nivel de confianza del 92% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$



Utilizamos la fórmula del error

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{\frac{37}{196} \cdot \frac{159}{196}}{196}} \approx 0.049$$

El error máximo cometido es 0.049

El intervalo de confianza es $(0.19 - 0.049, 0.19 + 0.049) = (0.141, 0.239)$



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade**

Código: 40

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 preguntas, **todas con la misma puntuación (3,33)**, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 3**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 3 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

- Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.
- Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

PREGUNTA 2. Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

- Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

PREGUNTA 3. Análisis. Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros,

siguen la función:
$$G(t) = \begin{cases} 4 - \left(\frac{t}{3}\right), & 0 \leq t \leq 3 \\ (5t - 3)/(t + 1), & t > 3 \end{cases}$$
 siendo t el tiempo en años transcurridos.

- ¿En qué momento los gastos son iguales a 400.000 euros? Razona la respuesta.
- ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?
- ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

PREGUNTA 4. Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$)

- Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".
- Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.

Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

- a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
- b) Si el vehículo revisado resulta ser **NO** defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

- a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7% y el 90,3%?
- b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n=144$ de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

a) Llamamos “x” al número de pollos de la granja A, “y” al de la granja B y “z” al de la granja C. Expresamos en ecuaciones los datos del problema.

“La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B” $\rightarrow x = 1,2y$

“La granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C” $\rightarrow y = 2z$

“Entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos” $\rightarrow x + y + z = 405$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,2y \\ y = 2z \\ x + y + z = 405 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,2y \\ y = 2z \\ x + y + z = 405 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2z \\ 1,2y + y + z = 405 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2z \\ 2,2y + z = 405 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,4z + z = 405 \Rightarrow 5,4z = 405 \Rightarrow \boxed{z = \frac{405}{5,4} = 75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 75 = 150} \Rightarrow \boxed{x = 1,2 \cdot 150 = 180}$$

La granja A tiene 180 pollos, la B 150 y la C 75 pollos.

PREGUNTA 2. Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

- a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
 b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
 c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

- a) Llamamos “x” al número de habitaciones de tipo A e “y” al número de habitaciones tipo B. Las restricciones del problema las expresamos como inecuaciones.

“El número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A” $\rightarrow y \leq x$

“El número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160” $\rightarrow x \leq 160$

“En total serán necesarias como máximo 200 habitaciones” $\rightarrow x + y \leq 200$

Todos los valores son positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

El conjunto de restricciones forman un sistema de inecuaciones que representaremos como una región del plano, región factible (donde se encuentra la solución del problema).

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$y = x$$

x	y = x
0	0
100	100

$$x = 160$$

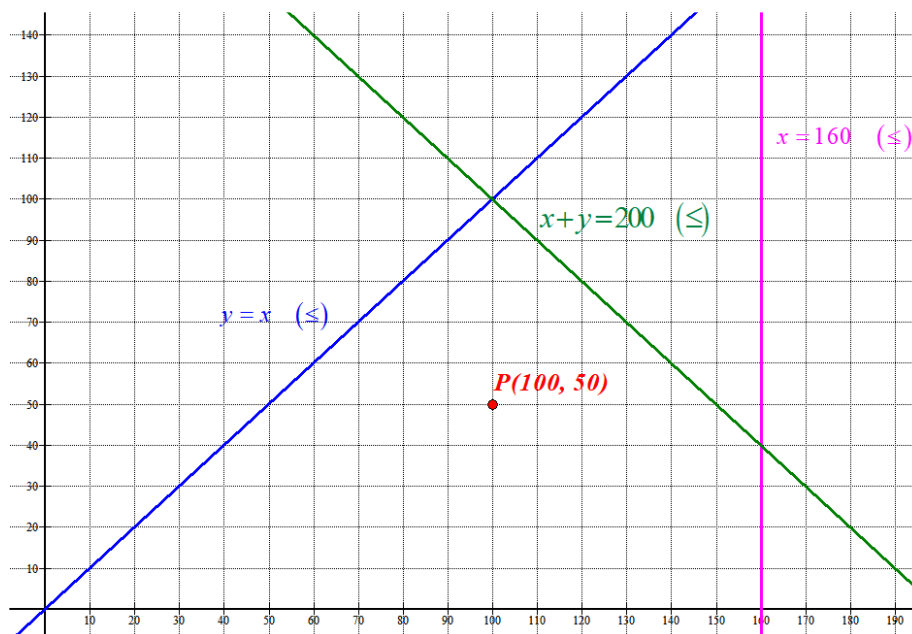
Recta vertical

$$x + y = 200$$

x	y = 200 - x
0	200
200	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

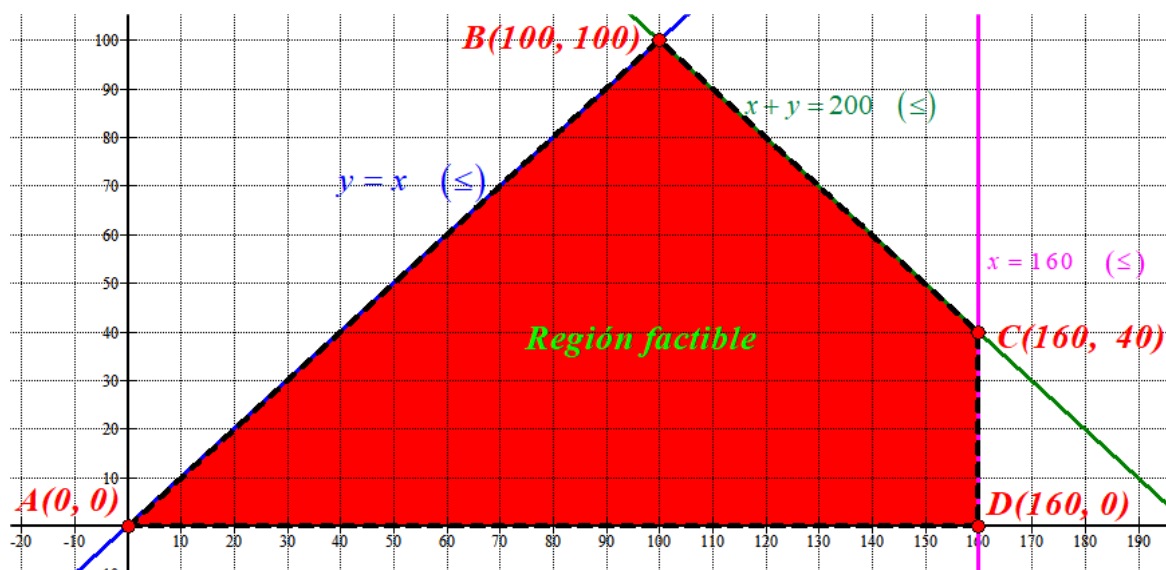
Primer cuadrante



Comprobamos que el punto P(100, 50) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 \leq 100 \\ 100 \leq 160 \\ 100 + 50 \leq 200 \\ 100 \geq 0; 50 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas las restricciones}$$

La región factible es la región que contiene al punto P y delimitada por los ejes y las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo en la figura. Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones para determinar dichas coordenadas.



c) El coste del alojamiento es la función $C(x, y) = 80x + 50y$.

Buscamos en qué situación se da un coste máximo y el valor del mismo.

Valoramos el coste en cada vértice y localizamos dicha situación de coste máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow C(0, 0) = 0$$

$$B(100, 100) \rightarrow C(100, 100) = 8000 + 5000 = 13000$$

$$C(160, 40) \rightarrow C(160, 40) = 14800$$

$$D(160, 0) \rightarrow C(160, 0) = 12800$$

El coste máximo es de 14800 € contratando 160 habitaciones de tipo A y 40 de tipo B.

PREGUNTA 3. Análisis. Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros,

siguen la función: $G(t) = \begin{cases} 4 - \left(\frac{t}{3}\right), & 0 \leq t \leq 3 \\ (5t-3)/(t+1), & t > 3 \end{cases}$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400.000 euros? Razona la respuesta.

b) ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

a) Planteamos la igualdad $G(t) = 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 - \left(\frac{t}{3}\right) = 4 \Rightarrow 12 - t = 12 \Rightarrow t = 12 - 12 = 0, & 0 \leq t \leq 3 \\ (5t-3)/(t+1) = 4 \Rightarrow 5t-3 = 4t+4 \Rightarrow t = 7, & t > 3 \end{cases}$

Ocurre en dos momentos. En $t = 0$, al comienzo y en $t = 7$, pasados 7 años.

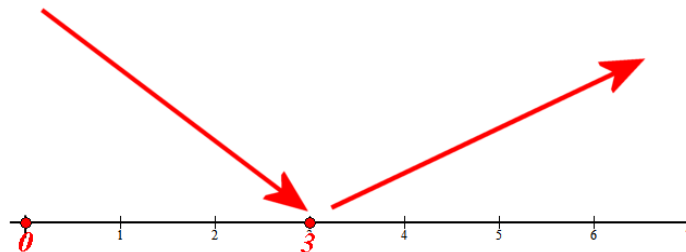
b) Entre el comienzo ($t = 0$) y los 3 años ($t = 3$) la función es una recta $\left(4 - \left(\frac{t}{3}\right)\right)$ que es decreciente

($G'(t) = -1/3 < 0$). Los gastos financieros decrecen en $[0, 3]$.

A partir de $t = 3$ la función es $G(t) = \frac{5t-3}{t+1}$. Estudiamos cómo evoluciona utilizando la derivada.

$$G'(t) = \frac{5(t+1) - (5t-3)}{(t+1)^2} = \frac{5t+5-5t+3}{(t+1)^2} = \frac{8}{(t+1)^2}$$

Esta derivada siempre es positiva, pues numerador y denominador siempre son positivos. Los gastos financieros del año tercero en adelante crecen.



El valor más bajo en este periodo será el límite de $G(t)$ cuando se acerca a $t = 3 \rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow 3^+} G(t) = (15-3)/(3+1) = 3 \text{ que coincide con el valor de } G(3) = 4 - 3/3 = 3.$$

Por lo tanto la función alcanza un gasto mínimo en $t = 3$ y es de 300.000 €

La función decrece en $[0, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$

c) Calculamos el límite de $G(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5t-3}{t+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5t}{t} = 5$$

Los gastos tienden a estabilizarse en 500.000 €.

PREGUNTA 4. Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$)

- a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".
- b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

- a) Los ingresos que se obtienen por la venta de "x" paraguas es $I(x) = 60x$.

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos (costes de producción).

$$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - (x^2 - 10x) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70$$

- b) Utilizamos la derivada de la función Beneficio.

$$B(x) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70 \Rightarrow B'(x) = -2x + 70$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 70 = 0 \Rightarrow x = 35$$

$$B''(x) = -2 < 0$$

En $x = 35$ se produce un máximo relativo de la función beneficio.

El máximo beneficio se obtiene con una producción de 35 paraguas diarios.

Dicho beneficio máximo es de $B(35) = -35^2 + 70 \cdot 35 = 1225$ €

El coste es de $C(35) = 35^2 - 350 = 875$ € y los ingresos son de $60 \cdot 35 = 2100$ €.

Con la producción de 35 paraguas diarios se consigue unos ingresos de 2100 €, con unos costes de 875 € dejando unos beneficios de 1225 €.

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente. Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

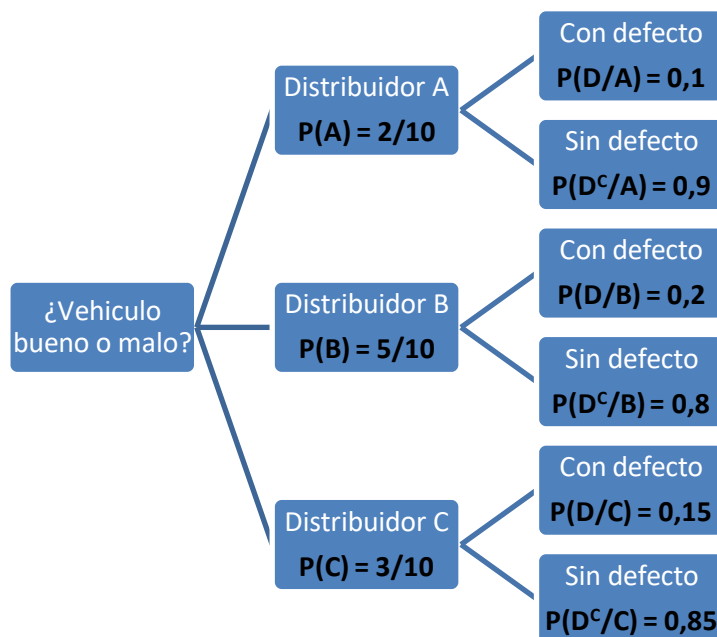
a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.

b) Si el vehículo revisado resulta ser **NO** defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer la probabilidad de todos los sucesos implicados en el problema.

Se encargan $240 + 600 + 360 = 1200$ vehículos. El porcentaje de vehículos del distribuidor A es $240/1200 = 2/10$, del B es de $600/1200 = 5/10$ y del C es de $360/1200 = 3/10$.

Llamamos A, B y C a los sucesos “vehículo del distribuidor A, B o C, respectivamente” y D el vehículo es defectuoso.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Rechazar pedido}) = P(\text{Vehículo con defecto}) = P(D) =$$

$$= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{2}{10} \cdot 0,1 + \frac{5}{10} \cdot 0,2 + \frac{3}{10} \cdot 0,15 = \frac{0,2 + 1 + 0,45}{10} = \frac{1,65}{10} = \boxed{0,165}$$

Se rechazan el 16,5 % de los pedidos

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{P(D^c)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot 0,9}{1 - 0,165} = \frac{0,18}{0,835} = \frac{36}{167} = 0,216$$

PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

- a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7% y el 90,3%?
- b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n = 144$ de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

a) La proporción de personas que comprarían la nueva obra es $pr = \frac{80}{100} = 0,8$

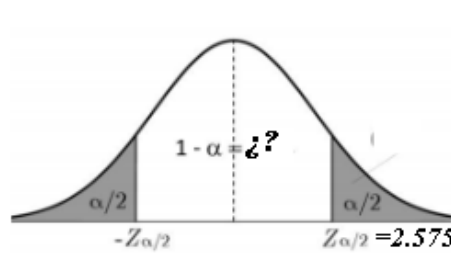
El intervalo de confianza es $(0,697, 0,903)$ por lo que su amplitud es $0,903 - 0,697 = 0,206$. El error es la mitad de la amplitud $\rightarrow \text{Error} = 0,103$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot 0.04 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.103}{0.04} = 2.575$$

Obtengamos el nivel de confianza a partir del valor crítico $z_{\alpha/2} = 2.575$.

$$z_{\alpha/2} = 2.575 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha = 0,99$$



El nivel de confianza es del 99%.

b) Tenemos que $n = 144$ y la proporción es $p = \frac{8}{10} = 0,8 \rightarrow q = 1 - 0,8 = 0,2$

La distribución de la proporción de las muestras de tamaño 144 sigue una normal de parámetros

$$X = N\left(0,8, \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{144}}\right) = N\left(0,8, \frac{1}{30}\right)$$

$$P(X \geq 0.75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{0.75 - 0.8}{1/30}\right) = P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) = \boxed{0.9332}$$



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade**

Código: 40

CONVOCATORIA ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 preguntas, **todas con la misma puntuación (3,33)**, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 3**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 3 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$.
- Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A + B = 3C - B$ y resuélvalo.

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

- Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.
- Represente la región factible y calcule sus vértices.
- Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

PREGUNTA 3. Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función

$$P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9}, \quad t \geq 0 \text{ en donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (} t = 0 \text{)}$$

- Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
- ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
- ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

PREGUNTA 4. Análisis. Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

- Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
- Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$ y $P(\bar{B}) = 0,7$ y $P(\bar{B}/A) = 0,75$. Calcule las siguientes probabilidades:

- $P(A \cap \bar{B})$; b) $P(A \cup B)$; c) $P(A \cap B)$; d) ¿son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta

PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

- a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.
- b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

SOLUCIONES**PREGUNTA 1. Álgebra.** Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ y $3C-B$.b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

a)

$$A+B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C-B = 3 \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A+B = 3C-B$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b=3c-b \\ a-b=-9+b \\ a+3=3c-3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a-2b=-9 \\ a-3c=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a=2b-9 \\ a-3c=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2b-9+2b-3c=0 \\ 2b-9-3c=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4b-3c=9 \\ 2b-3c=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3c=4b-9 \\ 2b-3c=3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2b-4b+9=3 \Rightarrow -2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3c=12-9 \\ a=6-9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3c=3 \\ a=-3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

La solución es $\boxed{a=-3; \quad b=3; \quad c=1}$

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

- Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.
- Represente la región factible y calcule sus vértices.
- Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

- a) Llamamos “x” al número de focos del tipo A e “y” al número de focos del tipo B.

“Se producirán al menos 50 focos del modelo A” $\rightarrow x \geq 50$

“El número de focos del modelo B no superará las 300 unidades” $\rightarrow y \leq 300$

“Se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A” $\rightarrow y \geq x$

“La producción total no superará las 500 unidades diarias” $\rightarrow x + y \leq 500$

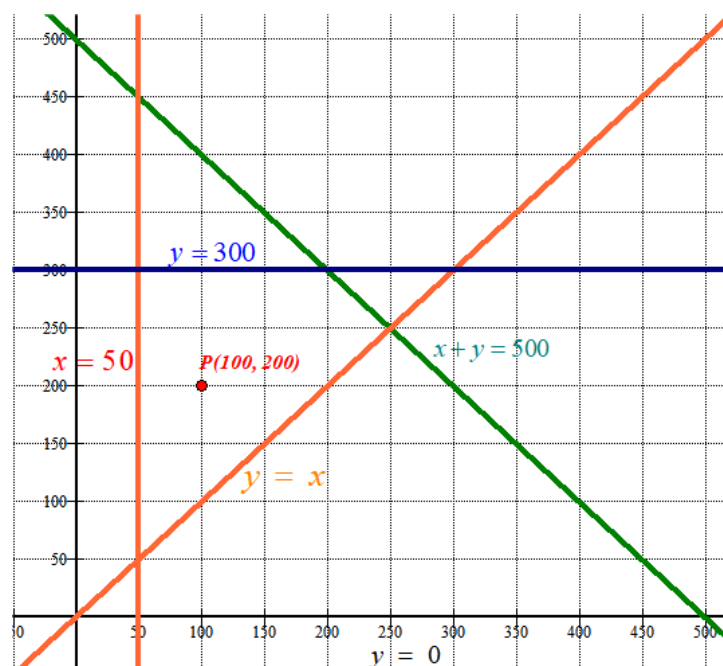
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow y \geq 0$

Reunimos las restricciones planteadas en el problema en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitarán la región factible.

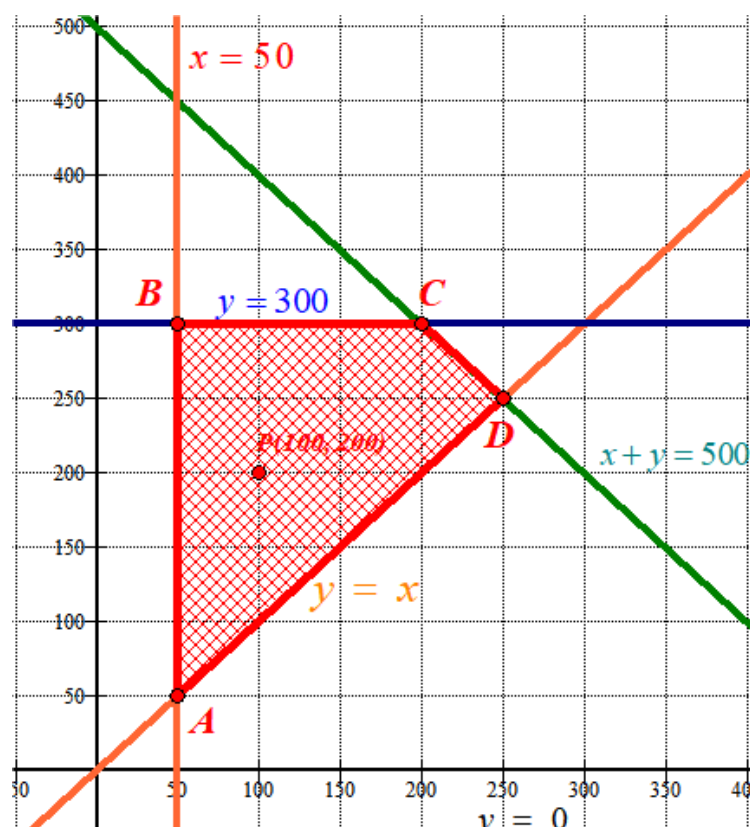
$x = 50$	$y = 300$	$x + y = 500$	$y = x$	$y = 0$
$x = 50 \mid y$	$x \mid y = 300$	$x \mid y = 500 - x$	$x \mid y = x$	$x \mid y = 0$
50 $\mid$ 0	0 $\mid$ 300	0 $\mid$ 500	0 $\mid$ 0	0 $\mid$ 0
50 $\mid$ 100	100 $\mid$ 300	500 $\mid$ 0	100 $\mid$ 100	100 $\mid$ 0



Probamos si el punto $P(100, 200)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 \geq 50 \\ 200 \leq 300 \\ 200 \geq 100 \\ 100 + 200 \leq 500 \\ 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas las restricciones}$$

La región factible es la zona rayada.



Sus vértices tienen coordenadas: $A(50,50)$, $B(50, 300)$, $C(200, 300)$ y $D(250, 250)$.

- c) La función beneficio es $B(x, y) = 60x + 40y$. La valoramos en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(50,50) \rightarrow B(50,50) = 3000 + 2000 = 5000$$

$$B(50, 300) \rightarrow B(50,300) = 3000 + 12000 = 15000$$

$$C(200, 300) \rightarrow B(200,300) = 12000 + 12000 = 24000$$

$$D(250, 250) \rightarrow B(250,250) = 15000 + 10000 = \mathbf{25000}$$

El máximo beneficio es de 25000 € y se obtiene produciendo 250 focos tipo A y otros 250 del tipo B.

PREGUNTA 3. Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función $P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9}$, $t \geq 0$ en donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 ($t = 0$)

- a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
 b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
 c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

a) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9} \Rightarrow P'(t) = \frac{180(t^2 + 9) - 180t \cdot 2t}{(t^2 + 9)^2} = \frac{180t^2 + 1620 - 360t^2}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{1620 - 180t^2}{(t^2 + 9)^2}$$

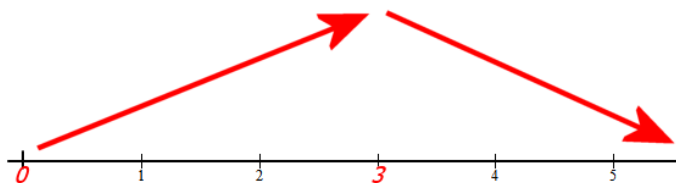
$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1620 - 180t^2}{(t^2 + 9)^2} = 0 \Rightarrow 1620 - 180t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1620}{180} = 9 \Rightarrow t = \sqrt{9} = \pm 3$$

Nos quedamos solo con el valor $t = 3$, pues el dominio de la función solo es $t \geq 0$.
 Veamos cómo evoluciona la función antes y después de 3.

- En $(0, 3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{1620 - 180}{(1 + 9)^2} = 1440 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $P'(4) = \frac{1620 - 180 \cdot 16}{(4^2 + 9)^2} = \frac{-1260}{25^2} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

El número de visitantes crece de 2010 a 2013 y disminuye del 2013 en adelante.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función evoluciona como indica el esquema.



La función presenta un máximo relativo y absoluto en $t = 3$. Para este valor tenemos $P(3) = \frac{540}{3^2 + 9} = 30$

En el año 2013 recibió el máximo número de visitantes siendo esta cifra de 30000.

- c) Como la función está expresada en miles nos piden averiguar cuando el valor de la función está por debajo de 18.

$$P(t) \leq 18 \Rightarrow \frac{180t}{t^2 + 9} \leq 18 \Rightarrow \frac{10t}{t^2 + 9} \leq 1 \Rightarrow 10t \leq t^2 + 9 \Rightarrow t^2 - 10t + 9 \geq 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 \\ \frac{10-8}{2} = 1 \end{cases}$$

En los años 2011 ($t=1$) y 2019 ($t=9$) se tienen 18000 visitantes

Teniendo en cuenta como crece y decrece la función podemos decir que en 2010 el número de visitantes está por debajo de 18000 y del año 10 (2020) en adelante también.

Lo que ocurre a lo largo del tiempo es averiguar el valor del límite de la función cuando t se hace infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{180t}{t^2 + 9} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{180t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{180}{t} = \frac{180}{\infty} = 0$$

Los visitantes dejan de ir al parque temático.

PREGUNTA 4. Análisis. Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

- a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
 b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$, $x=2$.

a) **Puntos de corte.**

$$x=0 \Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow P(0, -5)$$

$$y=0 \Rightarrow 0 = -4x^2 + 12x - 5 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 80}}{-8} = \frac{-12 \pm 8}{-8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{-8} = 0.5 = x \\ \frac{-12-8}{-8} = 2.5 = x \end{cases}$$

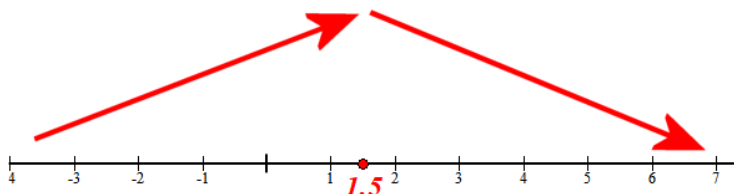
$$Q(0.5, 0) \text{ y } R(2.5, 0)$$

Monotonía.

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = -8x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = 1.5$$

- En $(-\infty, 1.5)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = 12 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1.5)$.
- En $(1.5, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = -16 + 12 = -4 < 0$. La función decrece en $(1.5, +\infty)$.

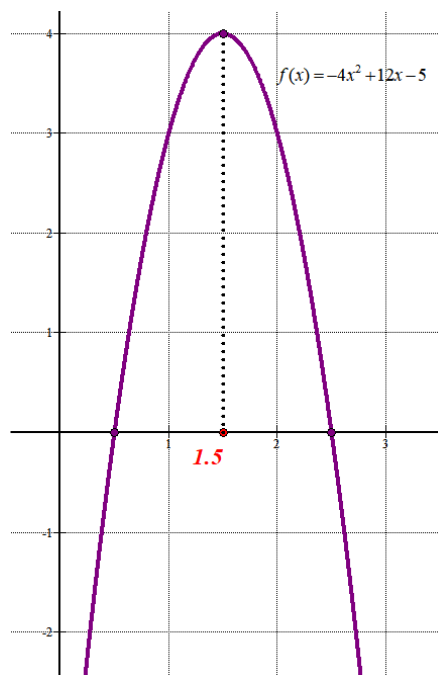


La función presenta un máximo relativo en $x=1.5$. Como $f(1.5) = 4$ el máximo está en el punto $M(1.5, 4)$.

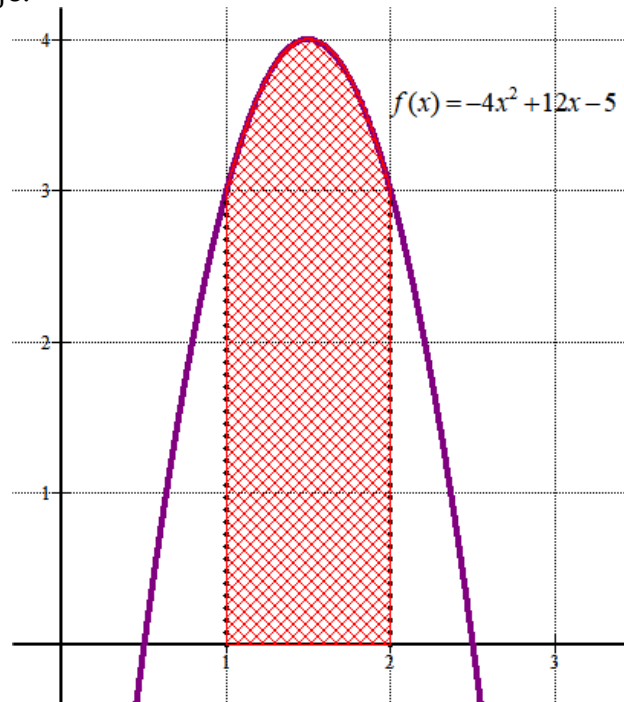
Crece en $(-\infty, 1.5)$ y decrece en $(1.5, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = -4x^2 + 12x - 5$
-1	-21
0	-5
0.5	0
1.5	4
2.5	0
3	-5
4	-21



b) El recinto es el del dibujo.



Contando cuadraditos el área tiene un valor entre 3 y 4 unidades cuadradas.
Determinamos el valor exacto del área del recinto usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_1^2 -4x^2 + 12x - 5 dx = \left[-4 \frac{x^3}{3} + 6x^2 - 5x \right]_1^2 = \\
 &= \left[-4 \frac{2^3}{3} + 6 \cdot 2^2 - 10 \right] - \left[-4 \frac{1^3}{3} + 6 \cdot 1^2 - 5 \right] = -\frac{32}{3} + 24 - 10 + \frac{4}{3} - 6 + 5 = \boxed{\frac{11}{3} = 3,66 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

PREGUNTA 5. Estadística y probabilidad. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$ y $P(\bar{B}) = 0,7$ y $P(\bar{B} / A) = 0,75$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap \bar{B})$; b) $P(A \cup B)$; c) $P(A \cap B)$; d) ¿son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta

Tenemos que $P(\bar{B}) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(B) = 0,7 \Rightarrow P(B) = 0,3$

$$\text{a) } P(\bar{B} / A) = 0,75 \Rightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 0,75 \Rightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{0,4} = 0,75 \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3}$$

b)

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,3 \Rightarrow 0,4 - P(A \cap B) = 0,3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,4 - 0,3 = 0,1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = \boxed{0,6}$$

$$\text{c) Calculado en el apartado anterior} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0,1}$$

d) Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12 \end{array} \right\} \text{No son iguales y por tanto son dependientes.}$$

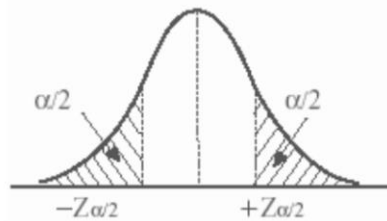
PREGUNTA 6. Estadística y probabilidad. La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

- a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.
- b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

a) Sea $X =$ “producción diaria de leche, medida en litros”. $X = N(\mu, 50)$.

Con un nivel de confianza del 95% tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



Si la amplitud debe ser menor de 8 litros el error debe ser menor de 4 litros.

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 4.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} = 4 \Rightarrow 1,96 \cdot 50 = 4\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 50}{4} \right)^2 = 600,25$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 601 días.

- b) Se toma una muestra de 25 días, y la distribución de la media muestral de tamaño 25 seguirá una normal con la misma media y con una desviación típica $\frac{50}{\sqrt{25}}$.

$$\overline{X}_{25} = N\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{25} = N(950, 10)$$

Con esta distribución normal calculamos la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_{25} \leq 930) &= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{25} - 950}{10} \leq \frac{930 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -2) = \\ &= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228} \end{aligned}$$



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XULLO 2019**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto.
 - a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema.
 - b) Escríbelo en forma matricial.
 - c) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

2. El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

- a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio del lanzamiento?
 - b) Determina los periodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido?
 - c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.
3. En una ciudad, el 20% de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Efectúan alguna compra el 60%, el 75% y el 50% de cada procedencia respectivamente.
 - a) Si en un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que no realizan compras?
 - b) Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en ese centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?
4. Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm³. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm³.
 - a) Obtén un intervalo de confianza, al 95%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.
 - b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?
 - c) ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99%?

OPCIÓN B

1. Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.
 - a) Plantea y representa gráficamente el problema.
 - b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?
2. Considera la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{si } 4 < x \leq 7 \end{cases}.$$
 - a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x es $f(x) \geq 0$?
 - b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \geq 0$.
3. Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0,01 si es blanca, 0,02 si es azul y 0,03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor;
 - a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.
 - b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja.
4. En una muestra aleatoria de $n = 25$ estudiantes de bachillerato, el 75% afirman querer realizar estudios universitarios.
 - a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90%.
 - b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria de $n = 100$ estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar estudios universitarios sea superior al 65%?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto.

- a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema.
 b) Escríbelo en forma matricial.
 c) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

a) Llamemos x = número de billetes de 5€. y = número de billetes de 10€. z = nº de billetes de 20€.

- En total ($x + y + z$) son 400 € $\rightarrow 5x + 10y + 20z = 400$.
- El número de billetes de 20 € (z) es la tercera parte del total ($x + y + z$) $\rightarrow z = \frac{x + y + z}{3}$
- El número de billetes de 5 € (x) es inferior en 4 unidades al del resto ($y + z$) $\rightarrow x = (y + z) - 4$

El sistema de ecuaciones sería:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 10y + 20z = 400 \\ z = \frac{x + y + z}{3} \\ x = y + z - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 80 \\ 3z = x + y + z \\ x - y - z = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 80 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{array} \right\}$$

b) Expresamos el sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B$$

c) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 4 - (-4 + 2 - 2) = 9 + 4 = 13 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{13} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 240 - 32 \\ 80 + 24 \\ 160 - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 208 \\ 104 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 16$; $y = 8$; $z = 12$. En la caja hay 16 billetes de 5 €, 8 de 10 € y 12 de 20 €.

2. El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

- Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio del lanzamiento?
- Determina los periodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido?
- Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

a) Nos piden $P(0)$. $P(0) = \frac{44}{0^2 - 0 + 16} + 2 = 2,75 + 2 = 4,75$. El precio de lanzamiento es 475 €.

Buscamos cuando se repite el precio de promoción. ¿Cuándo $P(t) = 4,75$?

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 4,75 \Rightarrow \frac{44}{t^2 - 4t + 16} = 2,75 \Rightarrow 44 = 2,75t^2 - 11t + 44 \Rightarrow 2,75t^2 - 11t = 0$$

$$\Rightarrow t(2,75t - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ o \\ 2,75t - 11 = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{2,75} = 4 \end{cases}$$

Al cabo de los 4 años vuelve a tener el precio de la promoción (475 €).

b) Calculamos la derivada.

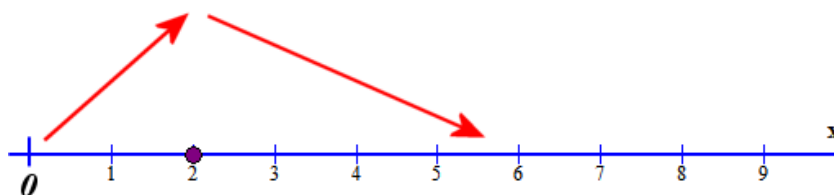
$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 \Rightarrow P'(t) = \frac{-44 \cdot (2t - 4)}{t^2 - 4t + 16}$$

La igualamos a cero.

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-44 \cdot (2t - 4)}{t^2 - 4t + 16} = 0 \Rightarrow -44 \cdot (2t - 4) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada (crece o decrece).

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{-44 \cdot (1 - 4)}{1^2 - 4 + 16} = \frac{132}{13} > 0$. La función crece.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $P'(5) = \frac{-44 \cdot (10 - 4)}{5^2 - 20 + 16} = \frac{-244}{21} < 0$. La función decrece.



La función crece en $(0, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. Presenta un máximo en $x = 2$. Siendo el precio máximo de $P(2) = \frac{44}{2^2 - 8 + 16} + 2 = \frac{44}{12} + 2 = 5,6666..$

El precio aumenta durante los 2 primeros años, disminuye a partir del segundo año. Alcanzando un precio máximo de 566,66 €.

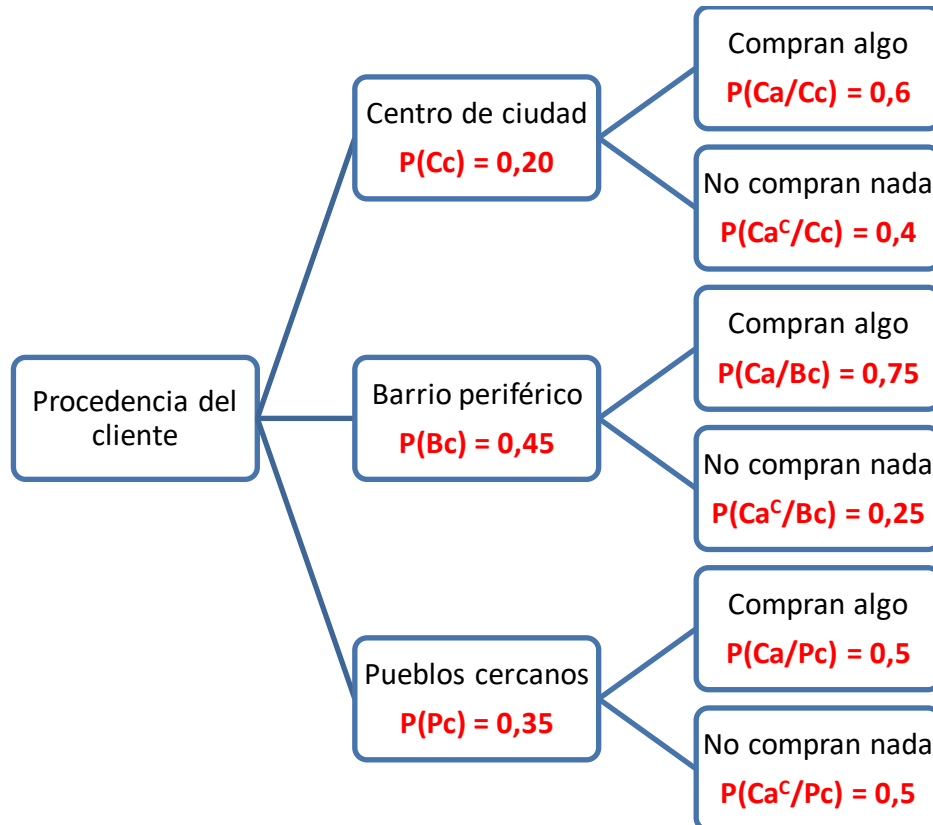
c) Calculamos la situación límite, cuando el tiempo es infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = \frac{44}{+\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

El precio tiende a ser de 200 €.

3. En una ciudad, el 20% de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Efectúan alguna compra el 60%, el 75% y el 50% de cada procedencia respectivamente.
- a) Si en un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que no realizan compras?
- b) Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en ese centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

Llamamos Cc a “ser del centro de la ciudad”, Bp a “ser de un barrio periférico”, Pc a “ser de pueblos cercanos” y Ca a “Comprar algo”. Construyamos el diagrama de árbol asociado al problema.



- a) Calculamos la probabilidad de que una persona no compre nada: $P(Ca^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(Ca^c) &= P(Cc)P(Ca^c / Cc) + P(Bc)P(Ca^c / Bc) + P(Pc)P(Ca^c / Pc) = \\
 &= 0,2 \cdot 0,4 + 0,45 \cdot 0,25 + 0,35 \cdot 0,5 = 0,08 + 0,1125 + 0,175 = \boxed{0,3675}
 \end{aligned}$$

De los 2000 visitantes se espera que no compren nada $2000 \cdot 0,3675 = 2 \cdot 367,5 = 735$ visitantes.

- b) Nos piden calcular $P(Pc / Ca)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Pc / Ca) = \frac{P(Ca \cap Pc)}{P(Ca)} = \frac{P(Pc)P(Ca / Pc)}{P(Ca)} = \frac{0,35 \cdot 0,5}{1 - 0,3675} = \frac{70}{253} = \boxed{0,277}$$

4. Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3 . Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm^3 .
- a) Obtén un intervalo de confianza, al 95%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.
- b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?
- c) ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99%?

a) $X = \text{Nivel de glucosa en sangre. } X \approx N(\mu, 15)$

Tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 105 \text{ mg/cm}^3$.

Para un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla de} \\ \text{la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2,94$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (105 - 2,94, 105 + 2,94) = (102,06, 107,94)$$

b) El error máximo es $2,94 \text{ mg/cm}^3$

c) Si aumentamos el nivel de confianza al 99% la amplitud del intervalo debe ser mayor.

$X = \text{Nivel de glucosa en sangre. } X \approx N(\mu, 15)$

$n = 100 \rightarrow \bar{x} = 105 \text{ mg/cm}^3$

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en} \\ \text{la tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

El error es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 3,8625$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (105 - 3,8625, 105 + 3,8625) = (101,1375, 108,8625)$$

Con un nivel de confianza del 95% la amplitud es $2 \cdot 2,94 = 5,88$. Para un nivel de confianza del 99% es de $2 \cdot 3,8625 = 7,725$. Aumenta el error al aumentar el nivel de confianza.

OPCIÓN B

1. Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.

a) Plantea y representa gráficamente el problema.

b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

a) Llamamos x = número de millones de litros de vino blanco, y = número de millones de litros de vino tinto.

Expresamos las restricciones en forma de inecuaciones.

- La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros $\rightarrow x + y \leq 90$.
- La producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto $\rightarrow x \leq 2y$.
- La producción de vino blanco no debe ser inferior a su mitad $\rightarrow x \geq \frac{y}{2}$.
- Se deben producir al menos 45 millones de litros $\rightarrow x + y \geq 45$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ x \leq 2y \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x + y \geq 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ x + y \geq 45 \end{array} \right\}$$

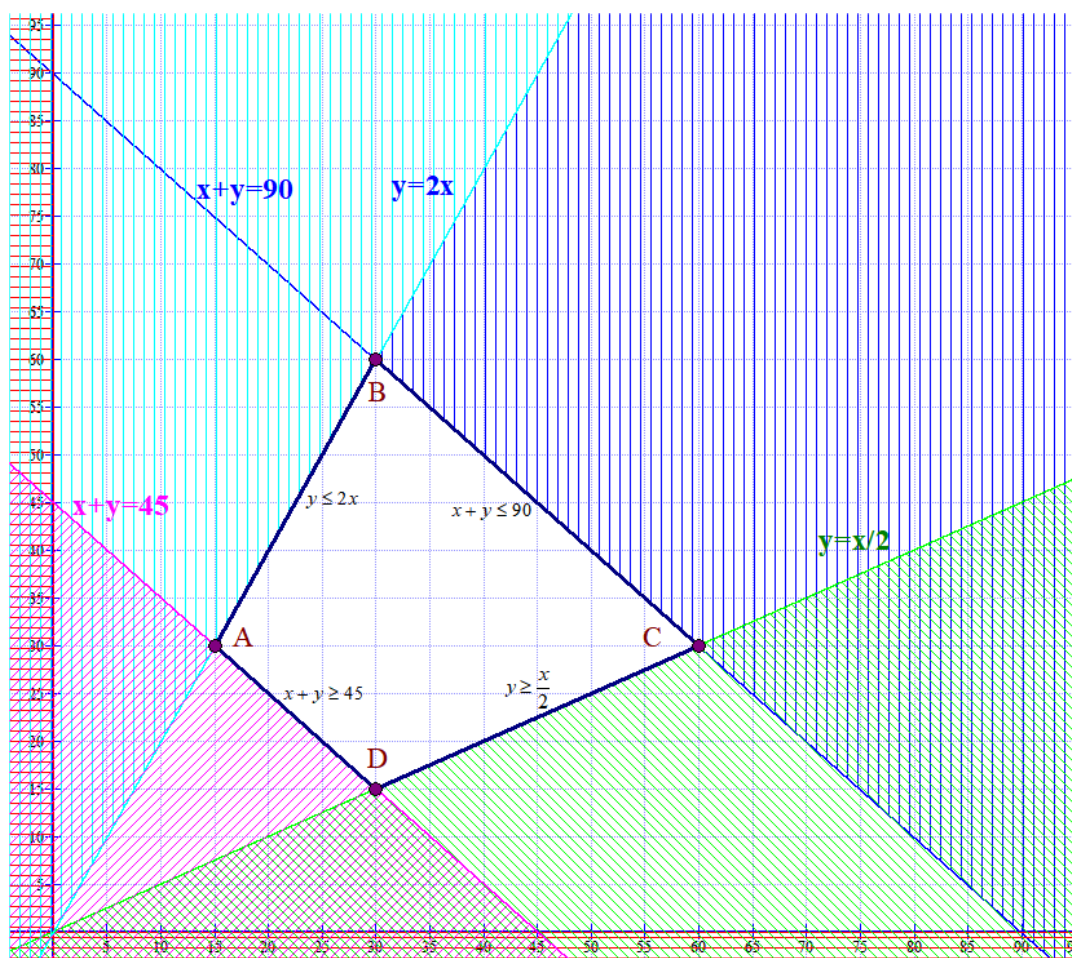
La función Ingresos es $I(x, y) = 8x + 6y$, expresado en millones de euros.

Las rectas asociadas a las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 90 \\ y = \frac{x}{2} \\ y = 2x \\ x + y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 90 - x \\ y = \frac{x}{2} \\ y = 2x \\ y = 45 - x \end{array} \right\}$$

Las representamos, partiendo de tablas de valores:

x	$y = 90 - x$	x	$y = 45 - x$	x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = 2x$
0	90	0	45	0	0	0	0
90	0	45	0	90	45	45	90



- b) Para resolver el problema debemos de determinar las coordenadas de los vértices de la región factible.

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x + 2x = 45 \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 30 \Rightarrow \boxed{A(15, 30)}$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x + 2x = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow y = 60 \Rightarrow B(30, 60)$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 90 \Rightarrow 2x + x = 180 \Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow y = 30 \Rightarrow C(60, 30)$$

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 45 \Rightarrow 2x + x = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow D(30, 15)$$

Valoramos los ingresos $I(x, y) = 8x + 6y$ en cada punto:

$$A(15, 30) \rightarrow I(15, 30) = 120 + 180 = 300$$

$$B(30, 60) \rightarrow I(30, 60) = 240 + 360 = 600$$

$$C(60, 30) \rightarrow I(60, 30) = 480 + 180 = 660$$

$$D(30, 15) \rightarrow I(30, 15) = 240 + 90 = 330$$

El ingreso máximo se obtiene con 60 millones de litros de vino blanco y 30 millones de litros de vino tinto. Este ingreso máximo es 660 millones de euros.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{si } 4 < x \leq 7 \end{cases}$.

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x es $f(x) \geq 0$?

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \geq 0$.

a) Es una función definida a trozos. Es un trozo de parábola y un trozo de recta.

Puntos de corte con el eje OY. $x = 0$

$$f(0) = 0^2 - 0 + 3 = 3. \text{ El punto de corte con el eje OY es } A(0, 3)$$

Puntos de corte con el eje OX. $y = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} & \text{si valen, pues } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x = 0 \Rightarrow x = 7 & \text{si vale, pues } 4 < x \leq 7 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son B(3, 0), C(1, 0) y D(7, 0).

La rama que es una parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ si $0 \leq x \leq 4$, tiene como derivada:

$$f'(x) = 2x - 4. \text{ La igualamos a cero. } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

En (0, 2) tomamos $x = 1$ y la derivada es $f'(1) = 2 - 4 = -2 < 0$. La función decrece.

En (2, 4) tomamos $x = 3$ y la derivada es $f'(3) = 6 - 4 = 2 > 0$. La función crece.

Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

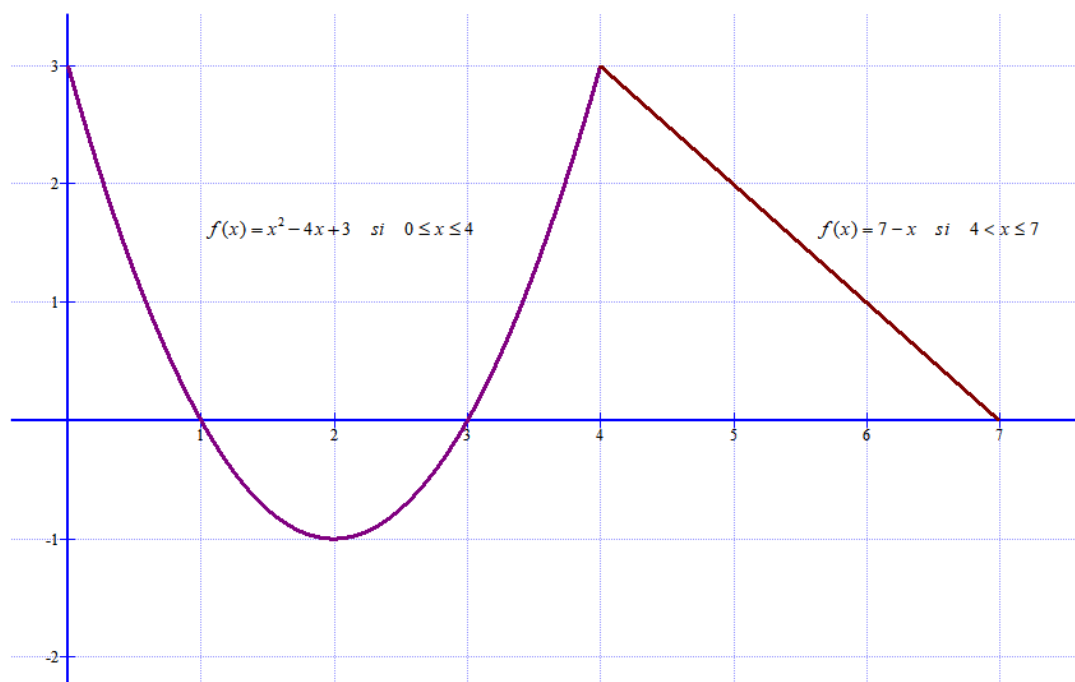
La rama que es una recta $f(x) = 7 - x$ si $4 < x \leq 7$, tiene como derivada: $f'(x) = -1 < 0$.

En (4, 7) siempre es decreciente (al ser la derivada siempre negativa).

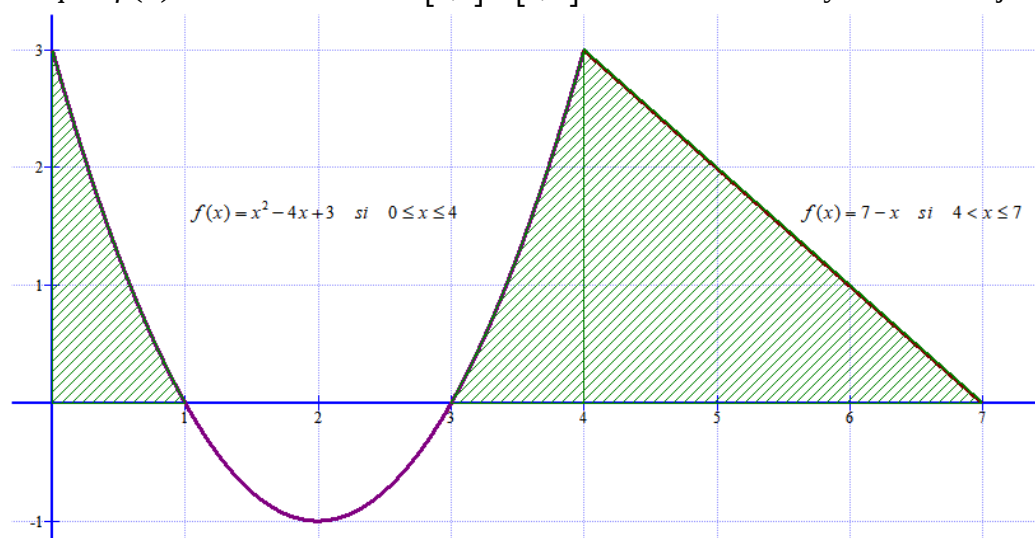
La función decrece en (0, 2), crece en (2, 4) y decrece en (4, 7). Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

Para representar la función hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^2 - 4x + 3$ si $0 \leq x \leq 4$	x	$y = 7 - x$ si $4 < x \leq 7$
0	3	4	3 (no se incluye)
1	0	7	0
2	-1		
4	3		



b) Se observa que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, 1] \cup [3, 7]$. El recinto es el rayado del dibujo.



Contando cuadraditos el área tendrá un valor aproximado de 7 unidades cuadradas. Calculemoslo con integrales.

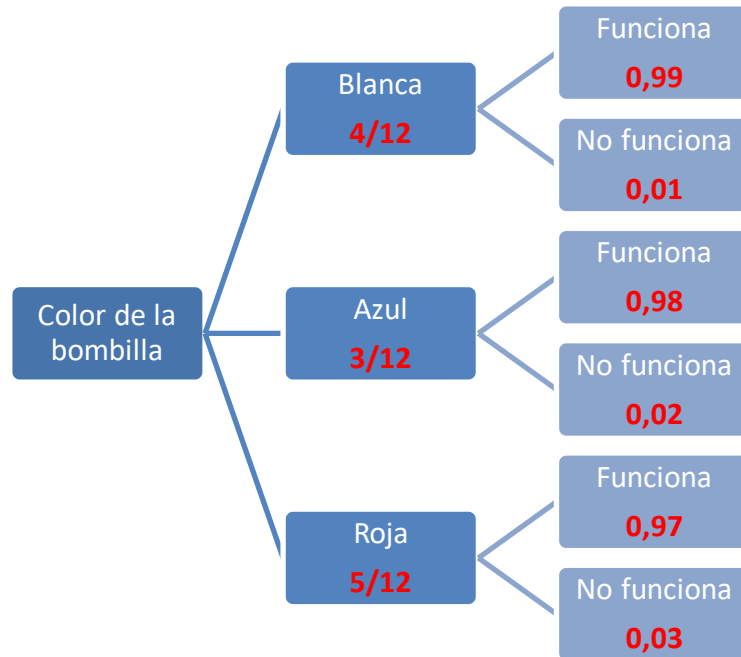
$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^1 x^2 - 4x + 3 dx + \int_3^4 x^2 - 4x + 3 dx + \int_4^7 7 - x dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 + \left[7x - \frac{x^2}{2} \right]_4^7 = \\
 &= \left[\frac{1^3}{3} - 2 + 3 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 + 0 \right] + \left[\frac{4^3}{3} - 32 + 12 \right] - \left[\frac{3^3}{3} - 18 + 9 \right] + \left[49 - \frac{49}{2} \right] - \left[28 - \frac{16}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{64}{3} - 20 + \frac{49}{2} - 20 = \frac{2 + 6 + 128 - 120 + 147 - 120}{6} = \boxed{\frac{43}{6} = 7,16 u^2}
 \end{aligned}$$

3. Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0,01 si es blanca, 0,02 si es azul y 0,03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor;

a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja.

Hay un total de 600 bombillas. La probabilidad de elegir una blanca es $200/600 = 4/12$. De elegir una azul es $150/600 = 3/12$ y de elegir roja es $250/600 = 5/12$. Construyamos el diagrama de árbol.



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Bombilla no funciona}) &= P(\text{Bombilla es blanca})P(\text{Bombilla no funciona / es blanca}) + \\ &+ P(\text{Bombilla es azul})P(\text{Bombilla no funciona / es azul}) + \\ &+ P(\text{Bombilla es roja})P(\text{Bombilla no funciona / es roja}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{12} \cdot 0,01 + \frac{3}{12} \cdot 0,02 + \frac{5}{12} \cdot 0,03 = \frac{4+6+15}{1200} = \frac{25}{1200} = \frac{1}{48} = 0,0208$$

$$\text{b) } P(\text{No sea roja / Funciona}) = \frac{P(\text{No sea roja y Funciona})}{P(\text{Funciona})} =$$

$$= \frac{P(\text{Sea azul})P(\text{Funciona / Es azul}) + P(\text{Sea blanca})P(\text{Funciona / Es blanca})}{1 - P(\text{No funciona})} =$$

$$= \frac{\frac{4}{12} \cdot 0,99 + \frac{3}{12} \cdot 0,98}{1 - \frac{1}{48}} = \frac{\frac{396}{1200} + \frac{294}{1200}}{\frac{47}{48}} = \frac{\frac{690}{1200}}{\frac{47}{48}} = \frac{690 \cdot 48}{1200 \cdot 47} = \frac{138}{235} = 0,587$$

4. En una muestra aleatoria de $n = 25$ estudiantes de bachillerato, el 75% afirman querer realizar estudios universitarios.

- a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90%.
- b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria de $n = 100$ estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar estudios universitarios sea superior al 65%?

- a) Los datos son $p = 0,75$, $n = 25$.

$$1 - \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$$

$$\text{Como } Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{25}} = 0,1425$$

Sabemos que el intervalo de confianza es

$$(p - Error, p + Error) = (0,75 - 0,1425, 0,75 + 0,1425) = (0,6075, 0,8925)$$

$$b) p \approx N\left(0,8, \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{100}}\right) \Rightarrow p \approx N(0,8, 0,04)$$

$$P(p \geq 0,65) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{0,65 - 0,8}{0,04}\right) = P(Z \geq -3,75) =$$

$$= P(Z \leq 3,75) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0,9999}$$

 	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade XUÑO 2019 Código: 40
--	---

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

- Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Calcula la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.
 - Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.
 - Despeja la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcúlala.
- El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$
 - Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4,2 millones.
 - Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.
- Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70% son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25% son de acción, otro 25% de estrategia y el resto de otras categorías.
 - ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?
 - Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?
- Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de $[0.23, 0.31]$.
 - ¿Cuánto vale la proporción muestral?
 - ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?
 - ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.
 - a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.
 - b) Representa la región factible.
 - c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?
2. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
 - a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
 - b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.
3. En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres.
 - a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
 - b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.
4. Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?
 - b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.

b) Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcúlala.

a) La matriz traspuesta de B se obtiene intercambiando las filas por las columnas, o las columnas por las filas en la matriz B:

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La multiplicación que nos piden, es posible realizarla, ya que las columnas de una matriz coinciden con las filas de la siguiente:

$$B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\quad 3 \times 2 \quad \cdot \quad 2 \times 2 \quad \cdot \quad 2 \times 3 \quad = \quad 3 \times 3 \quad}$

Multiplicamos dos de ellas, por ejemplo, las dos primeras y el resultado lo multiplicamos con la que queda:

$$\begin{aligned} B^t \cdot A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+4 \\ 0+1 & 0+2 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 0+5 & 3+0 \\ 1+4 & 0+2 & 1+0 \\ 1+2 & 0+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz pedida es:

$$B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Primero calculamos la matriz de la cual nos piden la inversa:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

Si $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumple:

$$(A-I)^{-1}(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{b=1} \\ a+b=0 \\ \boxed{d=0} \\ c+d=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+1=0 \\ c+0=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{a=-1} \\ \boxed{c=1} \end{array} \right\}$$

La matriz inversa es $(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Despejamos la matriz X:

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow A \cdot X - X = B \Rightarrow (A-I)X = B$$

Como la matriz $A - I$ tiene inversa, podemos multiplicar por ella ambos miembros de la igualdad.

$$(A-I)X = B \Rightarrow (A-I)^{-1}(A-I)X = (A-I)^{-1}B \Rightarrow X = (A-I)^{-1}B$$

Sustituimos $(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+1 & -1+0 \\ 1+0 & 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\quad \begin{array}{cc} 2 \times \boxed{2} & \cdot & \boxed{2} \times 3 \end{array} \quad = \quad 2 \times 3 \quad}$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

- a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4,2 millones.
b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

- a) A partir del número de espectadores que hay en el segundo año podemos calcular el valor de la constante:

$$\left. \begin{array}{l} N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2} \\ N(2) = 4,2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4,2 = K + \frac{8 \cdot 2}{1+2^2} \Rightarrow 4,2 = K + \frac{16}{5} \Rightarrow K = 4,2 - 3,2 = 1$$

- b) Para determinar el crecimiento y decrecimiento necesitamos la primera derivada de la función:

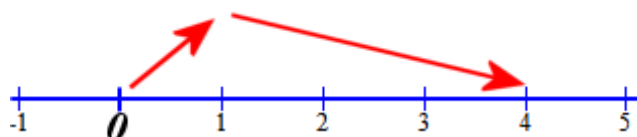
$$N(t) = 1 + \frac{8t}{1+t^2} \Rightarrow N'(t) = \frac{8(1+t^2) - 2t \cdot 8t}{(1+t^2)^2} = \frac{8+8t^2-16t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{8-8t^2}{(1+t^2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para calcular los puntos críticos:

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \frac{8-8t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 8-8t^2 = 0 \Rightarrow 8 = 8t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Nos quedamos sólo con el valor positivo, ya que el tiempo tiene que ser mayor o igual a cero. Miramos el signo de la primera derivada antes y después de este valor.

- En (0, 1) tomo $x = 0,5$ y la derivada vale $N'(0,5) = \frac{8-8(0,5)^2}{(1+0,25)^2} = \frac{6}{(1,25)^2} > 0$. La función crece.
- En (1, $+\infty$) tomo $x = 2$ y la derivada vale $N'(2) = \frac{8-8 \cdot 4}{(1+4)^2} = \frac{-24}{25} < 0$. La función decrece.



La función crece en (0, 1) y decrece en (1, $+\infty$).

El número de espectadores de la serie aumenta durante el primer año y a partir de ese momento comienza a disminuir.

Por lo que, evidentemente la función tiene un máximo en $t = 1$. Calculamos el número de espectadores en ese momento:

$$N(1) = 1 + \frac{8}{1+1} = 1 + 4 = 5$$

Al final del primer año la serie tiene su máxima audiencia, llegando a 5 millones de espectadores.

3. Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70% son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25% son de acción, otro 25% de estrategia y el resto de otras categorías.

- a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?
 b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

a) Definimos los siguientes sucesos.

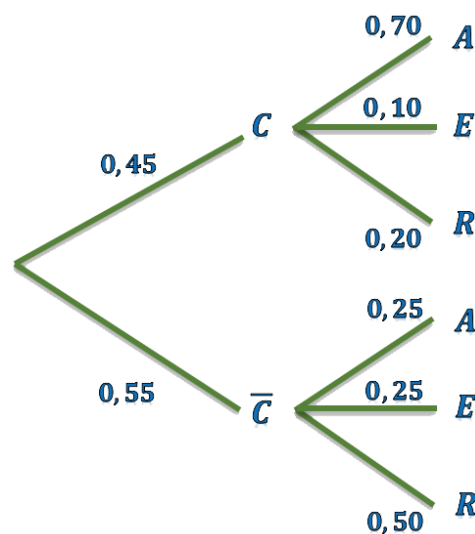
C = “videojuegos que se juegan en consola”

A = “videojuegos con temática de acción”

E = “videojuegos con temática de estrategia”

R = “videojuegos con temática distinta de acción y estrategia”

Con los datos del problema podemos hacer el siguiente diagrama de árbol:



La probabilidad de que un juego sea de acción es una probabilidad total, porque hay tanto juegos de acción que se juegan en consola como en móvil:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A/C) + P(\bar{C}) \cdot P(A/\bar{C}) = 0,45 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,25 = \boxed{0,45}$$

Por lo tanto, el 45% de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción.

- b) Antes de calcular lo que nos piden vamos a calcular la probabilidad de que un videojuego sea de estrategia. Lo hacemos igual que en el apartado anterior:

$$P(E) = P(C) \cdot P(E/C) + P(\bar{C}) \cdot P(E/\bar{C}) = 0,45 \cdot 0,1 + 0,55 \cdot 0,25 = 0,18$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada que nos piden:

$$P(\bar{C}/E) = \frac{P(\bar{C} \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\bar{C}) \cdot P(E/\bar{C})}{0,18} = \frac{0,55 \cdot 0,25}{0,18} = \boxed{0,75}$$

La probabilidad de que un jugador esté jugando a través del móvil sabiendo que el videojuego es de estrategia es de 0,75.

4. Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de $[0.23, 0.31]$.
- a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?
- b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?
- c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

- a) Sea “ p = proporción (poblacional) de votantes de un partido”.

Tenemos que, siendo p el estadístico proporción de votantes de un partido (en una muestra aleatoria) sería la media de los extremos del intervalo:

$$p = \frac{0,23 + 0,31}{2} = \frac{0,54}{2} = \boxed{0,27}$$

- b) Los datos son $p = 0,27$, $n = 400$.

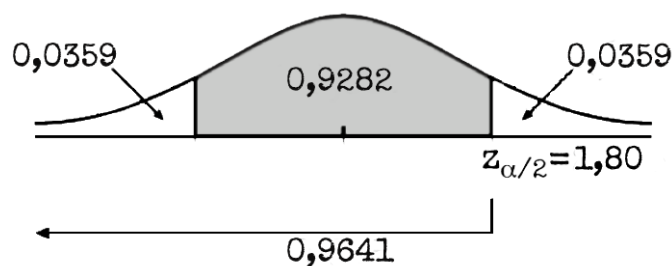
Sabemos que el intervalo de confianza es

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,27 - \text{Error}, 0,27 + \text{Error}) = (0,23, 0,31) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,27 + \text{Error} = 0,31 \Rightarrow \text{Error} = 0,31 - 0,27 = 0,04$$

$$\text{Como } \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0,04 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0,27 \cdot 0,73}{400}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,04}{\sqrt{\frac{0,27 \cdot 0,73}{400}}} = 1,801$$

Mirando en la tabla de la distribución normal, podemos calcular la probabilidad que deja ese valor tras de sí:



$$P(Z < 1,801) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0,9641 = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A partir de aquí podemos calcular el nivel de confianza:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9641 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9641 = 0,0359 \Rightarrow \alpha = 0,0718 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9282$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza se ha construido con un nivel de confianza del 92,82%.

- c) El error de estimación se ha calculado en el apartado anterior. Es de 0,04

Admitimos un error máximo de estimación de $\pm 0,04$ para el intervalo anterior.

OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

- a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.
 b) Representa la región factible.
 c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Llamamos x = número de lotes con la oferta 1 e y = número de lotes con la oferta 2.

Como hay 2000 camisetas y el lote 1 lleva una y el lote 2 lleva 3, obtenemos la primera restricción: $x + 3y \leq 2000$.

Como hay 1000 chándales y las ofertas 1 y 2 llevan 1 cada una, obtenemos la siguiente restricción: $x + y \leq 1000$.

Se va a ofrecer más de 200 lotes de la oferta 1: $x \geq 200$.

Y más de 100 lotes de la oferta 2: $y \geq 100$.

Todas las restricciones que determinan la región factible son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{array} \right\}$$

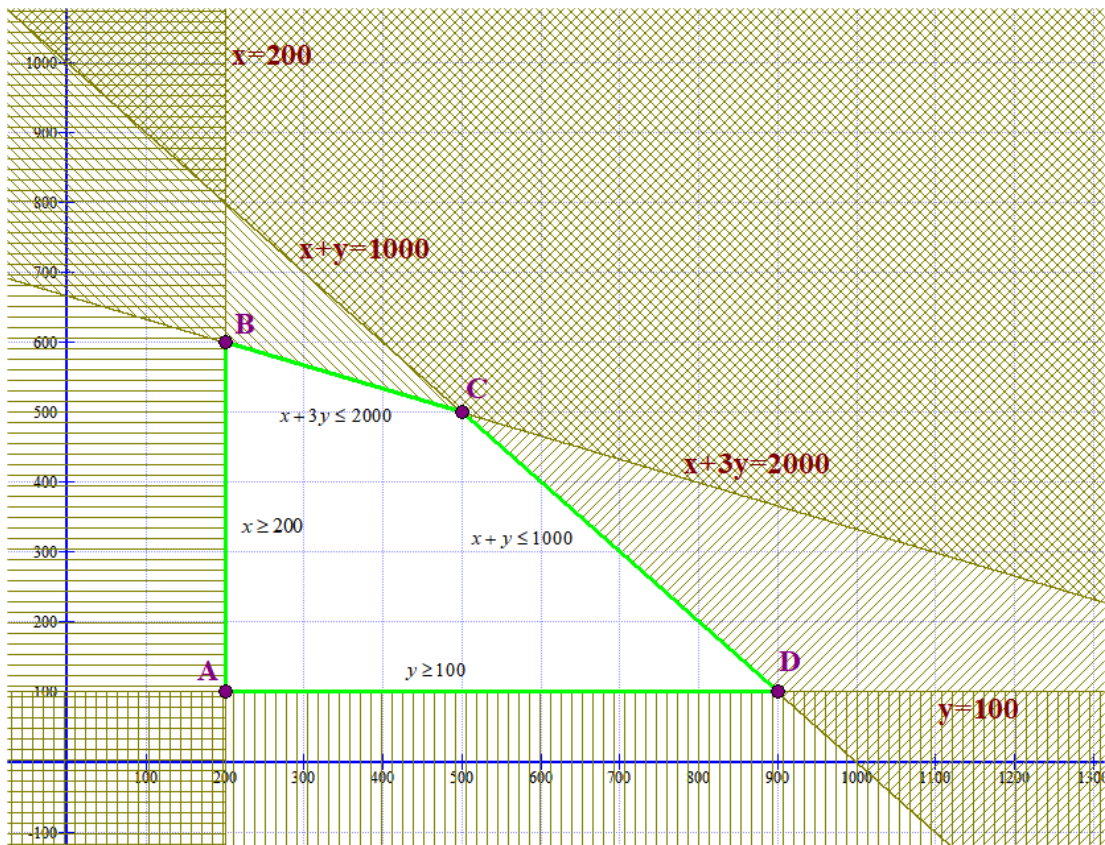
b) Representamos las restricciones e identificamos la región factible:

Realizamos una tabla para las rectas asociadas a cada restricción.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 2000 \\ x + y = 1000 \\ x = 200 \\ y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{2000 - x}{3} \\ y = 1000 - x \\ x = 200 \\ y = 100 \end{array} \right\}$$

x	$y = 1000 - x$	x	$y = \frac{2000 - x}{3}$	$x = 200$	y	x	$y = 100$
0	1000	200	600	200	0	0	100
1000	0	500	500	200	600	200	100
500	500						
200	800						

La región factible es la región en blanco.



Calculamos las coordenadas de los vértices:

$$\left. \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow A(200, 100)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 2000 \\ x = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow 200 + 3y = 2000 \Rightarrow y = 600 \Rightarrow B(200, 600)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 2000 \\ x + y = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 2000 \\ y = 1000 - x \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3000 - 3x = 2000 \Rightarrow -2x = -1000$$

$$x = 500 \Rightarrow y = 1000 - 500 = 500 \Rightarrow C(500, 500)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 100 \\ x + y = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 100 = 1000 \Rightarrow x = 900 \Rightarrow D(900, 100)$$

c) La función de ingresos sería la siguiente: $I(x, y) = 30x + 50y$

Calculamos en cuál de los vértices toma esta función el valor máximo:

$$A(200, 100) \rightarrow I(200, 100) = 6000 + 5000 = 11000€$$

$$B(200, 600) \rightarrow I(200, 600) = 6000 + 30000 = 36000€$$

$$C(500, 500) \rightarrow I(500, 500) = 15000 + 25000 = 40000€ \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(900, 100) \rightarrow I(900, 100) = 27000 + 5000 = 32000€$$

El valor máximo se alcanza en el punto D(500, 500). Para maximizar los ingresos se deberían vender 500 lotes de la oferta 1 y 500 de la oferta 2. Con esas ventas los ingresos ascenderían a 40000 €.

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
 b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

a) Como la función es una ecuación de segundo grado, su gráfica es una parábola:

Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$)

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = \frac{6-2}{2} = 2 \\ x = \frac{6+2}{2} = 4 \end{cases} \rightarrow \text{Puntos de corte: A(2,0) y B(4,0)}$$

Puntos de corte con el eje OY ($x = 0$)

$$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8 \rightarrow \text{Punto de corte C(0,8)}$$

Monotonía y extremos relativos:

Obtenemos la derivada de la función.

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$$

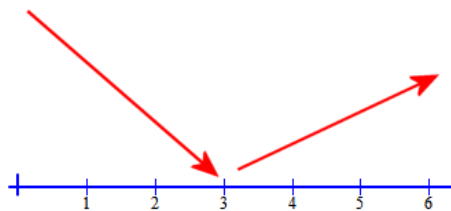
Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

El extremo relativo está en $x = 3$. Veamos como crece o decrece la función.

- En $(-\infty, 3)$ tomamos $x = 0$ y $f'(0) = 0 - 6 = -6 < 0$. La función decrece.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y $f'(4) = 8 - 6 = 2 > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente.

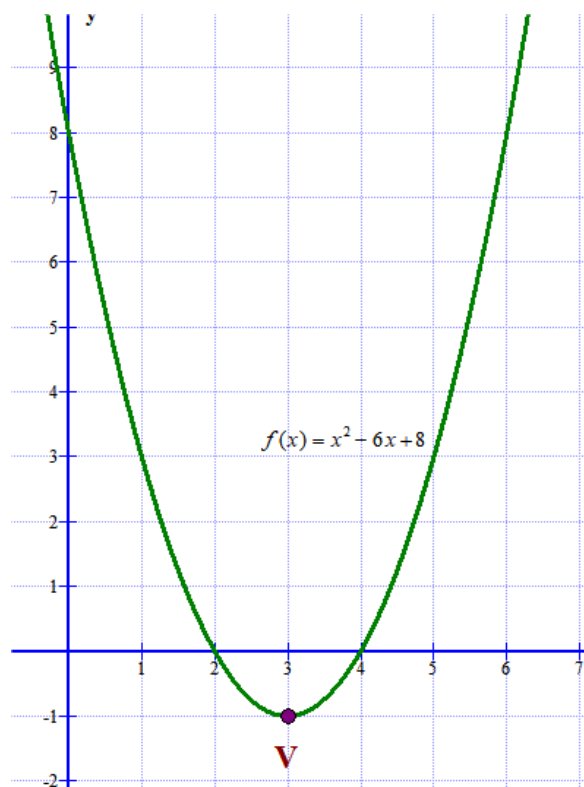


La función decrece en $(-\infty, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.

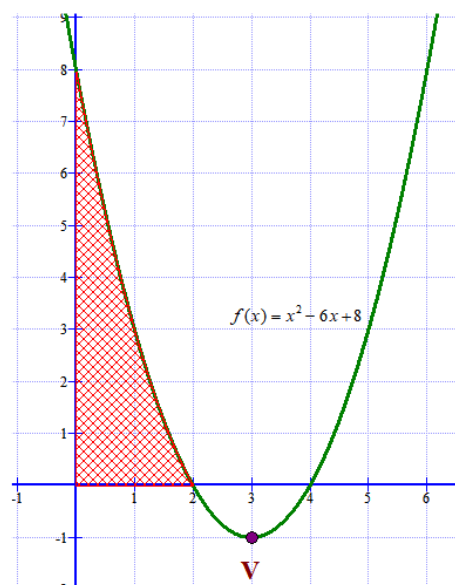
La función presenta un mínimo en $x = 3$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(3, -1)$.

Para representar su gráfica obtenemos una tabla de valores:

x	$y = x^2 - 6x + 8$
3	-1
0	8
4	0
2	0



b) Identificamos la región cuya área deseamos calcular:



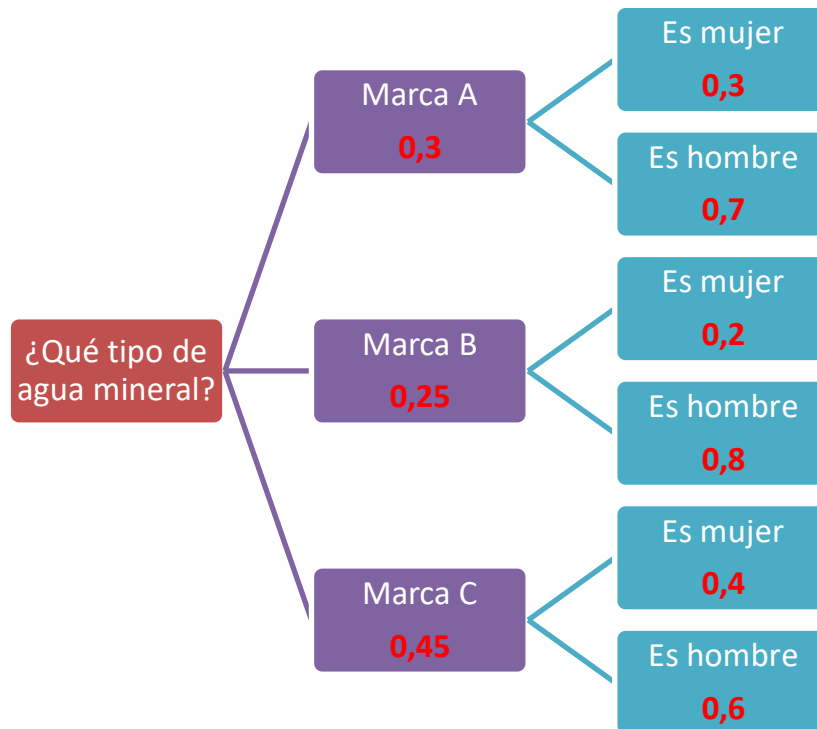
Como se ve en el dibujo, el área queda determinada por la parábola, por el eje OX ($y = 0$) y por el eje OY ($x = 0$). Si contamos cuadraditos el área es aproximadamente 6 unidades cuadradas. Calculamos con más precisión el área sombreada mediante una integral definida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 x^2 - 6x + 8 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 8x \right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 16 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 + 0 \right] = \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{20}{3} = \boxed{6,66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

3. En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres.

- a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

Podemos ordenar estos datos en un diagrama de árbol:



- a) La probabilidad de que sea mujer es una probabilidad total, porque hay mujeres que consumen la marca A, la B y la C.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea mujer}) &= P(\text{Consume marca A y es mujer}) + \\
 &+ P(\text{Consume marca B y es mujer}) + P(\text{Consume marca C y es mujer}) = \\
 &= P(\text{Consume marca A})P(\text{Es mujer} / \text{Consume marca A}) + \\
 &+ P(\text{Consume marca B})P(\text{Es mujer} / \text{Consume marca B}) + \\
 &+ P(\text{Consume marca C})P(\text{Es mujer} / \text{Consume marca C}) = \\
 &= 0,3 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,09 + 0,05 + 0,18 = \boxed{0,32}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que, seleccionado al azar un consumidor de agua mineral en esa población, sea mujer es de 0,32.

- b) Ahora nos piden calcular una probabilidad condicionada:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Consume marca B} / \text{Es mujer}) &= \frac{P(\text{Consume marca B y Es mujer})}{P(\text{Es mujer})} = \\
 &= \frac{0,25 \cdot 0,2}{0,32} = \frac{0,05}{0,32} = \frac{5}{32} = \boxed{0,16}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que consuma la marca B sabiendo que es mujer es de 0,16.

4. Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?
 b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

a) Sea X = “puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial”. $X = N(74, 16)$.

Se toma una muestra de 100 empleados de una empresa, y la distribución de la media muestral de muestras de tamaño 100 será:

$$\overline{X}_{100} = N\left(74, \frac{16}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{100} = N(74, 1.6)$$

Con esta distribución normal calculamos la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_{100} > 78) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{100} - 74}{1.6} > \frac{78 - 74}{1.6}\right) = P(Z > 2.5) = \\ &= 1 - P(Z < 2.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9938 = \boxed{0.0062} \end{aligned}$$

La probabilidad de obtener una media muestral superior a 78 es 0,0062.

b) Nos piden averiguar el valor de $P(\overline{X}_{100} < 74)$.

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_{100} < 74) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{100} - 74}{1.6} < \frac{74 - 74}{1.6}\right) = P(Z < 0) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.5} \end{aligned}$$

La probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 es 0,5.

OTRA FORMA DE HACERLO

Podríamos haber razonado de forma más simple al darnos cuenta de que ese valor (74) es la media de la distribución, por lo que está en el centro de la distribución y deja la mitad

por encima y la otra mitad por debajo. Es decir, $P(\overline{X}_{100} < 74) = P(\overline{X}_{100} < \mu) = \frac{1}{2} = 0.5$



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2018**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Las ventas de tres productos P1, P2 y P3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x , y , z las ventas de los productos P1, P2 y P3 respectivamente
a) Expresa el sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula la matriz inversa de A, siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes. c) Calcule las ventas x , y , z de esos tres productos.

2. Un nuevo producto tiene una demanda en miles de unidades que corresponde aproximadamente a la función $N(t) = 5 + 20t / (1 + t^2)$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la demanda. Calcula la demanda máxima y el momento en que se alcanza. b) Evalúa la tendencia a largo plazo y representa la función. c) Después del máximo, ¿la demanda bajaría de 11.000 unidades? ¿Cuándo?

3. En una empresa el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% tiene contrato indefinido, mientras que del grupo de hombres, sólo el 70% tiene ese tipo de contrato. a) Calcula el porcentaje de personas de dicha empresa que tienen contrato indefinido. b) Si un empleado tiene un contrato indefinido obtén la probabilidad de que sea mujer. c) ¿Son independientes los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido”?

4. En un estanque se desea estimar el porcentaje de peces dorados. Para ello se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se descubre que exactamente 70 de ellos son dorados.

a) Encuentre, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces dorados en el estanque b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? c) Considerando esta muestra, ¿qué pasaría con el error de estimación si aumentase el nivel de confianza? Justifica la respuesta.

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:

a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

2. Un gimnasio abre al público a principios de 2008, la función $G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$

indica cómo han evolucionado sus ingresos (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo $t = 0$ a principios de 2008.

- a) Estudia en qué períodos se produjo un aumento y en cuáles hubo una disminución en sus ganancias
- b) ¿A cuánto ascendieron las ganancias máximas? ¿En qué año se obtuvieron?
- c) Representa la gráfica de la función $G(t)$. ¿En algún año posterior a su apertura no se obtuvieron ganancias? ¿A partir de algún año dejó de ser rentable el gimnasio? ¿cuándo?
- 3.** En una población de cada 200 consumidores de una bebida isotónica, 60 consumen la marca A, 50 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de los consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de los consumidores de C son jóvenes. a) Se selecciona al azar un consumidor de dicha bebida en esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea joven?
- b) Si se seleccionó a un joven, encuentre la probabilidad de que consuma la marca B. c) ¿Son independientes los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A"?
- 4.** Una empresa quiere racionalizar el gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales. Para ello se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes y se obtiene: "con un 95% de confianza, el gasto medio mensual en telefonía móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en telefonía móvil es una variable normal a) Calcule el gasto medio de la muestra y el error cometido en la estimación. b) Si la desviación estándar es 42 euros, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Las ventas de tres productos P1, P2 y P3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x , y , z las ventas de los productos P1, P2 y P3 respectivamente

a) Expresa el sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula la matriz inversa de A, siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes. c) Calcule las ventas x , y , z de esos tres productos.

a) El sistema es $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\}$. Lo expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes, la matriz de las incógnitas es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 1 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Hallamos la expresión de X.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Las ventas del producto P1 es 1 unidad, de P2 son 2 unidades y de P3 son 3 unidades.

2. Un nuevo producto tiene una demanda en miles de unidades que corresponde aproximadamente a la función $N(t) = 5 + 20t / (1+t^2)$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la demanda. Calcula la demanda máxima y el momento en que se alcanza. b) Evalúa la tendencia a largo plazo y representa la función. c) Después del máximo, ¿la demanda bajaría de 11.000 unidades? ¿Cuándo?

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2} \Rightarrow N'(t) = \frac{20(1+t^2) - 2t \cdot 20t}{(1+t^2)^2} = \frac{20 + 20t^2 - 40t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{20 - 20t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \frac{20 - 20t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 20 - 20t^2 = 0 \Rightarrow 1 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Solo tenemos en cuenta como punto crítico $t = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

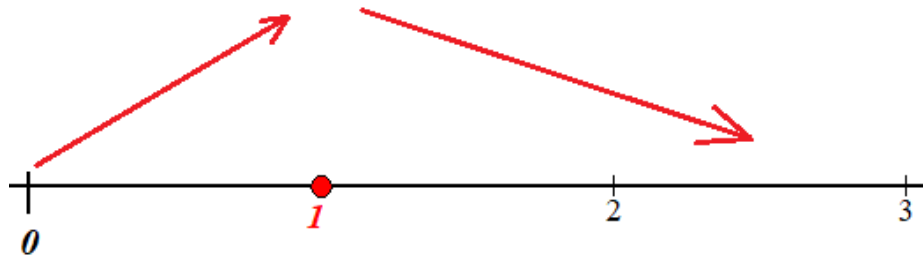
- En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $N'(0.5) = \frac{20 - 20 \cdot 0.5^2}{(1 + 0.5^2)^2} = 9.6 > 0$.

La función crece en $[0, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $N'(2) = \frac{20 - 20 \cdot 2^2}{(1 + 2^2)^2} = -2.4 < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La demanda crece durante el primer mes y decrece durante los siguientes meses.



La función demanda tiene un máximo en $t = 1$. Como $N(1) = 5 + 20 / (1+1^2) = 15$ podemos afirmar que la demanda máxima es de 15000 unidades y se produce el primer mes.

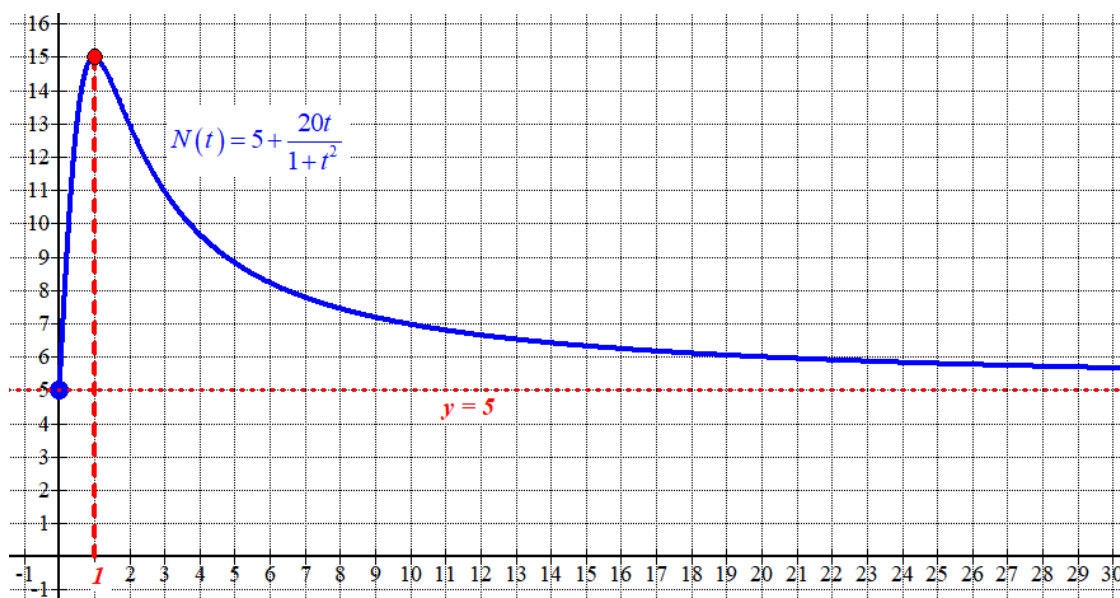
b) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{20t}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{\frac{20t}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{\frac{20}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} = 5 + \frac{\frac{20}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + 1} = 5 + \frac{0}{0+1} = 5$$

La tendencia de la demanda es de 5000 unidades.

Hacemos una tabla y dibujamos la gráfica de la función.

t	$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2}$
0	5
1	15
2	13
3	11



- c) Averiguamos en qué momento la demanda alcanza el valor 11. Observando la gráfica, debe ser en $t = 3$. Lo comprobamos.

$$N(t) = 11 \Rightarrow 5 + \frac{20t}{1+t^2} = 11 \Rightarrow \frac{20t}{1+t^2} = 6 \Rightarrow 20t = 6 + 6t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t^2 - 20t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{20 \pm 16}{12} = \begin{cases} \frac{20+16}{12} = 3 = t \\ \frac{20-16}{12} = \frac{1}{3} = t \end{cases}$$

Después del máximo $t = 1$ la demanda alcanza el valor de 11000 unidades en el mes 3, a partir de ese momento la demanda va disminuyendo siendo menor de 11000 unidades.

3. En una empresa el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% tiene contrato indefinido, mientras que del grupo de hombres, sólo el 70% tiene ese tipo de contrato. a) Calcula el porcentaje de personas de dicha empresa que tienen contrato indefinido. b) Si un empleado tiene un contrato indefinido obtén la probabilidad de que sea mujer. c) ¿Son independientes los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido”?

Supongamos que hay 100 empleados en la empresa. Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos.

Hay 30 mujeres y 70 hombres.

Hay 30 mujeres. El 80% de las mujeres tienen contrato indefinido, es decir, $0.8 \cdot 30 = 24$ mujeres tienen contrato indefinido y las 6 restantes no lo tienen.

Hay 70 hombres. El 70 % tiene contrato indefinido, es decir, $0.7 \cdot 70 = 49$ hombres tienen contrato indefinido y los 21 restantes no lo tienen.

Colocamos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Hombres	Mujeres	
Con contrato indefinido	49	24	
Sin contrato indefinido	21	6	
TOTALES	70	30	100

Completamos la tabla.

	Hombres	Mujeres	
Con contrato indefinido	49	24	73
Sin contrato indefinido	21	6	27
TOTALES	70	30	100

Utilizando los datos y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas del ejercicio.

- a) Contrato indefinido tienen $49 + 24 = 73$ empleados de los 100. Un 73 % de los empleados tienen contrato indefinido.
- b) Hay 73 empleados con contrato indefinido y de ellos 24 son mujeres. La probabilidad de que al elegir un empleado con contrato indefinido este sea mujer es de $\frac{24}{73} \approx 0.3288$.
- c) Llamamos H al suceso “ser hombre” y C al suceso “tener contrato indefinido”. Para que sean independientes debe cumplirse $P(H \cap C) = P(H)P(C)$.

$$\left. \begin{aligned} P(H \cap C) &= \frac{49}{100} = 0.49 \\ P(H)P(C) &= \frac{70}{100} \cdot \frac{73}{100} = 0.511 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(H \cap C) = 0.49 \neq 0.511 = P(H)P(C)$$

Al ser distintas las probabilidades los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido” no son independientes.

4. En un estanque se desea estimar el porcentaje de peces dorados. Para ello se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se descubre que exactamente 70 de ellos son dorados.

a) Encuentre, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces dorados en el estanque b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? c) Considerando esta muestra, ¿qué pasaría con el error de estimación si aumentase el nivel de confianza? Justifica la respuesta.

a) La proporción muestral es $p = \frac{70}{700} = 0.1$ y el tamaño de la muestra es $n = 700$.

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{700}} \approx 0.0292$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1 - 0.0292, 0.1 + 0.0292) = (0.0708, 0.1292)$$

Con un nivel de confianza del 99% el porcentaje de peces dorados en el estanque se sitúa entre el 7.08 % y el 12.92 %.

b) El error de estimación vale 0.0292. Es un error de estimación del 2.92 %.

c) Si aumentase el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$. Y como consecuencia aumentaría el

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:

a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

a) Llamemos x = número de reproductores que se envían desde el almacén A, y = número de reproductores que se envían desde el almacén B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

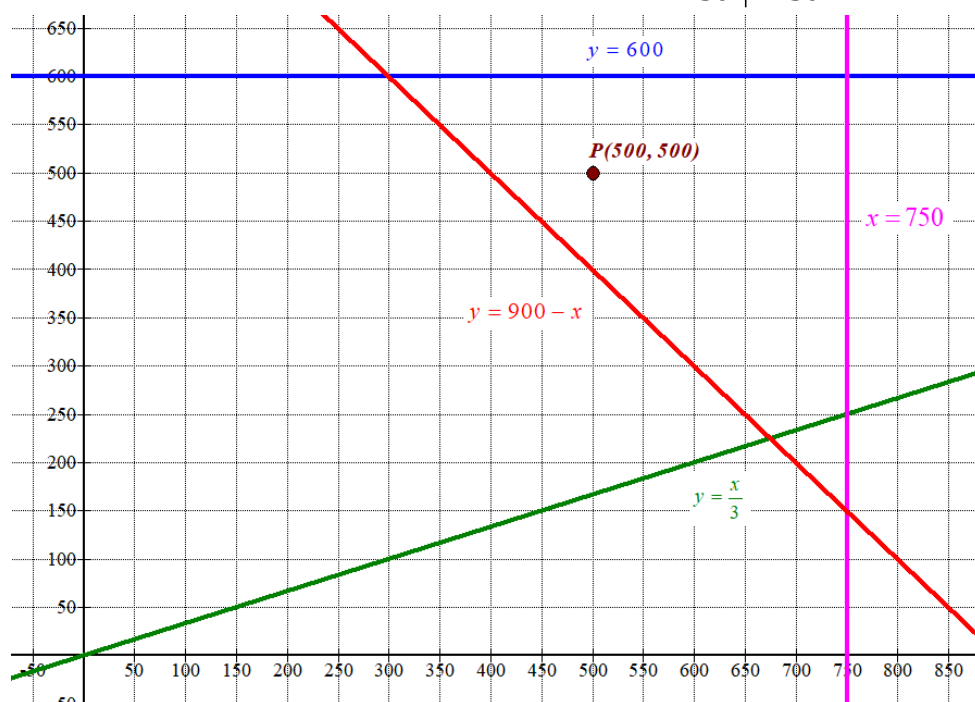
- Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B $\rightarrow x \leq 750; y \leq 600$.
- Se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda $\rightarrow x + y \geq 900$.
- Los reproductores del almacén A no superen el triple de los del B $\rightarrow x \leq 3y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

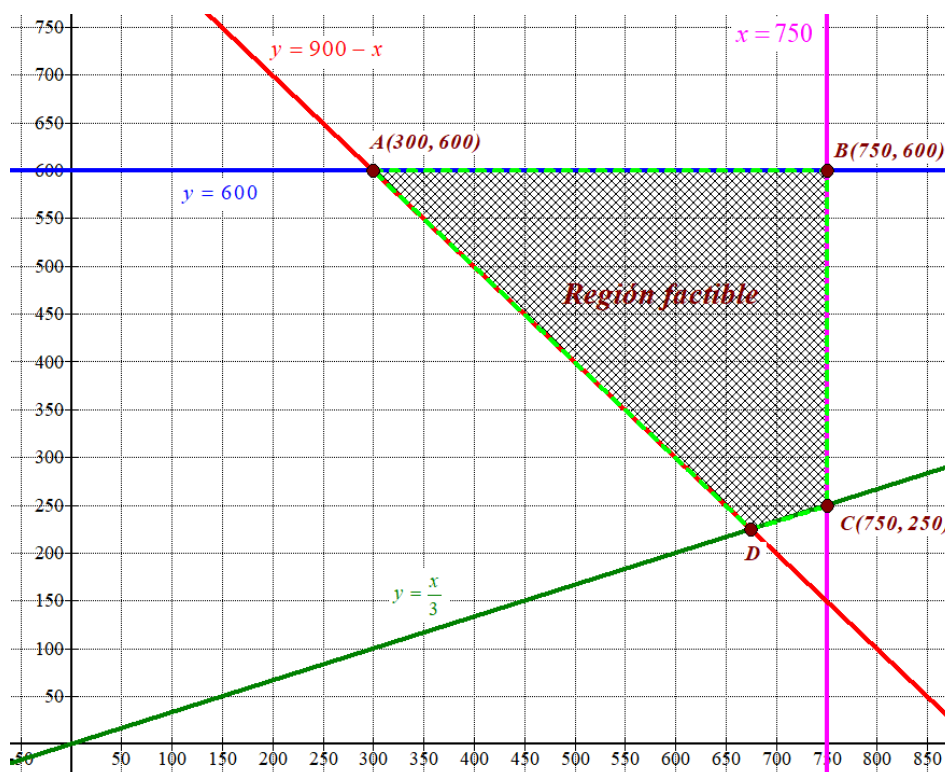
$x = 750$	y	x	$y = 600$	x	$y = 900 - x$	x	$y = \frac{x}{3}$
750	250	0	600	0	900	0	0
750	600	300	600	300	600	675	225
		750	600	675	225	750	250



Comprobamos que el punto P(500, 500) cumple todas las restricciones.

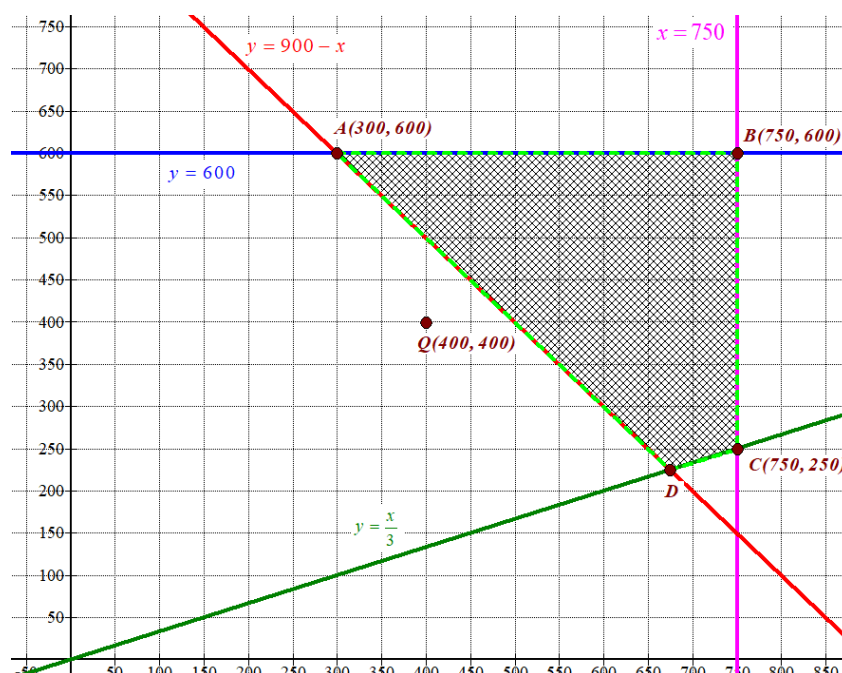
$$\left. \begin{array}{l} 500 \leq 750 \\ 500 \leq 600 \\ 500 + 500 \geq 900 \\ 500 \leq 3 \cdot 500 \\ 500 \geq 0; 500 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

No, el punto Q(400, 400) no pertenece a la región factible y con esos envíos no se satisfacen todas las restricciones.



Visto de otra manera: con 400 y 400 no se consigue el mínimo de 900 reproductores que debe haber en la tienda.

- b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B la función objetivo son los gastos de transporte que deseo minimizar tiene la expresión: $G(x, y) = 0.3x + 0.25y$.

Obtenemos las coordenadas del vértice D de la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + y = 900 \Rightarrow 4y = 900 \Rightarrow \boxed{y = \frac{900}{4} = 225} \Rightarrow \boxed{x = 3 \cdot 225 = 675}$$

El vértice D tiene coordenadas D(675, 225).

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(300, 600) \rightarrow G(300, 600) = 0.3 \cdot 300 + 0.25 \cdot 600 = 240 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(750, 600) \rightarrow G(750, 600) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 600 = 375$$

$$C(750, 250) \rightarrow G(750, 250) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 250 = 287.5$$

$$D(675, 225) \rightarrow G(675, 225) = 0.3 \cdot 675 + 0.25 \cdot 225 = 258.75$$

El gasto mínimo en transporte es de 240 € y se consigue con 300 reproductores del almacén A y 600 del B.

2. Un gimnasio abre al público a principios de 2008, la función $G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$

indica cómo han evolucionado sus ingresos (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo $t = 0$ a principios de 2008.

- a) Estudia en qué períodos se produjo un aumento y en cuáles hubo una disminución en sus ganancias
 b) ¿A cuánto ascendieron las ganancias máximas? ¿En qué año se obtuvieron?
 c) Representa la gráfica de la función $G(t)$. ¿En algún año posterior a su apertura no se obtuvieron ganancias? ¿A partir de algún año dejó de ser rentable el gimnasio? ¿cuándo?

a) La función es continua en $t = 4$.

$$\left. \begin{aligned} G(4) &= 10(5 \cdot 4 - 4^2) = 40 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} G(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^-} 10(5t - t^2) = 40 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} G(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} 80 - 10t = 80 - 40 = 40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(4) = \lim_{t \rightarrow 4^-} G(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} G(t) = 40$$

La función es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$ siendo la derivada:

$$G'(t) = \begin{cases} 10(5 - 2t) & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ -10 & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$G'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10(5 - 2t) = 0 \rightarrow 5 - 2t = 0 \rightarrow 2t = 5 \rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5 \in [0, 4) \\ -10 = 0 \quad \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 2.5$ (punto crítico) y $t = 4$ (cambio de definición).

- En el intervalo $[0, 2.5)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $G'(1) = 10(5 - 2) = 30 > 0$. La función crece en $[0, 2.5)$.
- En el intervalo $(2.5, 4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $G'(3) = 10(5 - 6) = -10 < 0$. La función decrece en $(2.5, 4)$.
- En el intervalo $(4, 10]$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $G'(5) = -10 < 0$. La función decrece en $(4, 10]$.

Los ingresos han aumentado entre el año 2008 y la mitad del año 2010 y han disminuido desde entonces hasta principios del año 2018.

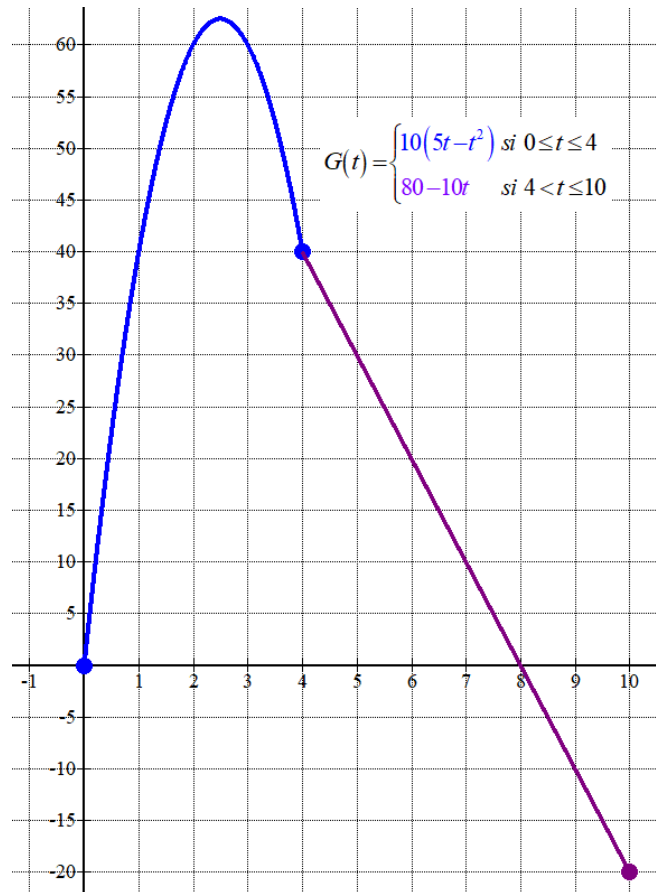
b) Valoramos las ganancias en el año 0, el 2.5 (máximo relativo) y el año 10 para decidir el máximo absoluto.

$$G(0) = 0 \quad G(2.5) = 10(5 \cdot 2.5 - 2.5^2) = 62.5 \quad G(10) = -20$$

Las ganancias máximas son 62500 euros que se obtienen a mitad del año 2010.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$G(t)$
0	0
2.5	62.5
4	40
10	-20



En el año 8 después de la apertura (2016) no hubo ganancias. A partir de ese año hubo pérdidas y el negocio dejó de ser rentable.

3. En una población de cada 200 consumidores de una bebida isotónica, 60 consumen la marca A, 50 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de los consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de los consumidores de C son jóvenes. a) Se selecciona al azar un consumidor de dicha bebida en esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea joven? b) Si se seleccionó a un joven, encuentre la probabilidad de que consuma la marca B. c) ¿Son independientes los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A"?

60 personas consumen la marca A. Sabemos que el 30% de los consumidores de A son jóvenes, es decir $0.3 \cdot 60 = 18$ consumidores de la marca A son jóvenes, los $60 - 18 = 42$ restantes no son jóvenes.

50 personas consumen la marca B. Sabemos que el 20% de los consumidores de B son jóvenes, es decir $0.2 \cdot 50 = 10$ consumidores de la marca B son jóvenes, los $50 - 10 = 40$ restantes no son jóvenes.

$200 - 60 - 50 = 90$ personas consumen la marca C. Sabemos que el 40% de los consumidores de C son jóvenes, es decir $0.4 \cdot 90 = 36$ consumidores de la marca C son jóvenes, los $90 - 36 = 54$ restantes no son jóvenes.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Jóvenes	No jóvenes	
Marca A	18	42	60
Marca B	10	40	50
Marca C	36	54	90
TOTALES			200

Completamos la tabla.

	Jóvenes	No jóvenes	
Marca A	18	42	60
Marca B	10	40	50
Marca C	36	54	90
TOTALES	64	136	200

Con los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas en el ejercicio.

a) De los 200 consumidores hay 64 que son jóvenes. La probabilidad de que al elegir un consumidor este sea joven es de $\frac{64}{200} = 0.32$.

b) De los 64 jóvenes hay 18 que consumen la marca A. La probabilidad de que al elegir un joven este consuma la marca B es de $\frac{10}{64} = 0.15625$.

c) Llamamos J al suceso "ser joven" y A a "consumir la marca A". Para que los sucesos A y J sean independientes debe cumplirse $P(A \cap J) = P(A)P(J)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap J) &= \frac{18}{200} = 0.09 \\ P(A)P(J) &= \frac{60}{200} \cdot \frac{64}{200} = \frac{12}{125} = 0.096 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap J) = 0.09 \neq 0.096 = P(A)P(J)$$

Al ser distintas las probabilidades los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A" no son independientes.

4. Una empresa quiere racionalizar el gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales. Para ello se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes y se obtiene: "con un 95% de confianza, el gasto medio mensual en telefonía móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en telefonía móvil es una variable normal a) Calcule el gasto medio de la muestra y el error cometido en la estimación. b) Si la desviación estándar es 42 euros, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

a) X = El gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales. $X \approx N(\mu, \sigma)$

El intervalo de confianza es (199.71, 220.29).

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{199.71 + 220.29}{2} = 210 \text{ euros}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{220.29 - 199.71}{2} = 10.29 \text{ euros}$$

El gasto medio de la muestra es de 210 euros y el error de estimación es de 10.29 euros.

b) Consideramos $X \approx N(\mu, 42)$.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Utilizamos la fórmula del error para despejar n en su expresión.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.29 = 1,96 \cdot \frac{42}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.29\sqrt{n} = 1.96 \cdot 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 42}{10.29} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 42}{10.29} \right)^2 = 64$$

El tamaño de la muestra es de 64 agentes.



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2018**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula las matrices $B - C$ y $A \cdot B$. Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- a) Calcula la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$. b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y representa la función f .
c) Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

3. El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 gramos. Si se establece el intervalo (1499,9; 1539,1) como el intervalo de confianza para la media de una muestra de 144 empanadas a) ¿cuál es el valor de la media muestral?, ¿con qué nivel de confianza se construyó el intervalo? b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99%?

4. En una empresa, el 20% de los trabajadores tiene más de 30 años, el 8% ocupa un puesto directivo y el 6% tiene más de 30 años y ocupa un cargo directivo. a) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo? b) ¿Qué porcentaje de trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años? c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

OPCIÓN B

1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,

- a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

2. El salario diario de un joven durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde t representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$S(t) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 25 + 10t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -0.5t^2 + 4t + 39 & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función salarial y representarla. b) ¿En qué momento recibió un salario máximo? ¿Y mínimo? Calcula estos salarios.

3. El 30% de los estudiantes de secundaria practican baloncesto. Entre los que practican baloncesto, el 40% practica también tenis. Entre los que no practican baloncesto, una cuarta parte practica tenis. Elegido un estudiante de ese instituto al azar, a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes? b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis? c) ¿Son independientes los sucesos “practicar tenis” y “practicar baloncesto”?

4. Un consumidor cree que el peso medio de un producto es diferente al indicado en el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso promedio de 245 g. También se supone que el peso del producto por paquete sigue una distribución normal con una desviación típica de 9 g.

a) Construya un intervalo de confianza para el peso medio de ese producto con un 95% de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño de muestra mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2g y un nivel de confianza del 90%?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula las matrices $B - C$ y $A \cdot B$. Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$.

Calculamos las matrices $B - C$ y $A \cdot B$.

$$B - C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación $B - C = A \cdot B$.

$$B - C = A \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = b \\ 1-c = 1-a \\ 0 = 0 \\ -1+c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a \\ c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $a = c = 2$, b puede ser cualquier número real.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- a) Calcula la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$. b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y representa la función f .
c) Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 3x^2 + 2x dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K$$

Determinamos el valor de K usando que $F(2) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K \\ F(2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + K \Rightarrow 1 = 4 - 8 + 4 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = K \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 24}}{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \approx 1.57 \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \approx 0.42 \end{cases}$$

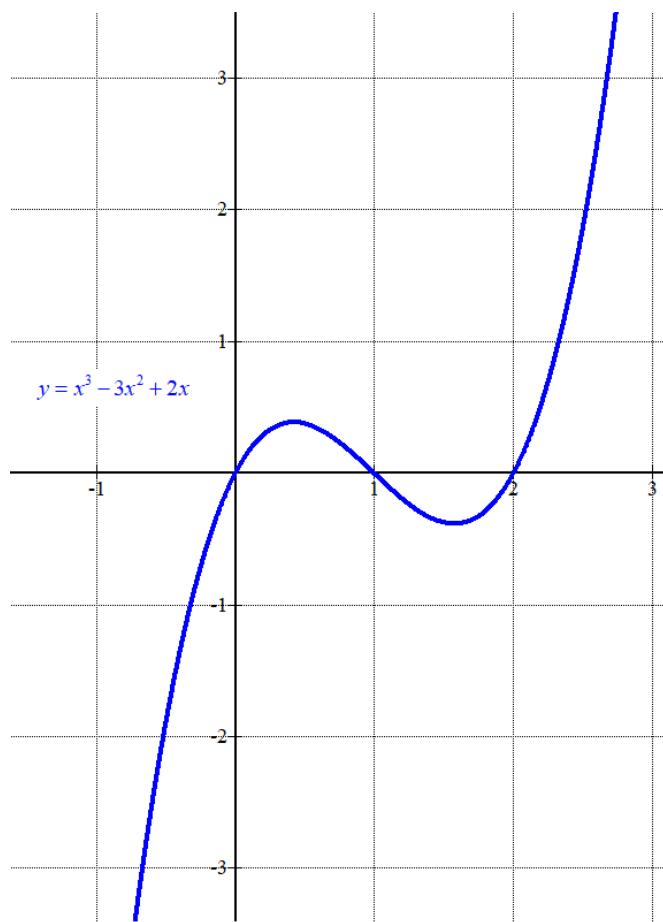
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, 0.42)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0.42)$.
- En el intervalo $(0.42, 1.57)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1 < 0$. La función decrece en $(0.42, 1.57)$.
- En el intervalo $(1.57, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 > 0$. La función crece en $(1.57, +\infty)$.

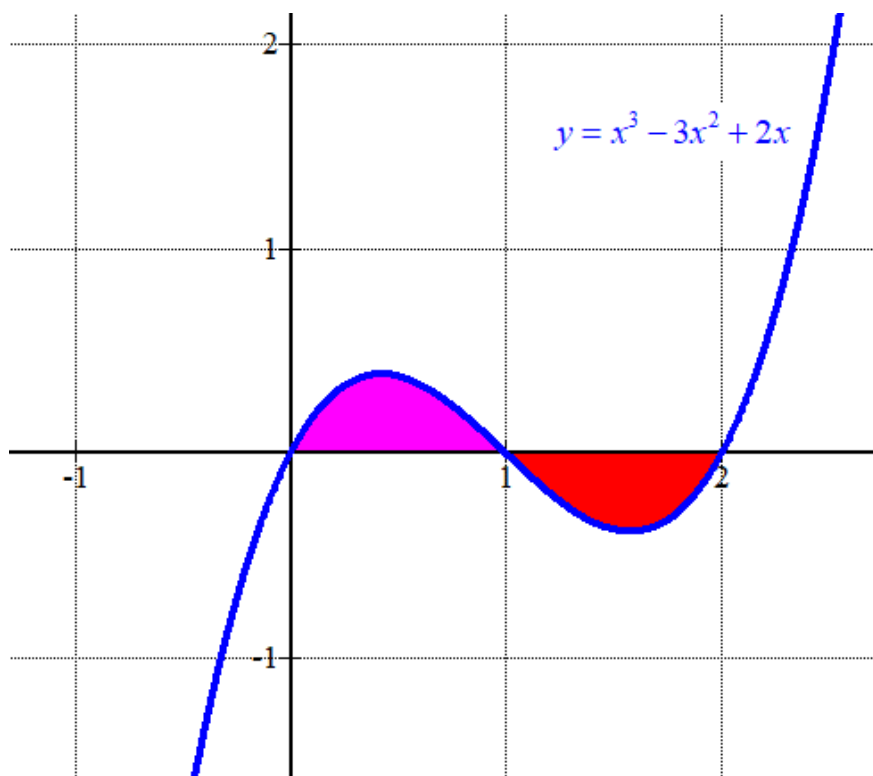
La función crece en $(-\infty, 0.42) \cup (1.57, +\infty)$ y decrece en $(0.42, 1.57)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = x^3 - 3x^2 + 2x$
0	0
$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	0.38
1	0
$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	-0.38
2	0



c) Nos piden hallar el área de la zona rayada del dibujo.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada observamos que el área es muy pequeña (menor que 1 unidad). El área la calculamos usando dos integrales definidas: una entre 0 y 1, la otra entre 1 y 2.

$$\text{Área 1} = \int_0^1 x^3 + 3x^2 + 2x = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 \right] = \frac{1}{4} u^2$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_1^2 x^3 + 3x^2 + 2x \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| = \left| \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] \right| = \frac{1}{4} u^2$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u^2$$

El área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 0.5 unidades cuadradas.

3. El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 gramos. Si se establece el intervalo (1499,9; 1539,1) como el intervalo de confianza para la media de una muestra de 144 empanadas a) ¿cuál es el valor de la media muestral?, ¿con qué nivel de confianza se construyó el intervalo? b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99%?

a) X = El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno. $X \approx N(\mu, 120)$

El tamaño de la muestra es $n = 144$. El intervalo de confianza es (1499.9, 1539.1).

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{1499.9 + 1539.1}{2} = 1519.5 \text{ gramos}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1539.1 - 1499.9}{2} = 19.6 \text{ gramos}$$

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ usando la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 19.6 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{120}{\sqrt{144}} \Rightarrow 19.6 = z_{\alpha/2} \cdot 10 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{19.6}{10} = 1.96$$

Determinamos el nivel de confianza partiendo de que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza es del 95 %.

b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Queremos que el error siga siendo 19.6 gramos. Utilizamos la fórmula del error para despejar el valor de n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 19.6 = 2.575 \cdot \frac{120}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 120}{19.6} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 120}{19.6} \right)^2 \approx 248.54$$

Para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99% deberíamos pesar, como mínimo 249 empanadas.

4. En una empresa, el 20% de los trabajadores tiene más de 30 años, el 8% ocupa un puesto directivo y el 6% tiene más de 30 años y ocupa un cargo directivo. a) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo? b) ¿Qué porcentaje de trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años? c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

Ponemos los datos proporcionados en una tabla de contingencia.

	Cargo directivo	No cargo directivo	
Más de 30 años	6		20
Menores de 30 años			
	8		100

Completamos la tabla.

	Cargo directivo	No cargo directivo	
Más de 30 años	6	14	20
Menores de 30 años	2	78	80
	8	92	100

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Un 14 % de los trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo.
- b) Un 78 % de los trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años.
- c) De los 100 trabajadores 2 son directivos y no tienen más de 30 años.

OPCIÓN B

1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,

- a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
 b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

a) Llamemos x = número de galletas blandas, y = número de galletas duras.

Realizamos una tabla con los datos.

	Kg de harina	Kg de nata	Ventas
Nº galletas blandas (x)	$0.25x$	$0.25x$	$6x$
Nº galletas duras (y)	$0.4y$	$0.1y$	$4.5y$
TOTALES	$0.25x + 0.4y$	$0.25x + 0.1y$	$6x + 4.5y$

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

- Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata $\rightarrow 0.25x + 0.4y \leq 160$; $0.25x + 0.1y \leq 100$.
- El número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades $\rightarrow x \geq 100 + y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

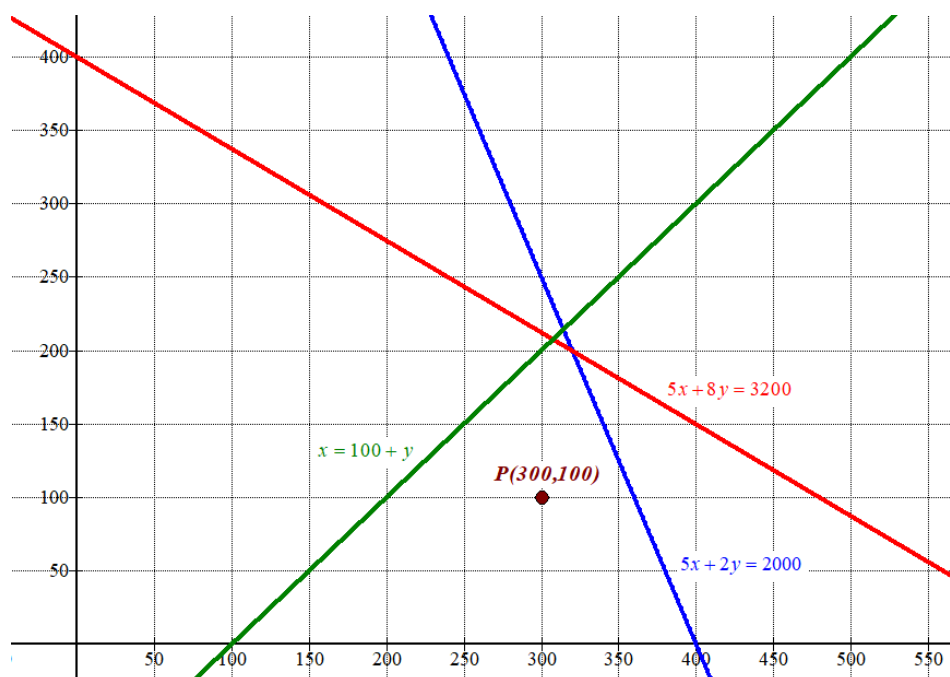
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.25x + 0.4y \leq 160 \\ 0.25x + 0.1y \leq 100 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25x + 40y \leq 16000 \\ 25x + 10y \leq 10000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo son las ventas $V(x, y) = 6x + 4.5y$ que deseamos maximizar.

b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y = \frac{3200 - 5x}{8}$	x	$y = \frac{2000 - 5x}{2}$	x	$y = x - 100$	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
0	400	0	1000	100	0	
400	150	200	500	200	100	
640	0	400	0	300	200	

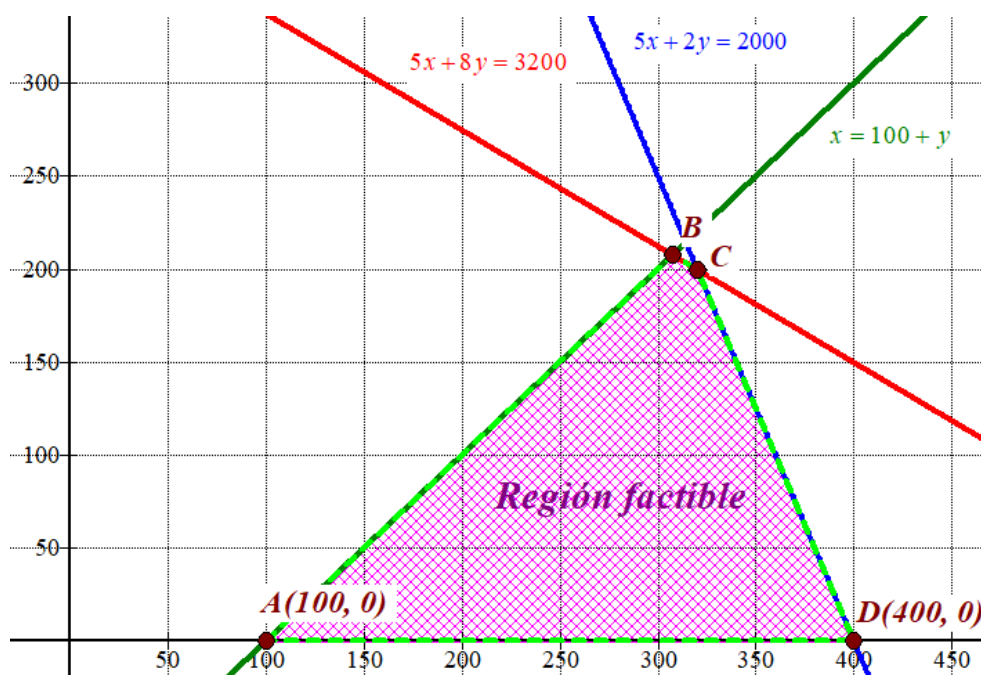


Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$. La región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas verde, azul y roja. Comprobamos que el punto $P(300, 100)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 300 + 8 \cdot 100 \leq 3200 \\ 5 \cdot 300 + 2 \cdot 100 \leq 2000 \\ 300 \geq 100 + 100 \\ 300 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



c) Debemos determinar las coordenadas de los puntos B y C.

$$B \rightarrow \begin{cases} x = 100 + y \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow 5(100 + y) + 8y = 3200 \Rightarrow 500 + 5y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y = 2700 \Rightarrow y = \frac{2700}{13} \Rightarrow x = 100 + \frac{2700}{13} = \frac{4000}{13} \Rightarrow B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 2000 \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2000 - 2y \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow 2000 - 2y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y = 1200 \Rightarrow y = \frac{1200}{6} = 200 \Rightarrow 5x = 2000 - 400 = 1600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1600}{5} = 320 \Rightarrow C(320, 200)$$

Valoramos la función objetivo $V(x, y) = 6x + 4.5y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(100, 0) \rightarrow V(100, 0) = 6 \cdot 100 + 4.5 \cdot 0 = 600$$

$$B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right) \rightarrow V\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right) = 6 \cdot \frac{4000}{13} + 4.5 \cdot \frac{2700}{13} \simeq 2780.769$$

$$C(320, 200) \rightarrow V(320, 200) = 6 \cdot 320 + 4.5 \cdot 200 = 2820 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(400, 0) \rightarrow V(400, 0) = 6 \cdot 400 + 4.5 \cdot 0 = 2400$$

Los máximos ingresos por ventas son 2820 euros y se consiguen con 320 galletas blandas y 200 duras.

2. El salario diario de un joven durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde t representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$S(t) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 25 + 10t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -0.5t^2 + 4t + 39 & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función salarial y representarla. b) ¿En qué momento recibió un salario máximo? ¿Y mínimo? Calcula estos salarios.

a) La función en el intervalo $[0,1)$ tiene la expresión $S(t) = 35$. Es constante.

La función en el intervalo $(1,2)$ tiene la expresión $S(t) = 25 + 10t$. Es una función lineal con pendiente 10 positiva y por tanto creciente.

La función en el intervalo $(2,5)$ tiene la expresión $S(t) = -0.5t^2 + 4t + 39$. Es una función parabólica. Buscamos su vértice (máximo o mínimo).

$$\left. \begin{array}{l} S'(t) = -t + 4 \\ S'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -t + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

- En el intervalo $(2,4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $S'(3) = -3 + 4 = 1 > 0$. La función crece en $(2,4)$.
- En el intervalo $(4,5)$ tomamos $t = 4.5$ y la derivada vale $S'(4.5) = -4.5 + 4 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(4,5)$.

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $t = 1$ y $t = 2$.

- En $t = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} S(1) = 25 + 10 = 35 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 35 = 35 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 25 + 10t = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow S(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} S(t) = 35$$

La función es continua en $t = 1$.

- En $t = 2$.

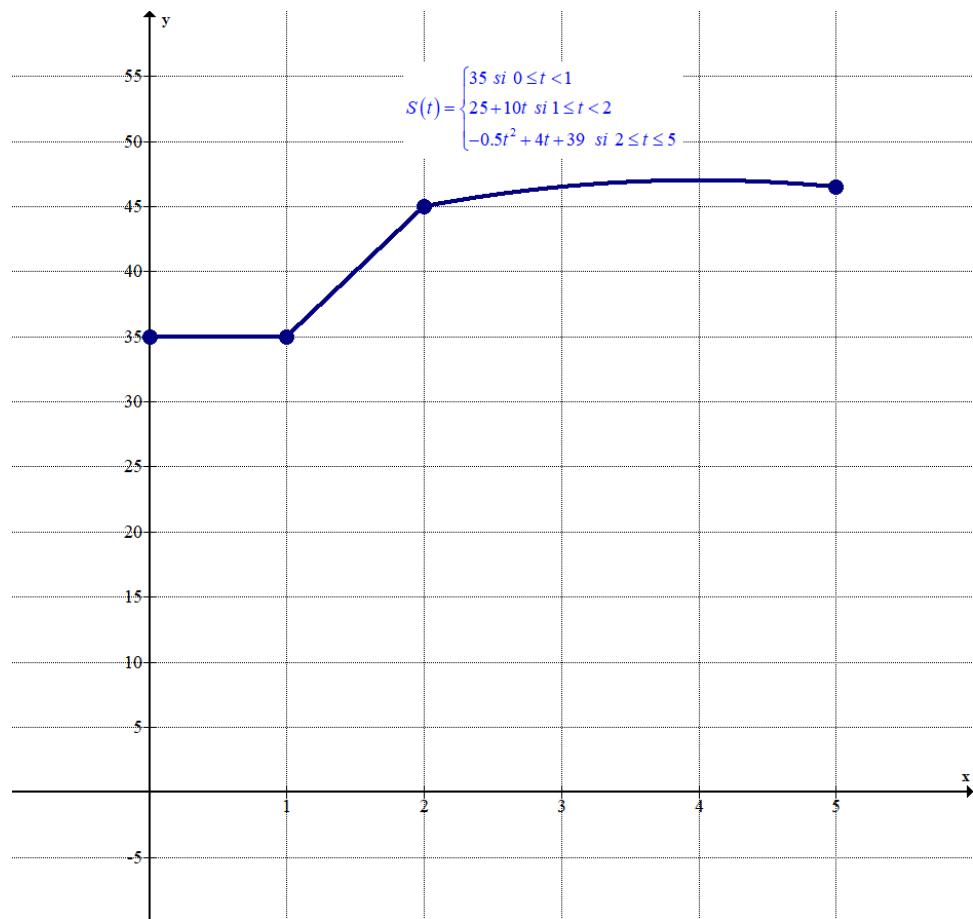
$$\left. \begin{array}{l} S(2) = -0.5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 39 = 45 \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 25 + 10t = 45 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} -0.5t^2 + 4t + 39 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow S(2) = \lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} S(t) = 45$$

La función es continua en $t = 2$.

La función es constante en $[0,1)$, crece en $(1,4)$ y decrece en $(4,5)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$S(t)$
0	35
1	35
2	45
3	46.5
4	47
5	46.5



- b) Observando la gráfica y con los datos de la tabla podemos decir que el salario máximo se produce en el año 4 siendo este salario máximo de 47 euros al día. El salario mínimo se produce durante el primer año, siendo este salario mínimo de 35 euros al día.

3. El 30% de los estudiantes de secundaria practican baloncesto. Entre los que practican baloncesto, el 40% practica también tenis. Entre los que no practican baloncesto, una cuarta parte practica tenis. Elegido un estudiante de ese instituto al azar, a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes? b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis? c) ¿Son independientes los sucesos “practicar tenis” y “practicar baloncesto”?

Pasamos estos datos porcentuales a valores absolutos.

Supongamos que son 200 los estudiantes de secundaria.

Hay $0.3 \cdot 200 = 60$ estudiantes que practican baloncesto. Los restantes $200 - 60 = 140$ no practican baloncesto.

Entre los que practican baloncesto (60), el 40% practica también tenis, es decir, $0.40 \cdot 60 = 24$ practican baloncesto y tenis.

Entre los que no practican baloncesto (140), una cuarta parte practica tenis, es decir, $\frac{1}{4} \cdot 140 = 35$

practica tenis y no baloncesto.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	
Tenis	24	35	
No tenis			
TOTALES	60	140	200

Completamos la tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	
Tenis	24	35	59
No tenis	36	105	141
TOTALES	60	140	200

Utilizando los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas en el ejercicio.

a) Hay 200 estudiantes y 24 practican los dos deportes. La probabilidad de que al elegir un estudiante al azar practique ambos deportes vale $\frac{24}{200} = 0.12$.

b) Hay 200 estudiantes y 59 practican tenis. La probabilidad de que al elegir un estudiante al azar practique tenis vale $\frac{59}{200} = 0.295$.

c) Llamamos T al suceso “practicar tenis” y B al suceso “practicar baloncesto”.

Para que los sucesos T y B sean independientes debe cumplirse $P(T \cap B) = P(T)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(T \cap B) = 0.12 \\ P(T)P(B) = \frac{59}{200} \cdot \frac{60}{200} = 0.0885 \end{array} \right\} \Rightarrow P(T \cap B) = 0.12 \neq 0.0885 = P(T)P(B)$$

Como las probabilidades son distintas los sucesos no son independientes.

4. Un consumidor cree que el peso medio de un producto es diferente al indicado en el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso promedio de 245 g. También se supone que el peso del producto por paquete sigue una distribución normal con una desviación típica de 9 g.

- a) Construya un intervalo de confianza para el peso medio de ese producto con un 95% de confianza.
 b) ¿Cuál sería el tamaño de muestra mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2g y un nivel de confianza del 90%?

a) X = El peso (en gramos) de un producto. $X \approx N(\mu, 9)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 245$ gramos.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Determinamos el error de estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1.764 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (245 - 1.764, 245 + 1.764) = (243.236, 246.764)$$

b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Queremos que el error sea de 2 gramos. Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 1.645 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 9}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 9}{2} \right)^2 \approx 54.79$$

Para que el error de estimación sea como máximo de 2g con un nivel de confianza del 90% la muestra debe ser de un mínimo de 55 productos.



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$

- (a) Calcula los valores de a , b y c para que se satisfaga la igualdad $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidad de orden 3.
(b) Para $a = 4$, $b = -3$ y $c = 1$ calcula el rango de la matriz $A + B - 2C$.

2. El precio en euros de las acciones de cierto grupo empresarial a lo largo de un año se estima por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11, & 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Determinar los períodos en los que el precio aumentó y en los que disminuyó y calcular su precio máximo y su precio mínimo
(b) Determinar el período en el que el precio de la acción fue inferior o igual a 13,75 euros. Representa la gráfica de la función $P(t)$.

3. El 60% de los individuos de una población están vacunados contra una determinada enfermedad. Durante una epidemia se sabe que el 20% contrajo la enfermedad y que el 3% está vacunado y contrajo la enfermedad.

- (a) Calcule el porcentaje de individuos que han contraído la enfermedad, entre los que no están vacunados.
(b) Calcule el porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad. Justifique si los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes o independientes.

4. (a) En una muestra aleatoria de 200 clientes de un centro comercial, 150 realizan sus compras utilizando la tarjeta del centro. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la proporción de clientes que realizan compras con la tarjeta del centro. Interpretar el intervalo obtenido.
(b) Si se sabe que 8 de cada 10 clientes del centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta del centro sea superior a 0,75?

OPCIÓN B

1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.

- (a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.

- (b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?
2. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = -x^2 + 4$.
- (a) Representar el recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, estudiando los puntos de intersección con los ejes, máximos, mínimos y los puntos donde ambas funciones se cruzan.
- (b) Calcular el área de dicho recinto.
3. Una multinacional realiza operaciones comerciales en tres mercados A, B y C. El 20% de las operaciones corresponden al mercado B y en los mercados A y C realiza el mismo número de operaciones. Los retrasos en el pago se producen en un 15%, el 10% y el 5% de las operaciones realizadas en los mercados A, B y C, respectivamente.
- (a) Calcule el porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos.
- (b) ¿Qué porcentaje de transacciones con pagos atrasados se realizaron en el mercado A?
4. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu, \sigma = 15)$.
- (a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el intervalo de confianza $(321.1, 330.9)$ para la media μ . Calcular el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
- (b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en la nueva planta sigue una distribución $N(\mu = 326, \sigma = 15)$. Calcule la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supera las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$

(a) Calcula los valores de a , b y c para que se satisfaga la igualdad $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidad de orden 3.

(b) Para $a = 4, b = -3$ y $c = 1$ calcula el rango de la matriz $A + B - 2C$.

(a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot B + B \cdot C = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b+a & 2 \\ 0 & b+a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b+c & b+c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & 2+b+c \\ 0 & -1+a+b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 2+b+c=0 \\ -1+a+b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} a+b+c=2 \\ \Rightarrow c=-b-2 \\ a=1-b \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1-b+b-b-2=2 \Rightarrow -b=3 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=3-2=1} \\ \boxed{a=1+3=4} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 4, b = -3$ y $c = 1$.

(b) Para $a = 4, b = -3$ y $c = 1$ calculamos la matriz $A + B - 2C$.

$$A + B - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz es nulo pues tiene la primera fila nula. El rango de la matriz es menor de 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ El rango de la matriz } A + B - 2C \text{ es } 2.$$

2. El precio en euros de las acciones de cierto grupo empresarial a lo largo de un año se estima por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11, & 3 < t \leq 12 \end{cases}.$$

- (a) Determinar los períodos en los que el precio aumentó y en los que disminuyó y calcular su precio máximo y su precio mínimo
 (b) Determinar el período en el que el precio de la acción fue inferior o igual a 13,75 euros. Representa la gráfica de la función $P(t)$.

(a) Comprobamos si la función es continua en $t = 3$.

$$\left. \begin{aligned} P(3) &= 15 + 2 \cdot 3 - 3^2 = 12 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 15 + 2t - t^2 = 12 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{1}{3}t + 11 = \frac{1}{3} \cdot 3 + 11 = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(3) = \lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t) = 12$$

La función es continua en $t = 3$. La función es continua en $[0, 12]$.

La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 12]$, siendo su derivada:

$$P'(t) = \begin{cases} 2 - 2t & 0 \leq t < 3 \\ \frac{1}{3} & 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

La función en el intervalo $(3, 12]$ tiene derivada $P'(t) = \frac{1}{3} > 0$. La función es creciente.

En el intervalo $[0, 3)$ la función tiene derivada $P'(t) = 2 - 2t$. Esta derivada se anula en $t = 1$, por lo que en dicho valor la función tiene un extremo relativo. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0, 1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale $P'(0.5) = 2 - 2 \cdot 0.5 = 1 > 0$. La función crece en $[0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.

La función tiene un máximo relativo en $t = 1$.

Resumiendo: La función crece en $[0, 1) \cup (3, 12]$ y decrece en $(1, 3)$. El precio aumentó durante el primer mes y a partir del tercer mes. Disminuyó entre el primer y el tercer mes.

Para encontrar el precio máximo y el precio mínimo de la función. Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición, en el máximo relativo y en el cambio de definición.

$$\left. \begin{aligned} P(0) &= 15 + 2 \cdot 0 - 0^2 = 15 \\ P(1) &= 15 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 16 \\ P(3) &= 12 \\ P(12) &= \frac{1}{3}12 + 11 = 15 \end{aligned} \right\}$$

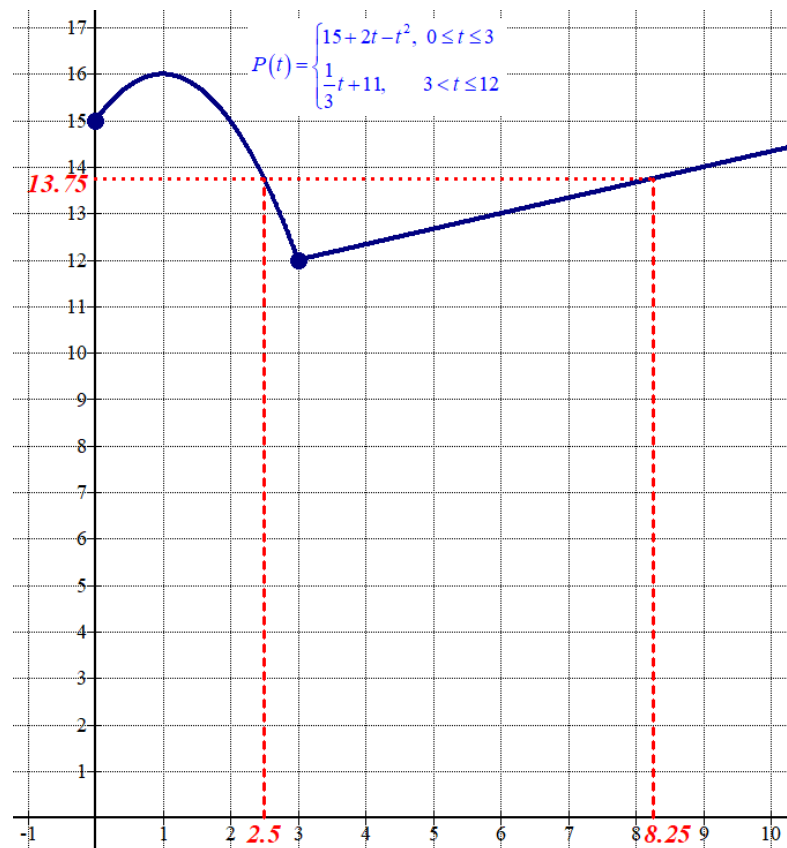
Como la función es continua podemos afirmar que el precio mínimo es de 12 euros en el tercer mes y el precio máximo es de 16 euros en el primer mes.

(b) Buscamos cuando la función vale 13.75.

$$P(t) = 13.75 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 15 + 2t - t^2 &= 13.75 \rightarrow t^2 - 2t - 1.25 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow t &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 5}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} = \begin{cases} t = \frac{2+3}{2} = 2.5 \in [0, 3) \\ t = \frac{2-3}{2} = -0.5 \notin [0, 3) \end{cases} \\ , 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11 &= 13.75 \rightarrow \frac{1}{3}t = 2.75 \rightarrow t = 8.25 \in (3, 12] \end{aligned} \right.$$

El precio es 13.75 euros en $t = 2.5$. Como de este valor a $t = 3$ la función decrece podemos afirmar que el precio es igual o inferior a 13.75 euros de 2.5 a 3.

El precio es 13.75 euros en $t = 8.25$. Como la función es continua el precio es inferior a 13.75 euros entre 2.5 y 8.25. Después el precio aumenta y supera este valor.



3. El 60% de los individuos de una población están vacunados contra una determinada enfermedad. Durante una epidemia se sabe que el 20% contrajo la enfermedad y que el 3% está vacunado y contrajo la enfermedad.
- (a) Calcule el porcentaje de individuos que han contraído la enfermedad, entre los que no están vacunados.
- (b) Calcule el porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad. Justifique si los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes o independientes.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos implícitos en los datos proporcionados en el problema.

	Contraen la enfermedad	No contraen la enfermedad	
Vacunados	3		60
No vacunados			
	20		100

Completamos la tabla.

	Contraen la enfermedad	No contraen la enfermedad	
Vacunados	3	57	60
No vacunados	17	23	40
	20	80	100

- (a) En la tabla se aprecia que de 40 no vacunados hay 17 que contraen la enfermedad. El porcentaje es $\frac{17}{40} = 0.425$. El 42.5 % de los no vacunados contraen la enfermedad.
- (b) Contrajeron la enfermedad 20 y de ellos 3 están vacunados. Esto significa $\frac{3}{20} = 0.15$.

El porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad es del 15 %. Llamamos C a "contraer la enfermedad" y V a "estar vacunado". Para que estos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(C \cap V) = P(C)P(V)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(C \cap V) = \frac{3}{100} = 0.03 \\ P(C)P(V) = \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{100} = 0.12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(C \cap V) = 0.03 \neq 0.12 = P(C)P(V)$$

Al ser las probabilidades distintas los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes.

4. (a) En una muestra aleatoria de 200 clientes de un centro comercial, 150 realizan sus compras utilizando la tarjeta del centro. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la proporción de clientes que realizan compras con la tarjeta del centro. Interpretar el intervalo obtenido.
- (b) Si se sabe que 8 de cada 10 clientes del centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta propia del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta del centro sea superior a 0,75?

- (a) La proporción muestral es $p = \frac{150}{200} = 0.75$ y el tamaño de la muestra es $n = 200$.

Para un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} \approx 0.06$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.06, 0.75 + 0.06) = (0.69, 0.81)$$

Con un nivel de confianza del 95% la proporción de clientes que utilizan la tarjeta del centro para pagar se sitúa entre el 69 % y el 81 %.

- (b) La proporción poblacional es $p = \frac{8}{10} = 0.8$.

La proporción muestral P para muestras de tamaño 100 sigue una distribución normal de media

$$p = 0.8 \text{ y desviación típica } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.04.$$

$$P = N(0.8, 0.04).$$

Nos piden calcular $P(P > 0.75)$.

$$P(P > 0.75) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{0.75 - 0.8}{0.04}\right) = P(Z > -1.25) =$$

$$= P(Z < 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8944}$$

OPCIÓN B

1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.

(a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.

(b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?

(a) Llamemos x = número de envases A, y = número de envases B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

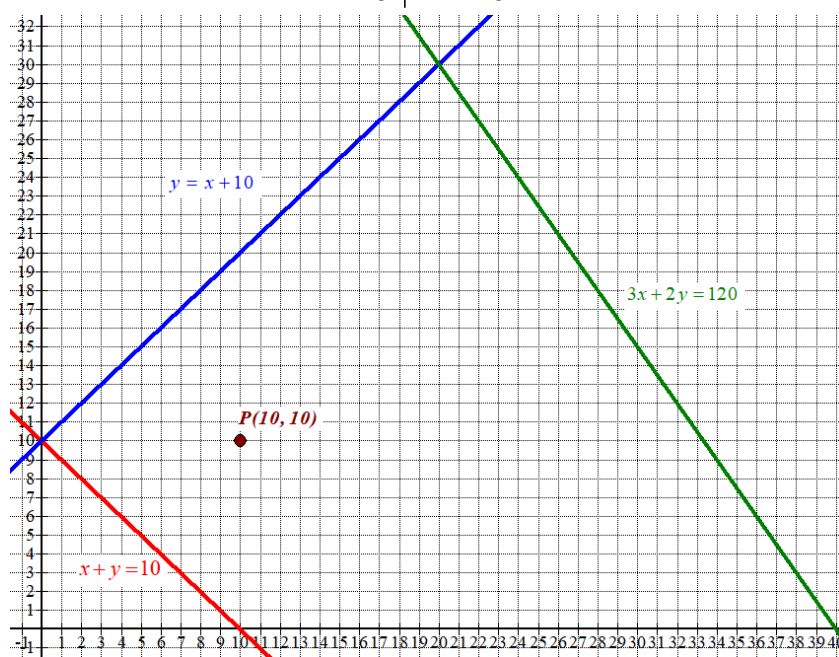
- Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total $\rightarrow x + y \geq 10$.
- El número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A $\rightarrow y \leq x + 10$.
- Cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción $\rightarrow 150x + 100y \leq 6000$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 150x + 100y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y = 10 - x$	x	$y = x + 10$	x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
0	10	0	10	0	60	
5	5	10	20	20	30	
10	0	20	30	40	0	

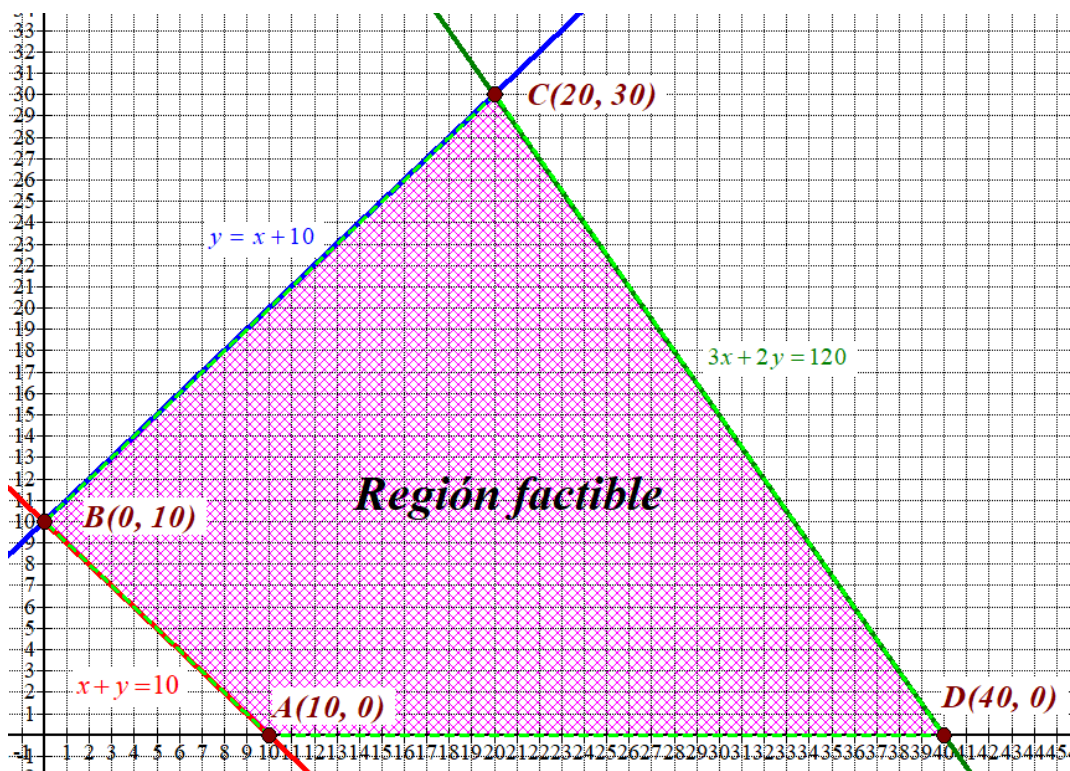


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas verde y azul, y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 10 \\ 10 \leq 10 + 10 \\ 30 + 20 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



(b) La función objetivo son los beneficios que vienen expresados por la función

$$B(x, y) = 130x + 140y$$

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 130 \cdot 10 + 140 \cdot 0 = 1300$$

$$B(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot 10 = 1400$$

$$C(20, 30) \rightarrow B(20, 30) = 130 \cdot 20 + 140 \cdot 30 = 6800 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 130 \cdot 40 + 140 \cdot 0 = 5200$$

El beneficio máximo tiene un valor de 6800 euros y se consiguen con 20 envases A y 30 envases B.

2. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = -x^2 + 4$.

- (a) Representar el recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, estudiando los puntos de intersección con los ejes, máximos, mínimos y los puntos donde ambas funciones se cruzan.
 (b) Calcular el área de dicho recinto.

(a) Puntos de intersección con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8 \Rightarrow \boxed{A(0, -8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 = x \rightarrow \boxed{B(2, 0)} \\ \frac{-2-6}{2} = -4 = x \rightarrow \boxed{C(-4, 0)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow \boxed{P(0, 4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(2, 0)} \\ \boxed{Q(-2, 0)} \end{cases}$$

Máximos, mínimos.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es mínimo relativo de } f(x)}$$

Como $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = -9$ el vértice de la parábola y mínimo relativo de la función es el punto de coordenadas $V(-1, -9)$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = -2x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$g''(x) = -2 \Rightarrow g''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es máximo relativo de } g(x)}$$

Como $g(0) = -0^2 + 4 = 4$ el vértice de la parábola y máximo relativo de la función es el punto de coordenadas $P(0, 4)$.

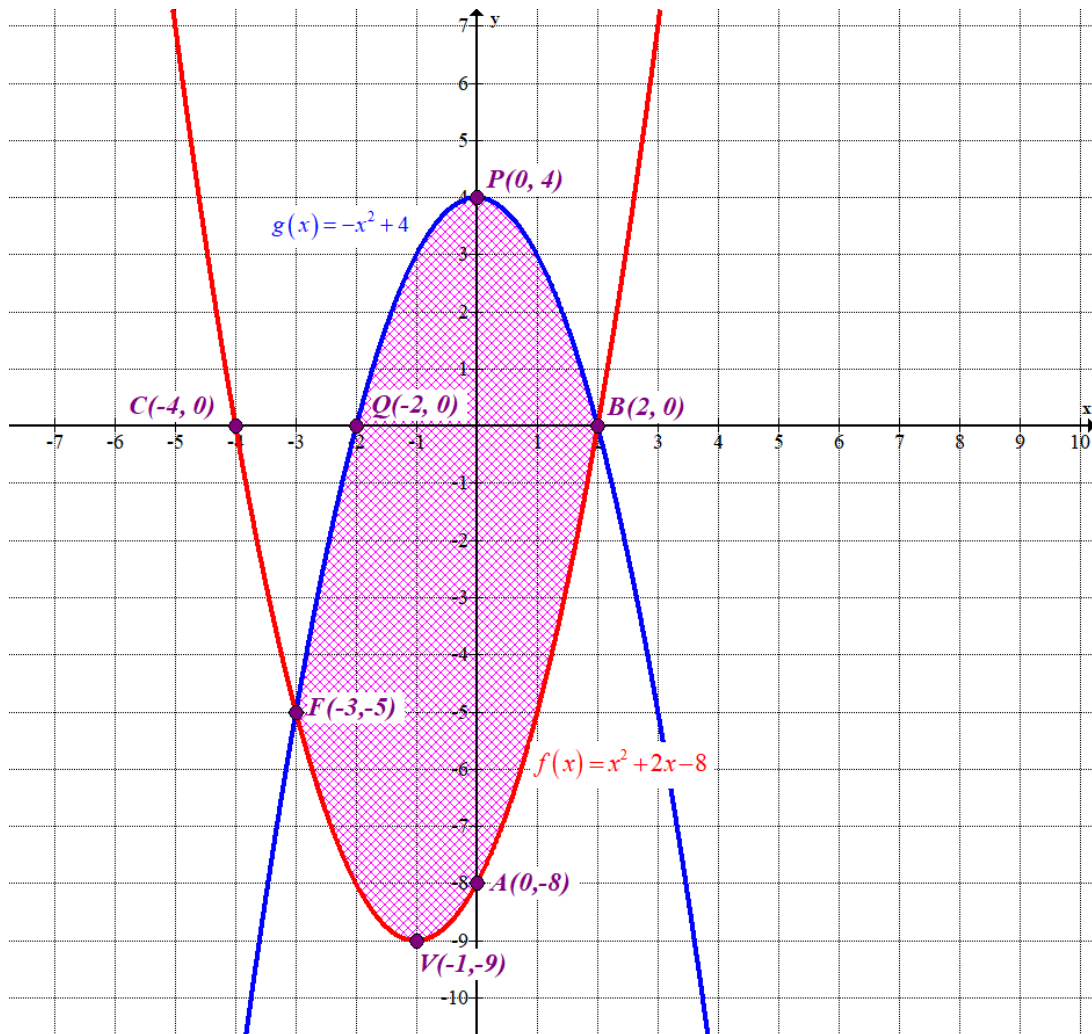
Puntos donde ambas funciones se cruzan.

$$g(x) = f(x) \Rightarrow -x^2 + 4 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

Como $g(-3) = -(-3)^2 + 4 = -5$ y $g(2) = -2^2 + 4 = 0$ las funciones se cortan en los puntos $F(-3, -5)$ y $B(2, 0)$.

Dibujamos las gráficas de las dos funciones remarcando la región del plano limitada por ellas.



- (b) El área del recinto coloreado es grande. Contando cuadraditos contiene más de 30 cuadraditos, es decir, es mayor de 30 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. Como en el intervalo $[-3, 2]$ se cumple que $g(x) \geq f(x)$ el valor del área es la integral definida entre -3 y 2 de la diferencia entre las dos funciones: $g(x) - f(x)$.

$$\int_{-3}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-3}^2 -x^2 + 4 - (x^2 + 2x - 8) dx = \int_{-3}^2 -x^2 + 4 - x^2 - 2x + 8 dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^2 -2x^2 - 2x + 12 dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} - x^2 + 12x \right]_{-3}^2 = \\ &= \left[-2 \frac{2^3}{3} - 2^2 + 12 \cdot 2 \right] - \left[-2 \frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 12(-3) \right] = \\ &= -\frac{16}{3} - 4 + 24 - 18 + 9 + 36 = \boxed{\frac{125}{3} \approx 41.6667 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un área de $\frac{125}{3} \approx 41.6667$ unidades cuadradas.

3. Una multinacional realiza operaciones comerciales en tres mercados A, B y C. El 20% de las operaciones corresponden al mercado B y en los mercados A y C realiza el mismo número de operaciones. Los retrasos en el pago se producen en un 15%, el 10% y el 5% de las operaciones realizadas en los mercados A, B y C, respectivamente.
- (a) Calcule el porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos.
- (b) ¿Qué porcentaje de transacciones con pagos atrasados se realizaron en el mercado A?

Supongamos que se realizan 1000 operaciones comerciales en los tres mercados.

El 20% de las operaciones corresponden al mercado B, estas serían $0.20 \cdot 1000 = 200$ operaciones.

Las restantes $1000 - 200 = 800$ se realizan a partes iguales en los mercados A y C, lo que supone que se realizan 400 operaciones en cada uno de los mercados A y C.

El 15% de las operaciones realizadas en el mercado A (400) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.15 \cdot 400 = 60$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado A.

El 10% de las operaciones realizadas en el mercado B (200) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.10 \cdot 200 = 20$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado B.

El 5% de las operaciones realizadas en el mercado C (400) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.05 \cdot 400 = 20$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado C.

Colocamos todos estos datos en una tabla.

	Operaciones con retraso en los pagos	Operaciones sin retraso en los pagos	
Mercado A	60		400
Mercado B	20		200
Mercado C	20		400
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Operaciones con retraso en los pagos	Operaciones sin retraso en los pagos	
Mercado A	60	340	400
Mercado B	20	180	200
Mercado C	20	380	400
TOTALES	100	900	1000

Utilizando los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

- (a) De las 1000 operaciones sufren retrasos en los pagos en 100 de ellas. El porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos es de

$$\frac{100}{1000} = 0.1 = 10\%.$$

- (b) De las 100 operaciones que sufren retrasos en los pagos 60 son del mercado A.

El porcentaje de transacciones con pagos que sufren retrasos que se realizaron en el mercado A es

$$\text{del } \frac{60}{100} = 0.6 = 60\%$$

4. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu, \sigma = 15)$.
- (a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el intervalo de confianza $(321.1, 330.9)$ para la media μ . Calcular el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
- (b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en la nueva planta sigue una distribución $N(\mu = 326, \sigma = 15)$. Calcule la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supera las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

- (a) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta. $X \approx N(\mu, 15)$

El tamaño de la muestra es $n = 36$. El intervalo de confianza es $(321.1, 330.9)$.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{330.9 + 321.1}{2} = 326 \text{ horas}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{330.9 - 321.1}{2} = 4.9 \text{ horas}$$

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{4.9}{2.5} = 1.96$$

Determinamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza con que se ha construido el intervalo es del 95 %.

- (b) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta. $X \approx N(326, 15)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (326 horas) y con desviación típica $\sigma = \frac{15}{\sqrt{36}} = 2.5$ horas. $\bar{X}_{36} = N(326, 2.5)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{36} \leq 330)$.

$$P(\bar{X}_{36} \leq 330) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{330 - 326}{2.5}\right) = P(Z \leq 1.6) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9452}$$

La probabilidad de que el tiempo medio de formación no supere las 330 horas, en muestras de 36 empleados es de 0.9452.



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(El alumno/a debe responder solo a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula los valores de x e y para los que se cumple la igualdad $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determina el rango de las matrices A y B .

(c) Calcula X en la ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz traspuesta de A e I matriz identidad de orden 3.

2. El número de unidades en miles vendidas por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia, fue estimada por la función $V(t) = \begin{cases} 12t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18t + 12 & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases}$, t es el tiempo

transcurrido en meses desde la creación de la empresa.

(a) En los primeros siete meses, calcule el pico de ventas y el mes en que se alcanzaron. Justifica si fueron las mayores ventas logradas por la empresa ese año. Representa la gráfica de $V(t)$.

(b) A partir del séptimo mes, ¿en qué período el número de ventas fue menor o igual a 32 000 unidades?

3. Según cierto estudio del departamento de ventas de unos grandes almacenes, el 30% de sus clientes son hombres, el 25% de sus clientes compra algún producto del departamento de electrónica y el 40% de los que compran algún producto del departamento de electrónica son mujeres.

(a) ¿Qué porcentaje de sus clientes son mujeres y compran algún producto del departamento de electrónica?

(b) Si un cliente elegido al azar es hombre, calcula la probabilidad de que no compre ningún producto del departamento de electrónica.

4. Una empresa de informática ha lanzado al mercado un producto del que sabe que su vida útil, en años, sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 1,6$ años.

(a) Para una muestra aleatoria de 100 productos, la vida útil promedio fue de 4,6 años. Calcule un intervalo del 95% de confianza para estimar la vida útil promedio del producto. Interpretar el intervalo obtenido.

(b) Suponga que la vida útil del producto sigue una distribución $N(4.6, 1.6)$ y se toma una muestra aleatoria de 64 productos. Calcula la probabilidad de que la vida útil promedio de la muestra esté entre 4,25 y 4,95 años.

OPCIÓN B

1. Sea la función lineal $f(x, y) = 2x - 3y$ sujeta a las restricciones

$$x + 2y \leq 40, \quad x + y \geq 5, \quad 3x + y \leq 45, \quad x \geq 0.$$

(a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

(b) Calcula el punto o puntos de esa región donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

2. Los beneficios de una compañía en millones de euros, en sus primeros siete años, fueron estimados por la función $B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx$, $0 \leq x \leq 7$, donde x indica el tiempo transcurrido en años, desde su fundación.

(a) Calcula los valores de a y b sabiendo que la empresa obtuvo un beneficio máximo de 8 millones de euros en el segundo año

(b) Supongamos que $a = 1/4$ y $b = 9$. Determina cuándo la empresa no fue rentable. Calcula $\int_0^6 B(x) dx$.

3. En un supermercado se vende un artículo distribuido en tres marcas diferentes A, B y C. Se observa que el 30% de las ventas diarias del artículo son de la marca A, el 50% son de la marca B y el resto son de la marca C. También se sabe que el 60% de las ventas de la marca A se realizan por la mañana, el 55% de las ventas de la marca B se realizan por la tarde y el 40% de las de la marca C se venden por la mañana.

(a) Calcule el porcentaje de ventas del artículo realizadas en la mañana.

(b) Si la venta se realizó por la tarde, calcula la probabilidad de que el artículo sea de la marca C.

4. Como resultado de una encuesta en la que se utilizó el supuesto de máxima indeterminación ($p = 1 - p = 1/2$), se afirma que, con un 97,56% de confianza, el porcentaje de individuos en una población que consideran el alcohol y/o las drogas como principal causa de accidentes de tráfico está entre el 57,5% y el 62,5%.

(a) Calcula el número de individuos de esa población que fueron encuestados.

(b) De los encuestados, ¿cuántos respondieron que la principal causa de accidentes es el alcohol y/o las drogas?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula los valores de x e y para los que se cumple la igualdad $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determina el rango de las matrices A y B .

(c) Calcula X en la ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz traspuesta de A e I matriz identidad de orden 3.

(a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$\begin{aligned} C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-3y \\ x+y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1+x \\ -y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-3y = -1+x \\ x+y = -y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-3y = -1 \\ x = -2y-1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow -3(-2y-1)-3y &= -1 \Rightarrow 6y+3-3y = -1 \Rightarrow 3y = -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{y = \frac{-4}{3}} &\Rightarrow \boxed{x = -2\frac{-4}{3}-1 = \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Los valores que hacen que se cumpla la igualdad son $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{-4}{3}$.

(b) Determinamos el rango de A . Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 1 + 0 - 0 - 0 - 3 = 16 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo su rango es 3.

Determinamos el rango de B . Calculamos su determinante.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - 0 - 0 - 8 = 0$$

El determinante de B es nulo. Su rango no es 3.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

Como el determinante del menor es no nulo el rango de B es 2.

(c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X + A^t = 2I + B \Rightarrow X = 2I + B - A^t$$

Determinamos la expresión de la matriz X realizando las operaciones indicadas.

$$X = 2I + B - A^t = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$ es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. El número de unidades en miles vendidas por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia, fue estimada por la función $V(t) = \begin{cases} 12t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18t + 112 & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases}$, t es el tiempo transcurrido en meses desde la creación de la empresa.
- (a) En los primeros siete meses, calcule el pico de ventas y el mes en que se alcanzaron. Justifica si fueron las mayores ventas logradas por la empresa ese año. Representa la gráfica de $V(t)$.
- (b) A partir del séptimo mes, ¿en qué período el número de ventas fue menor o igual a 32 000 unidades?

- (a) En los primeros siete meses la función tiene la expresión $V(t) = 12t - t^2$. Averiguamos cuando se anula la derivada (vértice de la parábola y máximo o mínimo de la función).

$$\left. \begin{array}{l} V'(t) = 12 - 2t \\ V'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 - 2t = 0 \Rightarrow 2t = 12 \Rightarrow \boxed{t = \frac{12}{2} = 6}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$V'(t) = 12 - 2t \Rightarrow V''(t) = -2 \Rightarrow V''(6) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en el sexto mes. Sustituimos en la función el valor $t = 6$.

$$V(6) = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36$$

Durante los primeros 7 meses hay un pico de ventas en el sexto mes siendo el número de ventas de 36 000 unidades.

A partir del séptimo mes las ventas tienen la expresión $V(t) = t^2 - 18t + 112$. Esta expresión es la de una función parabólica. Hallamos su extremo.

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = t^2 - 18t + 12 \Rightarrow V'(t) = 2t - 18 \\ V'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2t - 18 = 0 \Rightarrow 2t = 18 \Rightarrow t = 9$$

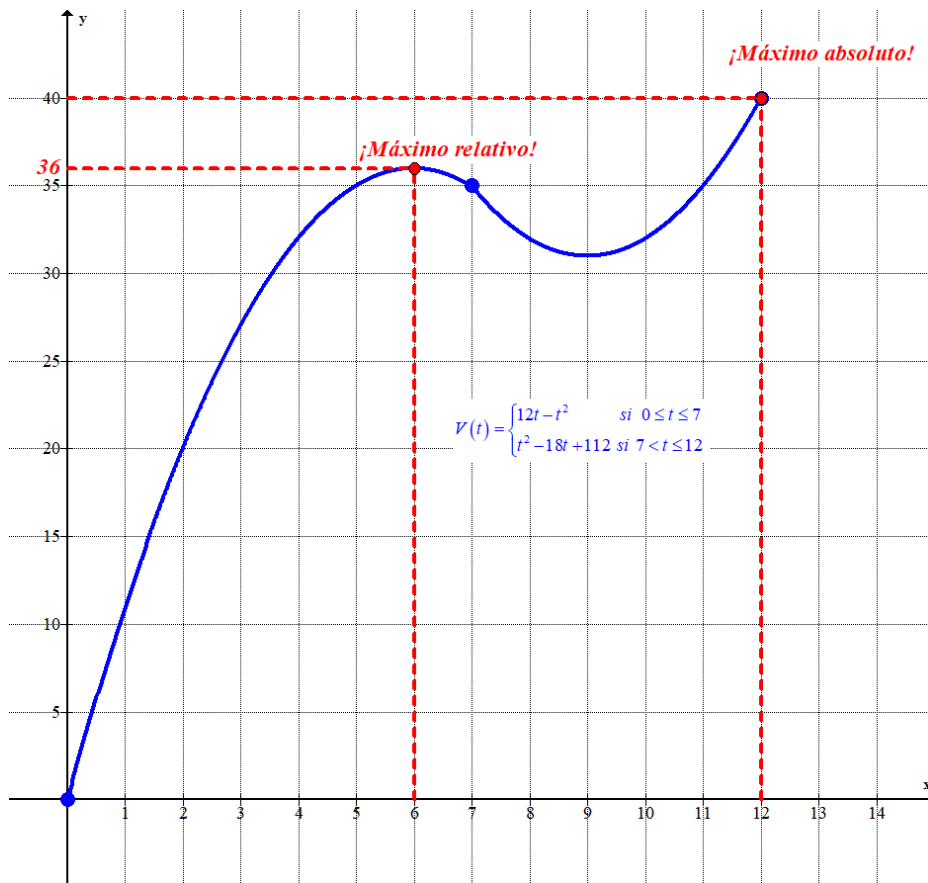
$$V''(t) = 2 \Rightarrow V''(9) = 2 > 0$$

A partir del séptimo mes la función presenta un mínimo en $t = 9$.

Valoramos la función $V(t) = t^2 - 18t + 12$ en $t = 7$, en $t = 9$ y en $t = 12$.

$$\left. \begin{array}{l} V(7) = 7^2 - 18 \cdot 7 + 112 = 35 \\ V(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 112 = 31 \\ V(12) = 12^2 - 18 \cdot 12 + 112 = 40 \end{array} \right\}$$

Como en el sexto mes las ventas son de 36 000 unidades este sería un máximo relativo, pero el máximo absoluto de la función ventas se obtiene en el mes 12, siendo las ventas de 40 000 unidades. Durante todo el año el pico de ventas se obtiene en diciembre.

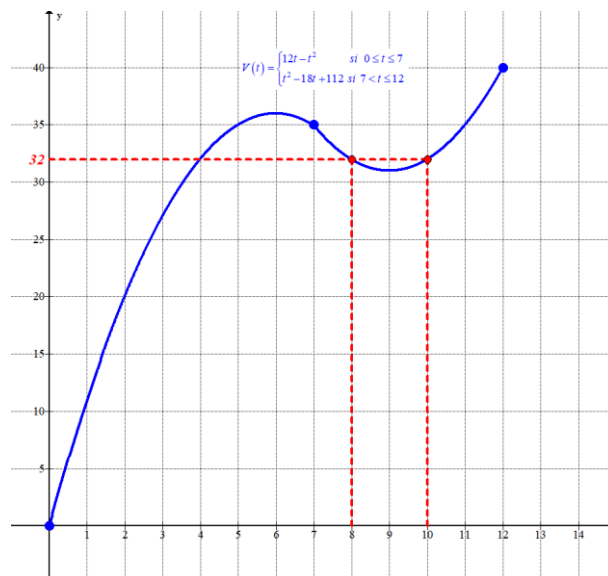


(b) Averiguamos cuando el número de ventas fue igual a 32 000 unidades a partir del séptimo mes.

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = t^2 - 18t + 112 \\ V(t) = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 18t + 112 = 32 \Rightarrow t^2 - 18t + 80 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 320}}{2} = \frac{18 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{18+2}{2} = 10 \\ \frac{18-2}{2} = 8 \end{cases}$$

A partir del séptimo mes la función ventas alcanza el valor 32 en el octavo mes y en el décimo. Las ventas a partir del séptimo mes son inferiores a 32 000 unidades entre los meses octavo y décimo.



3. Según cierto estudio del departamento de ventas de unos grandes almacenes, el 30% de sus clientes son hombres, el 25% de sus clientes compra algún producto del departamento de electrónica y el 40% de los que compran algún producto del departamento de electrónica son mujeres.
- (a) ¿Qué porcentaje de sus clientes son mujeres y compran algún producto del departamento de electrónica?
- (b) Si un cliente elegido al azar es hombre, calcula la probabilidad de que no compre ningún producto del departamento de electrónica.

Si el 40% de los que compran algún producto del departamento de electrónica (25%) son mujeres tenemos que $0.40 \cdot 25 = 10\%$ del total de los clientes son mujeres que compran algún producto del departamento de electrónica

Colocamos todos los datos proporcionados en una tabla de contingencia.

	Compran en departamento de electrónica	No compran en departamento de electrónica	
Hombres			30
Mujeres	10		
	25		100

Completamos la tabla.

	Compran en departamento de electrónica	No compran en departamento de electrónica	
Hombres	15	15	30
Mujeres	10	60	70
	25	75	100

Respondemos a las preguntas planteadas.

- (a) El porcentaje de sus clientes que son mujeres y compran algún producto del departamento de electrónica es del 10 %. Calculado al comienzo del ejercicio.
- (b) Entre los clientes hay un 30 % de hombres y de estos un 15 % no compran ningún producto de electrónica. La probabilidad de que al elegir un hombre no compre ningún producto del departamento de electrónica tiene un valor de $\frac{15}{30} = 0.5$.

4. Una empresa de informática ha lanzado al mercado un producto del que sabe que su vida útil, en años, sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 1,6$ años.
- (a) Para una muestra aleatoria de 100 productos, la vida útil promedio fue de 4,6 años. Calcule un intervalo del 95% de confianza para estimar la vida útil promedio del producto. Interpretar el intervalo obtenido.
- (b) Suponga que la vida útil del producto sigue una distribución $N(4.6, 1.6)$ y se toma una muestra aleatoria de 64 productos. Calcula la probabilidad de que la vida útil promedio de la muestra esté entre 4,25 y 4,95 años.

- (a) $X =$ Vida útil, en años de un producto. $X \approx N(\mu, 1.6)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 4.6$ años.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.6}{\sqrt{100}} = 0.3136 \text{ años}$$

El intervalo de confianza para un nivel de confianza del 95% de la media poblacional es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4.6 - 0.3136, 4.6 + 0.3136) = (4.2864, 4.9136)$$

Con un nivel de confianza del 95% podemos afirmar que la media de la vida útil de un producto está entre 4.2864 y 4.9136 años.

- (b) $X =$ Vida útil, en años de un producto. $X \approx N(4.6, 1.6)$

La distribución de las medias muestrales de tamaño 64 sigue una distribución normal con la misma media (4.6 años) y con desviación típica $\sigma = \frac{1.6}{\sqrt{64}} = 0.2$ años. $\bar{X}_{64} = N(4.6, 0.2)$

Nos piden calcular $P(4.25 \leq \bar{X}_{64} \leq 4.95)$.

$$\begin{aligned} P(4.25 \leq \bar{X}_{64} \leq 4.95) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{4.25 - 4.6}{0.2} \leq Z \leq \frac{4.95 - 4.6}{0.2} \right) = \\ &= P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) = P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = \\ &= 2P(Z \leq 1.75) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 2 \cdot 0.9599 - 1 = \boxed{0.9198} \end{aligned}$$

La probabilidad de que la vida útil promedio de la muestra esté entre 4,25 y 4,95 años es de 0.9198.

OPCIÓN B

1. Sea la función lineal $f(x, y) = 2x - 3y$ sujeta a las restricciones

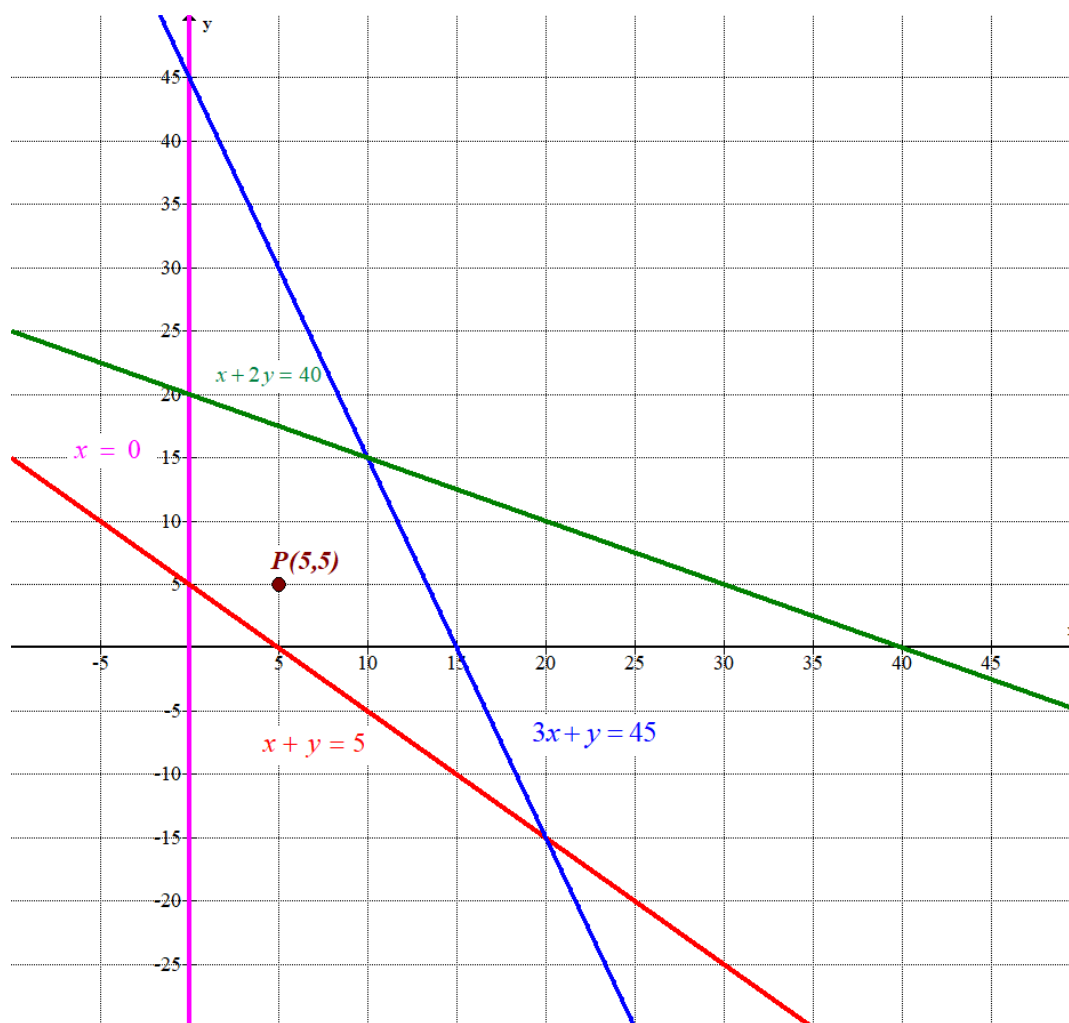
$$x + 2y \leq 40, \quad x + y \geq 5, \quad 3x + y \leq 45, \quad x \geq 0.$$

(a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

(b) Calcula el punto o puntos de esa región donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

(a) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

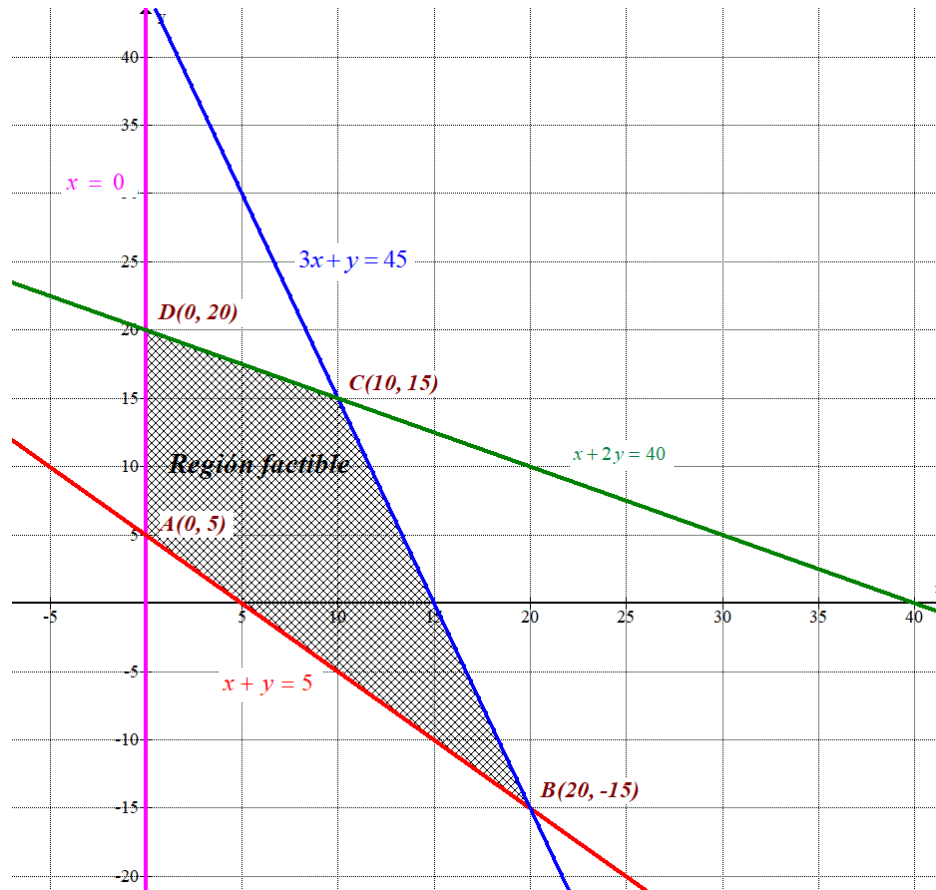
x	$y = \frac{40-x}{2}$	x	$y = 5-x$	x	$y = 45-3x$	$x=0$	y
0	20	0	5	0	45	0	0
10	15	5	0	10	15	0	5
40	0	20	-15	20	-15	0	10



Como las restricciones son $x + 2y \leq 40$, $x + y \geq 5$, $3x + y \leq 45$, $x \geq 0$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas verde y azul, por encima de la recta roja y a la derecha de la recta vertical rosa (eje OY). Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 2 \cdot 5 \leq 40 \\ 5 + 5 \geq 5 \\ 3 \cdot 5 + 5 \leq 45 \\ 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son A(0, 5), B(20, -15), C(10, 15) y D(0, 20).

(b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 2x - 3y$ en cada vértice de la región factible en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, 5) \rightarrow f(0, 5) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15$$

$$B(20, -15) \rightarrow f(20, -15) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot (-15) = 85 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(10, 15) \rightarrow f(10, 15) = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 15 = -25$$

$$D(0, 20) \rightarrow f(0, 20) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 20 = -60 \text{ ¡Mínimo!}$$

El valor máximo es 85 y se consigue en el vértice (20, -15).

El valor mínimo es -60 y se consigue en el vértice (0, 20).

2. Los beneficios de una compañía en millones de euros, en sus primeros siete años, fueron estimados por la función $B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx$, $0 \leq x \leq 7$, donde x indica el tiempo transcurrido en años, desde su fundación.

(a) Calcula los valores de a y b sabiendo que la empresa obtuvo un beneficio máximo de 8 millones de euros en el segundo año

(b) Supongamos que $a = 1/4$ y $b = 9$. Determina cuándo la empresa no fue rentable. Calcula $\int_0^6 B(x) dx$.

(a) La función beneficios vale 8 para $x = 2 \rightarrow B(2) = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx \\ B(2) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = a \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 \Rightarrow 8 = 8a - 12 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8a + 2b = 20 \Rightarrow 4a + b = 10 \Rightarrow \boxed{b = 10 - 4a}$$

La función tiene un máximo para $x = 2$, por lo que la derivada se anula para este valor.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = 3ax^2 - 6x + b \\ B'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 12a - 12 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 12 - 12a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = 10 - 4a \\ b = 12 - 12a \end{array} \right\} \Rightarrow 10 - 4a = 12 - 12a \Rightarrow 8a - 2 = 0 \Rightarrow 4a - 1 = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{b = 10 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 9}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{4}$ y $b = 9$.

(b) Si $a = 1/4$ y $b = 9$ la función queda $B(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$, $0 \leq x \leq 7$.

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^6 B(x) dx &= \int_0^6 \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} - x^3 + 9 \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \left[\frac{x^4}{16} - x^3 + 9 \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \\ &= \left[\frac{6^4}{16} - 6^3 + 9 \frac{6^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{16} - 0^3 + 9 \frac{0^2}{2} \right] = \boxed{27} \end{aligned}$$

3. En un supermercado se vende un artículo distribuido en tres marcas diferentes A, B y C. Se observa que el 30% de las ventas diarias del artículo son de la marca A, el 50% son de la marca B y el resto son de la marca C. También se sabe que el 60% de las ventas de la marca A se realizan por la mañana, el 55% de las ventas de la marca B se realizan por la tarde y el 40% de las de la marca C se venden por la mañana.
- (a) Calcule el porcentaje de ventas del artículo realizadas en la mañana.
- (b) Si la venta se realizó por la tarde, calcula la probabilidad de que el artículo sea de la marca C.

Supongamos que se venden 200 artículos diarios vamos a pasar los valores en porcentaje a valores absolutos.

Se observa que el 30% de las ventas diarias del artículo son de la marca A, por lo que $0.30 \cdot 200 = 60$ de los artículos vendidos son de la marca A.

El 50% son de la marca B, por lo que $0.50 \cdot 200 = 100$ de los artículos vendidos son de la marca B.

El resto son de la marca C, por lo que $200 - 60 - 100 = 40$ son de la marca C.

También se sabe que el 60% de las ventas de la marca A (60) se realizan por la mañana, es decir, $0.60 \cdot 60 = 36$ se venden por la mañana.

El 55% de las ventas de la marca B (100) se realizan por la tarde, es decir, $0.55 \cdot 100 = 55$ se venden por la tarde

El 40% de las de la marca C (40) se venden por la mañana, es decir, $0.40 \cdot 40 = 16$ se venden por la mañana.

Colocamos toda esta información en una tabla.

	Mañana	Tarde	
Marca A	36		60
Marca B		55	100
Marca C	16		40
TOTALES			200

Completamos la tabla.

	Mañana	Tarde	
Marca A	36	24	60
Marca B	45	55	100
Marca C	16	24	40
TOTALES	97	103	200

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas.

- (a) De los 200 artículos vendidos por la mañana se vendieron 97. El porcentaje de ventas del artículo realizadas en la mañana es $\frac{97}{200} = 0.485 = 48.5\%$.
- (b) Por la tarde se vendieron 103 artículos y de estos 24 fueron de la marca C. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que el artículo vendido por la tarde sea de la marca C tiene un valor de $\frac{24}{103} \approx 0.233$.

4. Como resultado de una encuesta en la que se utilizó el supuesto de máxima indeterminación ($p = 1 - p = 1/2$), se afirma que, con un 97,56% de confianza, el porcentaje de individuos en una población que consideran el alcohol y/o las drogas como principal causa de accidentes de tráfico está entre el 57,5% y el 62,5%.

(a) Calcula el número de individuos de esa población que fueron encuestados.

(b) De los encuestados, ¿cuántos respondieron que la principal causa de accidentes es el alcohol y/o las drogas?

(a) El intervalo de confianza es (0.575, 0.625).

Para un nivel de confianza del 97.56% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9756 \rightarrow \alpha = 0.0244 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0122 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9878 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.25$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.625 - 0.575}{2} = 0.025$$

Determinamos el valor de n utilizando la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.025 = 2.25 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.025}{2.25} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.025}{2.25}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n \left(\frac{0.025}{2.25}\right)^2 = 0.25 \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.025}{2.25}\right)^2} = 2025}$$

Se encuestó a 2025 individuos.

(b) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.575 + 0.625}{2} = 0.60$$

Esta proporción muestral significa que el 60 % de los encuestados respondió que la principal causa de accidentes es el alcohol y/o las drogas.

Como se encuestó a 2025 individuos, calculamos el 60 % de 2025: $0.6 \cdot 2025 = 1215$.

De los 2025 individuos encuestados 1215 respondió que la principal causa de accidentes es el alcohol y/o las drogas.