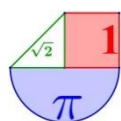
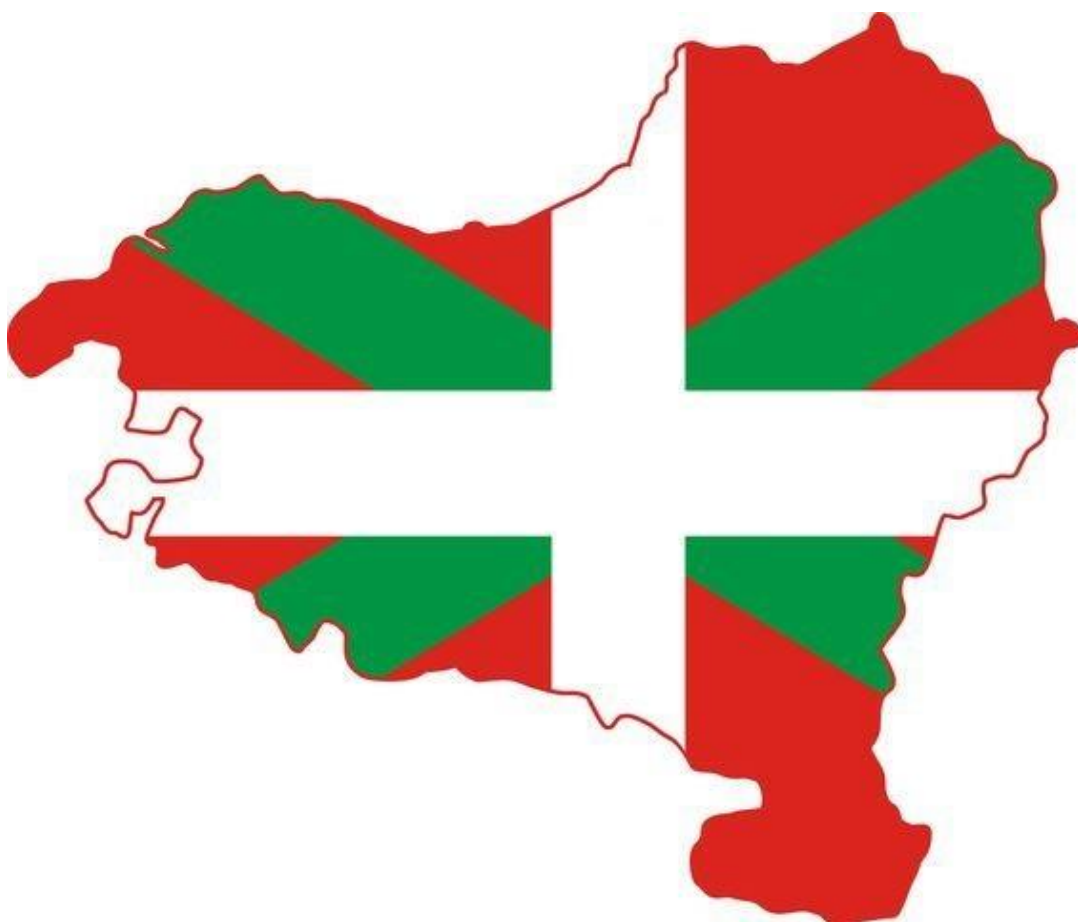


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en el País Vasco Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad del País Vasco desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU extraordinaria 2026	3
PAU ordinaria 2026.....	20
PAU extraordinaria 2025	36
PAU ordinaria 2025.....	57
EAU extraordinaria 2024	78
EAU ordinaria 2024	93
EAU extraordinaria 2023	108
PAU ordinaria 2023.....	123
PAU extraordinaria 2022	141
EAU ordinaria 2022	157
EAU extraordinaria 2021	173
EAU ordinaria 2021	186
EAU extraordinaria 2020	204
EAU ordinaria 2020	218
EAU extraordinaria 2019	232
EAU ordinaria 2019	247
EAU extraordinaria 2018	260
EAU ordinaria 2018	274
EAU extraordinaria 2017	289
EAU ordinaria 2017	303



PAU extraordinaria 2026
UNIVERSITATEAN SARTZEKO PRUEBA DE ACCESO A LA
PROBA UNIVERSIDAD
2026ko EZOHIOA EXTRAORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI MATEMÁTICAS APLICADAS A
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

El examen costa de CUATRO problemas:

En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.

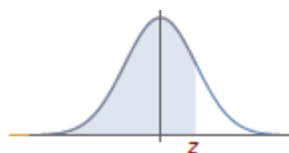
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.

Se podrán usar calculadoras **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes, derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

En el cuaderno del examen deberán figurar las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalera

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIVERSITATEAN SARTZEKO
PROBA
2026ko EZOHIOA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
A LAS CIENCIAS SOCIALES II

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Un pastelero está experimentando con las recetas de dos tipos de dulces que quiere comercializar. Todavía no tiene pensado el nombre, así que de momento les llama dulce tipo A y dulce tipo B. Para la receta del dulce tipo A, además de otros ingredientes, sabe seguro que va a necesitar 70 g de harina y 20 g de azúcar, mientras que para la del tipo B usará 60 g de harina y 10 g de azúcar. Ahora mismo dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar, cantidades con las que quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B. El precio que espera poner a cada dulce de tipo A es 5 euros, y 4 euros a cada dulce de tipo B. Con todo esto quiere saber cuántos dulces de cada tipo tiene que hacer para obtener un ingreso máximo.

- (0,75 puntos) Define las variables del problema y formula la función objetivo y las restricciones que permiten modelar la situación descrita como un problema de programación lineal.
- (0,75 puntos) Representa la región de soluciones factibles.
- (0,5 puntos) Determina el número de dulces de tipo A y de tipo B que debe hacer para maximizar el ingreso e indica el valor de dicho ingreso máximo.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

En una universidad el alumnado puede cursar una asignatura optativa o bien en modalidad presencial o bien en modalidad virtual. Se sabe que:

- El 60 % del alumnado elige la modalidad presencial.
- Entre quienes eligen modalidad virtual, el 20 % aprueba la asignatura.
- Entre quienes eligen modalidad presencial, el 35 % aprueba la asignatura.

Se elige al azar un estudiante de la asignatura.

- (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura.
- (1 punto) Sabiendo que el estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial.
- (1 punto) ¿Es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial o virtual? Justifica la respuesta.

PROBLEMA 3. (3 puntos) Responde solo a una de las opciones.

(OPCIÓN 3A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos, si existen.
- (1 punto) Estudia la concavidad de la función y determina si tiene puntos de inflexión.
- (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

(OPCIÓN 3B)

Una empresa produce un bien cuyo coste total, en miles de euros, viene dado por la función

$$C(x) = x^2 + 10x + 600$$

donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta por unidad depende de la cantidad producida y viene dado por

$$p(x) = 100 - 2x.$$

- (a) (0,5 puntos) Expresa la función de ingresos en función de x .
- (b) (0,5 puntos) Expresa la función de beneficios en función de x .
- (c) (0,5 puntos) Halla los valores de x para los que el beneficio es positivo.
- (d) (0,5 puntos) Determina el número de unidades que debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

(e) (1 punto) Calcula $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx$

PROBLEMA 4. (2 puntos) Responde solo a una de las opciones.

(OPCIÓN 4A)

Se consideran la matriz dependiente del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a .
- (b) (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.
- (c) (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

- (d) (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^t A$, donde B^t denota la traspuesta de B .

(OPCIÓN 4B)

Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3. \\ x + y + bz = 4 \end{cases}$$

- (a) (0,5 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b .
- (b) (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.
- (c) (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b , indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
- (d) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.

Soluciones

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Un pastelero está experimentando con las recetas de dos tipos de dulces que quiere comercializar. Todavía no tiene pensado el nombre, así que de momento les llama dulce tipo A y dulce tipo B. Para la receta del dulce tipo A, además de otros ingredientes, sabe seguro que va a necesitar 70 g de harina y 20 g de azúcar, mientras que para la del tipo B usará 60 g de harina y 10 g de azúcar. Ahora mismo dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar, cantidades con las que quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B. El precio que espera poner a cada dulce de tipo A es 5 euros, y 4 euros a cada dulce de tipo B. Con todo esto quiere saber cuántos dulces de cada tipo tiene que hacer para obtener un ingreso máximo.

- (a) (0,75 puntos) Define las variables del problema y formula la función objetivo y las restricciones que permiten modelar la situación descrita como un problema de programación lineal.
 (b) (0,75 puntos) Representa la región de soluciones factibles.
 (c) (0,5 puntos) Determina el número de dulces de tipo A y de tipo B que debe hacer para maximizar el ingreso e indica el valor de dicho ingreso máximo.

- (a) Llamamos “x” al número de dulces tipo A e “y” al número de dulces tipo B.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Harina (gramos)	Azúcar (gramos)	Ingresos
Nº dulces tipo A (x)	70x	20x	5x
Nº dulces tipo B (y)	60y	10y	4y
TOTALES	70x + 60y	20x + 10y	5x + 4y

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Dispone de 4200 g de harina y 800 g de azúcar” $\rightarrow 70x + 60y \leq 4200, 20x + 10y \leq 800$.

“Quiere hacer al menos 10 dulces del tipo B y un número de dulces del tipo A, como mínimo, igual a la mitad de los de tipo B” $\rightarrow y \geq 10; x \geq \frac{y}{2}$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ 2x \geq y \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ y \leq 2x \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- (b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$y = 10$

$y = 2x$

$7x + 6y = 420$

$2x + y = 80$

$x \geq 0; y \geq 0$

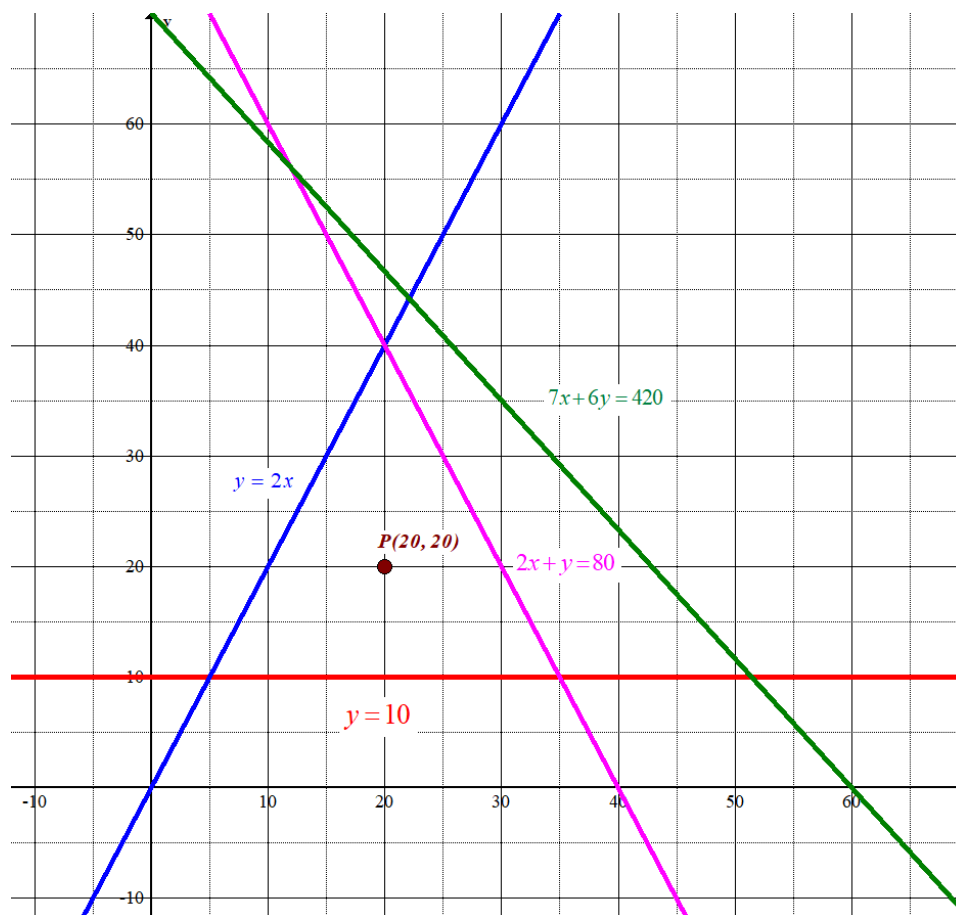
x	y = 10
0	10
5	10
20	10
35	10

x	y = 2x
0	0
5	10
20	40
30	60

x	$y = \frac{420 - 7x}{6}$
0	70
12	56
30	35
60	0

x	y = 80 - 2x
0	80
20	40
35	10
40	0

Primer
cuadrante

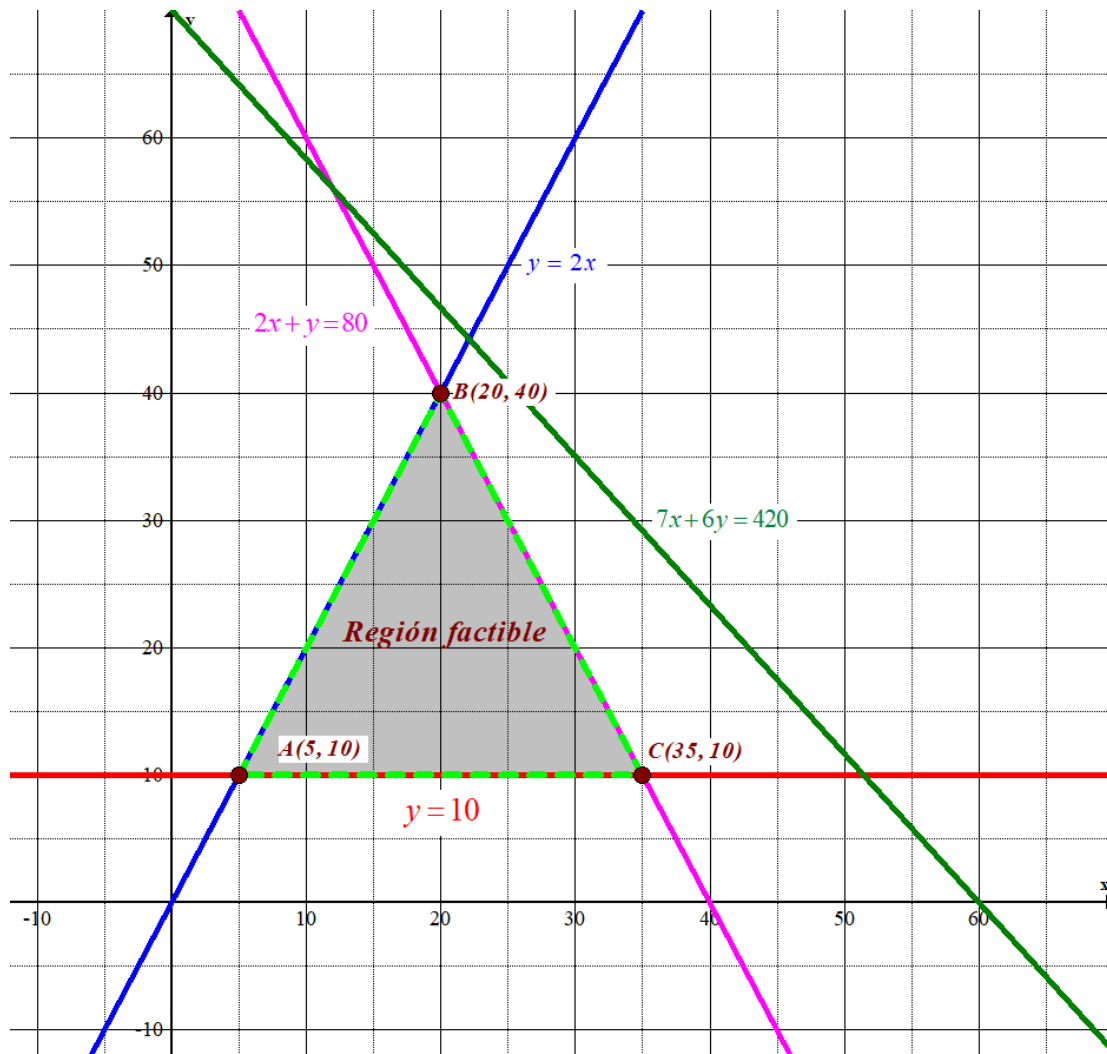


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \geq 10 \\ y \leq 2x \\ 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, verde y rosa, y por encima de la recta horizontal roja. Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 10 \\ 20 \leq 2 \cdot 20 \\ 7 \cdot 20 + 6 \cdot 20 \leq 420 \\ 2 \cdot 20 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 \geq 10 \\ 20 \leq 40 \\ 140 + 120 \leq 420 \\ 40 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



(c) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(5, 10) \rightarrow I(5, 10) = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 65$$

$$B(20, 40) \rightarrow I(20, 40) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 40 = 260 \text{ Máximo}$$

$$C(35, 10) \rightarrow I(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 215$$

Los máximos ingresos que se puede obtener son de 260 € y se obtienen en el punto $B(20, 40)$.

Los ingresos máximos se obtienen con la preparación y venta de 20 dulces del tipo A y 40 del tipo B. Siendo estos ingresos máximos de 260 euros.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

En una universidad el alumnado puede cursar una asignatura optativa o bien en modalidad presencial o bien en modalidad virtual. Se sabe que:

- El 60 % del alumnado elige la modalidad presencial.
- Entre quienes eligen modalidad virtual, el 20 % aprueba la asignatura.
- Entre quienes eligen modalidad presencial, el 35 % aprueba la asignatura.

Se elige al azar un estudiante de la asignatura.

- (a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura.
 (b) (1 punto) Sabiendo que el estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial.
 (c) (1 punto) ¿Es más probable que un estudiante que ha aprobado haya cursado la asignatura en modalidad presencial o virtual? Justifica la respuesta.

- (a) Llamamos MP al suceso “el alumno elige la modalidad presencial”, $\overline{MP}$ a “el alumno elige la modalidad virtual” y A a “el alumno aprueba la asignatura”.

Los datos proporcionados en términos de probabilidad son:

$$P(MP) = 0.6; P(A/\overline{MP}) = 0.2 \text{ y } P(A/MP) = 0.35$$

Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(MP)P(A/MP) + P(\overline{MP})P(A/\overline{MP}) = 0.6 \cdot 0.35 + 0.4 \cdot 0.2 = \boxed{0.29}$$

La probabilidad de que el estudiante seleccionado apruebe la asignatura vale 0.29.

- (b) Debemos calcular $P(MP/A)$. Esta es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(MP/A) = \frac{P(MP \cap A)}{P(A)} = \frac{P(MP)P(A/MP)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.35}{0.29} = \boxed{\frac{21}{29} \approx 0.7241}$$

Sabiendo que el estudiante ha aprobado, la probabilidad de que haya cursado la asignatura en modalidad presencial vale $\frac{21}{29} \approx 0.7241$.

- (c) Calculamos $P(\overline{MP}/A)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{MP}/A) = \frac{P(\overline{MP} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{MP})P(A/\overline{MP})}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.29} = \boxed{\frac{8}{29} \approx 0.2759}$$

Hemos visto que $P(\overline{MP}/A) = \frac{8}{29} < \frac{21}{29} = P(MP/A)$.

Si el alumno ha aprobado es más probable que haya elegido la modalidad presencial.

PROBLEMA 3. (OPCIÓN 3A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- (a) (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos, si existen.
 (b) (1 punto) Estudia la concavidad de la función y determina si tiene puntos de inflexión.
 (c) (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

(a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

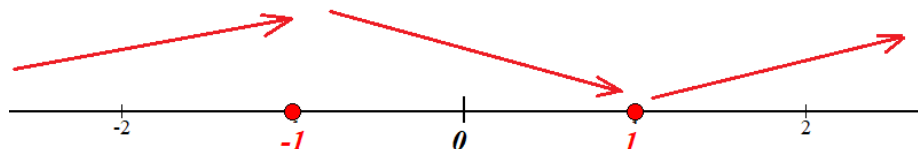
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 3)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -1)$.

(b) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La función presenta un posible punto de inflexión en $x = 0$. Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale $f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$.

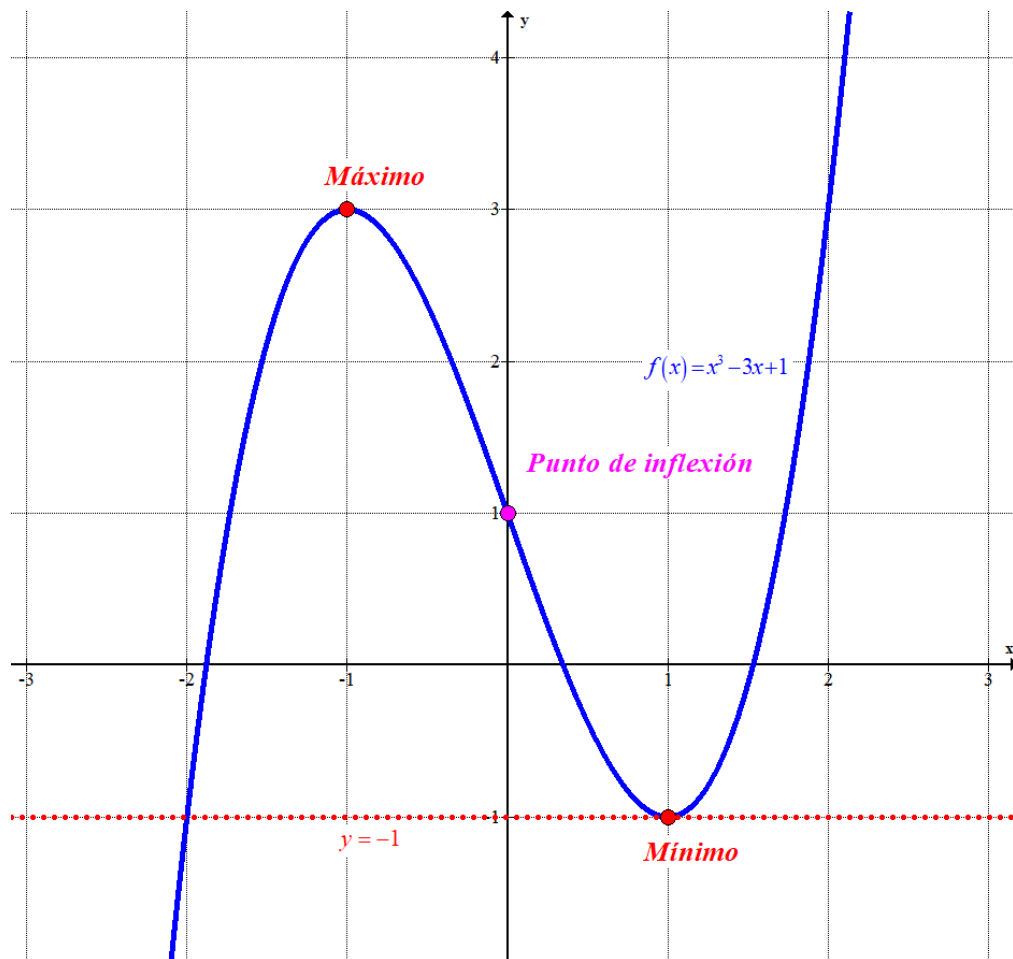
La función es convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$. La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 1)$.

(c) Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 \\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0 \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 0(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = -1$. Es una recta horizontal pues la función en $x = 1$ tiene un mínimo relativo.



PROBLEMA 3. (OPCIÓN 3B)

Una empresa produce un bien cuyo coste total, en miles de euros, viene dado por la función

$$C(x) = x^2 + 10x + 600$$

donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta por unidad depende de la cantidad producida y viene dado por

$$p(x) = 100 - 2x.$$

- (a) (0,5 puntos) Expresa la función de ingresos en función de x .
 (b) (0,5 puntos) Expresa la función de beneficios en función de x .
 (c) (0,5 puntos) Halla los valores de x para los que el beneficio es positivo.
 (d) (0,5 puntos) Determina el número de unidades que debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

(e) (1 punto) Calcula $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx$

- (a) Los ingresos son el producto del número de unidades producidas x por el precio de venta por unidad $p(x)$.

$$I(x) = x \cdot p(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

La función precio $p(x) = 100 - 2x$ solo tiene sentido en el intervalo $[0, 50]$.

- (b) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$B(x) = I(x) - C(x) = I(x) - (x^2 + 10x + 600) = 100x - 2x^2 - (x^2 + 10x + 600) = -3x^2 + 90x - 600$$

Como el número de unidades producidas x y el precio $p(x)$ deben ser mayores o iguales que 0, consideramos el dominio de esta función el intervalo cerrado $[0, 50]$.

- (c) Hallamos cuando el beneficio es nulo.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 90x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 200}}{2} = \frac{30 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{30+10}{2} = \boxed{20=x} \\ \frac{30-10}{2} = \boxed{10=x} \end{cases}$$

La función beneficio es una función parabólica. Averiguamos cuando el beneficio es positivo.

- En el intervalo $[0, 10)$ consideramos $x=5$ y la función vale

$$B(5) = -3 \cdot 5^2 + 90 \cdot 5 - 600 = -225 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } [0, 10).$$

- En el intervalo $(10, 20)$ consideramos $x=15$ y la función vale

$$B(15) = -3 \cdot 15^2 + 90 \cdot 15 - 600 = 75 > 0. \text{ El beneficio es positivo en } (10, 20).$$

- En el intervalo $(20, 50]$ consideramos $x=25$ y la función vale

$$B(25) = -3 \cdot 25^2 + 90 \cdot 25 - 600 = -225 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (20, +\infty].$$

El beneficio es positivo con la producción de más de 10 unidades y menos de 20.

(d) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -3x^2 + 90x - 600 \Rightarrow B'(x) = -6x + 90$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 90 = 0 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow \boxed{x = \frac{90}{6} = 15}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 15$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -6x + 90 \Rightarrow B''(x) = -6 \Rightarrow B''(15) = -6 < 0$$

La función beneficio tiene un máximo en $x = 15$. El beneficio es máximo con la producción de 15 unidades.

(e) Hallamos el valor de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx &= \int_{10}^{20} x^2 + 10x + 600 + \frac{1}{100 - 2x} dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 600x - \frac{1}{2} \ln |100 - 2x| \right]_{10}^{20} = \\ &= \left[\frac{20^3}{3} + 5 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - \frac{1}{2} \ln |100 - 2 \cdot 20| \right] - \left[\frac{10^3}{3} + 5 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - \frac{1}{2} \ln |100 - 2 \cdot 10| \right] = \\ &= \frac{8000}{3} + 2000 + 12000 - \frac{1}{2} \ln 60 - \frac{1000}{3} - 500 - 6000 + \frac{1}{2} \ln 80 = \\ &= \frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{80}{60} = \boxed{\frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \approx 9833.477} \end{aligned}$$

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4A)

Se consideran la matriz dependiente del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a .
 (b) (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.
 (c) (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

- (d) (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^t A$, donde B^t denota la traspuesta de B .

- (a) Hallamos la traspuesta de A .

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión del determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

- (b) Para que exista la inversa de la matriz A su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A| = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

La inversa de A existe para cualquier valor de a distinto de 2.

Hallamos la expresión de la inversa de A para $a \neq 2$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{a - 2} = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

- (c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B = I \Rightarrow AX = I - B \Rightarrow \{a \neq 2\} \Rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

La solución existe para $a \neq 2$.

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 2$ la matriz solución de la ecuación matricial es $X = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$.

Si $a = 2$ no existe la inversa de A , pero estudiamos si tiene solución la ecuación matricial $AX + B = I$.

$$\begin{aligned}
 AX + B = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c+1 & 2b+d \\ 2a+c+1 & 2b+d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+c+1=1 \\ 2a+c+1=0 \\ 2b+d=0 \\ 2b+d+2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+c=0 \\ 2a+c=-1 \\ 2b+d=0 \\ 2b+d=-1 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

La ecuación matricial no tiene solución pues tenemos igualdades que no se pueden cumplir de forma simultánea.

Para $a = 2$ no existe solución de la ecuación matricial $AX + B = I$.

(d) Para $a = 3$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo visto en el apartado anterior la matriz A tiene

inversa y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Hallamos la expresión de la matriz $C = A^{-1}B^t A$.

$$\begin{aligned}
 C = A^{-1}B^t A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 \\ -2 & -2+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-1 \\ -6+8 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz $C = A^{-1}B^t A$ queda $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4B)

Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3 \\ x + y + bz = 4 \end{cases}$$

- (a) (0,5 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b .
 (b) (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.
 (c) (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b , indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
 (d) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.

- (a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & b & 1 & b+3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{pmatrix}.$$

El sistema expresado en forma matricial queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ b+3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- (b) La matriz de coeficientes es invertible cuando su determinante es distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 1 + 2 - b - 2b - 1 = b^2 - 3b + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = b \\ \frac{3-1}{2} = 1 = b \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es invertible para cualquier valor de b distinto de 1 y de 2.

- (c) Analizamos el sistema para tres situaciones diferentes.

CASO 1 $b \neq 1$ y $b \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $b = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -12 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 6}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -8 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $b = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -7 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 6}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -7 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -9 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $b \neq 1$ y $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $b = 1$ o $b = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

(d) Para $b = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ z = 3 - 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow x + 4 - x + 3 - 2x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 3 - 2\frac{1}{2} = 2} \\ \boxed{y = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}} \end{cases}$$

Para $b=0$ la solución del sistema es $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$, $z = 2$.



PAU ordinaria 2026
UNIVERSITATEAN SARTZEKO PRUEBA DE ACCESO A LA
PROBA UNVIERSIDAD
2026ko OHIKOA ORDINARIA 2026



HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI MATEMÁTICAS APLICADAS A
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

El examen costa de CUATRO problemas:

En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.

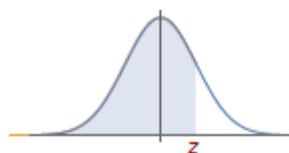
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.

Se podrán usar calculadoras que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes, derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

En el cuaderno del examen deberán figurar las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro. La empresa prepara dos tipos de cestas, A y B. Las cestas del tipo A contienen 2 tabletas de turrón del blando y 1 tableta de turrón del duro. Con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 20 euros. Las cestas del tipo B contienen 2 tabletas de turrón del blando y 3 tabletas de turrón del duro, y con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 30 euros. Se quiere conocer cuántas cestas de cada tipo hay que preparar y vender para que el beneficio sea máximo.

- (a) (0,75 puntos) Di cuál es la función objetivo y cuáles son las restricciones.
- (b) (0,75 puntos) Dibuja la región factible.
- (c) (0,5 puntos) ¿Cuántas cestas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el mayor beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio?

PROBLEMA 2. (3 puntos)

El 70% de los jóvenes de un país lee novelas, el 40% lee comics y el 20% no lee ni novelas ni cómics. Se elige al azar a una persona joven de este país.

- (a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que lea novelas o cómics.
- (b) (0.75 puntos) Sabiendo que lee novelas, calcula la probabilidad de que lea cómics.
- (c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea novelas y no cómics?
- (d) (1 punto) Se eligen ahora a 600 jóvenes de este país. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 228 y menos de 270 lean cómics?

PROBLEMA 3. (3 puntos) Responde solo a una de las opciones.**(OPCIÓN 3A)**

- (a) (1.5 puntos) Dibuja el recinto acotado delimitado por las funciones $y = x - 1$, $y = 2x - 2$, $y = x^2 - 2x + 1$.
- (b) (1.5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

(OPCIÓN 3B)

La cantidad de agua que consume una máquina para funcionar depende del tiempo y viene dada por

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad t > 0$$

donde t es el tiempo medido en horas.

- (a) (1 punto) ¿A qué hora consume la máquina la menor cantidad de agua? ¿Cuál es esa cantidad mínima?
- (b) (0,5 puntos) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de agua.
- (c) (0,5 puntos) ¿Tiene la función $f(t)$ algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcula el punto o los puntos.
- (d) (1 punto) Halla la recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$.

PROBLEMA 4. (2 puntos) Responde solo a una de las opciones.**(OPCIÓN 4A)**

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.5 puntos) ¿Es la matriz B invertible?
- (b) (1.5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $BX - A = A^2$

(OPCIÓN 4B)

Se considera el siguiente sistema lineal dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}$$

- (a) (1 punto) Discute el sistema para los distintos valores de k .
(b) (1 punto) Resuelve el sistema en los casos que sea posible.

Soluciones

PROBLEMA 1. (2 puntos)

Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro. La empresa prepara dos tipos de cestas, A y B. Las cestas del tipo A contienen 2 tabletas de turrón del blando y 1 tableta de turrón del duro. Con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 20 euros. Las cestas del tipo B contienen 2 tabletas de turrón del blando y 3 tabletas de turrón del duro, y con cada una de estas cestas la empresa obtiene un beneficio de 30 euros. Se quiere conocer cuántas cestas de cada tipo hay que preparar y vender para que el beneficio sea máximo.

- (a) (0,75 puntos) Di cuál es la función objetivo y cuáles son las restricciones.
 (b) (0,75 puntos) Dibuja la región factible.
 (c) (0,5 puntos) ¿Cuántas cestas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el mayor beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio?

- (a) Llamamos “x” al número de cestas tipo A e “y” al número de cestas tipo B.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Tabletas de turrón blando	Tabletas de turrón duro	Beneficio
Nº cestas tipo A (x)	2x	x	20x
Nº cestas tipo B (y)	2y	3y	30y
TOTALES	2x + 2y	x + 3y	20x + 30y

La función a maximizar son los beneficios $B(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Una empresa que prepara cestas de Navidad dispone de 2400 tabletas de turrón del blando y 1500 tabletas de turrón del duro” $\rightarrow 2x + 2y \leq 2400, x + 3y \leq 1500$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y \leq 2400 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- (b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 1200$$

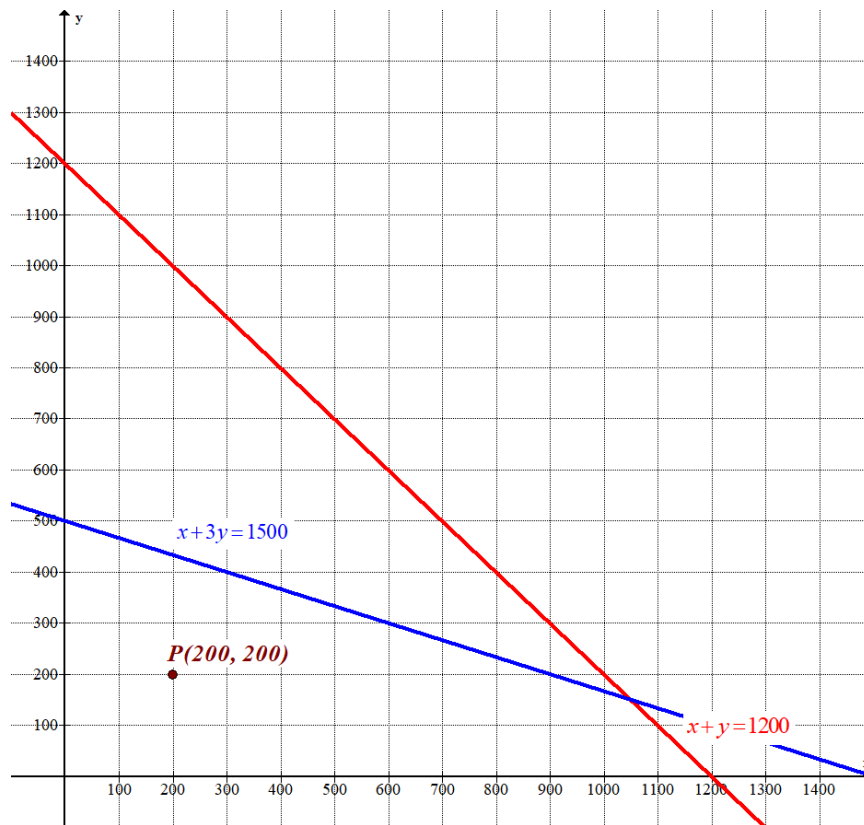
$$x + 3y = 1500$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 1200 - x
0	1200
500	700
1050	150
1200	0

x	y = $\frac{1500 - x}{3}$
0	500
600	300
1050	150
1500	0

Primer
cuadrante



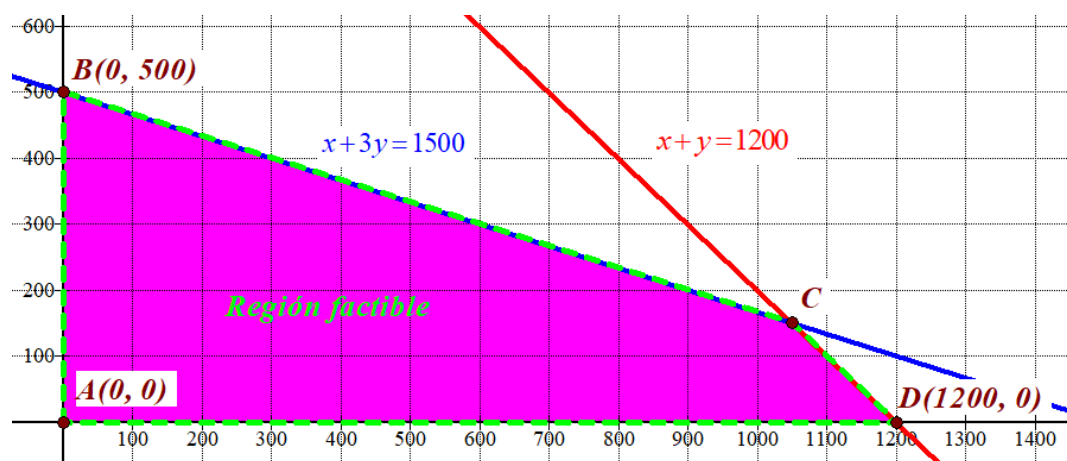
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(200, 200)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 200 \leq 1200 \\ 200 + 3 \cdot 200 \leq 1500 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



(c) Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 1500 \\ x + y = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 1500 \\ x = 1200 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 1200 - y + 3y = 1500 \Rightarrow 2y = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{300}{2} = 150 \Rightarrow x = 1200 - 150 = 1050 \Rightarrow \boxed{C(1050, 150)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 500) \rightarrow B(0, 500) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 500 = 15000$$

$$C(1050, 150) \rightarrow B(1050, 150) = 20 \cdot 1050 + 30 \cdot 150 = 25500 \text{ Máximo}$$

$$D(1200, 0) \rightarrow B(1200, 0) = 20 \cdot 1200 + 30 \cdot 0 = 24000$$

Los máximos beneficios que se puede obtener en la región factible son de 25 500 € y se obtienen en el punto C(1050, 150).

El beneficio máximo se obtiene con la preparación y venta de 1050 cestas del tipo A y 150 del tipo B. Siendo estos beneficios máximos de un importe de 25500 euros.

PROBLEMA 2. (3 puntos)

El 70% de los jóvenes de un país lee novelas, el 40% lee comics y el 20% no lee ni novelas ni cómics. Se elige al azar a una persona joven de este país.

- (a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que lea novelas o cómics.
 (b) (0.75 puntos) Sabiendo que lee novelas, calcula la probabilidad de que lea cómics.
 (c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea novelas y no cómics?
 (d) (1 punto) Se eligen ahora a 600 jóvenes de este país. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 228 y menos de 270 lean cómics?

Llamamos N al suceso “el joven elegido lee novelas” y C a “el joven elegido lee cómics”.
 Los datos proporcionados en términos de probabilidad son:

$$P(N) = 0.7; P(C) = 0.4 \text{ y } P(\overline{N} \cap \overline{C}) = 0.2$$

- (a) Debemos calcular $P(N \cup C)$. Para obtener su valor utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{N} \cap \overline{C}) = 0.2 \Rightarrow P(\overline{N \cup C}) = 0.2 \Rightarrow 1 - P(N \cup C) = 0.2 \Rightarrow \boxed{P(N \cup C) = 1 - 0.2 = 0.8}$$

La probabilidad de que el joven elegido al azar lea novelas o cómics vale 0.8.

- (b) Debemos calcular $P(C/N)$. Hallamos primero $P(N \cap C)$ utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(N \cup C) = P(C) + P(N) - P(N \cap C) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + 0.7 - P(N \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap C) = 0.4 + 0.7 - 0.8 = 0.3$$

Utilizamos el teorema de Bayes para calcular el valor de $P(C/N)$.

$$P(C/N) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{0.3}{0.7} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

Sabiendo que el joven elegido lee novelas, la probabilidad de que lea cómics vale $\frac{3}{7} \approx 0.4286$.

- (c) Debemos calcular $P(N \cap \overline{C})$.

$$P(N) = P(N \cap \overline{C}) + P(N \cap C) \Rightarrow 0.7 = P(N \cap \overline{C}) + 0.3 \Rightarrow \boxed{P(N \cap \overline{C}) = 0.7 - 0.3 = 0.4}$$

La probabilidad de que el joven elegido al azar lea novelas y no cómics vale 0.4.

- (d) Consideramos la variable aleatoria X = Número de jóvenes de un grupo de 600 que lee cómics.
 Esta variable es una binomial, siendo n = número de repeticiones = 600 y p = Probabilidad de que un joven lea cómics = 0.4. $X = B(600, 0.4)$.

Debemos calcular $P(228 < X < 270)$. Para el cálculo de esta probabilidad aproximamos la variable binomial X a una normal Y de media $\mu = np = 600 \cdot 0.4 = 240$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 12. Y = N(240, 12)$$

Esta aproximación es buena pues $np = 240 > 5$ y $nq = 600 \cdot 0.6 = 360 > 5$.

$$P(228 < X < 270) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(228.5 \leq Y \leq 269.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 240}{12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{228.5 - 240}{12} \leq Z \leq \frac{269.5 - 240}{12}\right) = P(-0.96 \leq Z \leq 2.46) =$$

$$= P(Z \leq 2.46) - P(Z \leq -0.96) = P(Z \leq 2.46) - P(Z \geq 0.96) =$$

$$= P(Z \leq 2.46) - [1 - P(Z \leq 0.96)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 0.9931 - 1 + 0.8315 = \boxed{0.8246}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909
2'4	0'9910	0'9912	0'9914	0'9916	0'9917	0'9918	0'9919

La probabilidad de que en un grupo de 600 jóvenes elegidos al azar más de 228 y menos de 270 lean cómics vale 0.8246.

PROBLEMA 3. (3 puntos) (OPCIÓN 3A)

- (a) (1.5 puntos) Dibuja el recinto acotado delimitado por las funciones $y = x - 1$, $y = 2x - 2$, $y = x^2 - 2x + 1$.
- (b) (1.5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

(a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 2x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A(1, 0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = x \rightarrow y = 2 - 1 = 1 \rightarrow \boxed{B(2, 1)} \\ \frac{3-1}{2} = 1 = x \rightarrow y = 1 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{A(1, 0)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

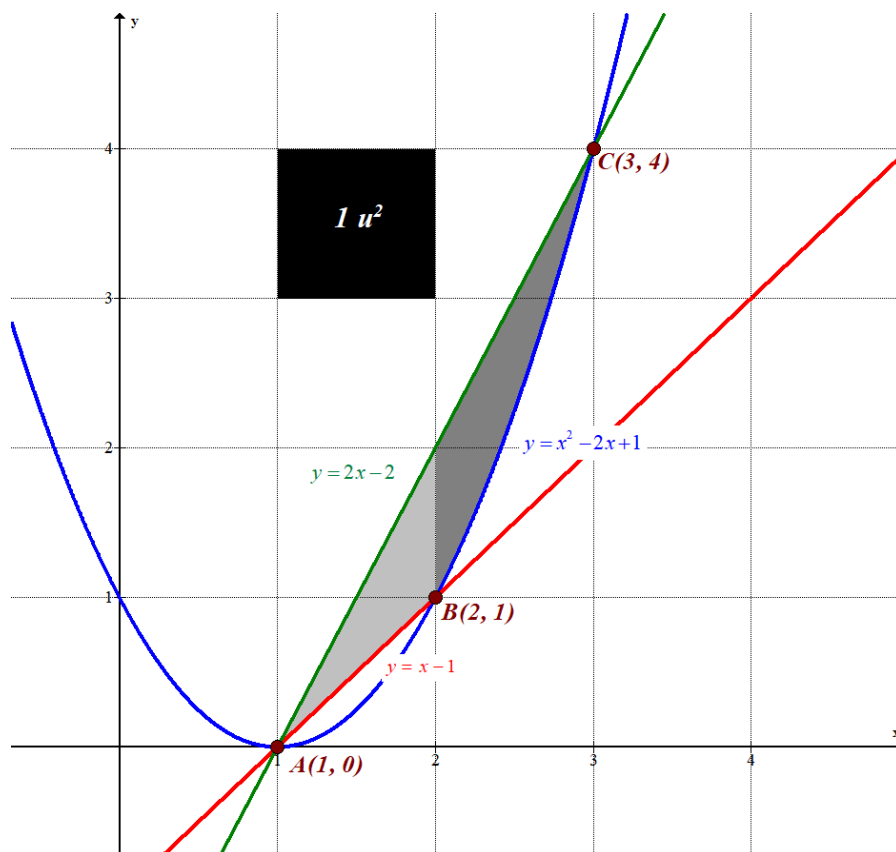
$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \rightarrow y = 6 - 2 = 4 \rightarrow \boxed{C(3, 4)} \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \rightarrow y = 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{A(1, 0)} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos rectas y la parábola.

x	$y = x - 1$
0	-1
1	0
2	1

x	$y = 2x - 2$
0	-2
1	0
2	2

x	$y = x^2 - 2x + 1$
0	1
1	0
2	1



- (b) El área de la región del plano limitada por las tres gráficas la hallamos como la suma de dos integrales definidas.

$$\text{Área gris claro} = \int_1^2 2x - 2 - (x - 1) dx = \int_1^2 x - 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - 2 \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2} u^2}$$

$$\text{Área gris oscuro} = \int_2^3 2x - 2 - (x^2 - 2x + 1) dx = \int_2^3 -x^2 + 4x - 3 dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_2^3 = \left[\frac{-3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{-2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \right] =$$

$$= \cancel{-9 + 18} - 9 + \frac{8}{3} - 8 + 6 = \boxed{\frac{2}{3} u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \approx 1.1667$ unidades cuadradas.

PROBLEMA 3. (3 puntos) (OPCIÓN 3B)

La cantidad de agua que consume una máquina para funcionar depende del tiempo y viene dada por

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad t > 0$$

donde t es el tiempo medido en horas.

- (a) (1 punto) ¿A qué hora consume la máquina la menor cantidad de agua? ¿Cuál es esa cantidad mínima?
- (b) (0,5 puntos) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de agua.
- (c) (0,5 puntos) ¿Tiene la función $f(t)$ algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcula el punto o los puntos.
- (d) (1 punto) Halla la recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$.

(a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \boxed{1=t} \\ \frac{4-2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}=t} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \Rightarrow f''(t) = 6t - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \end{cases}$$

La segunda derivada es negativa para $t = \frac{1}{3}$. La función presenta un máximo relativo en $t = \frac{1}{3}$.

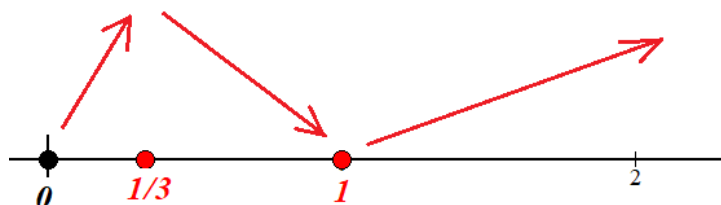
La segunda derivada es positiva para $t = 1$. La función presenta un mínimo relativo en $t = 1$.

La máquina consume la menor cantidad de agua para $t = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$, el menor consumo de agua es 0.

(b) La función tiene una expresión polinómica, por lo que es una función continua. Presenta un máximo relativo en $t = \frac{1}{3}$, por lo que crece en el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Tiene un mínimo relativo en

$t = 1$, por lo que decrece en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



(c) Comprobamos si la segunda derivada se anula para algún valor de t .

$$\begin{cases} f''(t) = 6t - 4 \\ f''(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow 6t - 4 = 0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$$

La segunda derivada se anula para $t = \frac{2}{3}$. Para este valor la función presenta un punto de

inflexión pues $f'''(t) = 6$ y sustituyendo tenemos $f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$.

Como $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(\frac{2}{3}, \frac{2}{27})$.

(d) La recta $y - \frac{7}{4}t = 5$ tiene pendiente $m = \frac{7}{4}$. Si la recta tangente en $t = a$ es paralela a esta recta

debe tener su misma pendiente y debe cumplirse que $f'(a) = \frac{7}{4}$.

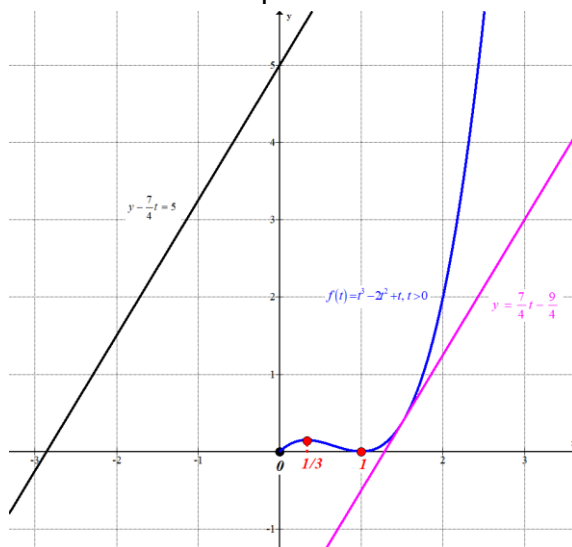
$$\left. \begin{array}{l} f'(a) = \frac{7}{4} \\ f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{4} = 3a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 7 = 12a^2 - 16a + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a^2 - 16a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-3)}}{2 \cdot 12} = \frac{16 \pm 20}{24} = \begin{cases} \frac{16+20}{24} = \frac{3}{2} = a \\ \frac{16-20}{24} = \frac{-1}{6} < 0 \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la función en $x = \frac{3}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 - 2(\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \\ y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(t - \frac{3}{2}) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}(t - \frac{3}{2}) \Rightarrow y - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}t - \frac{21}{8} \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{4}t - \frac{9}{4}}$$

La recta tangente a $f(t)$ paralela a la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$ tiene ecuación $y = \frac{7}{4}t - \frac{9}{4}$.



PROBLEMA 4. (2 puntos) (OPCIÓN 4A)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (0.5 puntos) ¿Es la matriz B invertible?

(b) (1.5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $BX - A = A^2$

(a) Para que la matriz B sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 4 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

Es determinante de B es distinto de cero y la matriz B es invertible.

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$BX - A = A^2 \Rightarrow BX = A + A^2 \Rightarrow X = B^{-1}(A + A^2)$$

Determinamos la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A + A^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1+1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4. (OPCIÓN 4B)

Se considera el siguiente sistema lineal dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}$$

(a) (1 punto) Discute el sistema para los distintos valores de k .

(b) (1 punto) Resuelve el sistema en los casos que sea posible.

(a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = k + 45 + 0 + 5k - 3 - 0 = 6k + 42$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6k + 42 = 0 \Rightarrow 6k = -42 \Rightarrow \boxed{k = -7}$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1 $k \neq -7$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = -7$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 7 \quad -3 \quad 0 \\ -1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 10 \quad -4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ -5 \quad 15 \quad -5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 15 \quad -6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 15 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 30 \quad -12 \quad 0 \\ 0 \quad -30 \quad 12 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2, siendo iguales pero menores que el número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $k \neq -7$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $k = -7$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- (b) Para $k \neq -7$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Como es un sistema homogéneo y tiene una única solución esta debe ser $x = y = z = 0$.
Resolvemos el sistema para $k = -7$, partiendo del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ 10y - 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ 10y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ y = \frac{4z}{10} = \frac{2z}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 \frac{2z}{5} + z = 0 \Rightarrow x = \frac{6z}{5} - z = \frac{z}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{5} \\ y = \frac{2\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \{\lambda = 5\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $k = -7$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}.$



PAU extraordinaria 2025
USaP PAU
2024/25 2024/25
2025eko EZOHIOA EXTRAORDINARIA 2025



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CC SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

- El examen consta de cinco problemas:
 - o **El problema 1 es competencial y de respuesta obligatoria.**
 - o **Elegir tres problemas de los cuatro restantes. En cada uno de estos problemas elegidos se responderá a uno de los dos apartados.**
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - o pantalla gráfica
 - o posibilidad de transmitir datos
 - o programable
 - o resolución de ecuaciones
 - o operaciones con matrices
 - o cálculo de determinantes
 - o derivadas e integrales
 - o almacenamiento de datos alfanuméricos.
- **Observación importante:** No se permitirá el uso de lapicero ni de bolígrafo rojo para la elaboración de la prueba.
- **No olvides incluir el código en cada una de las hojas del examen.**

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua.

La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel.

Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol.

A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/L y el del perfume B es de 40 €/L.

La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

- [2 puntos] ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?
- [0, 5 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2**APARTADO 2.1 [2,5 puntos]**

El cajero automático de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes. Además, el número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros.

- [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero automático.
- [1, 5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

- [0, 4 puntos] Exprésalo a través de una ecuación matricial.
- [0, 8 puntos] ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Razona tu respuesta.
- [1, 3 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2**APARTADO 3.1 [2,5 puntos]**

Se ha observado que las ganancias/pérdidas obtenidas en un juego determinado están relacionadas con el tiempo invertido en el mismo, y que se expresan a través de la siguiente función:

$$G(t) = \frac{100t}{t^2 + 400}$$

donde t es el tiempo transcurrido (en minutos) y $G(t)$ son las ganancias/pérdidas (en miles de euros).

- [1 punto]** Calcula cuánto tiempo hay que estar jugando para ganar lo máximo posible y cuál es dicha cantidad máxima.
- [0, 4 puntos]** Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana? Razona la respuesta.
- [0, 4 puntos]** ¿Puede llegarse a perder dinero en caso de jugar mucho tiempo? Razona la respuesta.
- [0, 7 puntos]** ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x+2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- [1 punto]** Analiza la continuidad de la función en el intervalo $(-2, 4)$.
- [0, 5 puntos]** Realiza la representación gráfica de la función.
- [1 punto]** Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2**APARTADO 4.1 [2,5 puntos]**

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones: la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 botones y la tercera 4 botones. Cada una de las cajas contiene sólo un botón rojo.

Si elijo una caja al azar y extraigo de ella un botón al azar:

- [0, 9 puntos]** Calcula la probabilidad de que sea un botón rojo.
- [0, 9 puntos]** Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?
- [0, 7 puntos]** Juntamos los botones de las tres cajas en una bolsa de la que extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.

- [0, 5 puntos]** Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
- [0, 5 puntos]** Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
- [0, 4 puntos]** Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcular la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.
- [0, 3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?
- [0, 8 puntos]** Entre las papeletas numeradas, encuentra aquella cuyo número cumple la siguiente condición: si sumamos dicho número y 25 veces su inverso la suma que se obtiene es

la mínima.

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a una determinada aplicación de inteligencia artificial del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².

- a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80 %.
- b) [0, 3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
- c) [0, 8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
- d) [0, 4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio diario de conexión a la aplicación de inteligencia artificial sea inferior a 207 minutos?

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]

Lanzamos 6.000 veces un dado equilibrado de seis caras.

- a) [0, 9 puntos] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco sea superior a 1.500.
- b) [0, 9 puntos] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco esté comprendido entre 1.000 y 1.100 (incluidos los valores extremos del intervalo).

Consideramos ahora que tenemos un dado cargado. Este dado cumple que la probabilidad de que salga un número impar es el triple de la probabilidad de que salga un número par.

- c) [0, 7 puntos] Si se lanza dos veces este dado cargado, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua.

La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel.

Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol.

A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/L y el del perfume B es de 40 €/L.

La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

a) [2 puntos] ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?

b) [0, 5 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

a) Llamamos “x” a los litros de perfume A elaborados en un mes e “y” a los litros de perfume B. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Extracto de rosas	Alcohol	Ingresos
Litros de perfume A (x)	0.05x	0.10x	24x
Litros de perfume B (y)	0.10y	0.15y	40y
TOTALES	0.05x + 0.1y	0.1x + 0.15y	24x + 40y
DISPONIBILIDAD	70 litros	120 litros	

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = 24x + 40y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“La empresa dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol” $\rightarrow$
 $0.05x + 0.1y \leq 70$, $0.1x + 0.15y \leq 120$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.05x + 0.1y \leq 70 \\ 0.1x + 0.15y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 1400 \\ 2x + 3y \leq 2400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + 2y = 1400$$

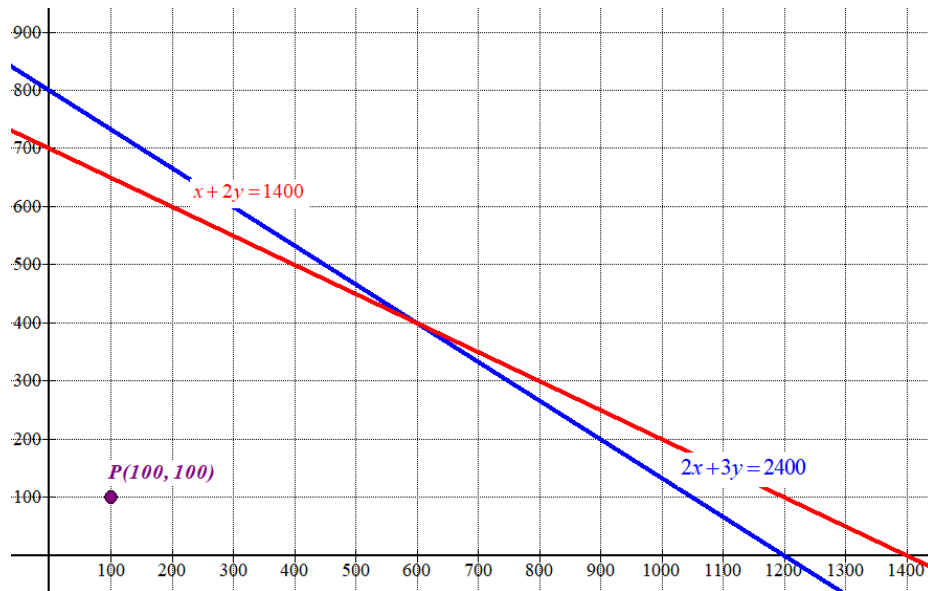
x	$y = \frac{1400 - x}{2}$
0	700
600	400
1400	0

$$2x + 3y = 2400$$

x	$y = \frac{2400 - 2x}{3}$
0	800
600	400
1200	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



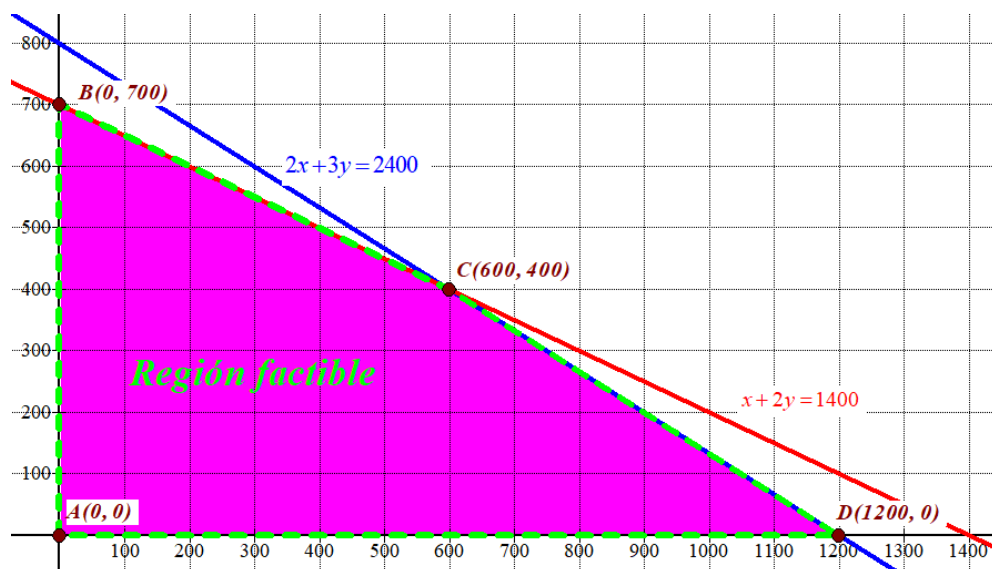
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 1400 \\ 2x + 3y \leq 2400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 1400 \\ 200 + 300 \leq 2400 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 24x + 40y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 700) \rightarrow I(0, 700) = 24 \cdot 0 + 40 \cdot 700 = 28000$$

$$C(600, 400) \rightarrow I(600, 400) = 24 \cdot 600 + 40 \cdot 400 = 30400 \text{ Máximo}$$

$$D(1200, 0) \rightarrow I(1200, 0) = 24 \cdot 1200 + 40 \cdot 0 = 28800$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible se obtienen en el punto C(600, 400).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración de 600 litros de perfume A y 400 litros de perfume B.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 30 400 €.

APARTADO 2.1 [2,5 puntos]

El cajero automático de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes. Además, el número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros.

- a) [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero automático.
 b) [1, 5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

- a) Llamamos x, y, z al número de billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente que hemos sacado del cajero.

Obtenemos las ecuaciones partiendo de la información proporcionada en el problema.

“El cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes” $\rightarrow x + y + z = 8$.

“Hemos sacado 290 euros del banco” $\rightarrow 10x + 20y + 50z = 290$.

“El número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros” $\rightarrow x = 2y$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ 10x + 20y + 50z = 290 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x + 2y + 5z = 29 \\ x = 2y \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x + 2y + 5z = 29 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + y + z = 8 \\ 2y + 2y + 5z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + z = 8 \\ 4y + 5z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 8 - 3y \\ 4y + 5z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 5(8 - 3y) = 29 \Rightarrow 4y + 40 - 15y = 29 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 1 = 2} \\ \boxed{z = 8 - 3 \cdot 1 = 5} \end{array} \right.$$

Hemos sacado 2 billetes de 10 €, 1 billete de 20 € y 5 de 50 €.

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) [0, 4 puntos] Exprésalo a través de una ecuación matricial.

b) [0, 8 puntos] ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Razona tu respuesta.

c) [1, 3 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

a) Hallamos la expresión matricial del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 0 - 2 + 6 = 0$$

Al ser el determinante de A nulo esta matriz no tiene inversa.

c) Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x = 1 + z \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(1+z) - 2y - 2z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 3z - 2y - 2z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2y} \Rightarrow \boxed{x = 1 + 2y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

Se ha observado que las ganancias/pérdidas obtenidas en un juego determinado están relacionadas con el tiempo invertido en el mismo, y que se expresan a través de la siguiente función:

$$G(t) = \frac{100t}{t^2 + 400}$$

donde t es el tiempo transcurrido (en minutos) y $G(t)$ son las ganancias/pérdidas (en miles de euros).

- a) [1 punto] Calcula cuánto tiempo hay que estar jugando para ganar lo máximo posible y cuál es dicha cantidad máxima.
- b) [0, 4 puntos] Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana? Razona la respuesta.
- c) [0, 4 puntos] ¿Puede llegarse a perder dinero en caso de jugar mucho tiempo? Razona la respuesta.
- d) [0, 7 puntos] ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

a) Hallamos los puntos críticos de $G(t)$.

$$G'(t) = \frac{100(t^2 + 400) - 2t \cdot 100t}{(t^2 + 400)^2} = \frac{100t^2 + 40000 - 200t^2}{(t^2 + 400)^2} = \frac{40000 - 100t^2}{(t^2 + 400)^2}$$

$$G'(t) = 0 \Rightarrow \frac{40000 - 100t^2}{(t^2 + 400)^2} = 0 \Rightarrow 40000 - 100t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 400 \Rightarrow t = \sqrt{400} = 20$$

Solo hemos considerado el valor positivo de la raíz pues estamos hablando de tiempo transcurrido. Tenemos un punto crítico de la función en $t = 20$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 20)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$G'(10) = \frac{40000 - 100 \cdot 10^2}{(10^2 + 400)^2} = \frac{30000}{500^2} > 0. \text{ La función crece en } [0, 20).$$

- En el intervalo $(20, +\infty)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale

$$G'(100) = \frac{40000 - 100 \cdot 100^2}{(100^2 + 400)^2} = \frac{-960000}{10400^2} < 0. \text{ La función decrece en } (20, +\infty).$$

La función crece antes de los 20 minutos y decrece después. La función tiene un máximo relativo que es absoluto en $t = 20$.

$$\text{Para } t = 20 \text{ tenemos que } G(20) = \frac{100 \cdot 20}{20^2 + 400} = \frac{2000}{800} = 2.5.$$

Hay que estar jugando 20 minutos para conseguir las máximas ganancias que son de un importe de 2500 €.

- b) Durante los primeros 20 minutos cuanto más tiempo juegas más ganas (las ganancias van aumentando), pero a partir de los 20 minutos conforme pasan los minutos menos se gana (las

ganancias van disminuyendo).

No es cierto que cuanto más tiempo juegas más dinero ganas.

c) Como $G(0) = \frac{100 \cdot 0}{0^2 + 400} = 0$. Las ganancias iniciales son nulas, hemos visto que hasta el minuto

20 las ganancias van aumentando y por tanto son positivas.

A partir del minuto 20 las ganancias van disminuyendo. Calculamos el límite de la función cuando pasa muchos minutos.

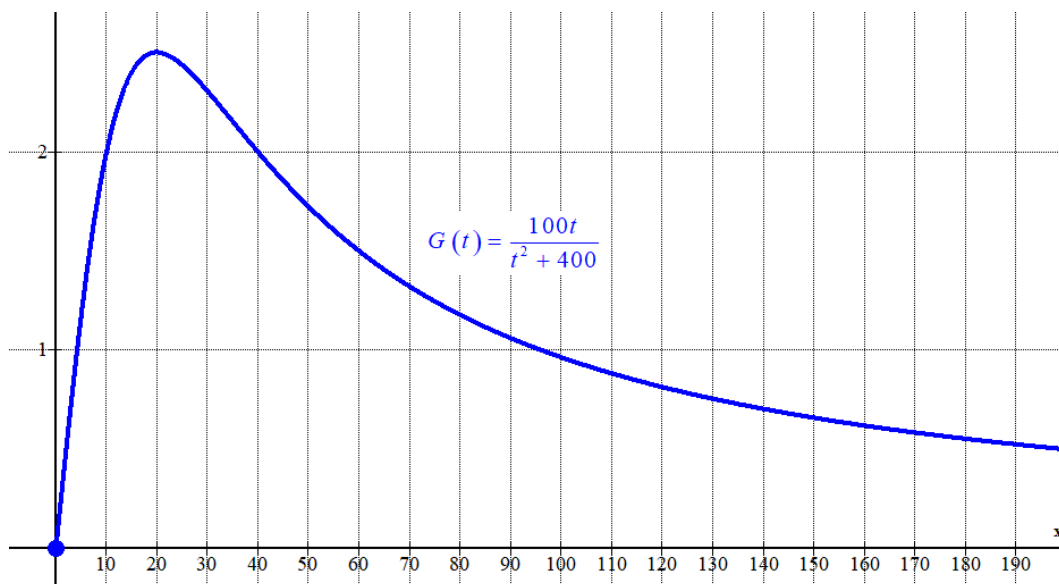
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{100t}{t^2 + 400} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{100t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{100}{t} = \frac{100}{+\infty} = 0$$

El valor 0 del límite de la función ganancias nos indica que las ganancias van descendiendo y acercándose a 0, pero nunca son negativas, nunca se pierde dinero.

También podíamos haber razonado que si el valor de t es positivo la expresión de la función ganancias $G(t) = \frac{100t}{t^2 + 400}$ tiene numerador y denominador positivo, por lo que las ganancias siempre son positivas y nunca hay pérdidas.

d) Con el paso del tiempo hemos visto que las ganancias van a ir disminuyendo acercándose cada vez más a 0. Las ganancias tienden a ser nulas con el paso del tiempo.

La función ganancias $G(t) = \frac{100t}{t^2 + 400}$ es una función racional donde el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, por lo que el denominador crece más rápido y el cociente tiende a ser cero cuando aumentamos el valor de t .



APARTADO 3.2 [2,5 puntos]Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x+2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Analiza la continuidad de la función en el intervalo $(-2, 4)$.
 b) [0, 5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función.
 c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

- a) La función en cada intervalo de definición tiene una expresión polinómica por lo que es continua. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $x = 0$ y $x = 2$.

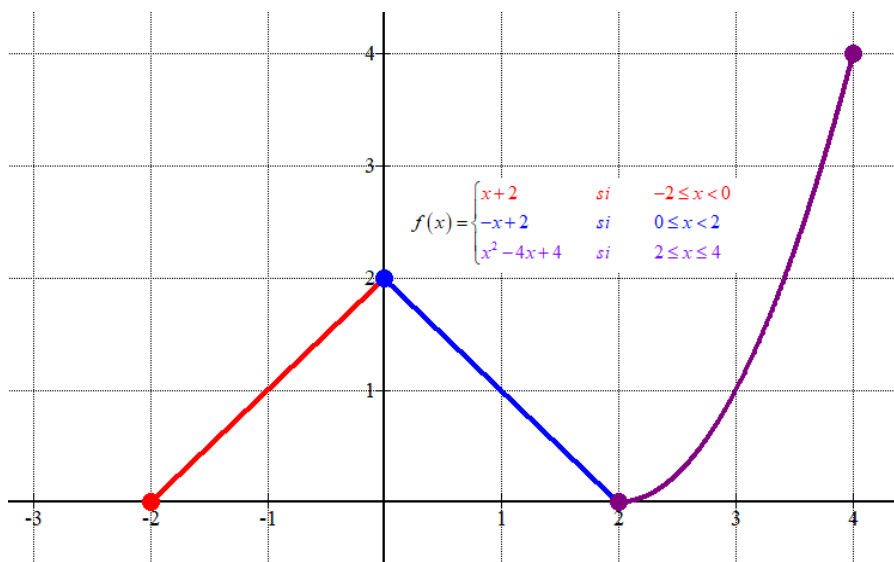
$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 = 0 + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = -2 + 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$$

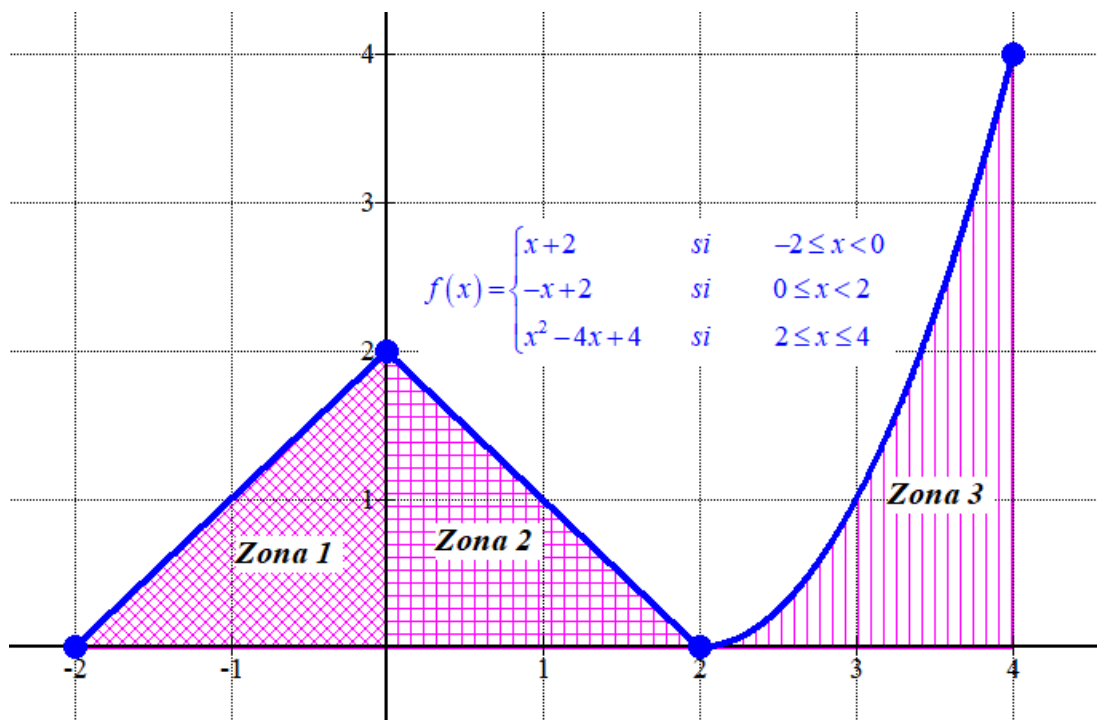
La función es continua en $x = 0$ y $x = 2$. La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$.

- b) Realizamos una tabla y dibujamos la gráfica de la función. Son dos trozos de recta y un trozo de parábola y sabemos que la función es continua.

x	$f(x) = x + 2$	x	$f(x) = -x + 2$	x	$f(x) = x^2 - 4x + 4$
-2	0	0	2	2	0
-1	1	1	1	3	1
				4	4



c) Debemos calcular el valor del área del recinto coloreado del dibujo.



El área de la zona 1 es el área de un triángulo de base 2 y altura 2: $\text{Área 1} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2u^2$.

El área de la zona 2 es el área de un triángulo de base 2 y altura 2: $\text{Área 2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2u^2$.

El área de la zona 3 es el valor de la integral definida de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ entre 2 y 4.

$$\begin{aligned} \text{Área 3} &= \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] = \frac{64}{3} - 32 + 16 - \frac{8}{3} + 8 - 8 = \boxed{\frac{8}{3} \approx 2.6667 u^2} \end{aligned}$$

El área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX es la suma de las tres áreas obtenidas: $2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \approx 6.6667$ unidades cuadradas.

APARTADO 4.1 [2,5 puntos]

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones: la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 botones y la tercera 4 botones. Cada una de las cajas contiene sólo un botón rojo.

Si elijo una caja al azar y extraigo de ella un botón al azar:

- a) [0, 9 puntos] Calcula la probabilidad de que sea un botón rojo.
 b) [0, 9 puntos] Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?
 c) [0, 7 puntos] Juntamos los botones de las tres cajas en una bolsa de la que extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

Llamamos $C1$, $C2$ y $C3$ a “elegir la caja 1, 2 o 3 respectivamente”. Y llamamos R a “elegir botón rojo de la caja”.

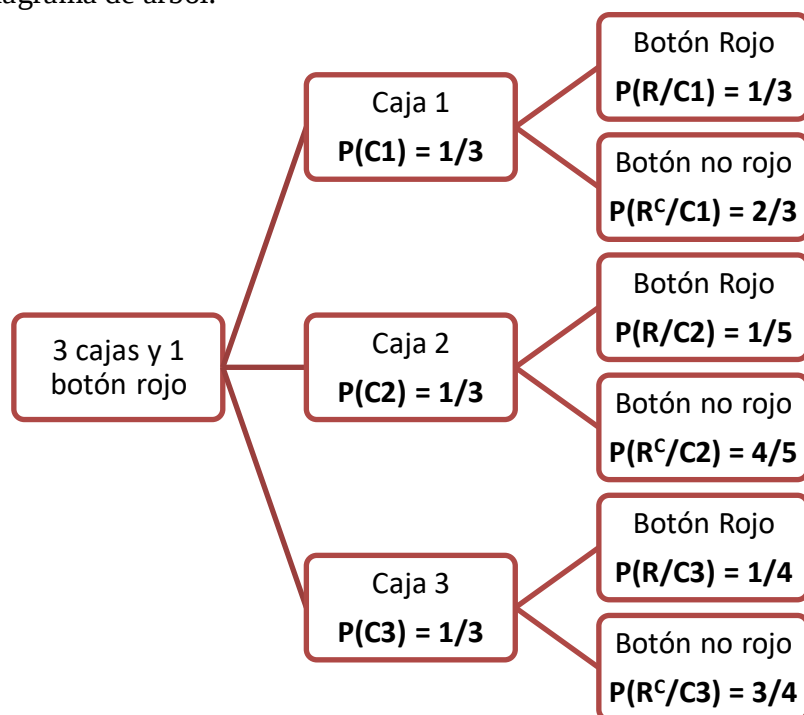
La caja 1 contiene 1 botón rojo y 2 botones de otro color, la caja 2 contiene 1 botón rojo y 4 de otro color y la caja 3 contiene 1 botón rojo y 3 de otro color.

La probabilidad de elegir cualquiera de las 3 cajas es la misma.

$$P(C1) = P(C2) = P(C3) = \frac{1}{3}.$$

La probabilidad de que al elegir un botón de la caja 1 este sea rojo vale $\frac{1}{3}$, en la caja 2 vale $\frac{1}{5}$ y en la caja 3 vale $\frac{1}{4}$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(C1)P(R/C1) + P(C2)P(R/C2) + P(C3)P(R/C3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{47}{180} \approx 0.2611$$

Al elegir una de las 3 cajas y sacar un botón al azar la probabilidad de que sea un botón rojo vale 0.2611.

b) Nos piden calcular $P(C1/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C1/R) = \frac{P(C1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C1)P(R/C1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \boxed{\frac{20}{47} \approx 0.4255}$$

La probabilidad de que el botón rojo haya sido extraído de la primera caja vale 0.4255.

c) Si juntamos todos los botones en una bolsa tendremos $3 + 5 + 4 = 12$ botones. Y 3 de esos botones son rojos. La probabilidad de sacar de la bolsa un botón rojo vale $\frac{3}{12}$ y la de que no sea rojo vale $\frac{9}{12}$.

Como las cuatro extracciones se hacen con reemplazamiento cada extracción es independiente de las demás.

Para extraer 3 botones rojos en 4 extracciones se debe extraer 3 botones rojos y 1 de otro color. Esto puede ocurrir de cuatro formas distintas.

$$\begin{aligned} P(\text{tres botones rojos}) &= P(R1 \cap R2 \cap R3 \cap \overline{R4}) + P(R1 \cap R2 \cap \overline{R3} \cap R4) + \\ &+ P(R1 \cap \overline{R2} \cap R3 \cap R4) + P(\overline{R1} \cap R2 \cap R3 \cap R4) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{12} + \\ &+ \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = 4 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{64} = 0.046875} \end{aligned}$$

La probabilidad de que al extraer cuatro botones con reemplazamiento tres sean rojos vale 0.046875.

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.

- a) [0, 5 puntos] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
 b) [0, 5 puntos] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
 c) [0, 4 puntos] Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcular la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.
 d) [0, 3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?
 e) [0, 8 puntos] Entre las papeletas numeradas, encuentra aquella cuyo número cumple la siguiente condición: si sumamos dicho número y 25 veces su inverso la suma que se obtiene es la mínima.

a) Hay 1000 papeletas y de ellas hay 100 que acaban en 5:

005, 015, 025, 035, ..., 985, 995

La probabilidad de que el número premiado termine en 5 vale $\frac{100}{1000} = 0.1$.

b) Hay 1000 papeletas y de ellas hay 10 que acaban en 55:

055, 155, 255, 355, 455, 555, 655, 755, 855 y 955

La probabilidad de que el número premiado termine en 55 vale $\frac{10}{1000} = 0.01$.

c) Los sorteos son independientes entre sí. La probabilidad de que salga un número terminado en 5 vale siempre 0.1.

d) Para que sea capicúa debe ser la primera y última cifra iguales.

000, 010, 020, ..., 090,
 , 101, 111, 121, ..., 191,
 , 202, 212, 222, ..., 292,
 ..
 909, 919, 929, ..., 999

Entre los 1000 números hay $10 \cdot 10 = 100$ números capicúas.

La probabilidad de que el número premiado sea capicúa vale $\frac{100}{1000} = 0.1$.

e) Tenemos la función $f(x) = x + \frac{25}{x}$, con $0 \leq x \leq 1000$. Debemos encontrar cuando esta función alcanza el mínimo.

$$f(x) = x + \frac{25}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{25}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{25}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{25} = 5}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = 1 - 25x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 50x^{-3} = \frac{50}{x^3} \Rightarrow f''(5) = \frac{50}{5^3} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo en $x = 5$.

La papeleta que cumple lo pedido es la papeleta 005.

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a una determinada aplicación de inteligencia artificial del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².

- a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80 %.
- b) [0, 3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
- c) [0, 8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
- d) [0, 4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio diario de conexión a la aplicación de inteligencia artificial sea inferior a 207 minutos?

X = El tiempo diario, en minutos, de conexión a una determinada aplicación de inteligencia artificial del alumnado de una cierta universidad. Como la varianza tiene un valor de 144 minutos² la desviación típica vale $\sqrt{144} = 12$ minutos. $X = N(210, 12)$.

- a) Buscamos el valor del error = e tal que $P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0.80$.

$$P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-e}{12} \leq Z \leq \frac{e}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - P\left(Z \leq \frac{-e}{12}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - P\left(Z \geq \frac{e}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - 1$$

$$P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) = 1.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e}{12} = 1.28 \Rightarrow \boxed{\text{Error} = 1.28 \cdot 12 = 15.36}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997

El intervalo característico para el 80% es:

$$(\mu - \text{Error}, \mu + \text{Error}) = (210 - 15.36, 210 + 15.36) = (194.64, 225.36)$$

- b) Nos piden calcular $P(X > 228)$.

$$P(X > 228) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{228 - 210}{12}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

	0'00	
0'0	0'5000	0'
0'1	0'5398	0'
0'2	0'5793	0'
0'3	0'6179	0'
0'4	0'6554	0'
0'5	0'6915	0'
0'6	0'7257	0'
0'7	0'7580	0'
0'8	0'7881	0'
0'9	0'8159	0'
1'0	0'8413	0'
1'1	0'8643	0'
1'2	0'8849	0'
1'3	0'9032	0'
1'4	0'9192	0'
1'5	0'9332	0'

c) Nos piden calcular $P(200 \leq X \leq 210)$.

$$P(200 \leq X \leq 210) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{200 - 210}{12} \leq Z \leq \frac{210 - 210}{12}\right) =$$

$$= P(-0.833 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.833) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 0.833) = .$$

$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0.833)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5 - 1 + 0.7967 = \boxed{0.2967}$$

d) La distribución de la media muestral es una normal con la misma media y con desviación típica

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{30}} \approx 2.19. \quad \overline{X}_{30} = N\left(210, \frac{12}{\sqrt{30}}\right)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{30} < 207)$.

$$P(\overline{X}_{30} < 207) = P\left(Z < \frac{207 - 210}{12 / \sqrt{30}}\right) = P(Z < -1.37) = P(Z > 1.37) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.37) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9147 = \boxed{0.0853}$$

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]

Lanzamos 6.000 veces un dado equilibrado de seis caras.

a) [0, 9 puntos] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco sea superior a 1.500.

b) [0, 9 puntos] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco esté comprendido entre 1.000 y 1.100 (incluidos los valores extremos del intervalo).

Consideramos ahora que tenemos un dado cargado. Este dado cumple que la probabilidad de que salga un número impar es el triple de la probabilidad de que salga un número par.

c) [0, 7 puntos] Si se lanza dos veces este dado cargado, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

a) X = Número de cincos que salen al lanzar el dado 6000 veces. Esta variable es una binomial con parámetros $n = 6000$ y $p = 1/6$. $X = B(6000, 1/6)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta variable binomial a una normal

de media $np = 6000 \cdot \frac{1}{6} = 1000$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28.8675$.

$$Y = N\left(1000, \frac{50\sqrt{3}}{3}\right).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 1000 > 5$ y $nq = 6000 \cdot \frac{5}{6} = 5000 > 5$.

Debemos calcular $P(X > 1500)$.

$$P(X > 1500) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 1500.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{1500.5 - 1000}{50\sqrt{3}/3}\right) = P(Z \geq 17.34) = 1 - P(Z \leq 17.34) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

La probabilidad es nula. Es lógico pues la media es 1000 y la desviación típica es muy pequeña 28,9.

b) Debemos calcular $P(1000 \leq X \leq 1100)$.

$$P(1000 \leq X \leq 1100) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(999.5 \leq Y \leq 1100.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{999.5 - 1000}{50\sqrt{3}/3} \leq Z \leq \frac{1100.5 - 1000}{50\sqrt{3}/3}\right) =$$

$$= P(-0.017 \leq Z \leq 3.48) = P(Z \leq 3.48) - P(Z \leq -0.02) = P(Z \leq 3.48) - P(Z \geq 0.02) =$$

$$= P(Z \leq 3.48) - [1 - P(Z \leq 0.02)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9997 - [1 - 0.5080] = \boxed{0.5077}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997

c) Llamamos p a la probabilidad de sacar par al lanzar un dado cargado, por lo que la probabilidad de sacar impar vale $1 - p$.

Nos dicen que $1 - p = 3p \rightarrow 1 = 4p \rightarrow p = \frac{1}{4}$. La probabilidad de sacar par es $1/4$ y la de sacar impar es $3/4$.

El lanzamiento del dado por primera y segunda vez son independientes y la probabilidad de obtener impar al lanzar dos veces este dado cargado vale $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0.5625$.

PAU ordinaria 2025



USaP
2024/25
AZTERKETA EREDUA

PAU
2024/25
MODELO DE EXAMEN



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CC SOCIALES II

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

- El examen consta de cinco problemas:
 - o **El problema 1 es competencial y de respuesta obligatoria.**
 - o **Elegir tres problemas de los cuatro restantes. En cada uno de estos problemas elegidos se responderá a uno de los dos apartados.**
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - o pantalla gráfica
 - o posibilidad de transmitir datos
 - o programable
 - o resolución de ecuaciones
 - o operaciones con matrices
 - o cálculo de determinantes
 - o derivadas e integrales
 - o almacenamiento de datos alfanuméricos.
- **Observación importante:** No se permitirá el uso de lapicero ni de bolígrafo rojo para la elaboración de la prueba.
- **No olvides incluir el código en cada una de las hojas del examen.**

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

- [1,6 puntos] ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
- [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- [0,6 puntos] ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2**APARTADO 2.1 [2,5 puntos]**

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente. Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

- [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.
- [1,5 puntos] Resuelve el problema.

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- [0,6 puntos] Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.
- [1 punto] Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.
- [0,9 puntos] Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2**APARTADO 3.1 [2,5 puntos]**

Las funciones $E(x)$ y $D(x)$ representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$

- [0,3 puntos] ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?
- [0,6 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?
- [0,5 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?
- [0,3 puntos] ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?
- [0,8 puntos] Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos m^2 ha pintado Deiene en total?

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

Sea la función $f(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como: $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$

Sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

- [1,25 puntos] Calcula el valor de los parámetros a y b .
- [0,75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, cuando $a = b = -1$.
- [0,5 puntos] Para los valores $a = b = -1$, ¿tiene la función, $f(x)$, algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2**APARTADO 4.1 [2,5 puntos]**

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

- [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?
- [1,5 puntos] Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

- [0,75 puntos] El segundo día.
- [1 punto] Solamente el segundo día.
- [0,75 puntos] El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria X , que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2 .

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

- [0,4 puntos] Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182 cm?
- [0,75 puntos] En la distribución de la media muestral, $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.
- [0,6 puntos] Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2 cm, con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalera

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

- [1,6 puntos] ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
- [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- [0,6 puntos] ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

- a) Llamamos “x” al número de metros lineales de tapiz tipo A e “y” al número de metros lineales de tapiz tipo B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Hilo de seda	Hilo de plata	Hilo de oro	Ingresos
Metros de tapiz A (x)	100x	200x		2000x €
Metros de tapiz B (y)	200y	100y	100y	3000y €
TOTALES	100x + 200y	200x + 100y	100y	2000x + 3000y
DISPONIBILIDAD	50 000 gr	40 000 gr	22500 gr	

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = 2000x + 3000y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro” $\rightarrow 100x + 200y \leq 50000, 200x + 100y \leq 40000, 100y \leq 22500$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 100x + 200y \leq 50000 \\ 200x + 100y \leq 40000 \\ 100y \leq 22500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x + 2y = 500$

$2x + y = 400$

$y = 225$

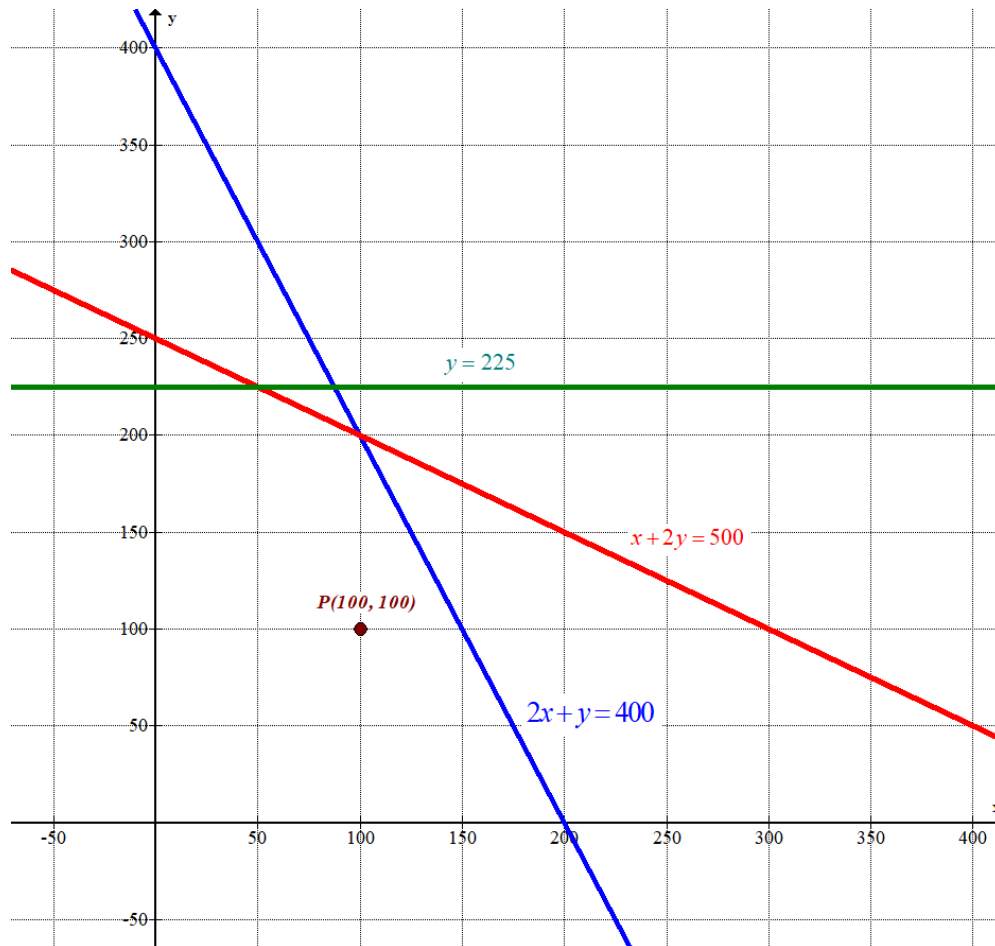
$x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = \frac{500-x}{2}$
0	250
50	225
100	200
500	0

x	$y = 400 - 2x$
0	400
100	200
150	100
200	0

x	$y = 225$
0	225
50	225
100	225

Primer
cuadrante



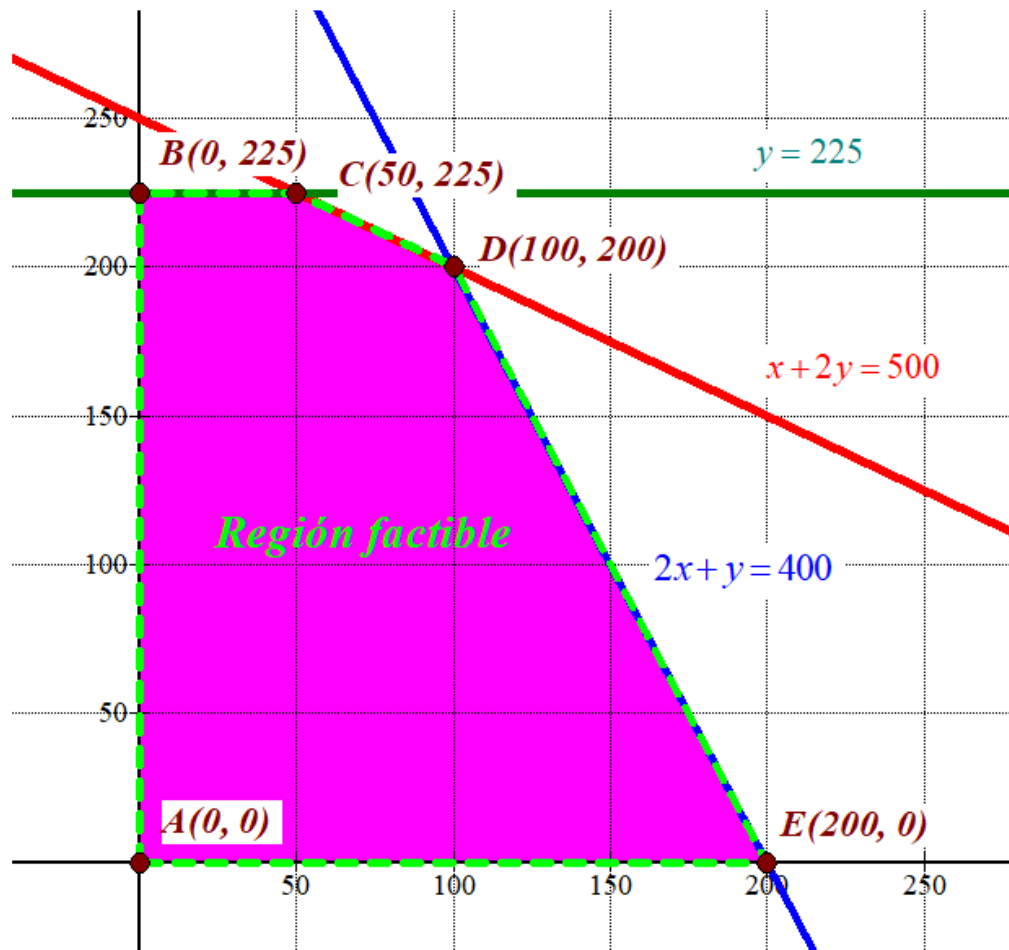
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 500 \\ 200 + 100 \leq 400 \\ 100 \leq 225 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 2000x + 3000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 225) \rightarrow I(0, 225) = 2000 \cdot 0 + 3000 \cdot 225 = 675\,000$$

$$C(50, 225) \rightarrow I(50, 225) = 2000 \cdot 50 + 3000 \cdot 225 = 775\,000$$

$$D(100, 200) \rightarrow I(100, 200) = 2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 200 = 800\,000 \text{ Máximo}$$

$$E(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 2000 \cdot 200 + 3000 \cdot 0 = 400\,000$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 800 000 € y se obtienen en el punto D(100, 200).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 100 metros lineales de tapiz tipo A y 200 metros de tapiz tipo B.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 800 000 €.

c) En confeccionar 100 metros lineales de tapices tipo A y 200 de tapices tipo B se gastan:

$100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50\,000 \text{ g} = 50 \text{ kg}$ de hilo de seda, $200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40\,000 = 40 \text{ kg}$ de hilo de plata y $100 \cdot 200 = 20\,000 \text{ g} = 20 \text{ kg}$ de hilo de oro.

Disponemos de 50 kilos de hilo de seda y lo gastamos todo. Disponemos de 40 kilos de hilo de plata y lo gastamos todo. Disponemos de 22.5 kg de hilo de oro, nos quedan después de fabricar los tapices $22.5 - 20 = 2.5 \text{ kg}$ de oro.

APARTADO 2.1 [2,5 puntos]

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente. Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) [1,5 puntos] Resuelve el problema.

a) Llamamos a , b , c al número de latas que hemos comprado del fabricante A, B y C respectivamente. Obtenemos las ecuaciones partiendo de la información proporcionada en el problema.

“Compramos 20 latas” $\rightarrow a + b + c = 20$.

“Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg” $\rightarrow 0.25a + 0.5b + c = 10$.

“Compramos 20 latas que tienen un valor total de 35,6 €” $\rightarrow a + 1.8b + 3.3c = 35.6$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ 0.25a + 0.5b + c = 10 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 20 - b - c \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 - b - c + 2b + 4c = 40 \\ 20 - b - c + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + 3c = 20 \\ 0.8b + 2.3c = 15.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 20 - 3c \\ 0.8b + 2.3c = 15.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.8(20 - 3c) + 2.3c = 15.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 2.4c + 2.3c = 15.6 \Rightarrow -0.1c = -0.4 \Rightarrow \boxed{c = \frac{0.4}{0.1} = 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 20 - 3 \cdot 4 = 8} \Rightarrow \boxed{a = 20 - 8 - 4 = 8}$$

Hemos comprado 8 latas del fabricante A, 8 del fabricante B y 4 del fabricante C.

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) [0,6 puntos] Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.
 b) [1 punto] Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.
 c) [0,9 puntos] Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

a) Hallamos la expresión de la matriz $A^2(a)$.

$$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 1+1+1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de $|A^2(a)|$.

$$|A^2(a)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = a^2$$

Averiguamos cuando este determinante vale 4.

$$|A^2(a)| = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de $A^2(a)$ vale 4 para $a = -2$ y $a = 2$.

- b) Para que la matriz sea regular su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de $A(a)$.

$$|A(a)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ |A(a)| = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = 0$$

La matriz $A(a)$ es invertible para cualquier valor de a distinto de 0. Por tanto, es invertible para los valores obtenidos en el apartado anterior ($a = \pm 2$).

Calculamos la inversa de $A(a)$ para $a = 2$.

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A(2)| = 2 \neq 0$$

$$A^{-1}(2) = \frac{\text{Adj}(A^T(2))}{|A(2)|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Determinamos la expresión de la matriz M.

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1-1 & 1-1 & 2 \\ -2-1 & 2-1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos el valor de su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

Las funciones $E(x)$ y $D(x)$ representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$

- a) [0,3 puntos] ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?
 b) [0,6 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?
 c) [0,5 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?
 d) [0,3 puntos] ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?
 e) [0,8 puntos] Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos m^2 ha pintado Deiene en total?

a) Hallamos el valor de $E(0)$ y $D(0)$ y los comparamos.

$$\left. \begin{array}{l} E(0) = -0^2 + 19 \cdot 0 + 66 = 66 \\ D(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 + 150 = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow E(0) = 66 < 150 = D(0)$$

Deiene tiene mejor rendimiento inicial.

b) Hallamos los puntos críticos de $E(x)$.

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \Rightarrow E'(x) = -2x + 19$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 19 = 0 \Rightarrow 2x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{2} = 9.5 \notin [0, 8]$$

La derivada no se anula en el intervalo $[0, 8]$.

Si tomamos $x=1$ la derivada vale $E'(1) = -2 + 19 = 17 > 0$. La derivada siempre es positiva en el intervalo $[0, 8]$. La función es creciente en todo el intervalo, por lo que el valor máximo de la función se obtiene para $x=8$. Como $E(8) = -8^2 + 19 \cdot 8 + 66 = 154$. El rendimiento máximo de Eneko se produce a las 8 horas y es de 154 metros cuadrados pintados por hora.

c) Hallamos los puntos críticos de $D(x)$.

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \Rightarrow D'(x) = -2x + 5$$

$$D'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \in [0, 8]$$

Sustituimos $x = 2.5$ en la segunda derivada.

$$D'(x) = -2x + 5 \Rightarrow D''(x) = -2 \Rightarrow D''(2.5) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 2.5$.

Como $D(2.5) = -2.5^2 + 5 \cdot 2.5 + 150 = 156.25$. El rendimiento máximo de Deiene se produce a las 2.5 horas y es de 156.25 metros cuadrados pintados por hora.

d) Buscamos cuando $E(x) = D(x)$.

$$E(x) = D(x) \Rightarrow -x^2 + 5x + 150 = -x^2 + 19x + 66 \Rightarrow 84 = 14x \Rightarrow x = \frac{84}{14} = 6$$

Tienen el mismo rendimiento a las 6 horas.

e) Los metros cuadrados pintados por Deiene en las 8 horas es el valor de la integral definida de la función $D(x)$ entre 0 y 8.

$$\begin{aligned} \int_0^8 D(x) dx &= \int_0^8 -x^2 + 5x + 150 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 150x \right]_0^8 = \\ &= \left[-\frac{8^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot 8^2 + 150 \cdot 8 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot 0^2 + 150 \cdot 0 \right] = -\frac{8^3}{3} + 160 - 1200 \approx \boxed{1189.33} \end{aligned}$$

Deiene en toda la jornada ha pintado unos 1189.33 metros cuadrados aproximadamente.

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

Sea la función $f(x):(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida como: $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$

Sabemos que la recta $y=-2$ es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=1$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el valor de los parámetros a y b .
 b) [0,75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, cuando $a=b=-1$.
 c) [0,5 puntos] Para los valores $a=b=-1$, ¿tiene la función, $f(x)$, algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

a) Si la tangente es $y=-2$ significa que es horizontal y por tanto la función tiene un máximo o un mínimo en $x=1$. Por lo que la derivada se anula para este valor $\rightarrow f'(1)=0$.

Como la gráfica de la función y la recta tangente coinciden en $x=1$ entonces sabemos que $f(1)=2$.

Usamos estas dos condiciones para obtener el valor de los parámetros a y b .

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2ax\cdot x-(ax^2+b)}{x^2}=\frac{2ax^2-ax^2-b}{x^2}=\frac{ax^2-b}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1)=0\rightarrow\frac{a\cdot 1^2-b}{1^2}=0\rightarrow a-b=0\rightarrow a=b \\ f(1)=-2\rightarrow\frac{a\cdot 1^2+b}{1}=-2\rightarrow a+b=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a+a=-2\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-1}\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Los valores buscados son $a=b=-1$.

b) Cuando $a=b=-1$ la función queda $f(x)=\frac{-x^2-1}{x}$ y su derivada es $f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{x^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Como la función solo está definida en el intervalo $(0,+\infty)$ solo consideramos el valor $x=1$ como punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

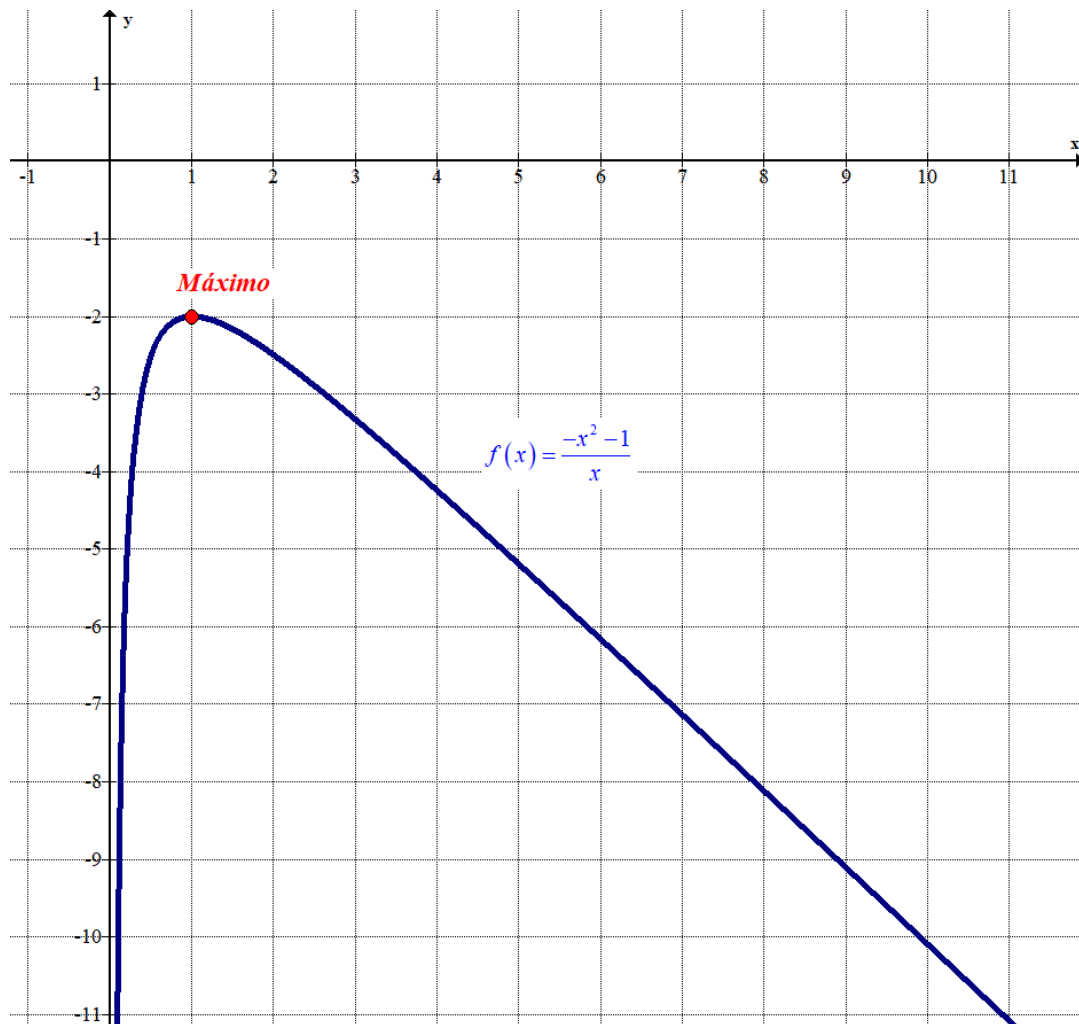
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-0.5^2+1}{0.5^2}=3>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2^2+1}{2^2}=\frac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(0,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

- c) Por lo visto en el apartado anterior sabemos que la función crece antes de 1 y decrece después, por lo que la función tiene un máximo relativo en $x=1$.

Como $f(1) = \frac{-1^2 - 1}{1} = -2$ las coordenadas del máximo relativo son $(1, -2)$.

La función no tiene ningún mínimo relativo.



APARTADO 4.1 [2,5 puntos]

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

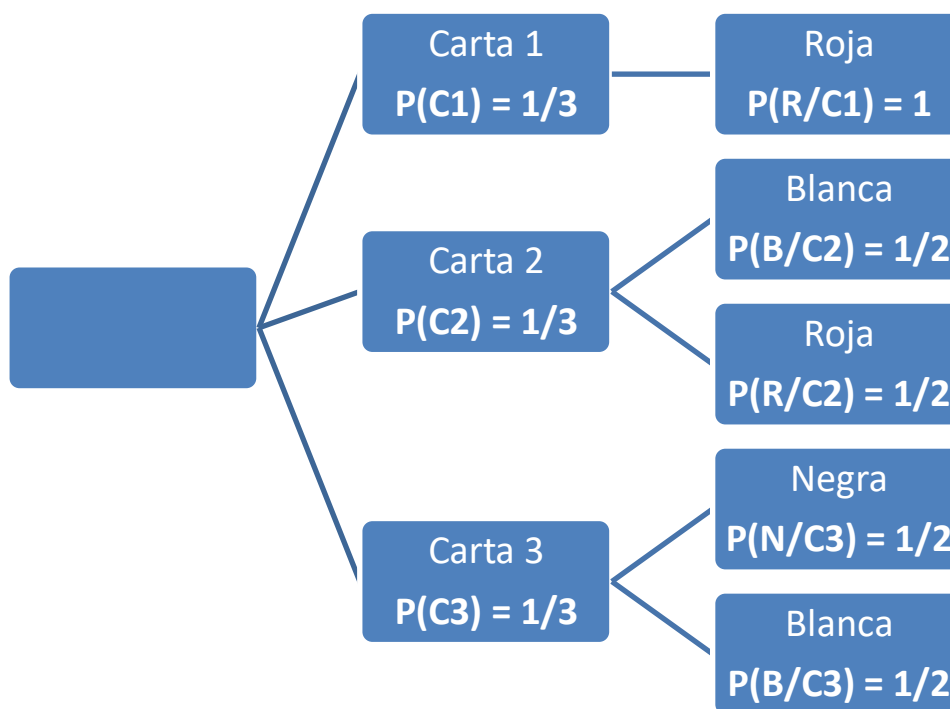
Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) [1,5 puntos] Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

a) Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos carta 1 a la carta con dos caras rojas, carta 2 a la que tiene una cara blanca y otra roja, por último, llamamos carta 3 a la que tiene una cara negra y otra blanca.

También llamamos R, B y N a obtener una cara roja, blanca o negra.



a) Debemos calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(C1)P(R/C1) + P(C2)P(R/C2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b) La carta que tiene una cara blanca y otra roja es la carta 2. Nos piden calcular $P(C2/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C2/B) = \frac{P(C2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C2)P(B/C2)}{P(C2)P(B/C2) + P(C3)P(B/C3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %. Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

- a) [0,75 puntos] El segundo día.
 b) [1 punto] Solamente el segundo día.
 c) [0,75 puntos] El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Estudia el día 2	No estudia el día 2	
Estudia el día 1	10%	10%	
No estudia el día 1		25%	
			100%

Completamos la tabla.

	Estudia el día 2	No estudia el día 2	
Estudia el día 1	10%	10%	20%
No estudia el día 1	55%	25%	80%
	65%	35%	100%

- a) La probabilidad de que estudie el día 2 es del 65%.
- b) La probabilidad de estudiar sólo el segundo día es la probabilidad de no estudiar el día 1 y estudiar el día 2. Esta probabilidad es del 55%.
- c) No ha estudiado el día 1 con una probabilidad de 80% y ha estudiado el día 2 y no ha estudiado el día 1 con una probabilidad de 55%. La probabilidad de estudiar el día 2, sabiendo que no ha estudiado el día 1 vale $\frac{55}{80} = \frac{11}{16} = 0.6875 = 68.75\%$.

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

X = la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica. $X = N(6.8, 0.6)$

Y = la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering. $Y = N(7, 0.5)$

Calculamos el valor de “a” tal que $P(X \geq a) = 0.25$.

$$P(X \geq a) = 0.25 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-6.8}{0.6} = \frac{0.67+0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow a-6.8 = 0.405 \Rightarrow \boxed{a = 7.205}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7423	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7824

La nota de corte en Arquitectura Técnica será de 7.205. Las dos tienen una nota superior a esta nota de corte y tienen opción de acceso a este grado.

Calculamos el valor de “b” tal que $P(Y \geq b) = 0.25$.

$$P(Y \geq b) = 0.25 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b-7}{0.5}\right) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b-7}{0.5} = \frac{0.67+0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow b-7 = 0.3375 \Rightarrow \boxed{b = 7.3375}$$

La nota de corte en Biomedical Engineering será de 7.3375. Solo Teresa tiene una nota superior (7.45) y puede entrar, pero Yolanda no puede entrar al ser su nota (7.25) inferior a esta nota de corte. Teresa tiene opción de acceso a los dos grados y Yolanda solo tiene opción de acceso al grado de Arquitectura Técnica.

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria X , que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2 . A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

- a) [0,4 puntos] Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- b) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182 cm?
- c) [0,75 puntos] En la distribución de la media muestral, $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.
- d) [0,6 puntos] Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2 cm, con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?

a) X = La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento. Como la varianza es 169 la desviación típica es $\sqrt{169} = 13 \text{ cm}$.

$$X = N(175, 13)$$

La distribución de la media muestral es una normal con la misma media y con desviación típica

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{13}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9} \approx 1.44. \quad \bar{X}_{81} = N\left(175, \frac{13}{9}\right).$$

b) Debemos calcular $P(172 \leq \bar{X}_{81} \leq 182)$.

$$P(172 \leq \bar{X}_{81} \leq 182) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{172-175}{13/9} \leq Z \leq \frac{182-175}{13/9}\right) =$$

$$= P(-2.08 \leq Z \leq 4.85) = P(Z \leq 4.85) - P(Z \leq -2.08) = P(Z \leq 4.85) - P(Z \geq 2.08) =$$

$$= P(Z \leq 4.85) - [1 - P(Z \leq 2.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - [1 - 0.9812] = \boxed{0.9812}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7853
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8829
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9439
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9544
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817

c) Buscamos el valor del error (e) tal que $P(175 - e \leq \bar{X}_{81} \leq 175 + e) = 0.99$.

$$\begin{aligned}
 P(175 - e \leq \overline{X}_{81} \leq 175 + e) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-e}{13/9} \leq Z \leq \frac{e}{13/9}\right) = \\
 &= P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - P\left(Z \leq \frac{-e}{13/9}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - P\left(Z \geq \frac{e}{13/9}\right) = \\
 &= P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - 1 \\
 P(175 - e \leq \overline{X}_{81} \leq 175 + e) &= 0.99 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) &= 1.99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) = \frac{1.99}{2} = 0.995 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} &\Rightarrow \frac{e}{13/9} = 2.575 \Rightarrow \boxed{\text{Error} = 2.575 \cdot \frac{13}{9} \approx 3.72}
 \end{aligned}$$

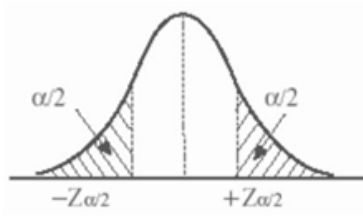
	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9942	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0

El intervalo característico para el 99% es:

$$(\mu - \text{Error}, \mu + \text{Error}) = (175 - 3.72, 175 + 3.72) = (171.28, 178.72)$$

d) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 94% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.03 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.97 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0
1'8	0'9644	0'9651	0'9656	0'9661	0'9674	0'9679	0'9686	0'9692	0'9699	0

Utilizamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} < 2 &\Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 1.88 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 1.88 \cdot 13 < 2\sqrt{n} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{1.88 \cdot 13}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{1.88 \cdot 13}{2} \right)^2 < n \Rightarrow \boxed{n > 149.33}
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 150 personas.

EAU extraordinaria 2024

UNIBERTSITATERA
SARTZEKO EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2024ko EZOHIOA

EXTRAORDINARIA 2024

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA IIMATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno.

La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

- a) [2,2 puntos] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?
- b) [0,3 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

B.1. [hasta 2.5 puntos]

- a) [1,25 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

- a) [0,75 puntos] Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.
- b) [1 punto] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde " x " representa la cantidad producida de un determinado artículo.

- a) [0,75 puntos] ¿Disminuye el coste alguna vez?
- b) [0,5 puntos] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.
- c) [0,25 puntos] ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?
- d) [0,75 puntos] Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?
- e) [0,25 puntos] Representa gráficamente la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Sean A , B , C , D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$.

Calcula la probabilidad de que ocurran A y B .

- b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$.

Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D .

- c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ y que los sucesos A y E son independientes.

Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

- b) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

- c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².

- a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80%.

- b) [0,3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

- c) [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

- d) [0,4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \text{ puntos} \text{ y } s = 15 \text{ puntos}.$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno.

La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) [2,2 puntos] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) [0,3 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

a) Llamamos “x” al número de relojes de pulsera, “y” al número de relojes de bolsillo.

“La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes” $\rightarrow x + y \leq 1000$.

“No puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo” $\rightarrow x \leq 800; y \leq 600$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1000 \\ x \leq 800; y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función a maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 90x + 120y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 1000$$

$$x = 800$$

$$y = 600$$

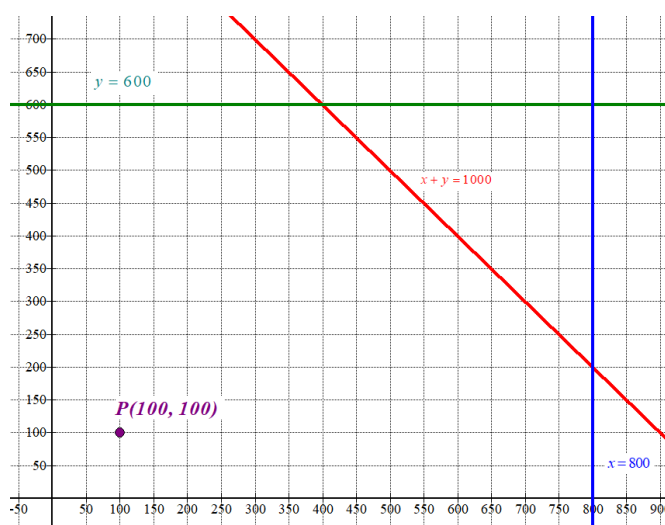
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 1000 - x
0	1000
400	600
800	200
1000	0

x	y = 800
800	0
800	200
800	100
800	0

x	y = 600
0	600
400	600
600	600

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1000 \\ x \leq 800; y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

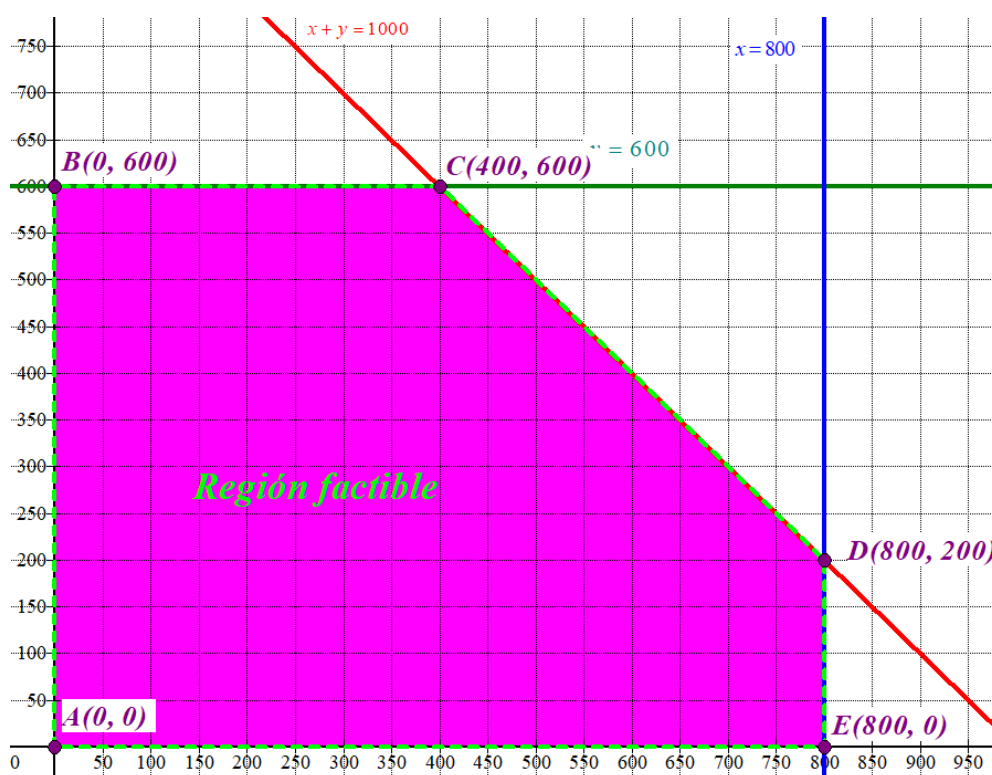
situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 100 \leq 1000 \\ 100 \leq 800; 100 \leq 600 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\}$$

¡Son ciertas todas las desigualdades!

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 90x + 120y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 600) \rightarrow I(0, 600) = 90 \cdot 0 + 120 \cdot 600 = 72000$$

$$C(400, 600) \rightarrow I(400, 600) = 90 \cdot 400 + 120 \cdot 600 = 108000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(800, 200) \rightarrow I(800, 200) = 90 \cdot 800 + 120 \cdot 200 = 96000$$

$$E(800, 0) \rightarrow I(800, 0) = 90 \cdot 800 + 120 \cdot 0 = 72000$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 108000 € y se obtienen en el punto $C(400, 600)$, lo que significa fabricar y vender 400 relojes de pulsera y 600 de bolsillo.

b) Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son 108000 €.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

a) [1,25 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3y+2(1-2x) \\ 2y+2(1+x)+2 \\ 2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3y+2-4x \\ 2y+2+2x+2 \\ 2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4x+3y+2=-1 \\ 2x+2y+4=2 \\ z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ 2x+2y=-2 \\ \boxed{z=-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ y=-1-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+3(-1-x)=-3 \Rightarrow -4x-3-3x=-3 \Rightarrow -7x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{0}{-7}=0} \Rightarrow \boxed{y=-1-0=-1}$$

La solución del sistema es $x=0$; $y=-1$; $z=-2$.

b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0$$

Al ser no nulo el determinante la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

$$\begin{aligned} M = A^t \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 10-16 & -6+8 \\ 15-20 & -9+10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

- a) **[0,75 puntos]** Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.
- b) **[1 punto]** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.
- c) **[0,75 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

- a) Si la función pasa por el punto $(1, -3)$ significa que $f(1) = -3$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + 3x^2 - 5x + b \\ f(1) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 = a \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + b \Rightarrow -3 = a + 3 - 5 + b \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en $x = -1$ implica que $f''(-1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= 6ax + 6 \\ f''(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 6a(-1) + 6 \Rightarrow 0 = -6a + 6 \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de b .

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ a + b &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

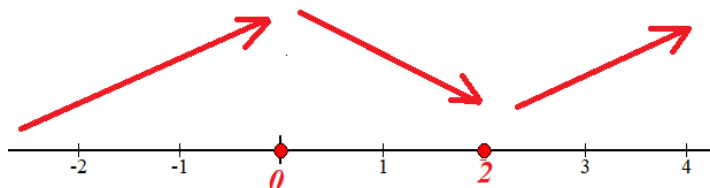
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $g'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

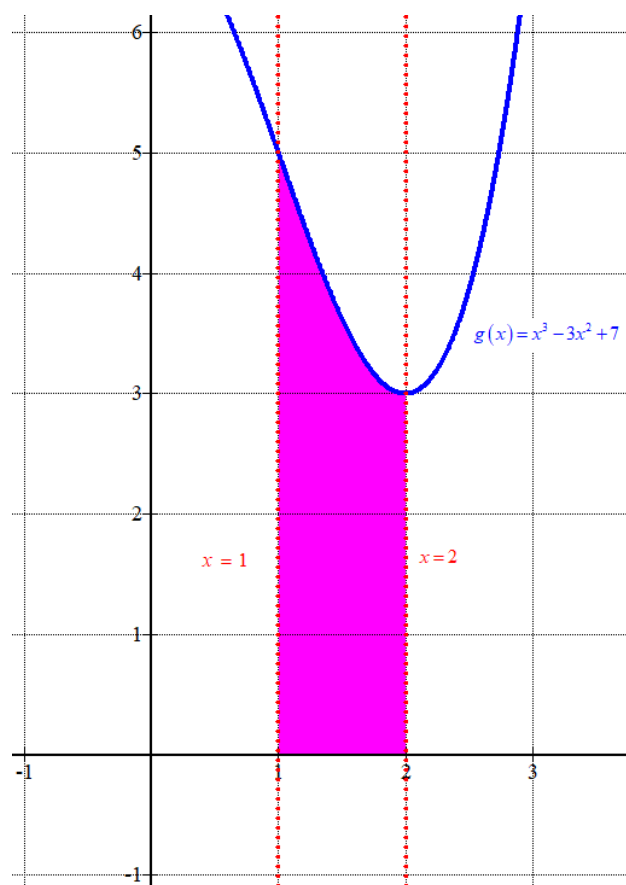


La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

$$g(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 7 = 7, \quad g(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 = 3$$

El punto $(0, 7)$ es un máximo relativo y el punto $(2, 3)$ es un mínimo relativo.

c) Dibujamos la región de la que deseamos calcular el área.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno podemos aproximar el área de la zona coloreada. Tiene un valor entre 3 y 4 unidades cuadradas.

Usamos el cálculo integral para obtener su valor exacto.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 7 dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 7x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 7 \cdot 2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 7 \cdot 1 \right] = 4 - 8 + 14 - \frac{1}{4} + 1 - 7 = \frac{15}{4} = 3.75 \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x=1$, $x=2$ tiene un valor de 3.75 unidades cuadradas.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.

- [[0,75 puntos]] ¿Disminuye el coste alguna vez?
- [[0,5 puntos]] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.
- [[0,25 puntos]] ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?
- [[0,75 puntos]] Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?
- [[0,25 puntos]] Representa gráficamente la función.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \Rightarrow f'(x) = -6 + 2x$$

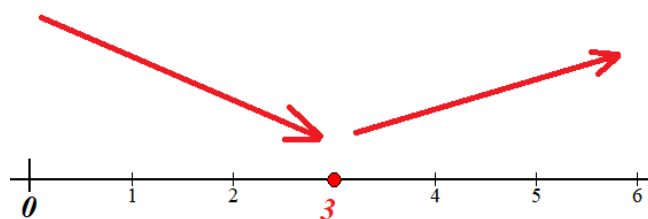
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -6 + 2 \cdot 1 = -4 < 0$. El coste disminuye en $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = -6 + 2 \cdot 4 = 2 > 0$. El coste crece en $(3, +\infty)$.

El coste disminuye cuando la cantidad producida del artículo es inferior a 3 unidades.

b) Por lo estudiado en el apartado anterior la función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo en $x = 3$. Como $f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 31$ este coste mínimo es de 31 000 euros.

c) Nos piden el valor de $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) \\ f(x) = 40 - 6x + x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$$

El coste de no producir ningún artículo es de 40000 €.

d) Nos piden averiguar el valor de “x” para el que $f(x) = 80$.

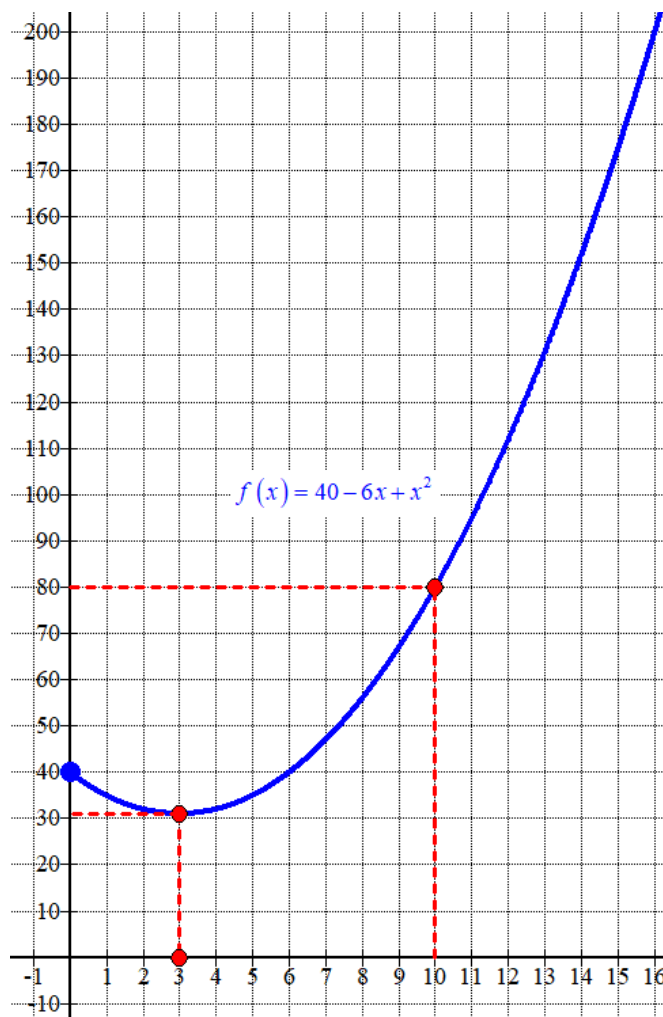
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 80 \\ f(x) = 40 - 6x + x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-40)}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{6+14}{2} = \boxed{10 = x} \\ \frac{6-14}{2} = -4 \notin [0, +\infty) \end{cases}$$

Para la producción de 10 unidades el coste es de 80000 euros.

e) Hacemos una tabla de valores y representamos la función costes.

x	$f(x) = 40 - 6x + x^2$
0	40
3	31
10	80



BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Sean A , B , C , D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) **[0,75 puntos]** Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$.

Calcula la probabilidad de que ocurran A y B .

b) **[1 punto]** Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$.

Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D .

c) **[0,75 puntos]** Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ y que los sucesos A y E son independientes.

Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

a) Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.4 \\ P(B) = 0.3 \\ P(A \cup B) = 0.5 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.5 = 0.4 + 0.3 - P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.2}$$

La probabilidad de que ocurran A y B es de 0.2

b) Nos piden calcular $P(C/D)$.

Primero determinamos la probabilidad de $P(C \cap D)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(C) = 0.5 \\ P(D) = 0.6 \\ P(C \cup D) = 0.7 \\ P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.7 = 0.5 + 0.6 - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cap D) = 0.4$$

Calculamos el valor de $P(C/D)$ usando el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.4}{0.6} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.667}$$

c) Nos piden calcular $P(A \cup E)$.

Si los sucesos A y E son independientes se cumple que $P(A \cap E) = P(A)P(E)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.4 \\ P(E) = 0.6 \\ P(A \cap E) = P(A)P(E) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \\ P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cup E) = 0.4 + 0.6 - 0.24 = \boxed{0.76}$$

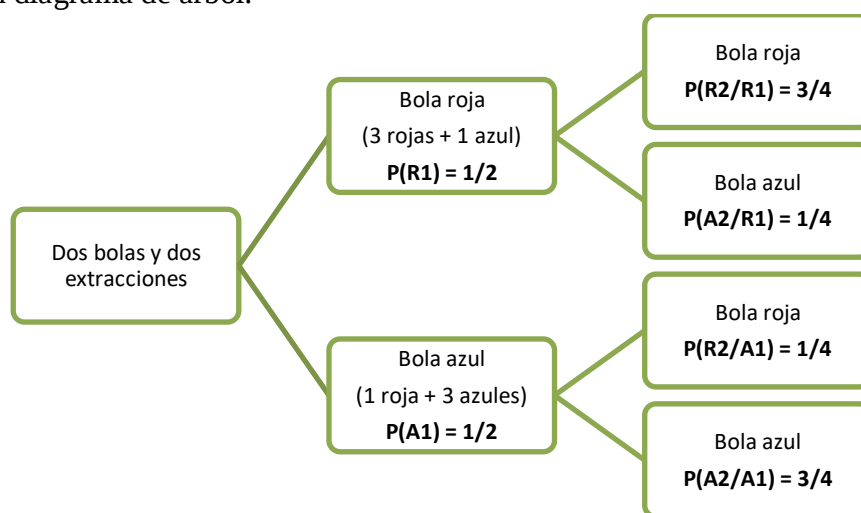
La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos es de 0.76

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

- a) $\llbracket 0,5 \text{ puntos} \rrbracket$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.
- b) $\llbracket 1,25 \text{ puntos} \rrbracket$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
- c) $\llbracket 0,75 \text{ puntos} \rrbracket$ Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Llamamos A_1 , A_2 , R_1 y R_2 a sacar bola azul o roja en primera o segunda extracción. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(R_2/A_1)$. Si sacas primero una bola azul para la segunda extracción se devuelve la bola azul a la caja junto con dos bolas azules más. La caja pasa a tener 1 bola roja y 3 azules.

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul es de $\frac{1}{4} = 0.25$.

- b) Nos piden calcular $P(A_2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(R_1)P(A_2/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul es de 0.5.

- c) Nos piden calcular $P(R_1/A_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R_1/A_2) = \frac{P(R_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(R_1)P(A_2/R_1)}{P(A_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.25}{0.5} = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja sabiendo que la segunda ha sido azul es de 0.25.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².

- a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80%.
- b) [0,3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
- c) [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
- d) [0,4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

X = tiempo diario (en minutos) de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad.

Como la varianza es 144 la desviación típica es $\sqrt{144} = 12$ minutos. $X = N(210, 12)$

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 80% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.80 \rightarrow \alpha = 0.20 \rightarrow \alpha/2 = 0.10 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.90 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8906	0'8925	0'8943	0'8961	0'8979	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sigma = 1.285 \cdot 12 = 15.42$$

El intervalo de confianza es:

$$(\mu - Error, \mu + Error) = (210 - 15.42, 210 + 15.42) = (194.58, 225.42)$$

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 228)$.

$$P(X \geq 228) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 210}{12} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{228 - 210}{12}\right) = P(Z \geq 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z < 1.5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

	0
0	0'0000
0'1	0'3980
0'2	0'7993
0'3	0'1790
0'4	0'5540
0'5	0'9150
0'6	0'2570
0'7	0'5800
0'8	0'8810
0'9	0'1590
1	0'4130
1'1	0'6430
1'2	0'8490
1'3	0'9032
1'4	0'9192
1'5	0'9332
1'6	0'9452

La probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos es de 0.0668.

c) Nos piden calcular $P(200 \leq X \leq 210)$.

$$\begin{aligned}
 P(200 \leq X \leq 210) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 210}{12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{200 - 210}{12} \leq Z \leq \frac{210 - 210}{12}\right) = \\
 &= P(-0.83 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.83) = 0.5 - P(Z \geq 0.83) = \\
 &= 0.5 - (1 - P(Z < 0.83)) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 0.5 - 1 + 0.7967 = \boxed{0.2967}
 \end{aligned}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8

La probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos es de 0.2967.

d) La distribución de las medias muestrales de tamaño 30 sigue una ley normal con la misma media (210) y con desviación típica $\sigma = \frac{12}{\sqrt{30}} = 2.19$. $\overline{X}_{30} = N(210, 2.19)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{30} < 207)$.

$$\begin{aligned}
 P(\overline{X}_{30} < 207) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{207 - 210}{2.19}\right) = P(Z < -1.37) = \\
 &= P(Z > 1.37) = 1 - P(Z \leq 1.37) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9147 = \boxed{0.0853}
 \end{aligned}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0

La probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos es de 0.0853.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \text{ puntos} \quad y \quad s = 15 \text{ puntos}.$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

X = el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad

Media muestral $\bar{x} = 98$ puntos. Tamaño de la muestra = $n = 100$

El intervalo de confianza es (94,5, 101,5)

El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

$$Error = \frac{101,5 - 94,5}{2} = 3,5$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3,5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow \frac{3,5 \cdot 10}{15} = z_{\alpha/2} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$$

Buscamos en la tabla de la normal el valor de $1 - \frac{\alpha}{2}$ para $z_{\alpha/2} = 2,33$.

	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925

Como $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0099 \Rightarrow \alpha = 0,0198 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9802$.

El nivel de confianza es del 98,02 %.

Se puede afirmar con un 98,02 % de confianza que el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos.

EAU ordinaria 2024

UNIBERTSITATERA
SARTZEKO EBALUAZIOA

2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA IIEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2,5 puntos]**

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

B.1. [hasta 2,5 puntos]

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar. Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

- c) [2,2 puntos] ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?
 d) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

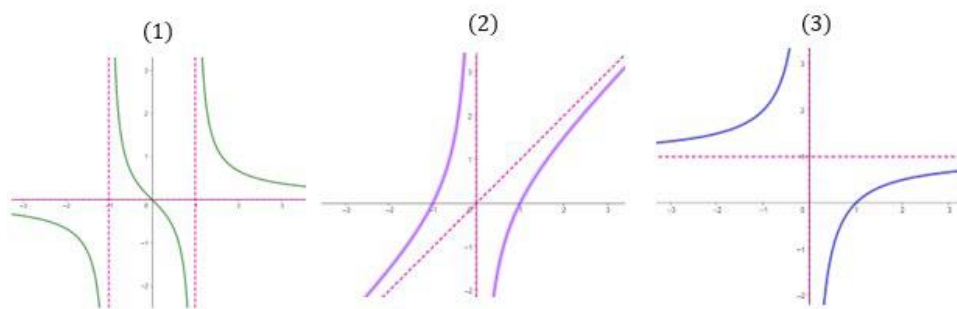
- a) [1 punto] Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0, 0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
 b) [0,75 puntos] Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.
 c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

- a) [0,9 puntos] Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x-1}{x}; \quad B) g(x) = \frac{x}{x^2-1}; \quad C) h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 puntos] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?
- b) [0,75 puntos] Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.
- d) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

- a) [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?
- b) [0,35 puntos] Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?
- c) [0,35 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?
- d) [1 punto] ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”? Justifica tu respuesta.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- c) [1 punto] Si la desviación típica es 2,6 puntos y el Apto se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

- a) [1,25 puntos] Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.
- b) [0,75 puntos] Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- c) [0,5 puntos] Interpreta los resultados obtenidos.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Llamamos “x” a la puntuación obtenida en el primer problema, “y” a la obtenida en el segundo y “z” a la obtenida en el tercero.

“Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos” $\rightarrow x + y + z = 7.2$.

“La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo” $\rightarrow x = 1.40 \cdot y$.

“La del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo” $\rightarrow z = 2(x + y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ x = 1.40 \cdot y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.40y + y + z = 7.2 \\ z = 2(1.40y) + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.40y + z = 7.2 \\ z = 4.8y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4y + 4.8y = 7.2 \Rightarrow 7.2y = 7.2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 4.8 \cdot 1 = 4.8} \\ \boxed{x = 1.4 \cdot 1 = 1.4} \end{cases}$$

Aitor ha obtenido 1.4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4.8 en el tercero.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar. Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

- c) [2,2 puntos] ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?
 d) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

- c) Llamamos “x” al número de trufas dulces e “y” al número de trufas amargas.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Cacao	Nata	Azúcar	Ingresos
Trufa dulce (x)	20x gr	20x gr	30x gr	x €
Trufa amarga (y)	100y gr	20y gr	15y gr	1,3y €
TOTALES	20x+100y	20x+20y	30x+15y	x+1.3y
DISPONIBILIDAD	30 000 gr	8 000 gr	10500 gr	

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = x + 1.3y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“La pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar” →
 $20x + 100y \leq 30000$, $20x + 20y \leq 8000$, $30x + 15y \leq 10500$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 100y \leq 30000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30x + 15y \leq 10500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + 5y = 1500$$

$$x + y = 400$$

$$2x + y = 700$$

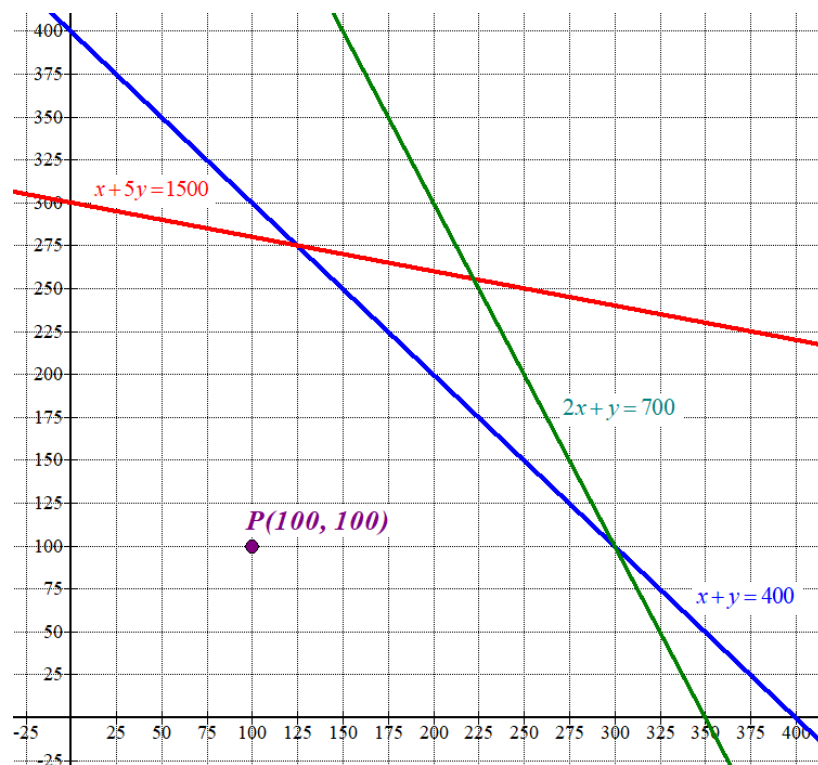
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = $\frac{1500 - x}{5}$
0	300
125	275
500	200

x	y = 400 - x
0	400
125	275
300	100
400	0

x	y = 700 - 2x
0	700
300	100
350	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

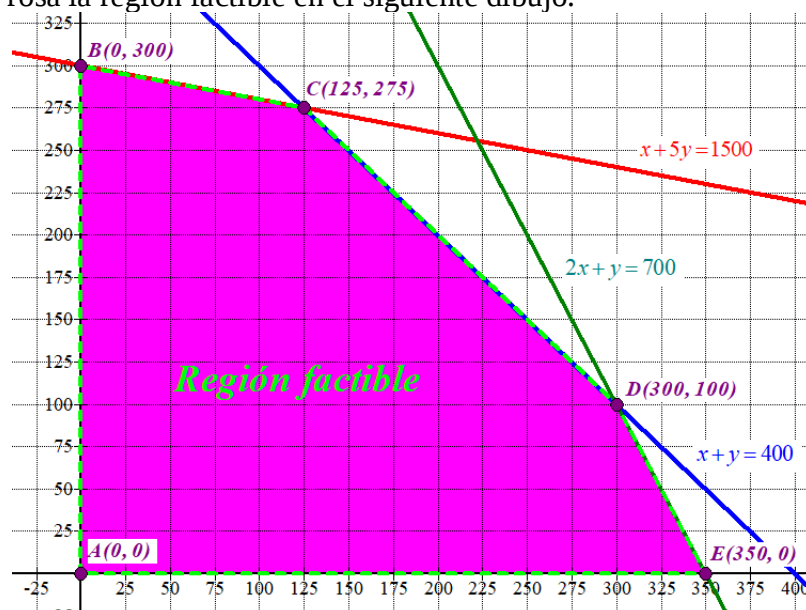
$$\left. \begin{array}{l} x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 500 \leq 1500 \\ 100 + 100 \leq 400 \\ 200 + 100 \leq 700 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 400 \\ x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 400 - y \\ x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 400 - y + 5y = 1500 \Rightarrow 4y = 1100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1100}{4} = 275 \Rightarrow x = 400 - 275 = 125 \Rightarrow C(125, 275)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = x + 1.3y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 300) \rightarrow I(0, 300) = 0 + 1.3 \cdot 300 = 390$$

$$C(125, 275) \rightarrow I(125, 275) = 125 + 1.3 \cdot 275 = 482.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(300, 100) \rightarrow I(300, 100) = 300 + 1.3 \cdot 100 = 430$$

$$E(350, 0) \rightarrow I(350, 0) = 350 + 1.3 \cdot 0 = 350$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 482.5 € y se obtienen en el punto C(125, 275).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 125 trufas dulces y 275 amargas.

d) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 482.5 €.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

- a) [1 punto] Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.
- b) [0,75 puntos] Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

- a) La función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1 tiene la siguiente expresión $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Pasa por el punto $(0,0) \rightarrow f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Tener un extremo relativo en el punto $(2, -4)$ implica que la gráfica de la función pasa por el punto $(2, -4)$ y que la derivada de la función se anula en $x = 2 \rightarrow f(2) = -4; f'(2) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx \\ f(2) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = 2^3 + a \cdot 2^2 + 2b \Rightarrow -12 = 4a + 2b \Rightarrow \boxed{-6 = 2a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b \Rightarrow \boxed{4a + b = -12}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = -6 \\ b = -12 - 4a \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - 12 - 4a = -6 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{6}{-2} = -3} \Rightarrow \boxed{b = -12 - 4(-3) = 0}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = c = 0$.

La función queda $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

Sustituimos en la segunda derivada para averiguar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 \rightarrow x = 0 \text{ es máximo} \\ f''(2) = 6 > 0 \rightarrow x = 2 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

La función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

Iguamos la segunda derivada a cero en busca de los puntos de inflexión.

$$\begin{cases} f''(x) = 6x - 6 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Como la tercera derivada es $f'''(x) = 6$ al sustituir por $x = 1$ no se anula y podemos afirmar que la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

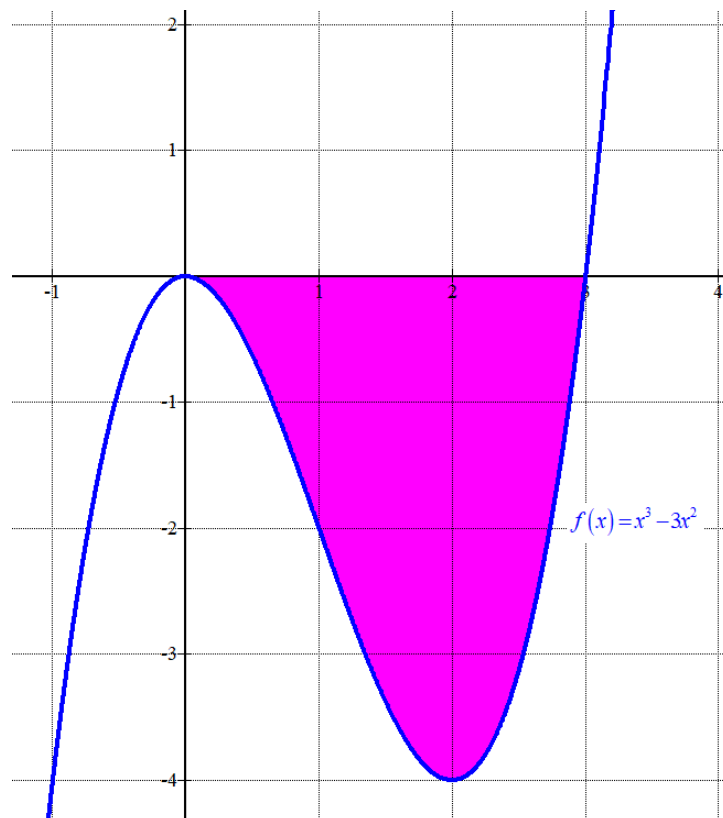
c) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 \\ \text{Eje de abscisas} \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{cases}$$

El área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la función.

$$\int_0^3 x^3 - 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 = \left[\frac{3^4}{4} - 3^3 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 \right] = \frac{81}{4} - 27 = -6.75$$

El área tiene un valor de 6.75 unidades cuadradas.

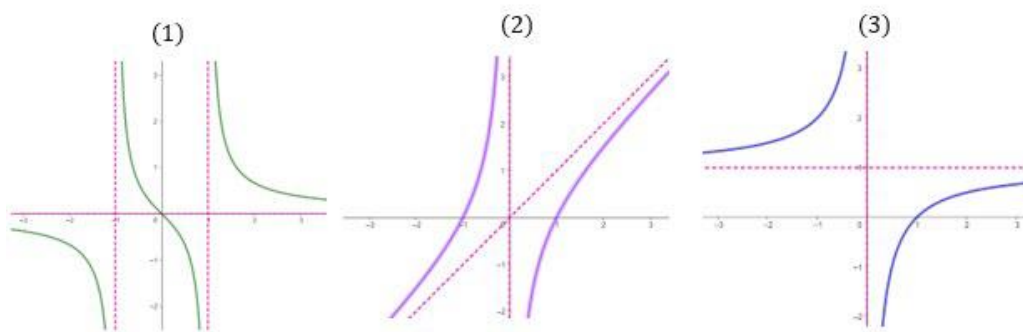


B.2. [hasta 2,5 puntos]

a) [0,9 puntos] Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x-1}{x}; \quad B) g(x) = \frac{x}{x^2-1}; \quad C) h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 puntos] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- a) En las gráficas 1, 2 y 3 se aprecia con relativa claridad las asíntotas de cada función. En la expresión de las funciones A, B y C se observa que el dominio de las funciones A y C es $\mathbb{R} - \{0\}$ y las dos funciones tienen asíntota vertical $x = 0$. La función B tiene como dominio $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ por lo que esta función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$. La gráfica 1 tiene dos asíntotas verticales como la función B. La gráfica 3 tiene una asíntota horizontal al igual que la función A. Lo comprobamos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

La función A tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal.

La gráfica 3 se corresponde con la función A.

La restante gráfica 2 se corresponde con la función C. Podemos comprobar que la función C tiene una asíntota oblicua como se aprecia en la gráfica 3.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

La función C tiene la recta $y = x$ como asíntota oblicua.

Las correspondencias son $A \rightarrow 3$, $B \rightarrow 1$, $C \rightarrow 2$.

b) **Gráfica 1** $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$; Recorrido = $\mathbb{R}$; Decrece en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Gráfica 2 $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$; Recorrido = $\mathbb{R}$; Crece en $\mathbb{R} - \{0\}$

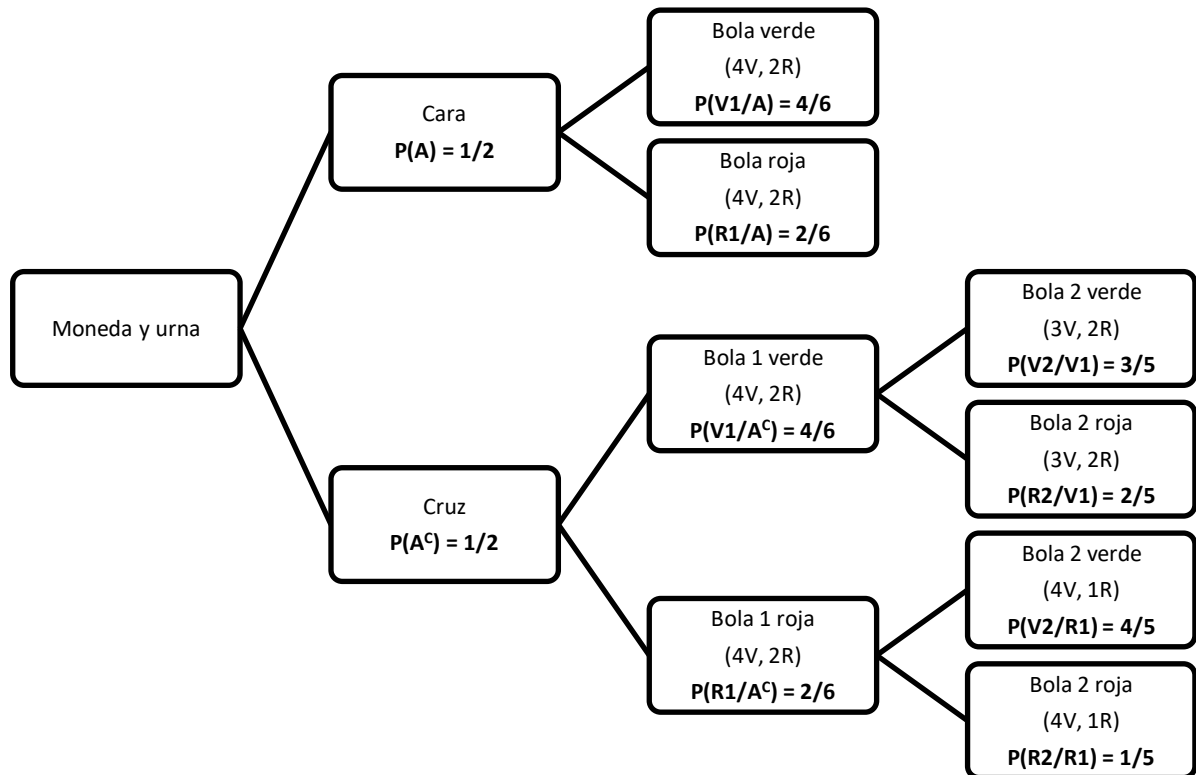
Gráfica 3 $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$; Recorrido = $\mathbb{R} - \{1\}$; Crece en $\mathbb{R} - \{0\}$

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?
- b) [0,75 puntos] Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.
- d) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Para que Asier extraiga dos bolas rojas debe haber salido cruz en la moneda y luego extraer las dos bolas rojas de la urna.

$$P(\text{Dos bolas rojas}) = P(A^c)P(R1/A^c)P(R2/R1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \approx 0.0333$$

- b) Para que Asier no extraiga ninguna bola roja debe sacar cara y después una bola verde o sacar cruz y después dos bolas verdes.

$$P(\text{Ninguna bola roja}) = P(A)P(V1/A) + P(A^c)P(V1/A^c)P(V2/V1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

- c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario “no sacar ninguna verde”. Esto se consigue sacando cara y luego una bola roja o sacar cruz y luego dos bolas rojas.

$$P(\text{Ninguna bola verde}) = P(A)P(R1) + P(A^c)P(R1/A^c)P(R2/R1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

La probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde es $1 - 0.2 = 0.8$.

- d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Cara}/\text{Al menos una bola verde}) = \frac{P(\text{Cara} \cap \text{Al menos una bola verde})}{P(\text{Al menos una bola verde})} =$$

$$= \frac{P(\text{Cara})P(\text{Al menos una bola verde} / \text{Cara})}{P(\text{Al menos una bola verde})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{0.8} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4166}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

- [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?
- [0,35 puntos] Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?
- [0,35 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?
- [1 punto] ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”? Justifica tu respuesta.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra en B	No compra en B	
Compra en A	15		40
No compra en A			
	25		100

Completamos la tabla.

	Compra en B	No compra en B	
Compra en A	15	25	40
No compra en A	10	50	60
	25	75	100

- Hay un 25 % de personas que compra en A y no compra en B (1ª fila, 3ª columna).
La probabilidad de que una persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B es de 0.25.
- Hay un 40 % de personas que son clientes de A y un 15 % que son clientes de ambas.
La probabilidad de que un cliente de A también sea cliente de la pastelería B es $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0.375$.
- Hay un 50 % de las personas del barrio que no son clientes de ninguna de las dos pastelerías (fila 3ª, columna 3ª).
La probabilidad de que la persona elegida al azar no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B es de 0.5.
- Para que sean independientes los sucesos debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.15 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15 \neq 0.1 = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- c) [1 punto] Si la desviación típica es 2,6 puntos y el Apto se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

X = la puntuación obtenida en un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

$X = N(5.8, \sigma)$

- a) Sabemos que $P(X > 6.8) = 0.35$.

$$P(X > 6.8) = 0.35 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{6.8 - 5.8}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = \frac{0.38 + 0.39}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{0.385} = 2.597}$$

- b) Tenemos que $X = N(5.8, 2.6)$. Nos piden calcular “a” tal que $P(X \geq a) = 0.20$.

$$P(X \geq a) = 0.20 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 5.8}{2.6}\right) = 0.20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 5.8}{2.6}\right) = 1 - 0.2 = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a - 5.8}{2.6} = 0.845 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 2.6 + 5.8 = 7.997}$$

La puntuación que es superada únicamente por el 20 % del alumnado es 7,997 puntos.

- c) Tenemos que $X = N(5.8, 2.6)$. Nos piden calcular $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5 - 5.8}{2.6}\right) = P(Z \geq -0.308) = P(Z \leq 0.308) = \boxed{0.6217}$$

El 62.17 % del alumnado ha conseguido ser apto en el examen.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

- [[1,25 puntos]] Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.
- [[0,75 puntos]] Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- [[0,5 puntos]] Interpreta los resultados obtenidos.

- a) X = Número de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

$$\text{Proporción muestral } p = \frac{1000 - 140}{1000} = 0.86. \text{ Tamaño de la muestra } = n = 1000$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{1000}} = 0.0215$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.86 - 0.0215, 0.86 + 0.0215) = (0.8385, 0.8815)$$

El porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres está entre el 83.85 % y el 88.15 % con un nivel de confianza del 95 %.

- El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es $\text{Error} = 0.0215$.
El error máximo es de un 2.15 %.
- Se puede decir con un nivel de confianza del 95 % que el porcentaje de la población de jóvenes de 25 años que viven con sus padres es mayor que el 83.85 % y menor que el 88.15 %, lo que supone un error máximo del 2.25 %.



EAU extraordinaria 2023
UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2023ko EZOHIOA

EXTRAORDINARIA 2023

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- [0,75 puntos]** Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A .
- [0,75 puntos]** Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- [1 punto]** Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 6; 2x + 5y \leq 30; 2x - y \leq 6$$

- [2,2 puntos]** Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).
 - ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2)?
 - ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas.

- [0,3 puntos]** ¿Cuánto vale dicho mínimo?

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

La siguiente función $I(t)$ representa las ganancias/pérdidas (en miles de euros) de una empresa desde que se fundó:

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo pasado (en años), e $I(t)$ son las ganancias/pérdidas.

- [0,4 puntos]** Realiza la representación gráfica de la función $I(t)$.
- [0,3 puntos]** ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?
- [0,3 puntos]** ¿En qué año ganó 5.600 €?
- [0,5 puntos]** ¿A partir de qué año la empresa comienza a obtener ganancias?
- [0,3 puntos]** Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).
- [0,7 puntos]** En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- [1,2 puntos]** Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- [0,5 puntos]** Representa la gráfica de la función $f(x)$ para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 3$.
- [0,8 puntos]** Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas OX , y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Gorka, jugador de un equipo de fútbol, ha sido titular en un 80 % de los partidos de la liga. Su equipo ha ganado un 40% de los partidos en los que Gorka ha sido titular; y cuando no lo ha sido, su equipo ha ganado un 45 % de los partidos.

- [0,8 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?
- [0,6 puntos]** Sabiendo que ha ganado su equipo, ¿cuál es la probabilidad de que Gorka haya sido titular?
- [0,6 puntos]** Calcula la probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane el partido.
- [0,5 puntos]** ¿Los sucesos “ser titular” y “ganar el partido” son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcula:

- [1,4 puntos]** La probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.
- [1,1 puntos]** La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, sabiendo que la segunda bola ha sido roja.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria normal con media desconocida μ y desviación típica 7 gramos. Sabemos que 36 tabletas de chocolate, elegidas al azar, han dado un peso total de 5.274 gramos.

- [1,7 puntos]** Calcula el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 94 %.
- [0,8 puntos]** Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar en la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0,4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:



X : número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos, $X \equiv B(n, p)$

- n = número de lanzamientos con la moneda equilibrada.
- p = probabilidad de obtener cara con la moneda equilibrada.



Y : número de cruces que obtiene el jugador B en n' lanzamientos, $Y \equiv B(n', p')$

- n' = número de lanzamientos con la moneda trucada.

- [0,6 puntos]** Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.
- [0,6 puntos]** Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.
- [1,3 puntos]** ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada? **Justifica la respuesta.**

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [0.75 puntos] Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A.

b) [0.75 puntos] Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) [1 punto] Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

a) Comprobamos que $A \cdot B = I_2$ y que $B \cdot A = I_2$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Queda demostrado que B es la inversa de la matriz A $\rightarrow A^{-1} = B$

b)

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I_2)^2 = (A - 2I_2)(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 0+0 \\ 0+0 & 3+0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) La matriz A tiene inversa y podemos despejar X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \{A^{-1} = B\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & -2-2 \\ -6-6 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 6; 2x + 5y \leq 30; 2x - y \leq 6$$

a) [2.2 puntos] Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).

- ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2)?
- ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas.

b) [0.3 puntos] ¿Cuánto vale dicho mínimo?

Resolvemos el problema de programación lineal que se nos plantea.

La función objetivo es $F(x, y) = 6x + 3y - 2$.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región del plano cuyos puntos cumplen las restricciones (región factible).

Dibujamos primero las rectas que delimitan esta región.

$$2x + y = 6$$

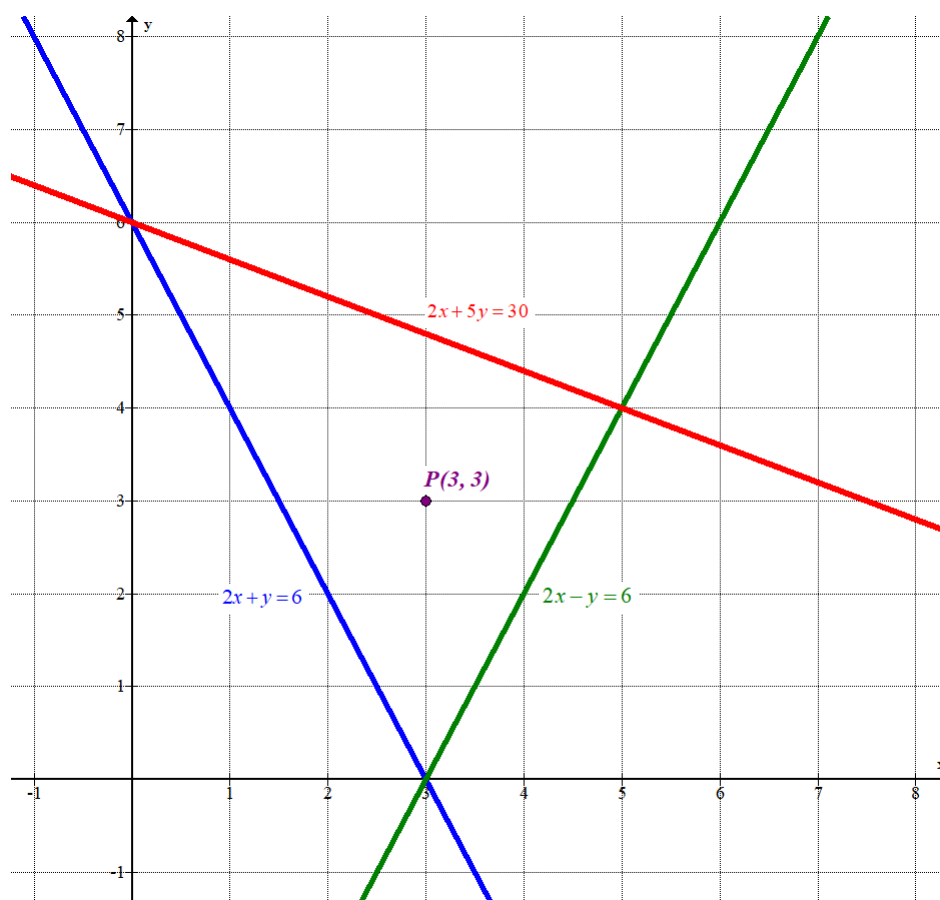
x	y = 6 - 2x
0	6
1	4
3	0

$$2x + 5y = 30$$

x	y = $\frac{30 - 2x}{5}$
0	6
5	4
10	2

$$2x - y = 6$$

x	y = 2x - 6
3	0
4	2
5	4



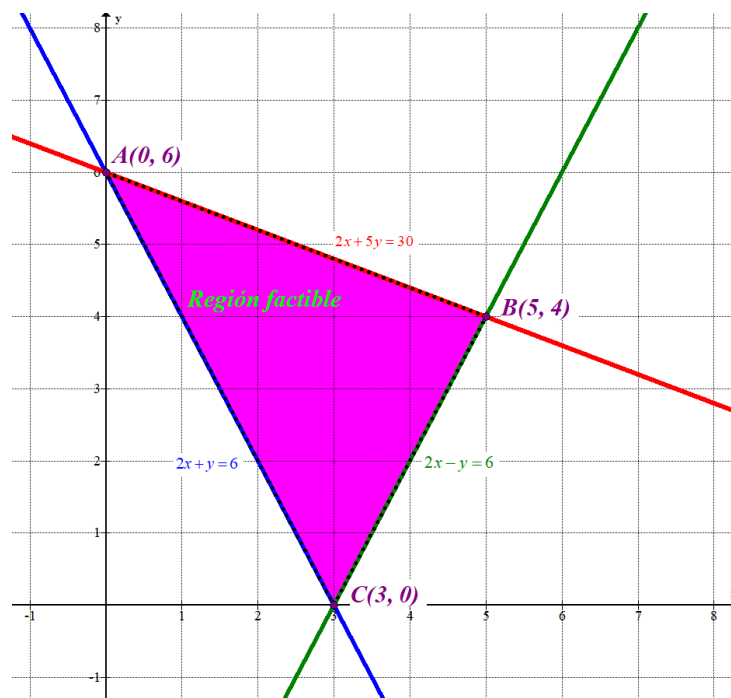
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{array} \right\}$ la región factible es la región situada por encima de las

rectas azul y verde y por debajo de la recta roja.

Comprobamos que el punto $P(3, 3)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + 3 \geq 6 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \leq 30 \\ 2 \cdot 3 - 3 \leq 6 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(0, 6) \rightarrow F(0, 6) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 6 - 2 = 16$$

$$B(5, 4) \rightarrow F(5, 4) = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 = 40$$

$$C(3, 0) \rightarrow F(3, 0) = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 = 16$$

La función toma su valor mínimo (16) en los vértices A y C.

Su valor mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento AC: $(0, 6)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $\dots$, $(3, 0)$.

a) ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$?

El punto $(1, 2)$ está fuera de la región factible, por lo que no cumple todas las restricciones y no puede ser solución del problema planteado.

¿Es exacta la respuesta de Iván: “el valor mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$ ”?

Es cierto que el valor mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$, pero no es el único punto donde se alcanza. La afirmación es correcta, aunque no es totalmente precisa por no ser el único punto donde se alcanza.

b) El valor mínimo es 16, obtenido en el estudio del apartado a).

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

La siguiente función $I(t)$ representa las ganancias/pérdidas (en miles de euros) de una empresa desde que se fundó:

$$I(t) = \frac{8t-16}{t+1}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo pasado (en años), e $I(t)$ son las ganancias/pérdidas.

- a) [0,4 puntos] Realiza la representación gráfica de la función $I(t)$.
 b) [0,3 puntos] ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?
 c) [0,3 puntos] ¿En qué año ganó 5.600 €?
 d) [0,5 puntos] ¿A partir de qué año la empresa comienza a obtener ganancias?
 e) [0,3 puntos] Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).
 f) [0,7 puntos] En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas?
 ¿La relacionas con alguna característica de la función?

a) Como el denominador se anula para $t = -1$ y la función solo se define para $t \geq 0$ el dominio de la función es $[0, +\infty)$.

La función tiene una asíntota horizontal: $y = 8$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t-16}{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8t}{t} - \frac{16}{t}}{\frac{t}{t} + \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{16}{t}}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{8 - \frac{16}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{8 - 0}{1 - 0} = 8$$

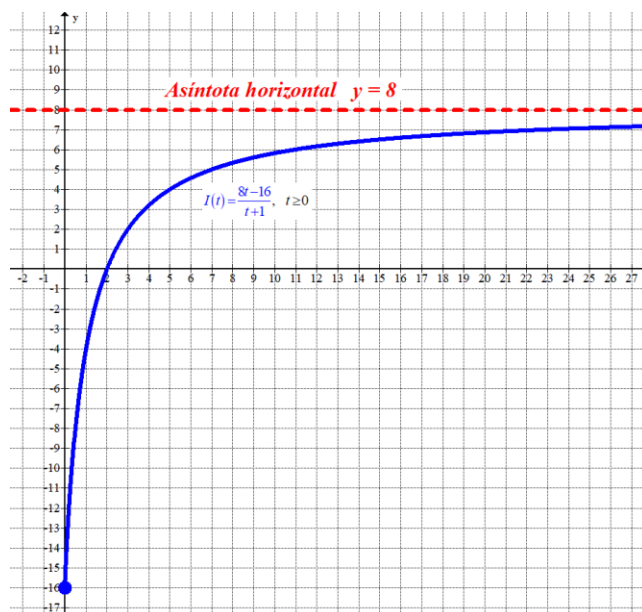
Hallamos sus máximos o mínimos.

$$I'(t) = \frac{8(t+1) - 1 \cdot (8t-16)}{(t+1)^2} = \frac{8t+8-8t+16}{(t+1)^2} = \frac{24}{(t+1)^2}$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre crece.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

t	$I(t) = \frac{8t-16}{t+1}$
0	-16
1	-4
2	0
9	5.6



b) Nos piden calcular $I(0)$.

$$I(0) = \frac{8 \cdot 0 - 16}{0 + 1} = -16$$

El capital inicial fue de 16 000 € para equilibrar los 16000 € de pérdidas iniciales.

c) Igualamos la función a 5.6 y averiguamos el año en que las ganancias fueron de 5600 €.

$$\frac{8t - 16}{t + 1} = 5.6 \Rightarrow 8t - 16 = 5.6t + 5.6 \Rightarrow 2.4t = 21.6 \Rightarrow t = \frac{21.6}{2.4} = 9$$

En el noveno año se obtuvieron unas ganancias de 5600 €

- d) En la tabla de valores y en la gráfica se observa que las ganancias son 0 € en $t = 2$. A partir del segundo año se obtienen ganancias.
- e) En el apartado a) hemos visto que la función es creciente en $[0, +\infty)$. Las ganancias son siempre crecientes.
- f) Como hemos visto en el apartado a) la función tiene una asíntota horizontal en $y = 8$. Esto significa que la tendencia de las ganancias es a aproximarse a 8000 €.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) [1,2 puntos] Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- b) [0,5 puntos] Representa la gráfica de la función $f(x)$ para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 3$.
- c) [0,8 puntos] Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas OX, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

- a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$ y para ello deben coincidir los límites laterales de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \cdot 0 - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -2x - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

La función también debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= b \cdot 2 - 5 = 2b - 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} bx - 5 = 2b - 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b - 5 = 1 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 3$.

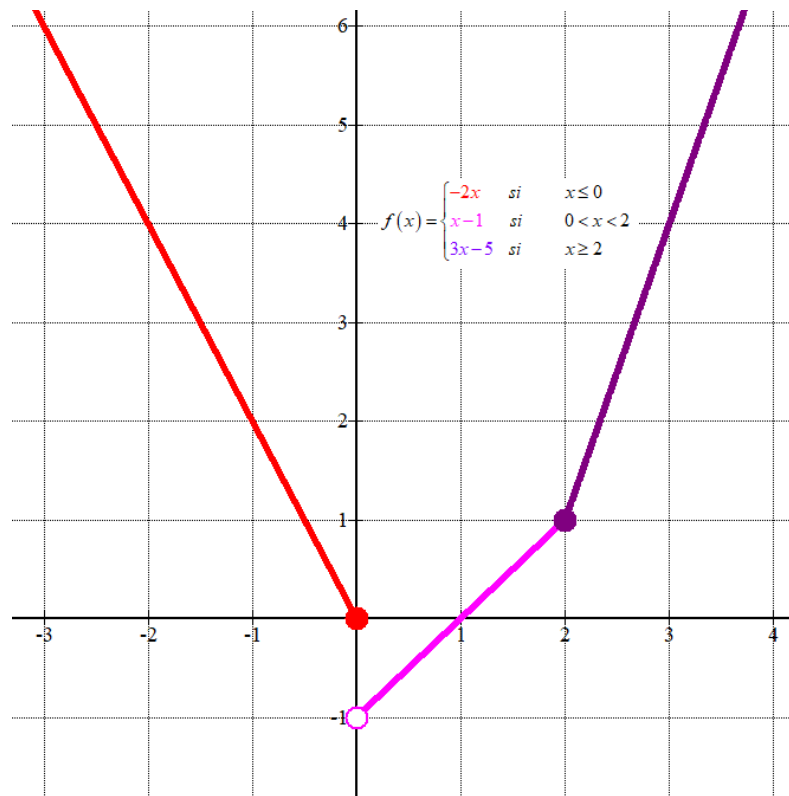
- b) Para $a = 0$ y $b = 3$ la función no es continua en $x = 0$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

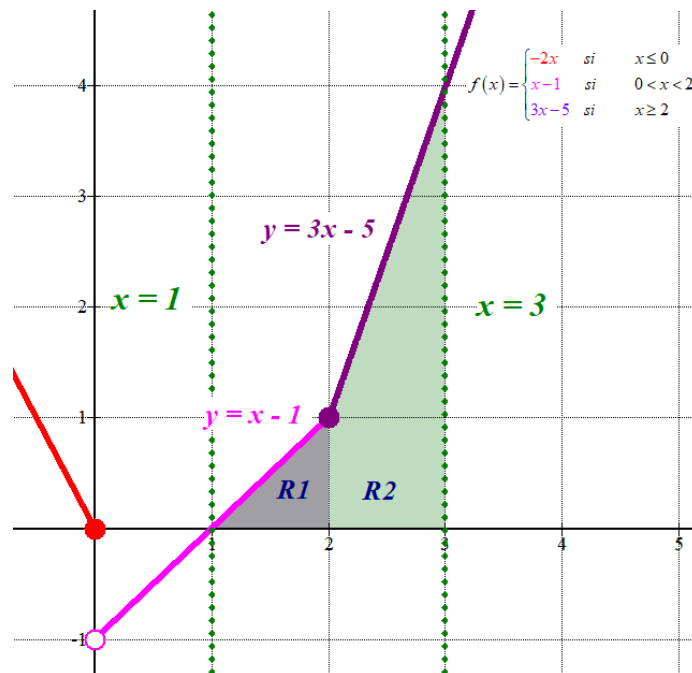
La función se compone de tres trozos de recta.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$x \leq 0$		$0 < x < 2$		$x \geq 2$	
x	$y = -2x$	x	$y = x - 1$	x	$y = 3x - 5$
-2	4	0.5	-0.5	2	1
-1	2	1	0	3	4
0	0	1.5	0.5	4	7



c) Añadimos al dibujo las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y dibujamos el recinto del cual debemos hallar su área.



El recinto lo dividimos en dos partes: R1 y R2.

La región R1 es un triángulo de base 1 unidad y de altura 1 unidad.

$$\text{Área R1} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5 \text{ u}^2$$

La región R2 es un cuadrado de lado 1 y un triángulo de base 1 unidad y de altura 3 unidades.

$$\text{Área R2} = 1^2 + \frac{1 \cdot 3}{2} = 2.5 \text{ u}^2$$

El área del recinto es la suma de las áreas de R1 y R2.

$$\text{Área} = \text{Área R1} + \text{Área R2} = 0.5 + 2.5 = 3 \text{ u}^2$$

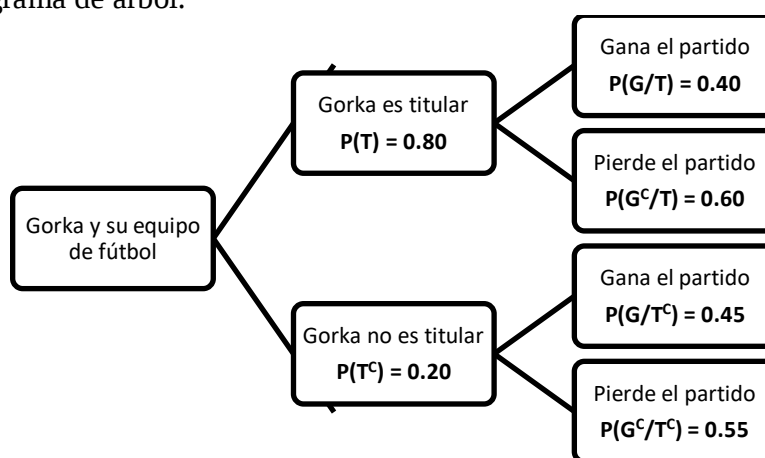
El área tiene un valor de 3 unidades cuadradas.

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Gorka, jugador de un equipo de fútbol, ha sido titular en un 80 % de los partidos de la liga. Su equipo ha ganado un 40% de los partidos en los que Gorka ha sido titular; y cuando no lo ha sido, su equipo ha ganado un 45 % de los partidos.

- a) [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?
- b) [0,6 puntos] Sabiendo que ha ganado su equipo, ¿cuál es la probabilidad de que Gorka haya sido titular?
- c) [0,6 puntos] Calcula la probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane el partido.
- d) [0,5 puntos] ¿Los sucesos “ser titular” y “ganar el partido” son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

Llamamos T = “Gorka es titular”, G = “El equipo de Gorka gana el partido”.
Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(T)P(G/T) + P(T^c)P(G/T^c) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.45 = \boxed{0.41}$$

- b) Nos piden calcular $P(T/G)$. Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(T/G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T)P(G/T)}{P(G)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.41} = \boxed{\frac{32}{41} \approx 0.7805}$$

- c) Nos piden calcular $P(T^c \cap G)$.

$$P(T^c \cap G) = P(T^c)P(G/T^c) = 0.2 \cdot 0.45 = \boxed{0.09}$$

- d) Para que los sucesos T = “ser titular” y G = “ganar el partido” sean sucesos independientes debe cumplirse que $P(G \cap T) = P(G) \cdot P(T)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(G \cap T) = P(T)P(G/T) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \\ P(G) \cdot P(T) = 0.41 \cdot 0.8 = 0.328 \end{array} \right\} \Rightarrow P(G \cap T) = 0.32 \neq 0.328 = P(G) \cdot P(T)$$

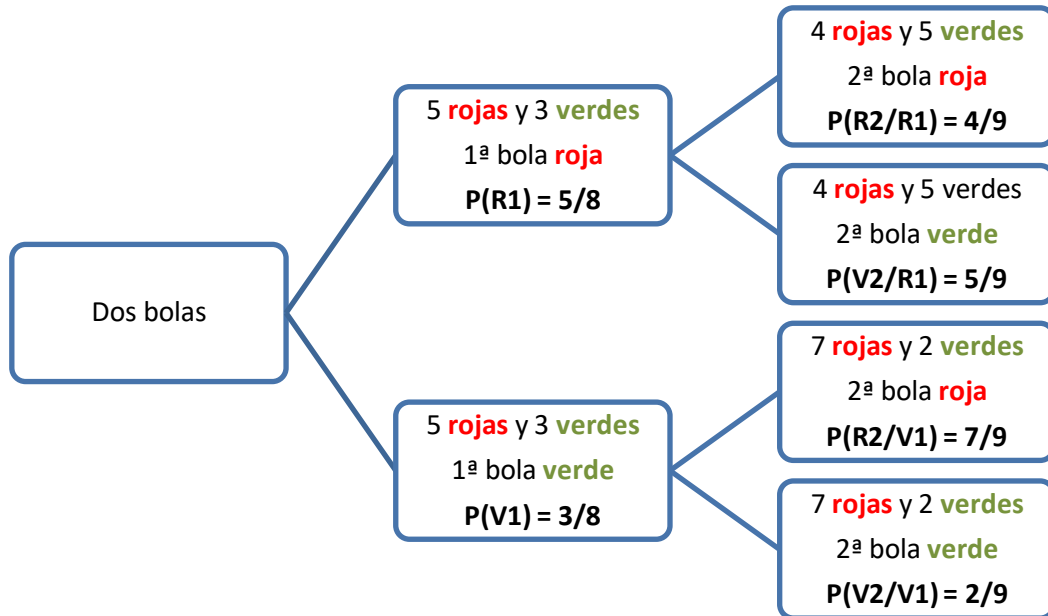
Al no ser iguales las dos probabilidades los sucesos no son independientes.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcula:

- a) [1,4 puntos] La probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.
 b) [1,1 puntos] La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, sabiendo que la segunda bola ha sido roja.

Hacemos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(V2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2) = P(R1)P(V2/R1) + P(V1)P(V/V1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{72} \approx 0.4306$$

- b) Nos piden calcular $P(R1/R2)$. Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{1 - P(V2)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9}}{1 - \frac{31}{72}} = \frac{20}{41} \approx 0.4878$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria normal con media desconocida μ y desviación típica 7 gramos. Sabemos que 36 tabletas de chocolate, elegidas al azar, han dado un peso total de 5.274 gramos.

- a) [1,7 puntos] Calcula el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 94%.
 b) [0,8 puntos] Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar en la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

X = El peso neto en gramos de las tabletas de chocolate de una determinada marca. $X \sim N(\mu, 7)$

- a) El tamaño de la muestra es $n = 36$. La media muestral es $\frac{5274}{36} = 146.5$ gramos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 94% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.88 + 1.89}{2} = 1.885$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9655	0'9661	0'9667	0'9673	0'9678	0'9683	0'9688	0'9693

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.885 \cdot \frac{7}{\sqrt{36}} \approx 2.2$$

El intervalo de confianza es $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (146.5 - 2.2, 146.5 + 2.2) = (144.3, 148.7)$

- b) Si la amplitud del intervalo de confianza es, como máximo, de 3 gramos el error debe ser como máximo de 1.5 gramos. Usamos la fórmula del error.

$$\left. \begin{aligned} Error &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error &= 1.5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1.5 = 1.885 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = \frac{13.195}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5\sqrt{n} = 13.195 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{13.195}{1.5} \Rightarrow n = \left(\frac{13.195}{1.5} \right)^2 \approx 77.38$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al valor obtenido.
 El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 78 tabletas de chocolate.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0,4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:



X : número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos, $X \equiv B(n, p)$

• n = número de lanzamientos con la moneda equilibrada.

• p = probabilidad de obtener cara con la moneda equilibrada.



Y : número de cruces que obtiene el jugador B en n' lanzamientos, $Y \equiv B(n', p')$

• n' = número de lanzamientos con la moneda trucada.

- a) [0,6 puntos] Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.
- b) [0,6 puntos] Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.
- c) [1,3 puntos] ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada? **Justifica la respuesta.**

a) X = Número de caras en 3 lanzamientos. $X = B(3, 0.5)$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^0 = \boxed{0.125}$$

b) Y = Número de cruces en 2 lanzamientos. Número de repeticiones $n' = 2$ y probabilidad de éxito $= p' =$ probabilidad de sacar cruz $= 1 -$ probabilidad de sacar cara $= 1 - 0.4 = 0.6$.
 $Y = B(2, 0.6)$

$$P(Y = 2) = \binom{2}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^0 = \boxed{0.36}$$

c) Calculamos las probabilidades pedidas y luego las comparamos.

Calculamos la probabilidad de que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos.

X = Número de caras en 400 lanzamientos. $X = B(400, 0.5)$

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos la variable X con una normal X' de media $= np = 400 \cdot 0.5 = 200$ y desviación típica $= \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 10$

$X' = N(200, 10)$.

Esta aproximación es buena ya que $np = 200 > 5$ y $nq = 200 > 5$.

$$P(X < 190) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(X' \leq 189.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{189.5 - 200}{10}\right) = P(Z \leq -1.05) =$$

$$= P(Z \geq 1.05) = 1 - P(Z \leq 1.05) = 1 - 0.8531 = \boxed{0.1469}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8943

Calculamos la probabilidad de que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos.

Y = Número de cruces en 200 lanzamientos. $Y = B(200, 0.6)$

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos la variable Y con una normal Y' de media $= np = 200 \cdot 0.6 = 120$ y desviación típica $= \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 4\sqrt{3}$

$Y' = N(120, 4\sqrt{3})$.

Esta aproximación es buena ya que $n' \cdot p' = 120 > 5$ y $n' \cdot q' = 200 \cdot 0.4 = 80 > 5$.

$$P(Y < 110) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y' \leq 109.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{109.5 - 120}{4\sqrt{3}}\right) = P(Z \leq -1.515) =$$

$$= P(Z \geq 1.515) = 1 - P(Z \leq 1.515) = 1 - \frac{0.9345 + 0.9357}{2} = \boxed{0.0649}$$

Como $P(X < 190) = 0.1469 > 0.0649 = P(Y < 110)$ es más probable que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos.

	0	0'01	0'02
0	0'5000	0'5040	0'5080
0'1	0'5398	0'5438	0'5478
0'2	0'5793	0'5832	0'5871
0'3	0'6179	0'6217	0'6255
0'4	0'6554	0'6591	0'6628
0'5	0'6915	0'6950	0'6985
0'6	0'7257	0'7291	0'7324
0'7	0'7580	0'7611	0'7642
0'8	0'7881	0'7910	0'7939
0'9	0'8159	0'8186	0'8212
1	0'8413	0'8438	0'8461
1'1	0'8643	0'8665	0'8686
1'2	0'8849	0'8869	0'8888
1'3	0'9032	0'9049	0'9065
1'4	0'9192	0'9207	0'9221
1'5	0'9345	0'9357	0'9368
1'6	0'9452	0'9463	0'9474



PAU ordinaria 2023
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2022ko OHIKOA

ORDINARIA 2023

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

- a) [2,1 puntos] Plantea y resuelve el problema de maximización.
 b) [0,4 puntos] Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

- a) [0,8 puntos] La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:
- Pasa por el punto (0,0).
 - Tiene un mínimo relativo en el punto (1,-1).
- Obtén el valor de los parámetros a , b y c .
- b) [1 punto] Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y realiza su representación gráfica.
- c) [0,7 puntos] Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y las rectas $x=3$ y $x=4$.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) [1,7 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.
 b) [0,4 puntos] Determina los extremos relativos de la función.
 c) [0,4 puntos] Representa la gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

- a) [0,4 puntos] La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.
 b) [0,6 puntos] La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.
 c) [0,7 puntos] La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.
 d) [0,8 puntos] La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) [0,3 puntos] Llevar traje rojo y zapatos blancos.
 b) [0,4 puntos] No ir vestida totalmente de blanco.
 c) [0,4 puntos] Llevar zapatos azules.
 d) [0,5 puntos] Llevar zapatos azules o blancos.
 e) [0,4 puntos] Ir vestida totalmente del mismo color.
 f) [0,5 puntos] Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29.

Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

- a) **[0,7 puntos]** Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?
- c) **[0,7 puntos]** En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

- a) **[1,2 puntos]** Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.
- b) **[0,5 puntos]** Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.
- c) **[0,7 puntos]** A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

a) Supongamos la matriz P de dimensiones $m \times n$.

$A \cdot P$ es posible si el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de P (m) $\rightarrow m = 2$.

$P \cdot B^t$ es posible si el número de columnas de P (n) es igual al número de filas de B^t (3) $\rightarrow n = 3$.
La matriz P debe ser de dimensiones 2×3 .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} (A \cdot P \cdot B^t) \\ 2 \times \boxed{2 \cdot m} \times \boxed{n \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Supongamos la matriz Q de dimensiones $p \times q$.

$A \cdot C$ es posible pues el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de C (2) obteniéndose una matriz 2×3 .

$(Q \cdot A \cdot C)$ es posible si el número de columnas de Q (q) es igual al número de filas de $A \cdot C$ (2) $\rightarrow q = 2$.

Una vez realizado el producto se obtiene una matriz de dimensiones $p \times 3$. Si el resultado debe ser una matriz cuadrada $\rightarrow p = 3$.

$$\left. \begin{matrix} (Q \cdot A \cdot C) \\ p \times \boxed{q \cdot 2} \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \rightarrow p \times 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ p = 3 \end{cases}$$

La matriz Q debe ser de dimensiones 3×2 .

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t \Rightarrow A \cdot X = 2B \cdot C^t + A^t \Rightarrow X = A^{-1}(2B \cdot C^t + A^t)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y, si es posible, la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de A}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$2B \cdot C^t + A^t = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3+0+1 & -2-2-1 \\ 9+0-1 & 6+1+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (2B \cdot C^t + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-18 & -26-20 \\ -\frac{15}{2}-\frac{18}{2} & -\frac{39}{2}-\frac{20}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

- a) [2,1 puntos] Plantea y resuelve el problema de maximización.
 b) [0,4 puntos] Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

- a) Llamamos “x” al número de mesas fabricadas diariamente e “y” al número de sillas.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Material	Tiempo (horas)	Beneficio
Nº mesas (x)	4x	2x	20x
Nº sillas (y)	2y	3y	30y
TOTAL	4x + 2y	2x + 3y	20x + 30y

La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día ”
 $\rightarrow x + y \leq 4$

“Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas” $\rightarrow 2x + 3y \leq 10$

“El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios” $\rightarrow 4x + 2y \leq 12$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 4x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x + y = 4$

$2x + 3y = 10$

$2x + y = 6$

$x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = 4 - x$
0	4
4	0

x	$y = \frac{10 - 2x}{3}$
-1	4
2	2
5	0

x	$y = 6 - 2x$
0	6
2	2
3	0

Primer
cuadrante



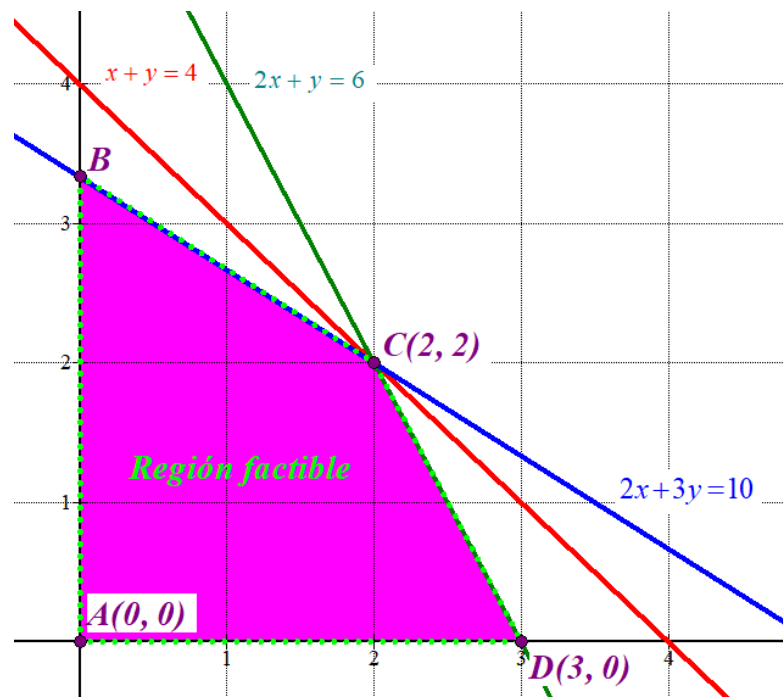
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 \leq 4 \\ 2 + 3 \leq 10 \\ 2 + 1 \leq 6 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice B.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B\left(0, \frac{10}{3}\right) \rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right) = 0 + 30 \frac{10}{3} = 100 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$C(2, 2) \rightarrow B(2, 2) = 40 + 60 = 100 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$D(3, 0) \rightarrow B(3, 0) = 60 + 0 = 60 \text{ €}$$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 100 € y se obtiene en los puntos $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y $C(2, 2)$.

El beneficio máximo se consigue en cualquier punto del segmento BC, pero como el número de sillas y mesas debe ser un número entero, solo existe la opción del punto $C(2, 2)$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 100 € y se consigue fabricando 2 sillas y 2 mesas cada día.

- b) Hemos comprobado en el apartado anterior que el punto $P(1, 1)$ está en la región factible, por lo que fabricar 1 silla y 1 mesa cumple todas las restricciones. Evidentemente no es la solución óptima, pues los ingresos máximos se consiguen con la fabricación de 2 sillas y 2 mesas cada día. Por ejemplo, solo se usarían 5 de las 10 horas diarias de trabajo y se conseguirían solo 50 € de beneficio.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

a) [0,8 puntos] La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

- Pasa por el punto (0,0).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1,-1).

Obtén el valor de los parámetros a , b y c .

b) [1 punto] Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \text{ y realiza su representación gráfica.}$$

c) [0,7 puntos] Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \text{ y las rectas } x=3 \text{ y } x=4.$$

a) Pasa por el punto (0,0) $\rightarrow g(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(x) = ax^3 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $g(x) = ax^3 + bx$

Tener un mínimo relativo en el punto (1,-1) implica dos cosas: pasa por el punto (1,-1) y la derivada se anula en $x = 1 \rightarrow g(1) = -1$; $g'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = ax^3 + bx \\ g(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{-1 = a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 3ax^2 + b \\ g'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 3a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = -1 \\ b = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a = -1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

Los valores buscados son $a = 1/2$, $b = -3/2$ y $c = 0$.

La función queda $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Sustituimos en la segunda derivada para averiguar si son máximos, mínimos o punto de inflexión.

$$f''(x) = 3x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -3 < 0 \rightarrow x = -1 \text{ es máximo} \\ f''(1) = 3 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

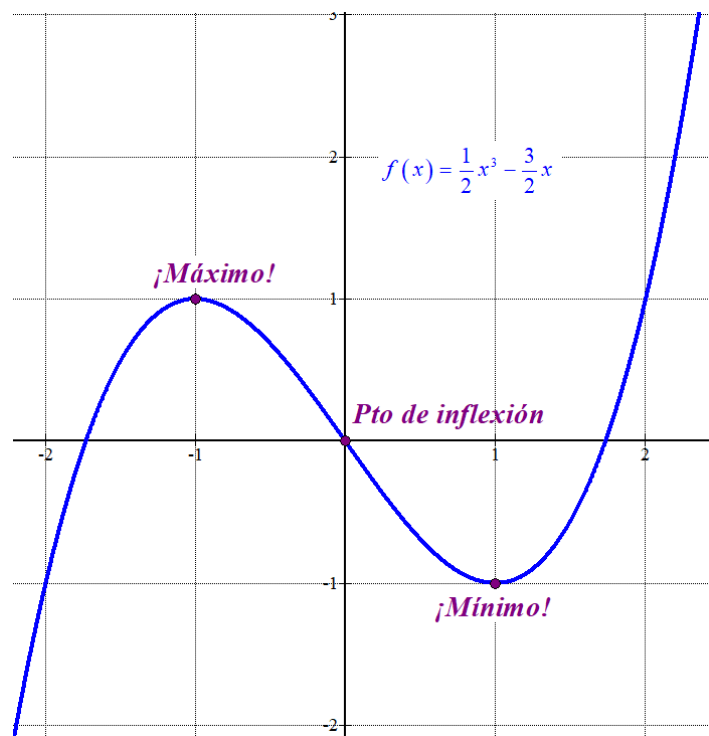
Igualemos la segunda derivada a cero en busca de los puntos de inflexión.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 3x \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como la tercera derivada es $f'''(x) = 3$ al sustituir por $x = 0$ no se anula y podemos afirmar que la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

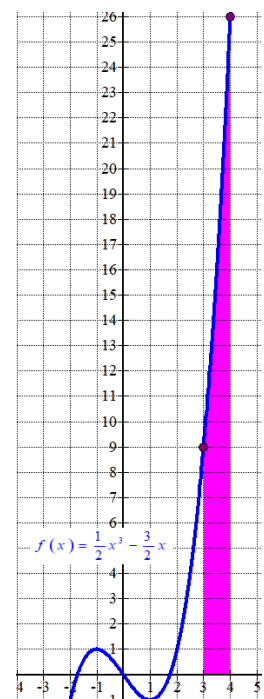
x	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$
-2	-1
-1	1
0	0
1	-1
2	1



c) Nos piden hallar el área de la región de color rosa del dibujo.

Calculamos el valor del área como la integral definida entre 3 y 4 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{2} \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right]_3^4 \\ &= \left[\frac{4^4}{8} - \frac{3 \cdot 4^2}{4} \right] - \left[\frac{3^4}{8} - \frac{3 \cdot 3^2}{4} \right] = \frac{133}{8} = \boxed{16.625 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) [1,7 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.
 b) [0,4 puntos] Determina los extremos relativos de la función.
 c) [0,4 puntos] Representa la gráfica de la función.

- a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y para ello deben coincidir los límites laterales de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x^2 + 8x - 6 = -2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 6 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

La función es continua en $x = 1$ y por tanto es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Para que la función sea derivable debe serlo en $x = 1$. Comprobamos si coinciden sus derivadas laterales.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Calculamos las derivadas laterales en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x - 8 = -4 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -4x + 8 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

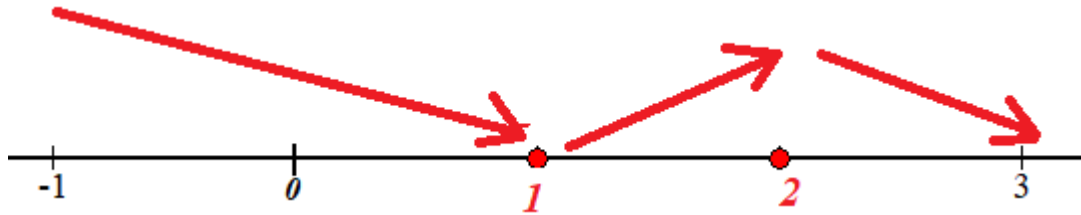
- b) Igualamos a cero su derivada en busca de los vértices de cada trozo de parábola.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 1) \\ -4x + 8 = 0 \rightarrow x = 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = -4 \cdot 1.5 + 8 = 2 > 0$. La función crece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -4 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

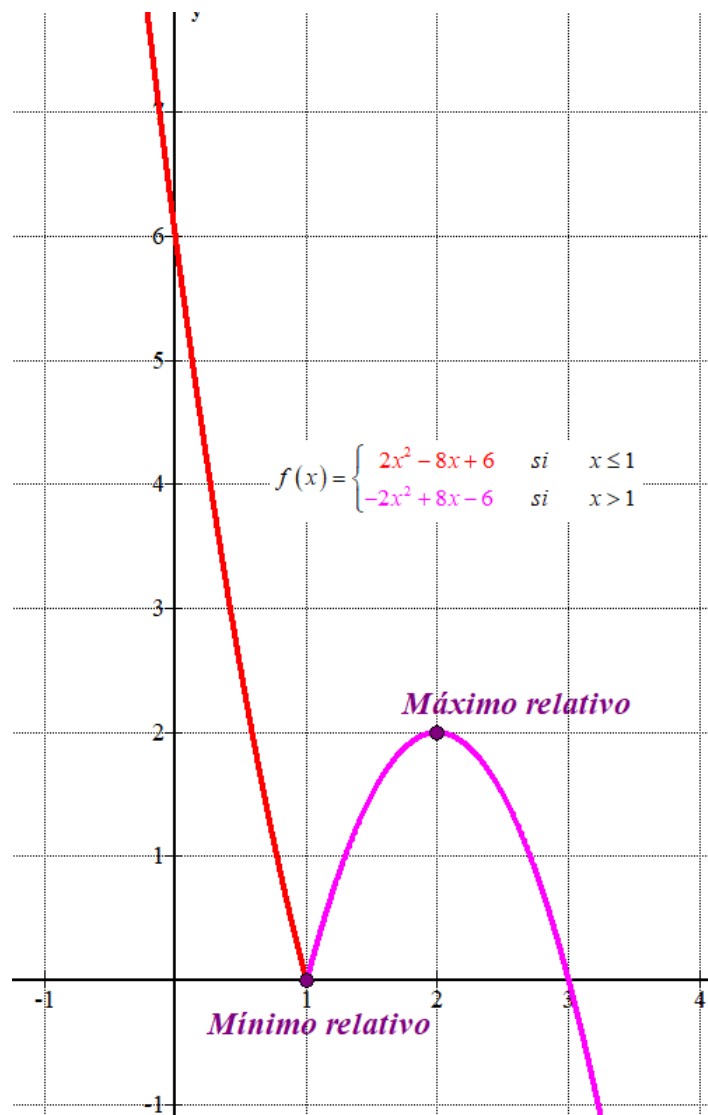


La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

c) Sabemos que la gráfica de la función son dos trozos de parábola.

Hasta $x = 1$ es una parábola convexa y a partir de 1 es una parábola cóncava con vértice en $x = 2$. Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$y = 2x^2 - 8x + 6$	x	$y = -2x^2 + 8x - 6$
-1	16	1.5	1.5
0	6	2	2
1	0	3	0
		4	-6



BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

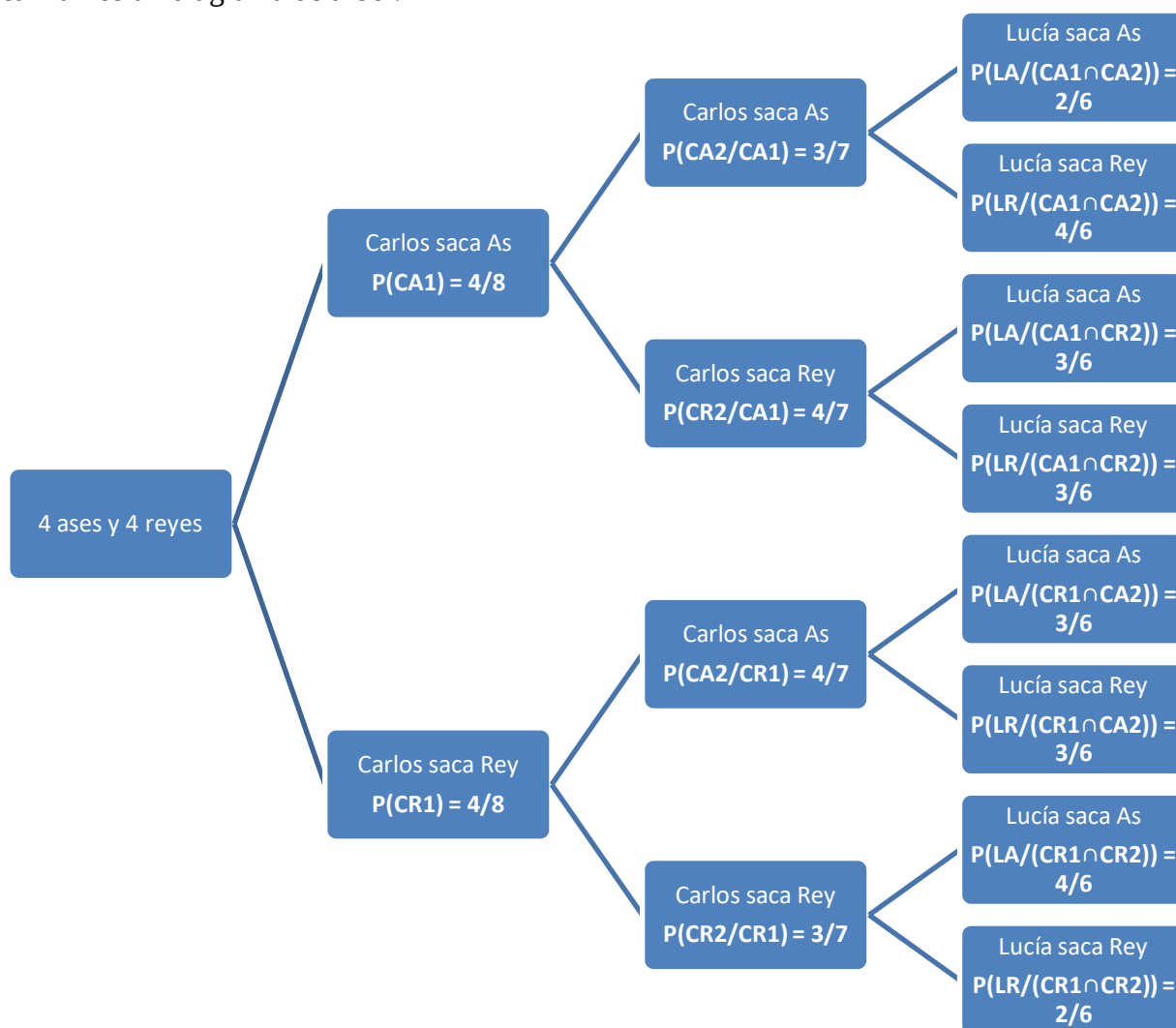
De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

- a) **[0,4 puntos]** La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.
 b) **[0,6 puntos]** La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.
 c) **[0,7 puntos]** La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.
 d) **[0,8 puntos]** La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

Llamamos CA1 = “Carlos saca un as en la primera carta”, CA2 = “Carlos saca un as en la segunda carta”, CR1 = “Carlos saca un rey en la primera carta”, CR2 = “Carlos saca un rey en la segunda carta” LA = “Lucía saca un as” y LR = “Lucía saca un rey”.

Realizamos un diagrama de árbol.



$$a) P(CA1 \cap CA2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \approx 0.2143$$

- b) Nos piden calcular la probabilidad de sacar primero un rey y luego un as o primero un as y luego un rey.

$$P[(CA1 \cap CR2) \cup (CR1 \cap CA2)] = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

- c) Si miramos el diagrama de árbol superior esta situación planteada ocurre en tres de las ramas del árbol $\rightarrow CA1 \cap CA2 \cap LA; CA1 \cap CR2 \cap LA; CR1 \cap CA2 \cap LA$.

$$P(LA \cap (\overline{CR1 \cap CR2})) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571}$$

- d) Este suceso puede pasar de 4 formas distintas.

$$P(LR) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Llamamos CA1 = “Carlos saca un as en la primera carta”, CA2 = “Carlos saca un as en la segunda carta”, CR1 = “Carlos saca un rey en la primera carta”, CR2 = “Carlos saca un rey en la segunda carta” LA = “Lucia saca un as” y LR = “Lucía saca un rey”.

a) $P(CA1 \cap CA2) = P(CA1)P(CA2 / CA1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{14} \approx 0.2143}$

- b) Nos piden calcular la probabilidad de sacar primero un rey y luego un as o primero un as y luego un rey.

$$P[(CA1 \cap CR2) \cup (CR1 \cap CA2)] = P(CA1)P(CR2 / CA1) + P(CR1)P(CA2 / CR1) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

- c) Esta situación planteada ocurre de tres formas diferentes $\rightarrow CA1 \cap CA2 \cap LA; CA1 \cap CR2 \cap LA; CR1 \cap CA2 \cap LA$.

$$\begin{aligned} P(LA \cap (\overline{CR1 \cap CR2})) &= P(CA1 \cap CA2 \cap LA) + P(CA1 \cap CR2 \cap LA) + P(CR1 \cap CA2 \cap LA) = \\ &= P(CA1)P(CA2 / CA1)P(LA / (CA1 \cap CA2)) + P(CA1)P(CR2 / CA1)P(LA / (CA1 \cap CR2)) + \\ &+ P(CR1)P(CA2 / CR1)P(LA / (CR1 \cap CA2)) = \\ &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571} \end{aligned}$$

- d) Este suceso puede pasar de 4 formas distintas.

$$\begin{aligned} P(LR) &= \\ &= P(CA1 \cap CA2 \cap LR) + P(CA1 \cap CR2 \cap LR) + P(CR1 \cap CA2 \cap LR) + P(CR1 \cap CR2 \cap LR) = \\ &= P(CA1)P(CA2 / CA1)P(LR / (CA1 \cap CA2)) + P(CA1)P(CR2 / CA1)P(LR / (CA1 \cap CR2)) + \\ &+ P(CR1)P(CA2 / CR1)P(LR / (CR1 \cap CA2)) + P(CR1)P(CR2 / CR1)P(LR / (CR1 \cap CR2)) = \\ &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5} \end{aligned}$$

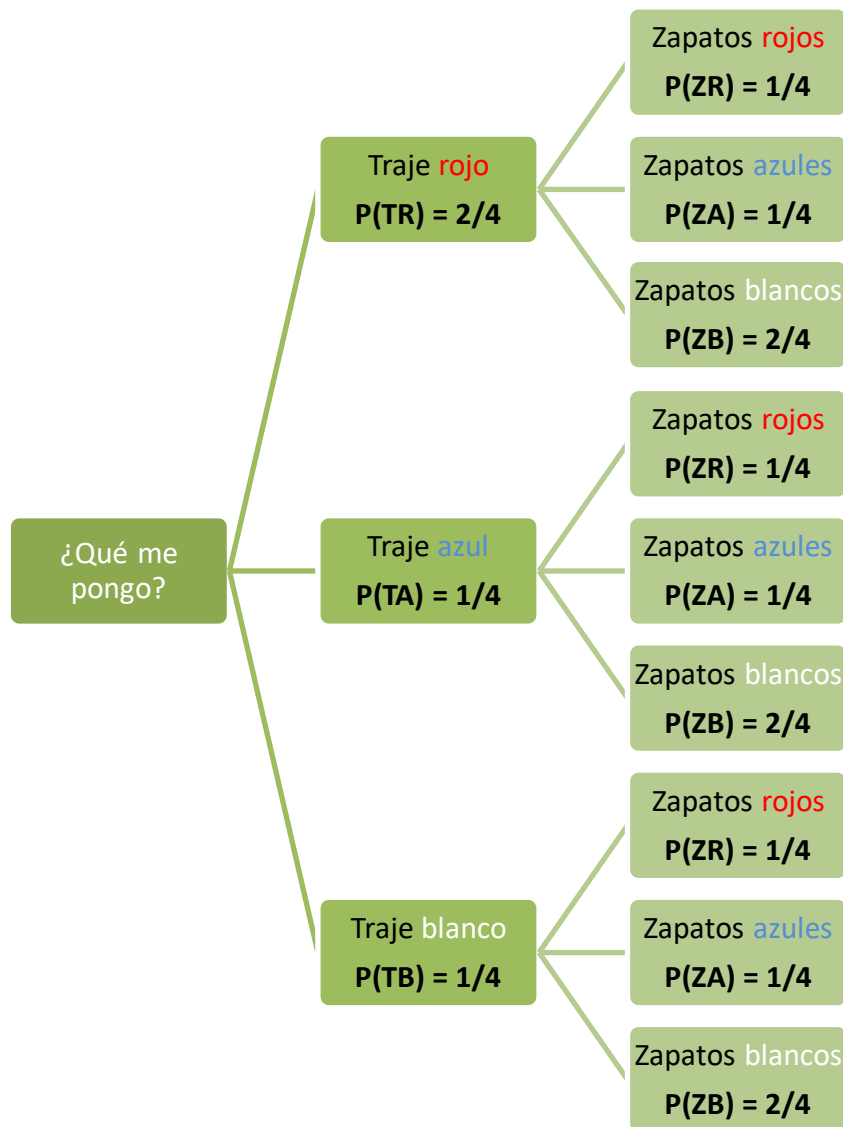
B.3. [hasta 2,5 puntos]

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

- [[0,3 puntos]] Llevar traje rojo y zapatos blancos.
- [[0,4 puntos]] No ir vestida totalmente de blanco.
- [[0,4 puntos]] Llevar zapatos azules.
- [[0,5 puntos]] Llevar zapatos azules o blancos.
- [[0,4 puntos]] Ir vestida totalmente del mismo color.
- [[0,5 puntos]] Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

Hacemos un diagrama de árbol.



Los sucesos elegir un traje y elegir unos zapatos son independientes.

a) Nos piden calcular $P(TR \cap ZB)$.

$$P(TR \cap ZB) = P(TR)P(ZB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{TB \cap ZB})$.

$$P(\overline{TB \cap ZB}) = 1 - P(TB \cap ZB) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8} = 0.875}$$

c) Nos piden calcular $P(ZA) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

d) Nos piden calcular $P(ZA \cup ZB)$. Como de los 4 pares de zapatos hay 1 par azules y 2 pares blancos hay 3 casos favorables y 4 posibles. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(ZA \cup ZB) = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

e) Llamamos MC al suceso “ir vestida del mismo color”. Este suceso es

$$MC = (TR \cap ZR) \cup (TA \cap ZA) \cup (TB \cap ZB).$$

$$P(MC) = P[(TR \cap ZR) \cup (TA \cap ZA) \cup (TB \cap ZB)] =$$

$$= P(TR \cap ZR) + P(TA \cap ZA) + P(TB \cap ZB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \boxed{\frac{5}{16} = 0.3125}$$

f) Nos piden calcular $P(ZR / \overline{MC})$.

$$P(ZR / \overline{MC}) = \frac{P(ZR \cap \overline{MC})}{P(\overline{MC})} = \frac{P(TR \cap ZR)}{1 - P(MC)} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \boxed{\frac{2}{11} \approx 0.1818}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29.

Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

- a) **[0,7 puntos]** Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?
- c) **[0,7 puntos]** En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

X = El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte.

Varianza = 7.29 $\rightarrow$ Desviación típica = $\sigma = \sqrt{7.29} = 2.7$. $X = N(8, 2.7)$

$$a) X = N(8, 2.7) \Rightarrow \bar{X}_{36} = N\left(8, \frac{2.7}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{X}_{36} = N(8, 0.45)}$$

$$b) \text{ Nos piden calcular } P(7.82 \leq \bar{X}_{36} \leq 8.36)$$

$$\begin{aligned} P(7.82 \leq \bar{X}_{36} \leq 8.36) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7.82-8}{0.45} \leq \frac{\bar{X}_{36}-8}{0.45} \leq \frac{8.36-8}{0.45}\right) = \\ &= P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -0.4) = \\ &= P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 0.4) = P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 0.4)] = \\ &= 0.7881 - 1 + 0.6554 = \boxed{0.4435} \end{aligned}$$

c) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Calculamos el intervalo característico.

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma) = (8 - 2.575 \cdot 0.45, 8 + 2.575 \cdot 0.45) = (6.8412, 9.1587)$$

B.4. [hasta 2,5 puntos]

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

- a) **[1,2 puntos]** Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.
- b) **[0,5 puntos]** Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.
- c) **[0,7 puntos]** A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

a) X = Número de alumnos que aprueban todas las materias de un grupo de 400.

Proporción muestral $p = \frac{160}{400} = 0.4$. Tamaño de la muestra $n = 400$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Utilizando la fórmula del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{400}} = 0.0532$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0532, 0.4 + 0.0532) = (0.3468, 0.4532)$$

El porcentaje de estudiantes de la universidad que han aprobado todas las asignaturas está entre el 34.68 % y el 45.32 % con un nivel de confianza del 97 %.

- b) El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es $Error = 0.0532$.
El error máximo es de un 5.32 %.

c) Usamos la fórmula del error para un error del 0.04.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.17} = \sqrt{\frac{0.24}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.17} \right)^2 = \frac{0.24}{n} \Rightarrow n = \frac{0.24}{\left(\frac{0.04}{2.17} \right)^2} \approx 706.33$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 707 estudiantes para que el error máximo admisible sea 0.04, con un nivel de confianza del 97%.

PAU extraordinaria 2022

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2022ko EZOHIOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA IIEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2022

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) **[1 punto]** Representa el recinto mencionado.
 b) **[1,5 puntos]** Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) **[0,75 puntos]** Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

- b) **[1 punto]** Igualmente, para que se cumpla:

$$B + C = A^{-1}$$

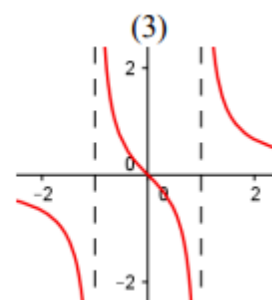
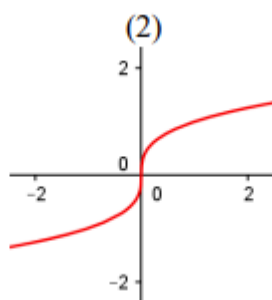
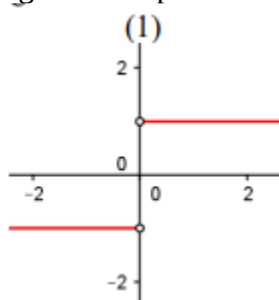
- c) **[0,75 puntos]** Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

- a) **[0,9 puntos]** Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad B) g(x) = \frac{|x|}{x}; \quad C) h(x) = \sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



- b) **[1,6 puntos]** En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t , viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) **[0,8 puntos]** Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.
- b) **[1 punto]** Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.
- c) **[0,7 puntos]** En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

- a) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
- b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
- c) **[0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) **[0,75 puntos]** Ambas han encestado.
- b) **[0,75 puntos]** Ninguna ha encestado.
- c) **[0,5 puntos]** Sólo Deiene ha encestado.
- d) **[0,5 puntos]** Al menos una ha encestado.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados².

- a) **[0,9 puntos]** Obtén el intervalo característico para el 80%.
- b) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11°?
- c) **[0,6 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8° y 10°?
- d) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la proporción de días con más de 9°?
- e) **[0,4 puntos]** Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12°?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 52,5 \text{ kg y } s = 5,3 \text{ kg}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.

b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$y - x = 4$$

$$y + 2x = 7$$

$$-2x - y + 13 = 0$$

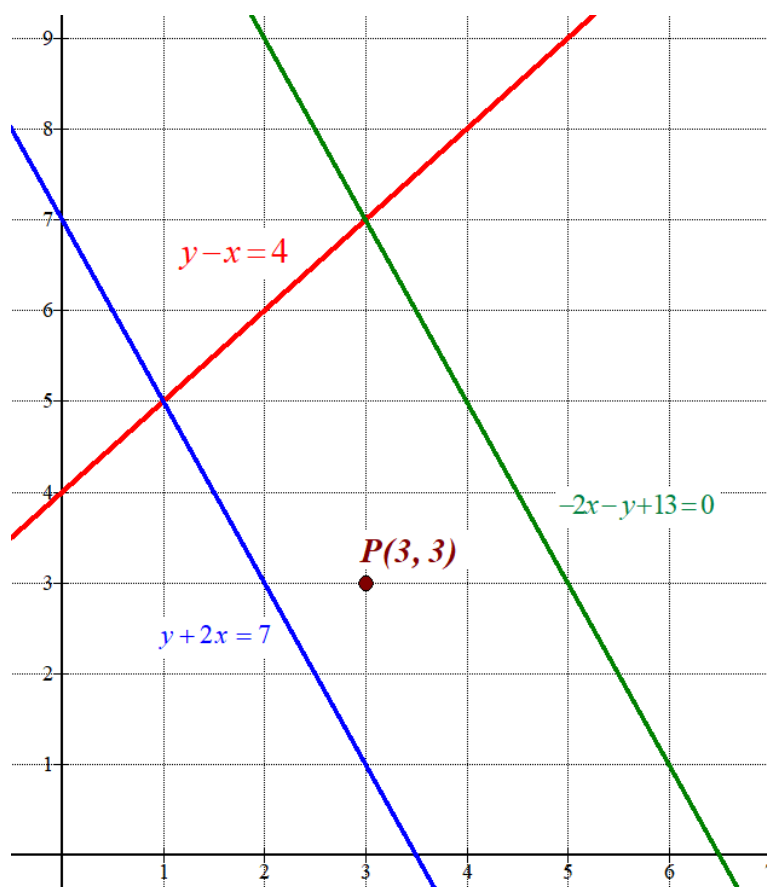
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 4 + x
3	7
1	5

x	y = 7 - 2x
1	5
3.5	0

x	y = 13 - 2x
3	7
6.5	0

Primer
cuadrante



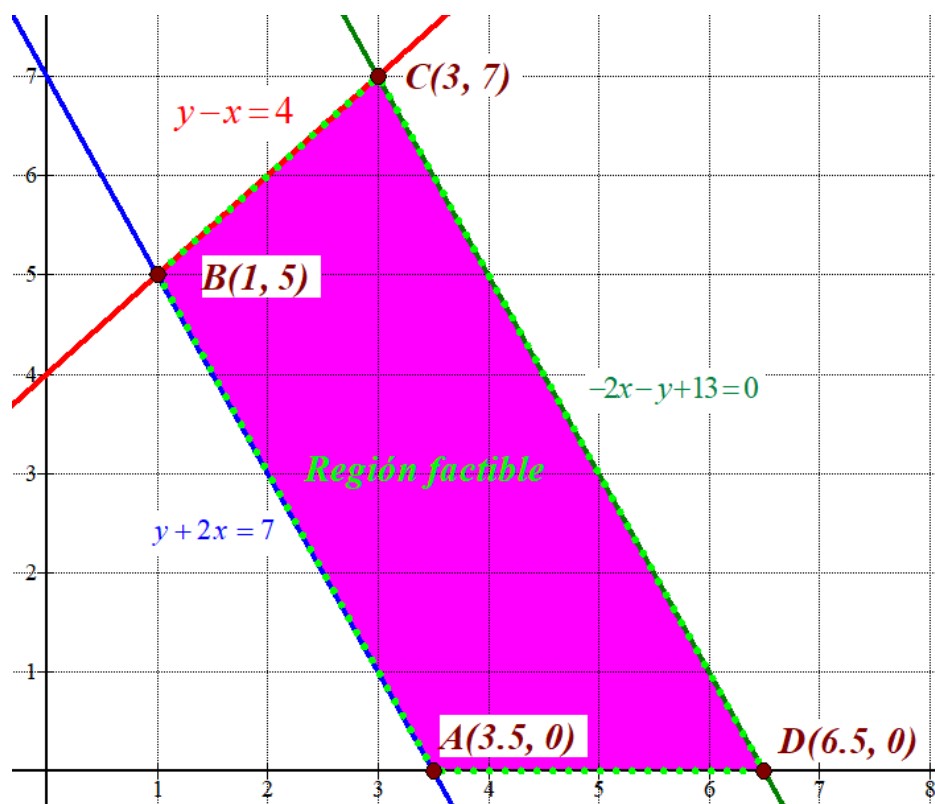
Como las restricciones son
$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y \leq 4 \\ 2x + y \geq 7 \\ y + 2x - 13 \leq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y \leq 4 \\ 2x + y \geq 7 \\ y \leq -2x + 13 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$
 la región

factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(3, 3)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 3 - 3 \leq 4 \\ 3 + 6 \geq 7 \\ -6 - 3 + 13 \geq 0 \\ 3 \geq 0; 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



- b) Valoramos la función beneficio $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(3.5, 0) \rightarrow f(3.5, 0) = 14 + 0 - 1 = 13 \quad \text{¡Mínimo!}$$

$$B(1, 5) \rightarrow f(1, 5) = 4 + 10 - 1 = 13 \quad \text{¡Mínimo!}$$

$$C(3, 7) \rightarrow f(3, 7) = 12 + 14 - 1 = 25 \quad \text{¡Máximo!}$$

$$D(6.5, 0) \rightarrow f(6.5, 0) = 26 + 0 - 1 = 25 \quad \text{¡Máximo!}$$

El máximo valor de la función es 25 y se obtiene en dos vértices C y D. El valor máximo se alcanza en cualquier punto del segmento CD.

El mínimo valor de la función es 13 y se obtiene en dos vértices A y B. El valor mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento AB.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **[0,75 puntos]** Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

b) **[1 punto]** Igualmente, para que se cumpla:

$$B + C = A^{-1}$$

c) **[0,75 puntos]** Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

El valor buscado es $x=1$.

b)

$$B + C = A^{-1} \Rightarrow AB + AC = AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+x & 2x \\ 1+x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2+2 \\ -1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ x & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x=1 \rightarrow x=0 \\ 2x=0 \rightarrow x=0 \\ x=0 \\ x+1=1 \rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El valor buscado es $x=0$.

c)

$$A + B + C = 3 \cdot I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

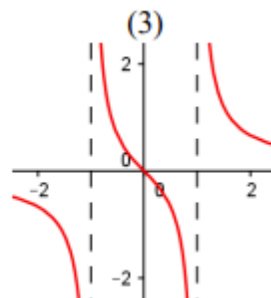
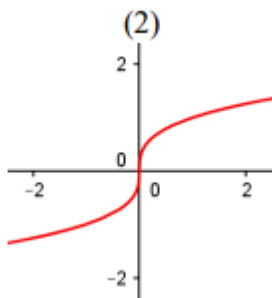
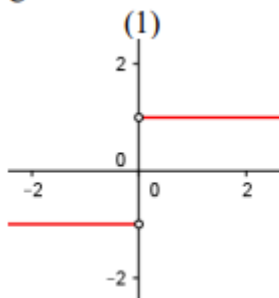
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3=3 \\ x=0 \\ x=0 \\ 3=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El valor buscado es $x=0$.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**a) **[0,9 puntos]** Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad B) g(x) = \frac{|x|}{x}; \quad C) h(x) = \sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

b) **[1,6 puntos]** En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

a) La función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ no está definida en los puntos $x = 1$ y $x = -1$, la función $f(x)$ tiene en cada uno de esos puntos una asíntota vertical.
La única función con esas características es la (3).

A) $\rightarrow (3)$

$$\text{La función } g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{no está definida en el punto } x = 0, \text{ y es}$$

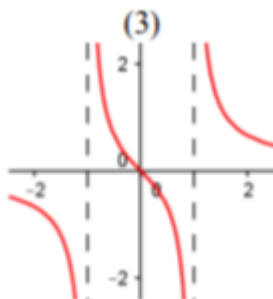
constante e igual a 1, si $x > 0$; y constante e igual a -1 , si $x < 0$.

La única función con esas características es la (1).

B) $\rightarrow (1)$

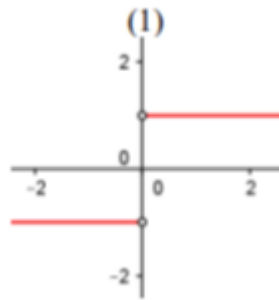
La función $h(x) = \sqrt[3]{x}$ pasa por el punto $x = 0$, y toma valores positivos si $x > 0$ y valores negativos si $x < 0$.

La única función con esas características es la (2).

C) $\rightarrow (2)$ 

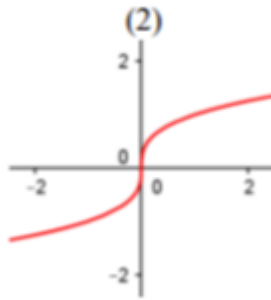
b) El dominio de la función $f(x) \rightarrow$
recorrido es $\mathbb{R}$.

es $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ y el



El dominio de la función $g(x) \rightarrow$
 $\{-1, +1\}$.

es $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es



El dominio de la función $h(x) \rightarrow$

es $\text{Dominio} = \mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t , viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) **[0,8 puntos]** Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.
- b) **[1 punto]** Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.
- c) **[0,7 puntos]** En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

a) Para que la función sea continua en $t = 1$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 7t^2 = 7 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} 2t + a = 2 + a \\ v(1) &= 2 + a \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = v(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a = 7 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

La función queda $v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$

Para que la función sea continua en $t = 5$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t + 5 = 15 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} -t^2 + 12t + b = -25 + 60 + b = 35 + b \\ v(5) &= 15 \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 35 + b = 15 \Rightarrow \boxed{b = -20}$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = -20$.

b) Para $a = 5$ y $b = -20$ la función queda $v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$.

Hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$v'(t) = \begin{cases} 14t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < t < 5 \\ -2t + 12 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14t = 0 \rightarrow t = 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} & \text{si } 1 < t < 5 \\ -2t + 12 = 0 \rightarrow t = 6 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

En el intervalo $[0,1)$ la derivada no cambia de signo, vemos si es positiva o negativa valorándola en un punto del intervalo $\rightarrow v'(0.5) = 7 > 0$. La función es creciente en $[0,1)$.

En el intervalo $(1,5)$ la derivada es constante y siempre es positiva (2). La función es creciente en $(1,5)$.

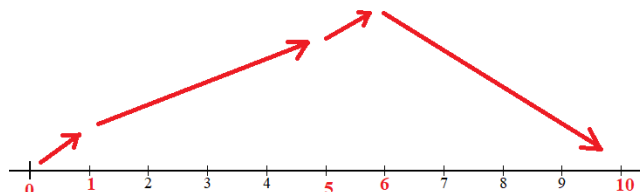
En el intervalo $(5,10)$ la derivada se anula en $t = 6$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(5,6)$ tomamos $t = 5.5$ y la derivada vale $v'(5.5) = -11 + 12 = 1 > 0$. La función es creciente en $(5,6)$.

En el intervalo $(6,10)$ tomamos $t = 7$ y la derivada vale $v'(7) = -14 + 12 = -2 < 0$. La función es decreciente en $(6,10)$.

La función es continua y creciente en $[0,1) \cup (1,5) \cup (5,6)$ y decreciente en $(6,10]$.

La función sigue el esquema:



La función alcanza un valor máximo relativo y absoluto en $t = 6$. Siendo el valor de la velocidad máxima $v(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$.

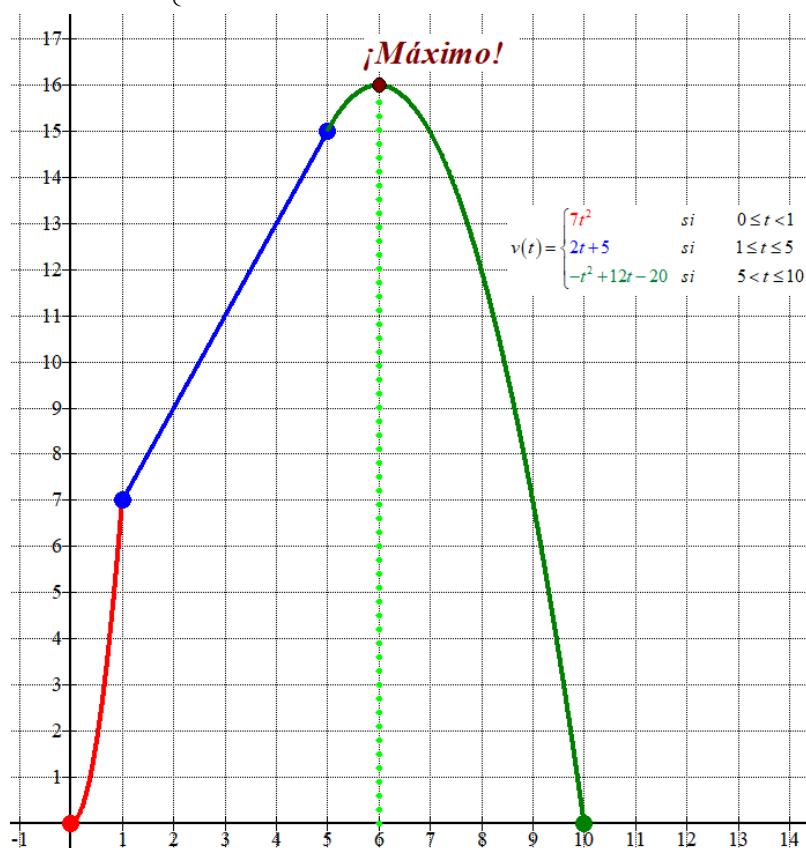
c) Para $a = 5$ y $b = -20$ la función queda
$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Sabemos como crece y decrece y que es continua. Realizamos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$v(t) = 7t^2$
0	0
0.5	1.75
0.75	3.9375

t	$v(t) = 2t + 5$
1	7
2	9
5	15

t	$v(t) = -t^2 + 12t - 20$
5.5	15.75
6	16
8	12
10	0

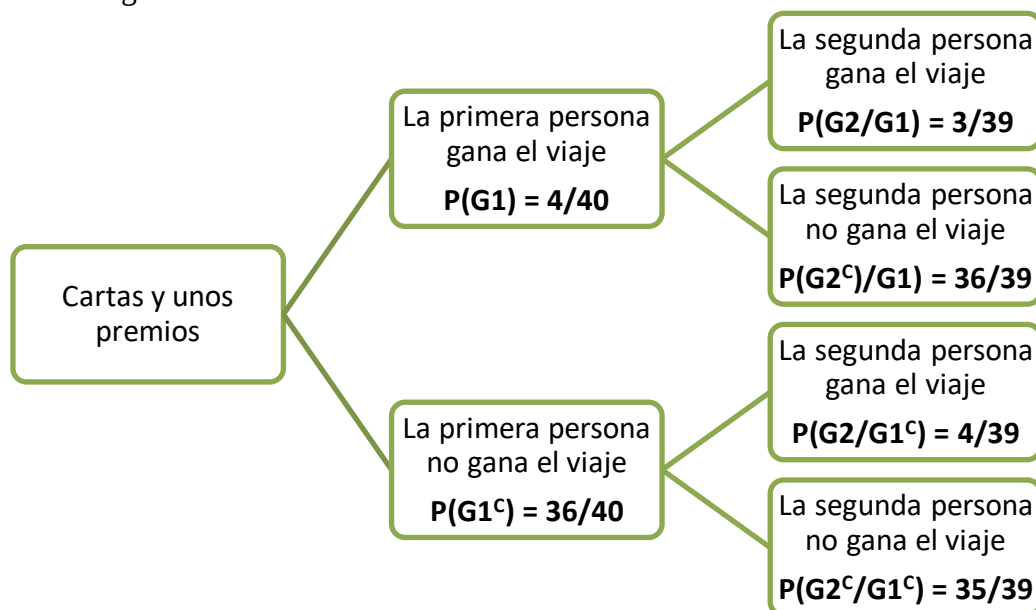


BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

- a) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
 b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
 c) **[0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

Llamamos $G1$ = “Gana la primera persona el viaje” y $G2$ = “Gana el viaje la segunda persona”.
 Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos la regla de Laplace y $P(G1) = \frac{N^\circ \text{ casos favorables}}{N^\circ \text{ casos posibles}} = \frac{4}{40} = \boxed{0.1}$

- b) Hay dos situaciones distintas: Gana el viaje la primera persona y luego la segunda también gana el viaje o No gana el viaje la primera y la segunda gana el viaje.

$$P(G2) = P(G1 \cap G2) + P(\overline{G1} \cap G2) =$$

$$= P(G1)P(G2/G1) + P(\overline{G1})P(G2/\overline{G1}) =$$

$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \boxed{0.1}$$

c)

$$P(\overline{G1} \cap \overline{G2}) = P(\overline{G1})P(\overline{G2}/\overline{G1}) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \boxed{\frac{21}{26} \approx 0.8077}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7.

Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) **[0,75 puntos]** Ambas han encestado.
- b) **[0,75 puntos]** Ninguna ha encestado.
- c) **[0,5 puntos]** Sólo Deiene ha encestado.
- d) **[0,5 puntos]** Al menos una ha encestado.

a) Llamamos $A = \text{"Encesta Deiene"}$ y $B = \text{"Encesta Kattalin"}$.

Sabemos que $P(A) = \frac{2}{5}$ y $P(B) = \frac{3}{7}$

Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \boxed{\frac{6}{35} \approx 0.1714}$$

b) Nos piden calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{12}{35} \approx 0.3428}$$

c) Nos piden calcular $P(A \cap \bar{B})$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{8}{35} \approx 0.2286}$$

d) El suceso "Al menos una ha encestado" es el contrario de "Ninguna de las dos ha encestado" cuya probabilidad está calculada en el apartado b).

$$P(\text{Al menos una ha encestado}) = 1 - P(\text{No encestan ninguna de las dos}) =$$

$$= 1 - \frac{12}{35} = \boxed{\frac{23}{35} \approx 0.6571}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados².

- a) **[0,9 puntos]** Obtén el intervalo característico para el 80%.
- b) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11°?
- c) **[0,6 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8° y 10°?
- d) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la proporción de días con más de 9°?
- e) **[0,4 puntos]** Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12°?

X = La temperatura en un día de un determinado mes.

Como la varianza es 16 la desviación típica es $\sqrt{16} = 4$ grados. $X = N(10, 4)$

- a) $(10 - e, 10 + e)$ es el intervalo característico para el 80 %, si se cumple que

$$P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = 0.80.$$

Averiguamos el valor de “e”.

$$P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{10 - e - 10}{4} \leq \frac{X - 10}{4} \leq \frac{10 + e - 10}{4}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{e}{4} \leq Z \leq \frac{e}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{e}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - P\left(Z \geq \frac{e}{4}\right) =$$

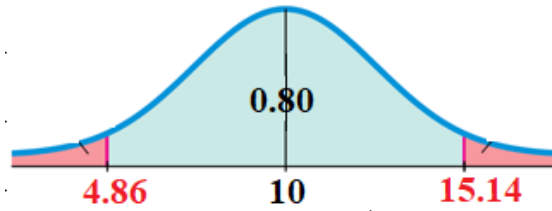
$$= P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)\right] = P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - 1$$

$$\left. \begin{aligned} P(X \leq 10 + e) - P(X \leq 10 - e) &= 0.8 \\ P(10 - e \leq X \leq 10 + e) &= 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - 1 = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = 1.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e}{4} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285 \Rightarrow \boxed{e = 5.14}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8868	0'8886	0'8905	0'8923	0'8941	0'8959	0'8977	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177

El intervalo característico para el 80 % es $(10 - 5.14, 10 + 5.14) = (4.86, 15.14)$



b) Nos piden $P(X \geq 11)$

$$P(X \geq 11) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-10}{4} \geq \frac{11-10}{4}\right) = P(Z \geq 0.25) = 1 - P(Z \leq 0.25) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.5987 = \boxed{0.4013}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'52
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'56
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'60
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'64

c) Nos piden $P(8 \leq X \leq 10)$.

$$P(8 \leq X \leq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{8-10}{4} \leq \frac{X-10}{4} \leq \frac{10-10}{4}\right) =$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 0.5) =$$

$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} =$$

$$= 0.5 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.1915}$$

	0	0'
0	0'5000	0'5
0'1	0'5398	0'5
0'2	0'5793	0'5
0'3	0'6179	0'6
0'4	0'6554	0'6
0'5	0'6915	0'6
0'6	0'7257	0'7

d) Calculamos $P(X \geq 9)$.

$$P(X \geq 9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-10}{4} \geq \frac{9-10}{4}\right) = P(Z \geq -0.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.25) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.5987}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'52
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'56
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'60
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'64

La proporción de días con más de 9° es del 59.87 %.

e) Calculamos $P(X \leq 12)$.

$$P(X \leq 12) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{12 - 10}{4}\right) = P(Z \leq 0.5) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.6915}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.1
0.2	0.5793	0.2
0.3	0.6179	0.3
0.4	0.6554	0.4
0.5	0.6915	0.5
0.6	0.7257	0.6

El 69.15 % de los días del mes tendrán una temperatura inferior a 12°. Como el mes tiene 30 días tendremos $\frac{69.15 \cdot 30}{100} = 20.745$ días con temperatura inferior a 12°. Aproximadamente 21 días.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 52,5 \text{ kg y } s = 5,3 \text{ kg}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Si tomamos como intervalo de confianza el intervalo (51, 54), se cumple que la media está en el centro del intervalo $\frac{51+54}{2} = 52.5$ y el error es la mitad de la amplitud del intervalo

$$\text{Error} = \frac{54-51}{2} = 1.5$$

Utilizamos la fórmula del error $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Error} = 1.5 \end{array} \right\} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{5.3}{\sqrt{100}} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{5.3}{10} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot 0.53 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.5}{0.53} = 0.283$$

Obtenemos el nivel de confianza $(1 - \alpha)$ a partir del valor de $z_{\alpha/2}$

$$z_{\alpha/2} = 0.283 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9977 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9977 = 0.0023 \Rightarrow \alpha = 0.0046 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9954}$$

El nivel de confianza es del 99.54 %.

Podemos decir con un nivel de confianza del 99,54 %, que el peso medio de las chicas de 16 años de esa ciudad está entre 51 y 54 kg.

	0	0'01	0'02	0'03	0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'
2'8	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'

EAU ordinaria 2022

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2022ko OHIOA

ORDINARIA 2022

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.


 $N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak
Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.

¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

B.1. [hasta 2.5 puntos]

El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.

Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000 €, y el de la del tipo B 300.000 €. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 € y por una del tipo B a 40.000 €.

	Coste de construcción	Beneficio
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.0

- a) [2,2 puntos] ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?
- b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [0,7 puntos] Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.
- b) [1 punto] En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.
- c) [0,8 puntos] En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

- a) [0,8 puntos] Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \quad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

- b) [0,6 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$$

- c) [0,5 puntos] Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.
- d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx$$

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15% tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen ningún error.

Si abrimos el libro por una página al azar:

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
- b) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
- d) [0,5 puntos] Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
- b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
- c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En el examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- c) [1 punto] Si la desviación típica es 1,5 puntos y el *Aprobado* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

- a) [1,25 puntos] Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
- b) [0,75 puntos] Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- c) [0,5 puntos] Interpretar los resultados obtenidos.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.

¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Llamamos “x” al número de aciertos, “y” al número de fallos y “z” al número de preguntas no contestadas.

“El test tiene 90 preguntas” $\rightarrow x + y + z = 90$

“Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos” $\rightarrow 6x - 2.5y - 1.5z = 210$

“El número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos” $\rightarrow z + x = 2y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 6x - 2.5y - 1.5z = 210 \\ z + x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 12x - 5y - 3z = 420 \\ z = 2y - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2y - x = 90 \\ 12x - 5y - 3(2y - x) = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y = 90 \\ 12x - 5y - 6y + 3x = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{90}{3} = 30 \\ 15x - 11y = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow 15x - 330 = 420 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x = 750 \Rightarrow x = \frac{750}{15} = 50 \Rightarrow z = 60 - 50 = 10$$

Para conseguir los 210 puntos con las condiciones del ejercicio debe tener 50 aciertos, 30 fallos y 10 preguntas no contestadas.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.

Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000 €, y el de la del tipo B 300.000 €. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 € y por una del tipo B a 40.000 €.

	Coste de construcción	Beneficio
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.000 €

- a) [2,2 puntos] ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?
 b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

- a) Llamamos “x” al número de viviendas a construir de tipo A e “y” al número de viviendas a construir de tipo B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Coste de construcción	Beneficio
Nº viviendas A (x)	100.000x	20.000x
Nº viviendas B (y)	300.000y	40.000y
TOTAL	$100000x + 300000y$	$20000x + 40000y$

La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 20000x + 40000y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B” $\rightarrow$
 $x + y \leq 120$

“la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros” $\rightarrow$
 $100000x + 300000y \leq 15000000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 100000x + 300000y \leq 15000000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 120$$

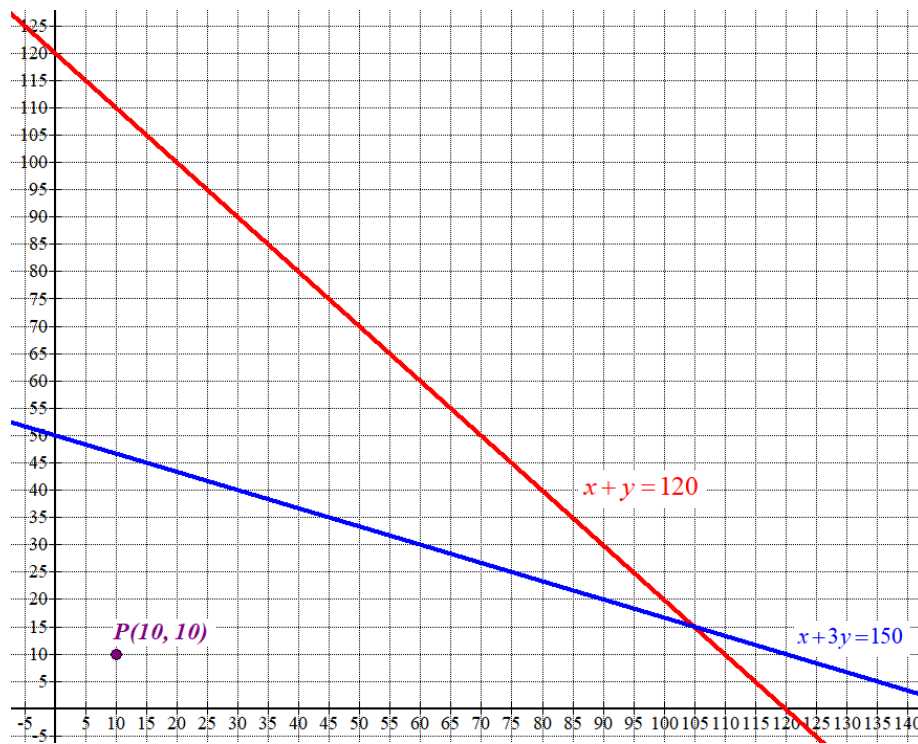
$$x + 3y = 150$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 120 - x$
0	120
105	15
120	0

x	$y = \frac{150 - x}{3}$
0	50
105	15
150	0

Primer
cuadrante



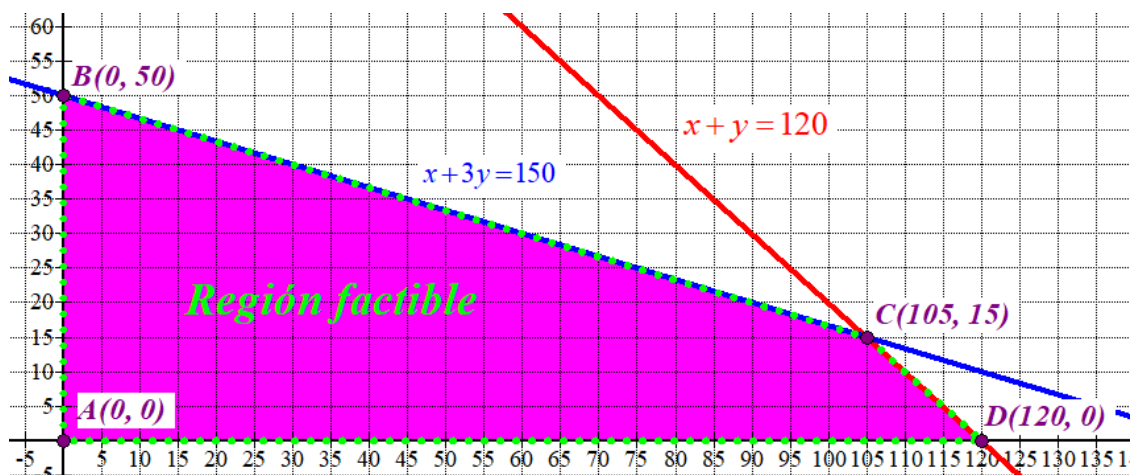
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \leq 120 \\ 10 + 30 \leq 150 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ x + 3y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \times(-1) \rightarrow -x - y = -120 \\ x + 3y = 150 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y = 30 \Rightarrow y = 15 \\ x + 15 = 120 \Rightarrow x = 105 \end{array} \Rightarrow C(105, 15)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20000x + 40000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 0 + 2\,000\,000 = 2\,000\,000$$

$$C(105, 15) \rightarrow B(105, 15) = 2\,100\,000 + 600\,000 = \textcolor{red}{2\,700\,000} \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(120, 0) \rightarrow B(120, 0) = 2\,400\,000 + 0 = 2\,400\,000$$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 2 700 000 € y se obtiene en el punto C(105, 15), es decir, el máximo beneficio se obtiene construyendo 105 casas del tipo A y 15 del tipo B.

b) El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 2 700 000 €.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [0,7 puntos] Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.
- b) [1 punto] En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.
- c) [0,8 puntos] En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 0 - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{1 - 2 \cdot 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

El valor buscado es $a = -1$.

b) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

En $x = 0$ la función es discontinua pues $a \neq -1$.

Calculamos la derivada de la función en sus dos tramos de definición e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(1-2x) - (-2)(2x+1)}{(1-2x)^2} = \frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$ la función derivada es $f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$ que siempre es positiva y por tanto la función

es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Se $x > 0$ la función derivada es $f'(x) = 2x-1$. Vemos cuando se anula.

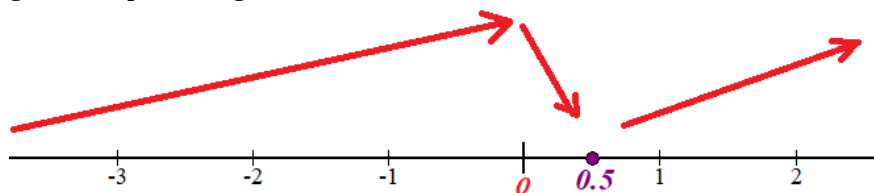
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0.5$.

- En el intervalo $(0, 0.5)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale $f'(0.25) = 0.5-1 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(0, 0.5)$.

- En el intervalo $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 - 1 = 1 > 0$. La función crece en $(0.5, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



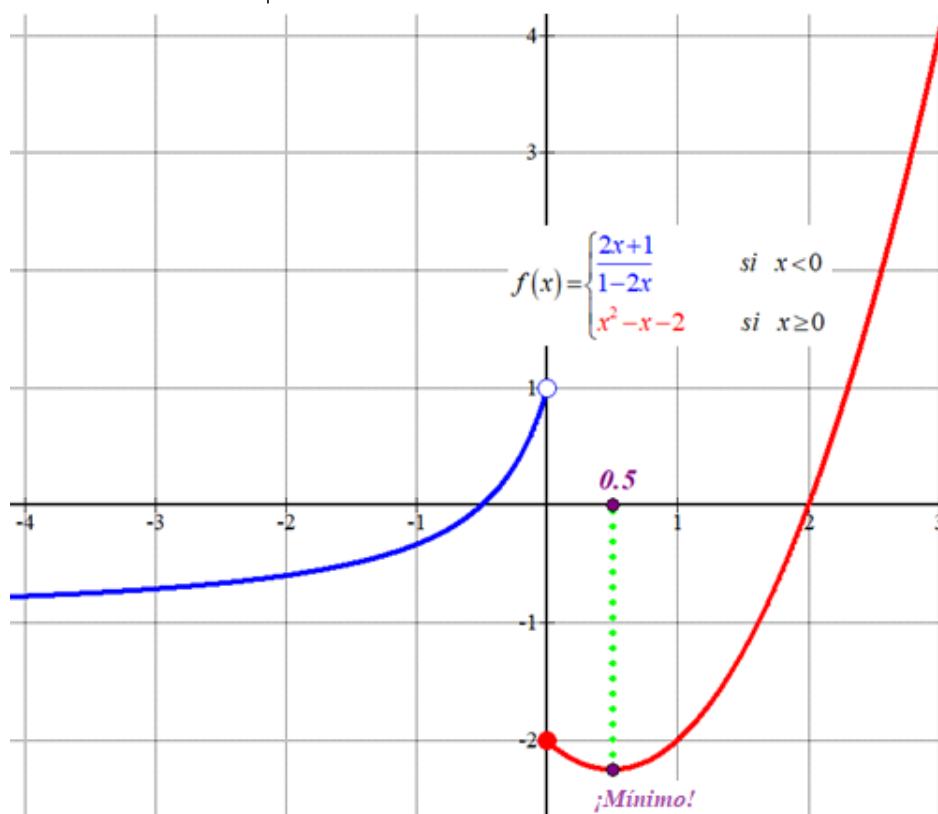
La función crece en $(-\infty, 0) \cup (0.5, +\infty)$ y decrece en $(0, 0.5)$.

La función no tiene máximo relativo (en $x = 0$ hay discontinuidad), La función tiene un mínimo relativo en $x = 0.5$. Como $f(0.5) = 0.5^2 - 0.5 - 2 = -2.25$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0.5, -2.25)$.

c) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$x < 0$	$y = \frac{2x+1}{1-2x}$	$x \geq 0$	$y = x^2 - x - 2$
-4	-7/9	0	-2
-2	-3/5	0.5	-2.25
-1	-1/3	1	-2
0	1 No incluido	2	0



B.2. [hasta 2,5 puntos]

a) [0,8 puntos] Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \quad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) [0,6 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$$

c) [0,5 puntos] Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx$$

a)

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \Rightarrow f'(x) = (2x)(3x^3 + 5x)^3 + (x^2 - 1)3(3x^3 + 5x)^2(9x^2 + 5)$$

$$f'(x) = (3x^3 + 5x)^2 [2x(3x^3 + 5x) + (x^2 - 1)(27x^2 + 15)]$$

$$f'(x) = (3x^3 + 5x)^2 [6x^4 + 10x^2 + 27x^4 + 15x^2 - 27x^2 - 15]$$

$$f'(x) = (3x^3 + 5x)^2 (33x^4 - 2x^2 - 15)$$

$$g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{3}{e^{2x}} - 2e^{2x} \ln(3x)}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \left[\frac{1}{x} - 2 \ln(3x) \right]}{(e^{2x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 2 \ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) La ecuación de la recta tangente a $h(x)$ en $x = 1$ es $y - h(1) = h'(1)(x - 1)$.

$$h(1) = \frac{3+6}{2+1} = 3$$

$$h(x) = \frac{3x+6}{2x+1} \Rightarrow h'(x) = \frac{3(2x+1) - 2(3x+6)}{(2x+1)^2} \Rightarrow h'(1) = \frac{3(2+1) - 2(3+6)}{(2+1)^2} = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} y - h(1) = h'(1)(x - 1) \\ h(1) = 3 \\ h'(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -x + 1 \Rightarrow \boxed{y = -x + 4}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$

- c) El dominio de definición de $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

El dominio es $Dom h(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = -\frac{1}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)+6}{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{4.5}{0} = \infty$$

$x = -\frac{1}{2}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+6}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{6}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{6}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3 + \frac{6}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{3+0}{2+0} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$y = \frac{3}{2}$ es asíntota horizontal.

d)

$$\begin{aligned} \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx &= \frac{1}{3} e^{3x} - x^3 + 2 \ln|x+2| - \int \frac{4}{(x+2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} - x^3 + 2 \ln|x+2| - 4 \int (x+2)^{-2} dx = \frac{1}{3} e^{3x} - x^3 + 2 \ln|x+2| - 4 \frac{1}{-1} (x+2)^{-1} = \\ &= \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} - x^3 + 2 \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} + K} \end{aligned}$$

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

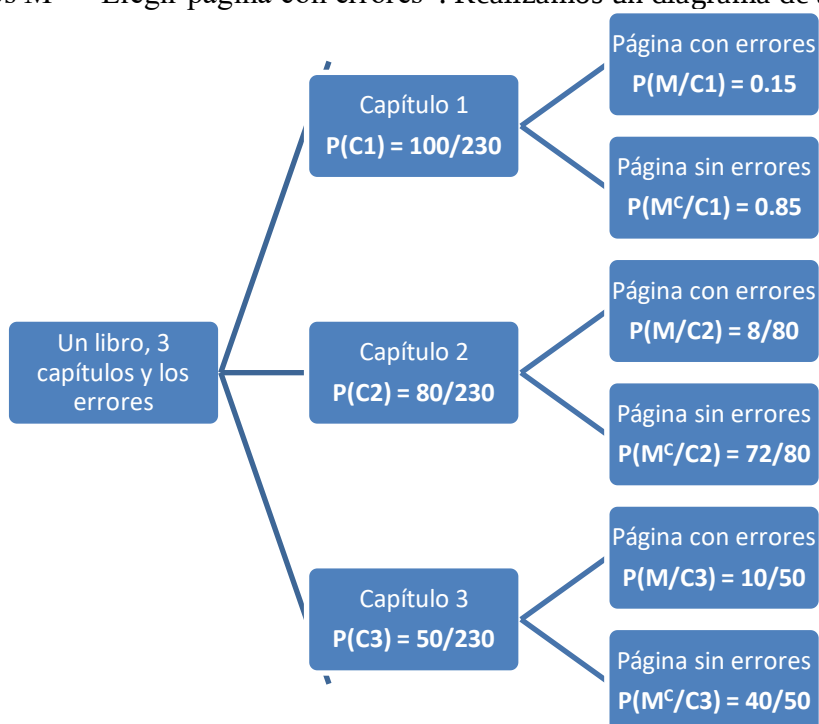
Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15% tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen ningún error.

Si abrimos el libro por una página al azar:

- [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
- [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
- [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
- [0,5 puntos] Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Llamamos $C1$ = “Elegir pagina del capitulo 1” e igualmente $C2$ y $C3$.

También llamamos M = “Elegir página con errores”. Realizamos un diagrama de árbol.



$$a) P(C2) = \frac{80}{230} = \frac{8}{23} \approx 0.348$$

$$b) P(M \cap C3) = P(C3)P(M / C3) = \frac{50}{230} \cdot \frac{10}{50} = \frac{1}{23} \approx 0.043$$

$$c) P(M^c) = P(C1)P(M^c / C1) + P(C2)P(M^c / C2) + P(C3)P(M^c / C3) = \\ = \frac{100}{230} \cdot 0.85 + \frac{80}{230} \cdot \frac{72}{80} + \frac{50}{230} \cdot \frac{40}{50} = \frac{197}{230} \approx 0.8565$$

d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C3 / M) = \frac{P(C3 \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C3 \cap M)}{1 - P(M^c)} = \frac{\frac{10}{230}}{1 - \frac{197}{230}} = \frac{\frac{10}{230}}{\frac{33}{230}} = \frac{10}{33} \approx 0.303$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
- b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
- c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.5 = 0.4 + 0.3 - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2}$$

- b) Hallamos la probabilidad de la intersección.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$0.7 = 0.5 + 0.6 - P(C \cap D)$$

$$P(C \cap D) = 0.5 + 0.6 - 0.7 = 0.4$$

Es una probabilidad condicionada. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\text{Nos piden calcular } P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.4}{0.6} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.667}$$

- c) Si los sucesos A y E son independientes entonces $P(A \cap E) = P(A)P(E) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$.

Nos piden calcular $P(A \cup E)$.

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0.4 + 0.6 - 0.24 = \boxed{0.76}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

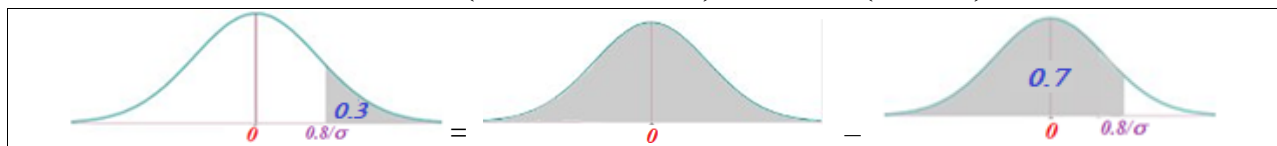
En el examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
 b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
 c) [1 punto] Si la desviación típica es 1,5 puntos y el *Aprobado* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

X = Puntuación obtenida en el examen de Lengua Inglesa. $X = N(6.8, \sigma)$

a) Nos dicen que $P(X > 7.6) = 0.3$

$$P(X > 7.6) = 0.3 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{7.6 - 6.8}{\sigma}\right) = 0.3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.3 \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.3 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.7 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla de } N(0,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.8}{\sigma} = \frac{0.52 + 0.53}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{0.8}{0.525} = 1.5238$$

	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357

b) $X = N(6.8, 1.5)$

$$P(X > a) = 0.20 \Rightarrow P(X \leq a) = 1 - 0.20 = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 6.8}{1.5}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a - 6.8}{1.5} = \frac{0.84 + 0.85}{2} \Rightarrow a = 0.845 \cdot 1.5 + 6.8 = 8.0675$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7968	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289

Solo el 20 % de la población consigue una puntuación superior a 8.0675 puntos.

c) $X = N(6.8, 1.5)$

$$P(X \geq 5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{5-6.8}{1.5}\right) = P(Z \geq -1.2) = P(Z \leq 1.2) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \boxed{0.8849}$$

El 88.49 % de la población tiene un “Aprobado”.

	0	
0	0'5000	0'
0'1	0'5398	0'
0'2	0'5793	0'
0'3	0'6179	0'
0'4	0'6554	0'
0'5	0'6915	0'
0'6	0'7257	0'
0'7	0'7580	0'
0'8	0'7881	0'
0'9	0'8159	0'
1	0'8413	0'
1'1	0'8643	0'
1'2	0'8849	0'
1'3	0'9032	0'

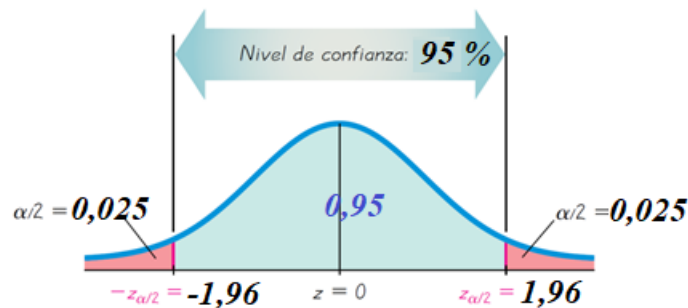
B.4. [hasta 2,5 puntos]

Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

- [1,25 puntos] Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
- [0.75 puntos] Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- [0,5 puntos] Interpretar los resultados obtenidos.

a) Proporción muestral $p = \frac{860}{1000} = 0.86$. Tamaño de la muestra = $n = 1000$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.86 \cdot 0.14}{1000}} = 0.0215$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.86 - 0.0215, 0.86 + 0.0215) = (0.8385, 0.8815)$$

El porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna está entre el 83.85 % y el 88.15 % con un nivel de confianza del 95 %.

- El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es $Error = 0.0215$.
El error máximo es de un 2.15 %.
- Se puede decir con un nivel de confianza del 95 % que el porcentaje de la población que está vacunada es mayor que el 83.85 % y menor que el 88.15 %, lo que supone un error máximo del 2.15 %.

EAU extraordinaria 2021

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2021ko EZOHIOA

EXTRAORDINARIA 2021

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.
 b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- a) [0,75 puntos] ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$?
 b) [1,75 puntos] Resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = 2B^t + I_2$$

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.
 b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función.
 c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x , medida en toneladas:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

- a) [1,25 puntos] Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.
 b) [0,75 puntos] Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
 c) [0,5 puntos] ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?
- b) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?
- c) [0,75 puntos] Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

- a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?
- b) [1,25 puntos] En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $\mathcal{N}(24, 9)$.

- a) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.
- b) [1,25 puntos] ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es (820, 830) con un nivel de confianza del 95%.

Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

- a) [1 punto] Calcula la media obtenida a partir de la muestra.
- b) [1,5 puntos] Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.

b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$2x + 3y = 6$$

x	y = $\frac{6-2x}{3}$
0	2
3	0

$$2x + y = 5$$

x	y = 5 - 2x
2	1
0	5

$$x = 4$$

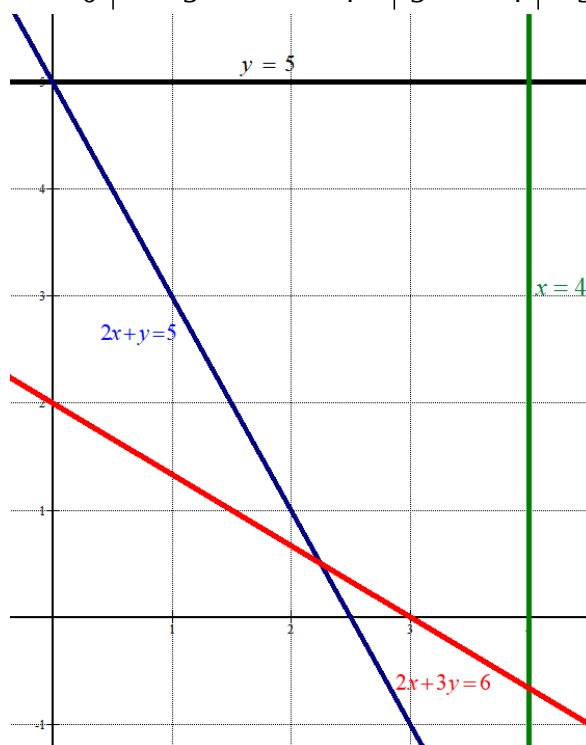
x = 4	y
4	0
4	5

$$y = 5$$

x	y = 5
0	5
4	5

$$x \geq 0; y \geq 0$$

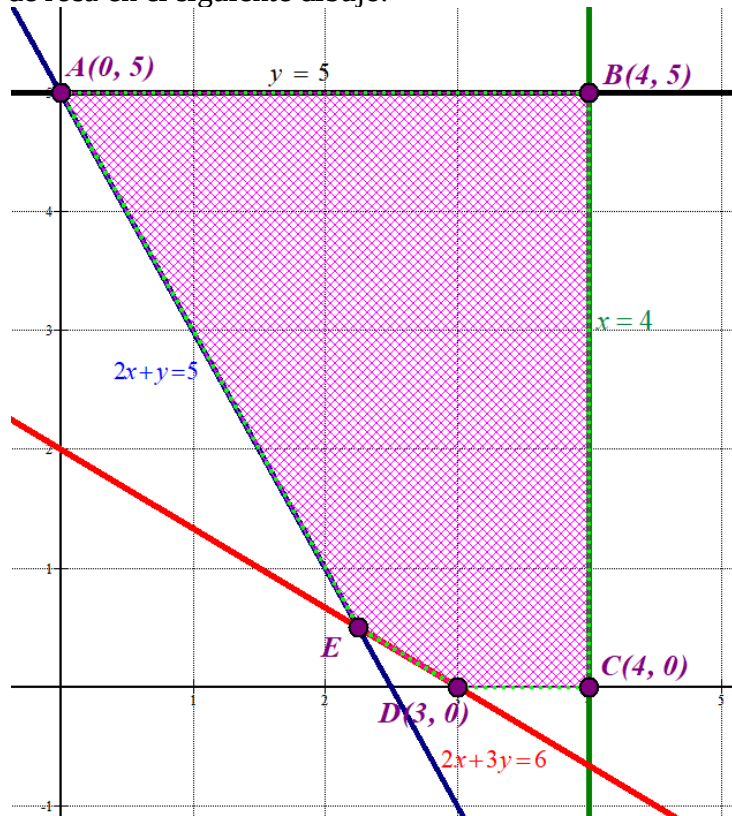
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta horizontal negra, a la izquierda de la recta vertical verde y por

encima de las rectas roja y azul.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



- b) Para obtener el máximo y el mínimo de $f(x, y) = 5x + 4y$ en el recinto determinamos los vértices de la región. Por el dibujo tenemos las coordenadas de los vértices A, B, C y D, pero determinamos las coordenadas de E resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de sus rectas.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ y = 5 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3(5 - 2x) = 6 \Rightarrow 2x + 15 - 6x = 6 \Rightarrow 9 = 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2.25 \Rightarrow y = 5 - 4.5 = 0.5 \Rightarrow E(2.25, 0.5)$$

Valoramos la función en cada uno de los vértices.

$$A(0, 5) \rightarrow f(0, 5) = 20$$

$$B(4, 5) \rightarrow f(4, 5) = 40 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = 20$$

$$D(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 15$$

$$E(2.25, 0.5) \rightarrow f(2.25, 0.5) = 13.25 \text{ ¡Mínimo!}$$

El valor máximo de la función es 40 y se alcanza en el punto B(4,5) y el mínimo valor de la función es 13.25 y se alcanza en el punto E(2.25, 0.5)

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$?

b) [1,75 puntos] Resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = 2B^t + I_2$$

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} = A^2 + 2AB + B^2$$

Se cumple la igualdad.

b) $X \cdot A = 2B^t + I_2 \rightarrow X = A^{-1}(2B^t + I_2)$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea $f(x)$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x+2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.
 b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función.
 c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

- a) La función es continua en cada intervalo $[-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 4]$ por estar definida como polinomios. Falta comprobar la continuidad en los cambios de definición.

¿Es continua en $x = 0$?

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

La función es continua en $x = 0$.

¿Es continua en $x = 2$?

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4x + 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

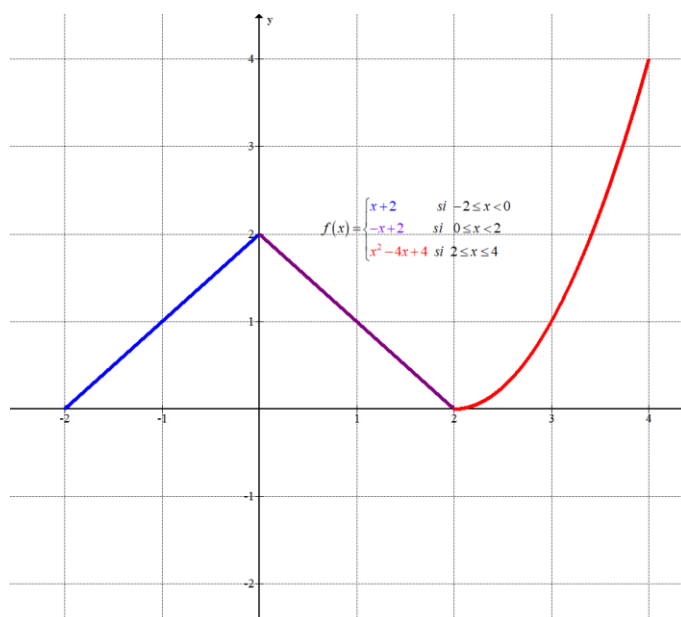
La función es continua en $x = 2$.

Resumiendo: La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4]$

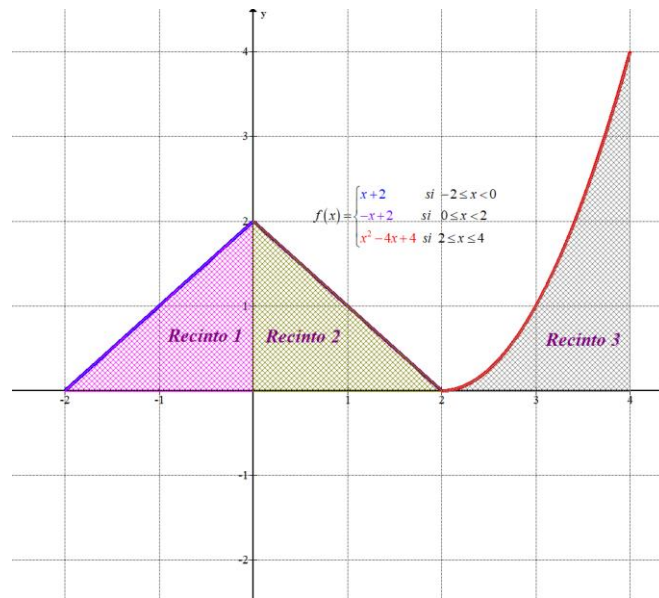
- b) Hacemos una tabla de valores. La gráfica son dos trozos de recta y un trozo de parábola.

si $-2 \leq x < 0$		si $0 \leq x < 2$	
x	$y = x + 2$	x	$y = -x + 2$
-2	0	0	2
-1	1	1	1

si $2 \leq x \leq 4$	
x	$y = x^2 - 4x + 4$
2	0
3	1
4	4



c) El recinto es la zona dividida en tres recintos de color distinto en el dibujo inferior.



El área del recinto 1 es la de un triángulo de base 2 y altura 2, por lo que $\text{Área } 1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 u^2$.

El área del recinto 2 es igual que la del recinto 1. $\text{Área } 2 = 2 u^2$.

El área del recinto 3 hay que determinarla usando el cálculo integral.

$$\text{Área } 3 = \int_2^4 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 16 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 8 \right] = \frac{8}{3} u^2$$

El área total es la suma del valor de las áreas de los tres recintos.

$$\text{Área total} = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{20}{3} \approx 6.66 u^2}$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x , medida en toneladas:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

- a) [1,25 puntos] Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.
 b) [0,75 puntos] Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
 c) [0,5 puntos] ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

a) Utilizamos la derivada de la función.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -9 + 12x - 3x^2$$

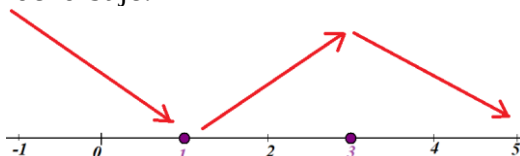
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9 + 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3 - 4x + x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos: $x = 1$, $x = 3$.

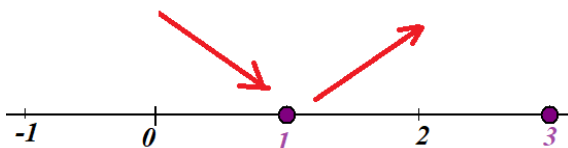
Veamos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -9 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -9 + 24 - 12 = 3 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = -9 + 120 - 300 = -189 < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



Como la producción mínima es 0 y la máxima es de 2 toneladas el dominio de definición de la función es el intervalo $[0, 2]$. La situación planteada nos lleva a reducir el dibujo anterior.



La función decrece en $[0, 1]$ y crece en $(1, 2]$

b) El coste mínimo se consigue en $x = 1$. Dicho coste mínimo es $f(1) = 30 - 9 + 6 - 1 = 26$.

El coste mínimo de la producción se obtiene con una producción de 1 tonelada y este coste mínimo es de 26000 €.

c) Observando la imagen superior el coste máximo de producción se obtiene en uno de los

extremos del intervalo $[0, 2]$, como
$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 30 \\ f(2) &= 30 - 18 + 24 - 8 = 28 \end{aligned} \right\} \text{ el coste máximo de producción}$$

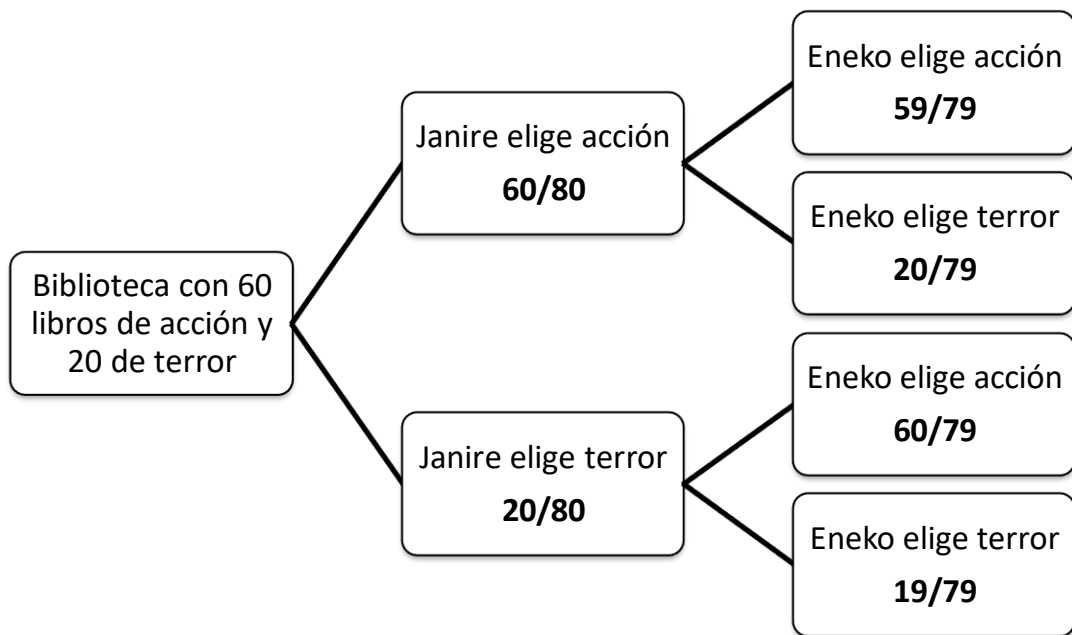
se obtiene en $x = 0$ y este coste máximo es de 30000 €.

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?
 b) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?
 c) [0,75 puntos] Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Elegir ambas novelas de acción solo pasa en la rama superior del árbol, por lo que la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades de esa rama.

$$P(\text{Janire y Eneko eligen acción}) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \boxed{\frac{177}{316} \approx 0.56}$$

- b) La forma de elegir Eneko una novela de acción puede pasar en dos de las ramas del árbol. Sumamos las probabilidades de cada rama.

$$P(\text{Eneko elige acción}) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

- c) Esta es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Janire elige terror} / \text{Eneko elige acción}) = \frac{P(\text{Janire elige terror} \cap \text{Eneko elige acción})}{P(\text{Eneko elige acción})} =$$

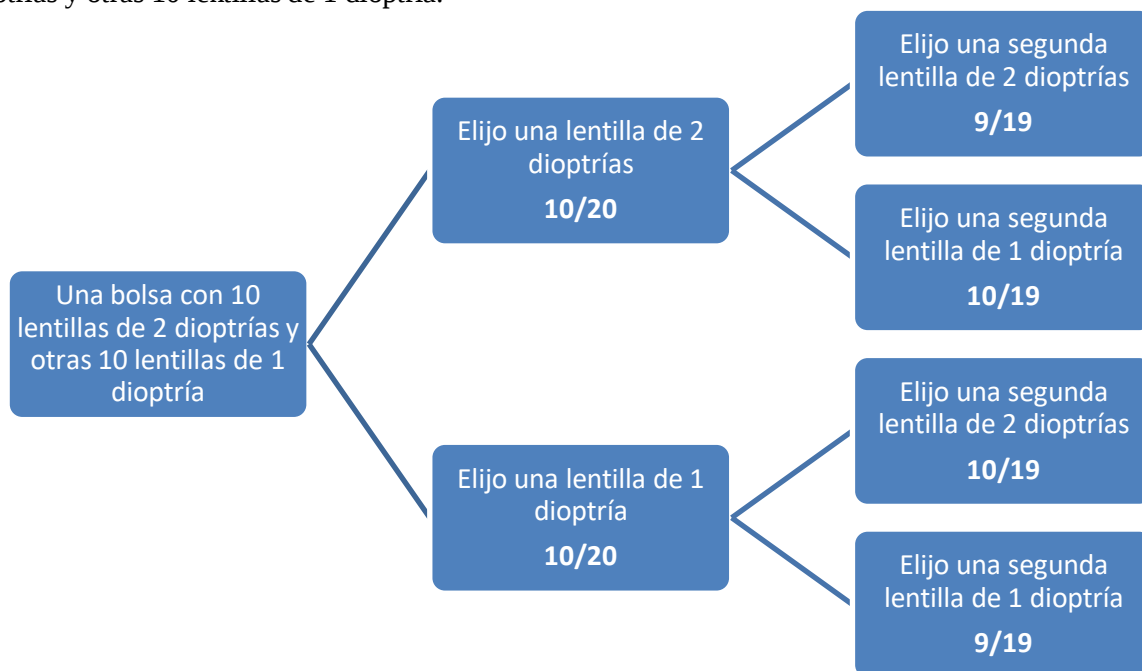
$$= \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{20}{79} \approx 0.2532}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

- a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?
 b) [1,25 puntos] En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

- a) Realizamos un diagrama de árbol de la operación “Sacar dos lentillas de una bolsa con 10 lentillas de 2 dioptrías y otras 10 lentillas de 1 dioptría.



Para que Lucía acierte con lo que necesita debe elegir una lentilla de 2 dioptrías y otra de 1 dioptría. Esto ocurre en dos de las ramas del árbol.

$$P(\text{Lucía acierte}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \boxed{\frac{10}{19} \approx 0.526}$$

Para que Nerea acierte con lo que necesita debe elegir una lentilla de 2 dioptrías y otra de 2 dioptrías. Esto solo ocurre en una de las ramas del árbol (la superior).

$$P(\text{Nerea acierte}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \boxed{\frac{9}{38} \approx 0.2368}$$

- b) Encontrar las dos lentillas defectuosas en el tercer intento de ir sacando una a una cada lentilla, puede ocurrir de una de las dos formas siguientes: Sacamos lentilla buena en 1ª, defectuosa en 2ª y defectuosa en 3ª o bien sacamos lentilla defectuosa en 1ª, buena en 2ª y defectuosa en 3ª.
 Hay 18 lentillas buenas y 2 defectuosas.
 Llamamos D_1 = Sacar lentilla defectuosa en 1ª, D_2 = Sacar lentilla defectuosa en 2ª, D_3 = Sacar lentilla defectuosa en 3ª.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sacar las 2 defectuosas en 3 intentos}) &= P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3) + P(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) = \\
 &= \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \boxed{\frac{1}{95} \approx 0.0105}
 \end{aligned}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24, 9)$.

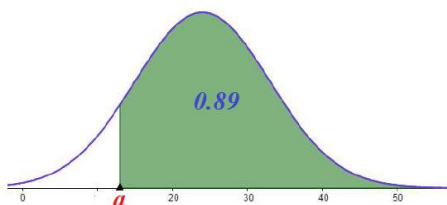
- a) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.
 b) [1,25 puntos] ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

X = Número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir. $X = N(24, 9)$

$$a) P(X < 20) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - 24}{9}\right) = P(Z < -0.444) =$$

$$= P(Z \geq 0.444) = 1 - P(Z \leq 0.444) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.67 = \boxed{0.33}$$

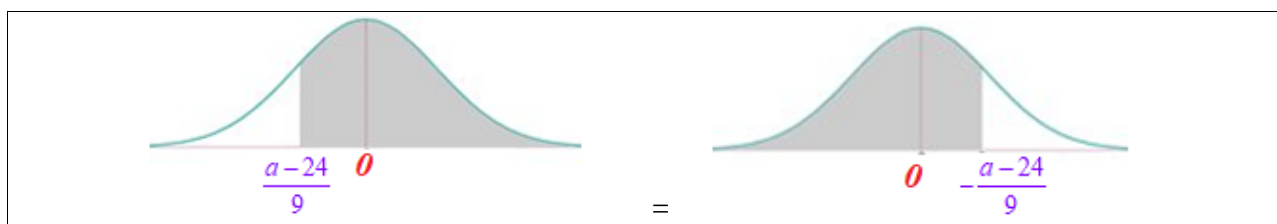
- b) Llamamos “a” al número de horas pedidas. Debe cumplirse $P(X > a) = 0.89$.



$$P(X > a) = 0.89 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 24}{9}\right) = 0.89$$

No podemos buscarla en la tabla de la $N(0, 1)$ pues es “>”. $\frac{a - 24}{9}$ es negativo por el valor de la probabilidad (mayor de 0.5)

La transformamos como indica el dibujo inferior.



$$P\left(Z > \frac{a - 24}{9}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a - 24}{9}\right) = 0.89$$

Ahora si que buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ la probabilidad 0.89 y nos queda

$$1.23 = -\frac{a - 24}{9} \Rightarrow \boxed{a = 12.93}$$

Andrea ha dado 13 horas de clase.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es (820, 830) con un nivel de confianza del 95 %.

Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

a) [1 punto] Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

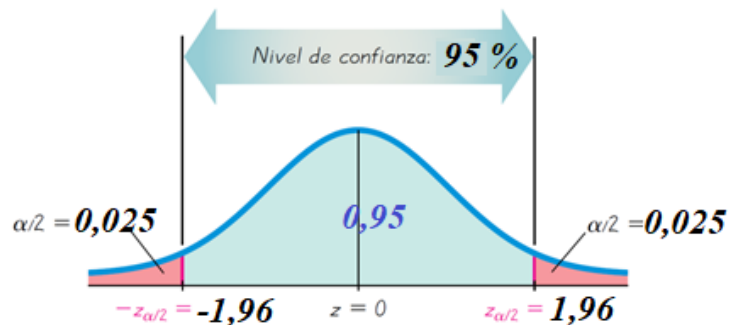
b) [1,5 puntos] Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

X = El gasto medio anual de una familia en servicios de hostelería. $X = N(\mu, 80)$

a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{820 + 830}{2} = 825 \text{ euros}$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $\text{Error} = \frac{830 - 820}{2} = 5$.

Utilizando la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{Error} = 1,96 \cdot \frac{80}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 1,96 \cdot 80 = 5 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 80}{5} = 31,36 \Rightarrow \boxed{n = 983,45}$$

El tamaño de la muestra es de 984 familias

EAU ordinaria 2021

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2021ko EKAINA

ORDINARIA 2021

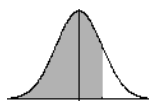
GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.


 $N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak
Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2.5 puntos]**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- [0,75 puntos] Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.
- [0,75 puntos] Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.
- [1 punto] Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.

La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.

Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

- [2 puntos] Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.
- [0,5 puntos] ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B? Razona la respuesta.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- [0,5 puntos] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
- [0,4 puntos] En el caso $a = \frac{1}{2}$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.
- [1 punto] En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.
- [0,6 puntos] Calcula:

$$\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$.

- [1 punto] Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(2, 5)$.
- [0,75 puntos] En el caso $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión

de la función.

- c) [0,75 puntos] En el caso $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas B: 4 blancas y 6 negras

Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado.

- [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
- [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
- [1 punto] La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.
- [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$ y $P(C \cup D) = 0,5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.
- [0,75 puntos] Sabemos que $P(E) = 0,6$; $P(F) = 0,8$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4,8 puntos.

- [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución.
- [0,75 puntos] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?
- [1 punto] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 euros.

- [1,5 puntos] Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es (24,47, 26,43) con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- [1 punto] Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ . Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) [0,75 puntos] Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.
 b) [0,75 puntos] Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.
 c) [1 punto] Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2$$

- a) Debe ser $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ -1=m \\ 1=1 \\ m=-1 \\ n=n \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 2=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

Para que no tenga inversa debe tener determinante nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n - 1 - 1 - n - 2 - 1 = n - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow n - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

Para cumplir las dos condiciones impuestas a la matriz A debe ser $m = -1$ y $n = 5$.

b) Para $m = 0$ y $n = 3$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 3 - 1 = 1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Para $m = 0$ y $n = 3$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene inversa, calculada en el apartado

$$\text{anterior } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} + 2I_3 \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I_3 + 2A^{-1} = A \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X + 2A^{-1} = A \cdot I_3 \Rightarrow X + 2A^{-1} = A \Rightarrow \boxed{X = A - 2A^{-1}}$$

Sustituimos los valores de A y A^{-1} y obtenemos la expresión de X .

$$X = A - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.

La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.

Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

- a) [2 puntos] Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.
- b) [0,5 puntos] ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B? Razona la respuesta.

- a) Llamamos “x” a las unidades de camisas de tipo A que debe producir e “y” a las unidades de camisa tipo B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Perlas blancas	Perlas grises	Perlas rosas	Beneficio
Nº de camisas A (x)	20x	20x	30x	60x
Nº de camisas B (y)	10y	20y	60y	50y
TOTALES	$20x + 10y$	$20x + 20y$	$30x + 60y$	$60x + 50y$

La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 60x + 50y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises” $\rightarrow 20x + 10y \leq 900$
 $; 20x + 20y \leq 1400$

“La empresa decide utilizar al menos 1800 perlas rosas” $\rightarrow 30x + 60y \geq 1800$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 10y \leq 900 \\ 20x + 20y \leq 1400 \\ 30x + 60y \geq 1800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$2x + y = 90$$

$$x + y = 70$$

$$x + 2y = 60$$

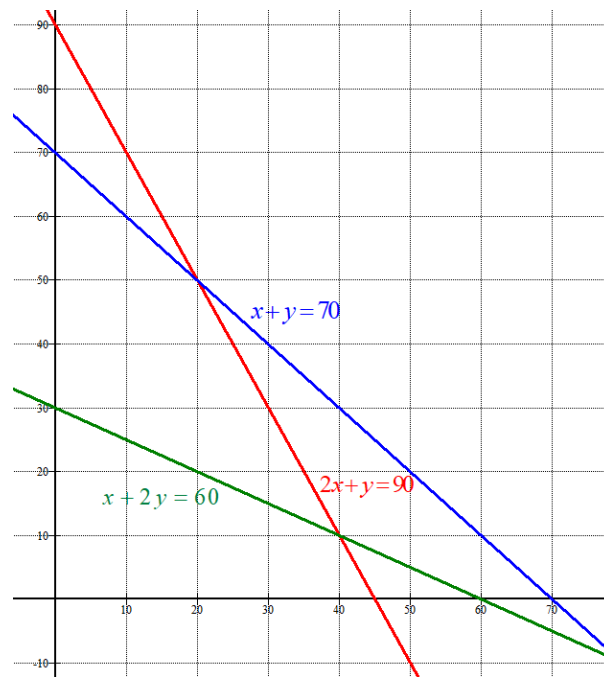
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 90 - 2x
20	50
40	10

x	y = 70 - x
20	50
50	20

x	y = $\frac{60-x}{2}$
0	30
40	10

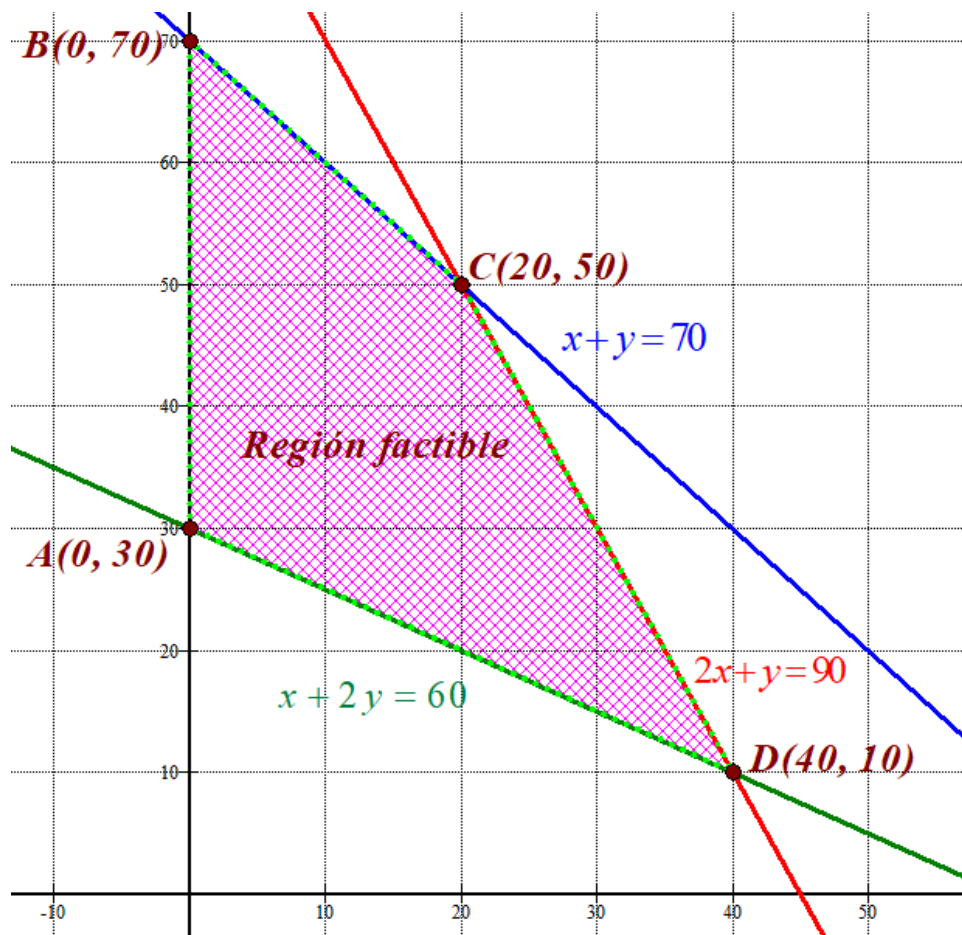
Primer
cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja y por encima de la recta verde.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 60x + 50y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 1500 \text{ €}$$

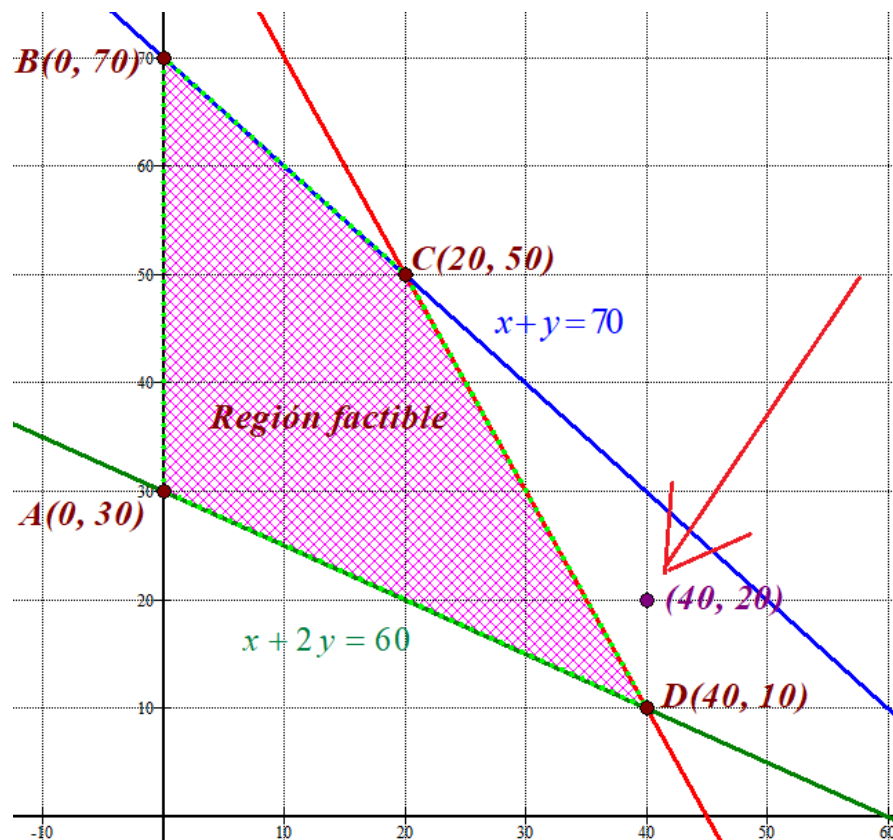
$$B(0, 70) \rightarrow B(0, 70) = 3500 \text{ €}$$

$$C(20, 50) \rightarrow B(20, 50) = 1200 + 2500 = 3700 \text{ €}$$

$$D(40, 10) \rightarrow B(40, 10) = 2400 + 500 = 2900 \text{ €}$$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 3700 € y se obtiene en el punto $C(20, 50)$, es decir, el máximo beneficio se obtiene fabricando 20 camisas del tipo A y 50 camisetas del tipo B.

- b) Fabricar 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B viene reflejado en el punto $(40, 20)$. Este punto está fuera de la región factible y por tanto no cumple todas las restricciones pedidas en el ejercicio.



BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) [0,5 puntos] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
- b) [0,4 puntos] En el caso $a = \frac{1}{2}$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.
- c) [1 punto] En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.
- d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

- a) Para que la función sea continua en $x = 1$ debe cumplirseque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a + \frac{2}{1} = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 3x^2 = 1^3 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + \frac{2}{x} = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

- b) Para $a = \frac{1}{2}$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y en el entorno de $x = 2$ la función

$$\text{es } f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}.$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{2} = 2 \\ f(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} = 0 \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 2 = 0(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

- c) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

En $x < 1$ la derivada es $f'(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x$

Iguamos a cero la derivada cuando $x < 1$ en busca de los puntos críticos.

$$\text{En } x < 1 \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vemos que ocurre en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad \text{si } x < 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2) = -12 + 6 = -6 < 0 \\ f''(0) = 0 + 6 = 6 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

Iguamos a cero la segunda derivada en busca de los puntos de inflexión.

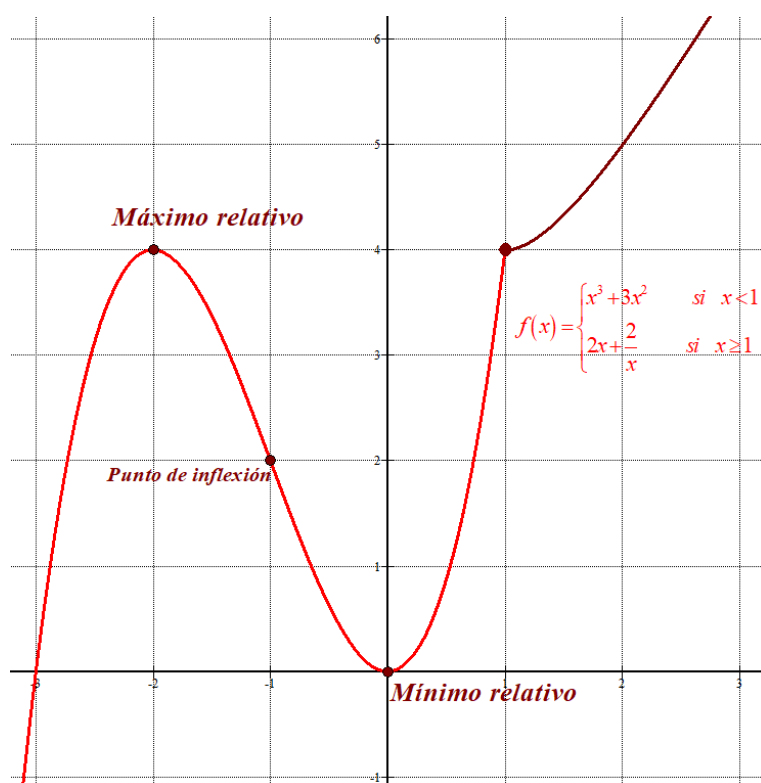
$$\begin{aligned} \text{si } x < 1 &\Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \\ f''(x) = 0 &\Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f'''(x) = 6 &\Rightarrow f'''(-1) = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = -1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$x < 1$	$y = x^3 + 3x^2$
-3	0
-2	4
-1	2
0	0
1	4 No incluido

$x \geq 1$	$y = 2x + \frac{2}{x}$
1	4
2	5
4	8.5



d)

$$\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx = \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - 4 \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| - 4 \int x^{-2} dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + 2 \ln|x| - 4 \frac{x^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{x^4}{4} + x^3 + 2 \ln|x| + 4 \frac{1}{x} + K}$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$.

- a) [1 punto] Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(2, 5)$.
- b) [0,75 puntos] En el caso $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.
- c) [0,75 puntos] En el caso $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

- a) La función pasa por el punto $(2, 5)$ por lo que $f(2) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx + 11 \\ f(2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 2^3 + 2b + 11 = 5 \Rightarrow \boxed{8a + 2b = -6}$$

Además la función presenta un extremo relativo en $(2, 5)$, por lo que la derivada primera se anula para $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx + 11 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{12a + b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 8a + 2b = -6 \\ 12a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a + b = -3 \\ b = -12a \end{array} \right\} \Rightarrow 4a - 12a = -3 \Rightarrow -8a = -3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{8}} \Rightarrow \boxed{b = -12 \frac{3}{8} = -\frac{9}{2}}$$

- b) Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$ la función queda $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.

Sustituimos sus valores en la segunda derivada y vemos que tipo de extremo son.

$$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} \Rightarrow f''(x) = \frac{18}{8}x = \frac{9}{4}x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{9}{4}(-2) = -\frac{9}{2} < 0 \\ f''(2) = \frac{9}{4}(2) = \frac{9}{2} > 0 \end{array} \right.$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(-2) = 17$ y $f(2) = 5$ el máximo tiene coordenadas $(-2, 17)$ y el mínimo $(2, 5)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos de inflexión.

$$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} \Rightarrow f''(x) = \frac{18}{8}x = \frac{9}{4}x$$

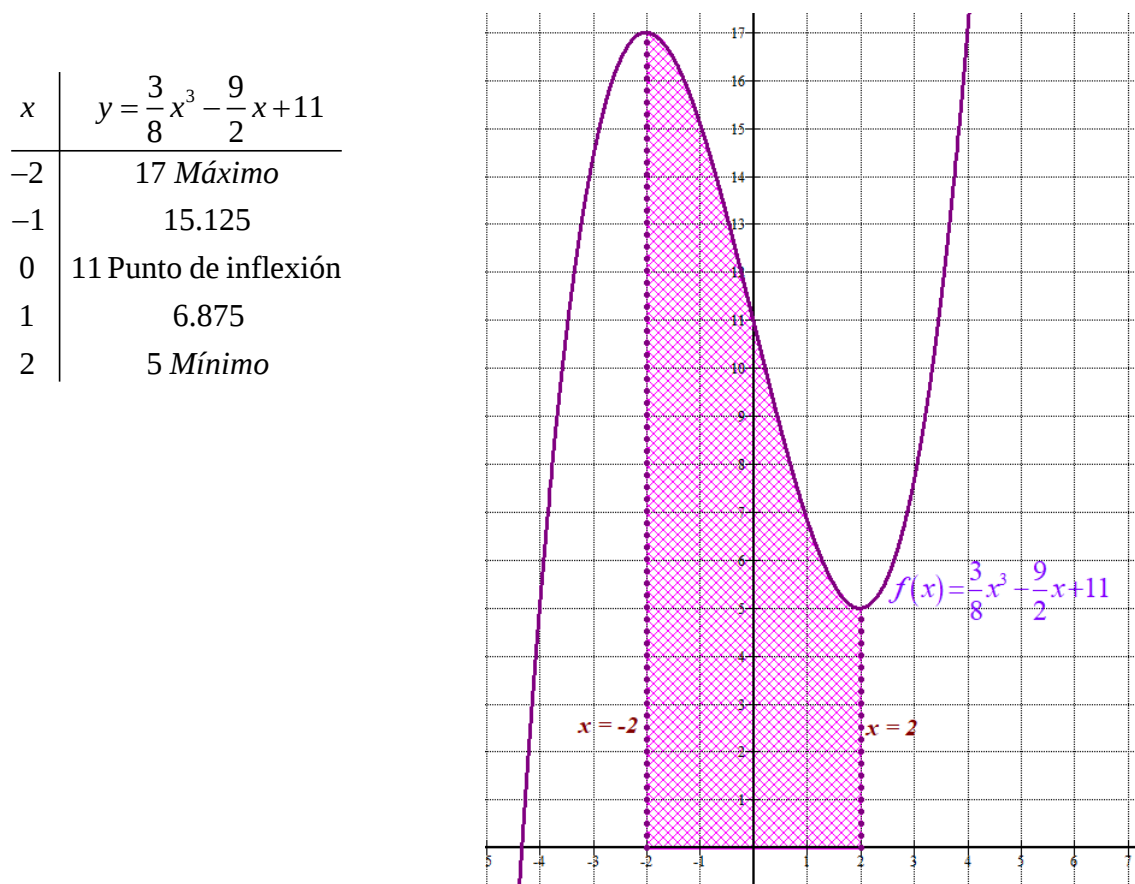
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $f'''(x) = \frac{9}{4} \rightarrow f'''(0) = \frac{9}{4} \neq 0$ la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

Como $f(0) = 11$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 11)$

c) Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$ la función queda $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función en el intervalo $(-2, 2)$.



Como se observa en el dibujo el área es grande, del orden de 44 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11 \right) dx = \left[\frac{3}{8} \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2} \frac{x^2}{2} + 11x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{3}{32}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + 11x \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left[\frac{3}{32}2^4 - \frac{9}{4}2^2 + 11 \cdot 2 \right] - \left[\frac{3}{32}(-2)^4 - \frac{9}{4}(-2)^2 + 11(-2) \right] = \frac{3}{2} - 9 + 22 - \frac{3}{2} + 9 - 22 = \boxed{44 u^2}$$

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

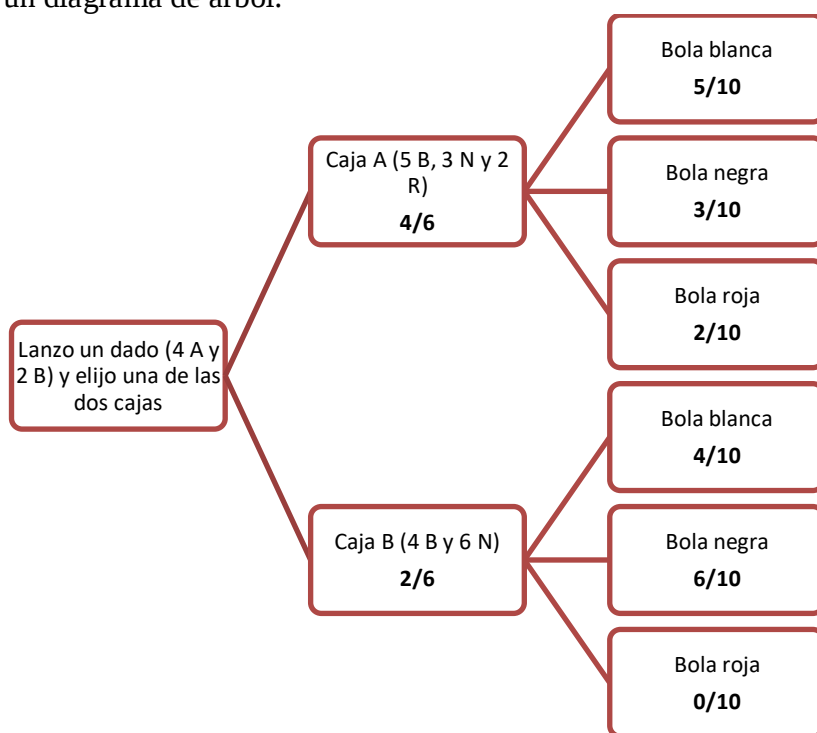
Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas B: 4 blancas y 6 negras

Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado.

- [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
- [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
- [1 punto] La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Salga A al lanzar el dado, B = Salga B al lanzar el dado.

BB = Sacar bola blanca, BN = Sacar bola negra y BR = Sacar bola roja.

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(BB) = P(A)P(BB/A) + P(B)P(BB/B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$$

- b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(BR) = P(A)P(BR/A) + P(B)P(BR/B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{0}{10} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$

- c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/BB) = \frac{P(B \cap BB)}{P(BB)} = \frac{P(B)P(BB/B)}{P(BB)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{28}{60}} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.
- b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$ y $P(C \cup D) = 0,5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.
- c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(E) = 0,6$; $P(F) = 0,8$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.7 = 0.5 + P(B) - 0.4$$

$$P(B) = 0.7 - 0.5 + 0.4 = 0.6$$

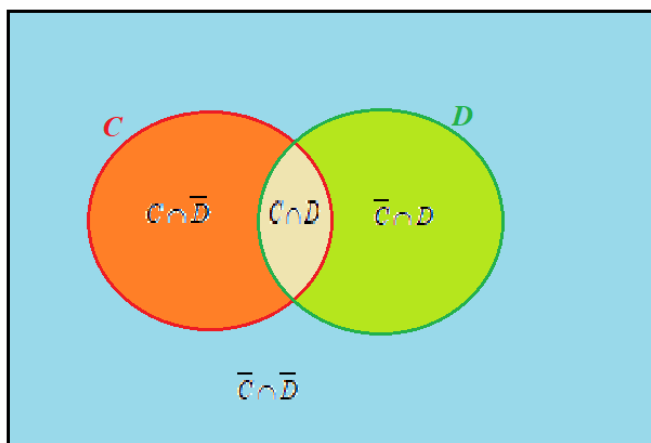
b) Hallamos la probabilidad de la intersección con la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$0.5 = 0.4 + 0.3 - P(C \cap D)$$

$$P(C \cap D) = 0.4 + 0.3 - 0.5 = 0.2$$

Nos piden calcular $P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0.4 - 0.2}{1 - 0.3} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$



$$\rightarrow P(C \cap \bar{D}) = P(C) - P(C \cap D)$$

c) Si los sucesos E y F son independientes entonces $P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$.

Nos piden calcular $P(\bar{E} \cap \bar{F})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{E} \cap \bar{F}) &= P(\overline{E \cup F}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)] = \\ &= 1 - [0.6 + 0.8 - 0.48] = \boxed{0.08} \end{aligned}$$

OTRA FORMA

Con la tabla de contingencia.

	F	$\bar{F}$	
E	$E \cap F \rightarrow 48$	$E \cap \bar{F}$	60
$\bar{E}$	$\bar{E} \cap F$	$\bar{E} \cap \bar{F}$	
	80		100

La completamos.

	F	$\bar{F}$	
E	$E \cap F \rightarrow 48$	$E \cap \bar{F} \rightarrow 12$	60
$\bar{E}$	$\bar{E} \cap F \rightarrow 32$	$\bar{E} \cap \bar{F} \rightarrow 8$	40
	80	20	100

Como nos piden $P(\bar{E} \cap \bar{F})$ miramos los datos de la tabla y tenemos que:

$$\boxed{P(\bar{E} \cap \bar{F}) = \frac{8}{100} = 0.08}$$

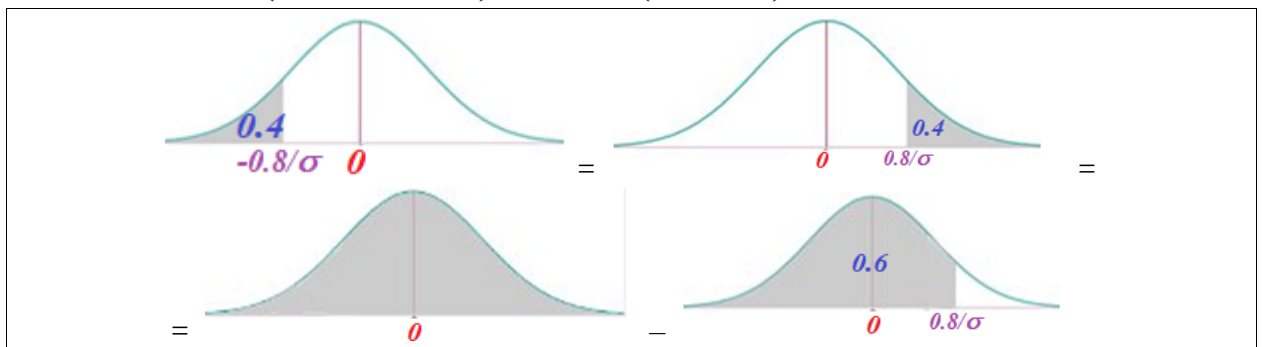
BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución.
 b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?
 c) [1 punto] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

X = Puntos obtenidos en el test de empatía. $X \sim N(4.8, \sigma)$

$$a) P(X \leq 4) = 0.4 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4 - 4.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.6 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla de } N(0,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.8}{\sigma} = \frac{0.25 + 0.26}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{0.8}{0.255} = 3.137$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879

b) X = Puntos obtenidos en el test de empatía. $X \sim N(4.8, 3.14)$

$$P(X > a) = 0.35 \Rightarrow P(X \leq a) = 0.65 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 4.8}{3.14}\right) = 0.65 \Rightarrow$$

$$\text{Buscamos en la tabla de la } N(0,1) \Rightarrow \frac{a - 4.8}{3.14} = \frac{0.38 + 0.39}{2} \Rightarrow a = 0.385 \cdot 3.14 + 4.8 = 6$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224

Solo el 35 % de la población consigue una puntuación superior a 6 puntos.

c) X = Puntos obtenidos en el test de empatía. $X \sim N(4.8, 3.14)$

$$P(4.8 - 2 \leq X \leq 4.8 + 2) = P(2.8 \leq X \leq 6.8) = P(X \leq 6.8) - P(X \leq 2.8) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{6.8 - 4.8}{3.14}\right) - P\left(Z \leq \frac{2.8 - 4.8}{3.14}\right) = P(Z \leq 0.64) - P(Z \leq -0.64) =$$

$$= P(Z \leq 0.64) - P(Z \geq 0.64) = P(Z \leq 0.64) - [1 - P(Z \leq 0.64)] =$$

$$= 0.7389 - [1 - 0.7389] = 0.4778$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133

El 47.78 % de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 euros.

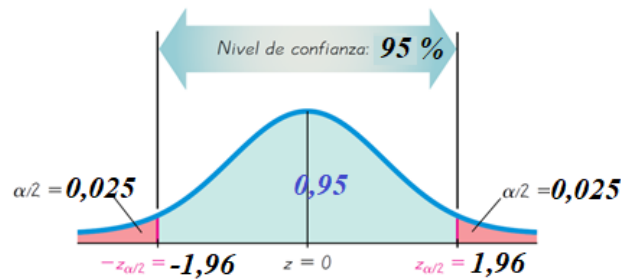
- a) [1,5 puntos] Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es (24,47, 26,43) con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- b) [1 punto] Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ . Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

X = El gasto que realizan los jóvenes durante un fin de semana. $X = N(\mu, 6)$

- a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{26,43 + 24,47}{2} = 25,45 \text{ euros}$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $\text{Error} = \frac{26,43 - 24,47}{2} = 0,98$.

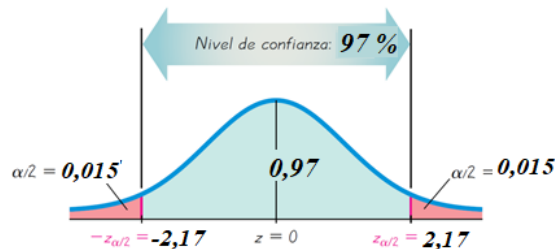
Utilizando la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{Error} = 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 0,98 \Rightarrow 1,96 \cdot 6 = 0,98 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 6}{0,98} = 12 \Rightarrow \boxed{n = 144}$$

El tamaño de la muestra es de 144 jóvenes y la media muestral es 25,45 €.

- b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Utilizando la fórmula del error: $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} = 1,86 \text{ €}$

El error máximo es de 1,86 euros.

EAU extraordinaria 2020

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIOA

EXTRAORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.****En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.****No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.**Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

 $N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerakÁreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

- [0,75 puntos] Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.
- [0,75 puntos] Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.
- [1 punto] Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 [hasta 2,5 puntos]

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

- [1 punto] Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [0,75 puntos] ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [0,75 puntos] Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 [hasta 2,5 puntos]

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.

Se elige un estudiante al azar. Calcula:

- [1 punto] La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
- [0,75 puntos] La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
- [0,75 puntos] Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de “sobresaliente”, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- [1,25 puntos] Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.
- [0,75 puntos] ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?
- [0,5 puntos] Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \quad \text{y} \quad A^t \cdot B$$

B 2 [hasta 2,5 puntos]

a) [0,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) [0,75 puntos] Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) [1,25 puntos] Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 [hasta 2,5 puntos]

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) [1,5 puntos] Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) [1 punto] Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana.

¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 [hasta 2,5 puntos]

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) [1 punto] Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) [0,75 puntos] Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) [0,75 puntos] ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

Soluciones

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible. Para ello dibujo las rectas que la delimitan.

$$2y - x = 0$$

x	y = $\frac{x}{2}$
0	0
2	1

$$y = 2x - 3$$

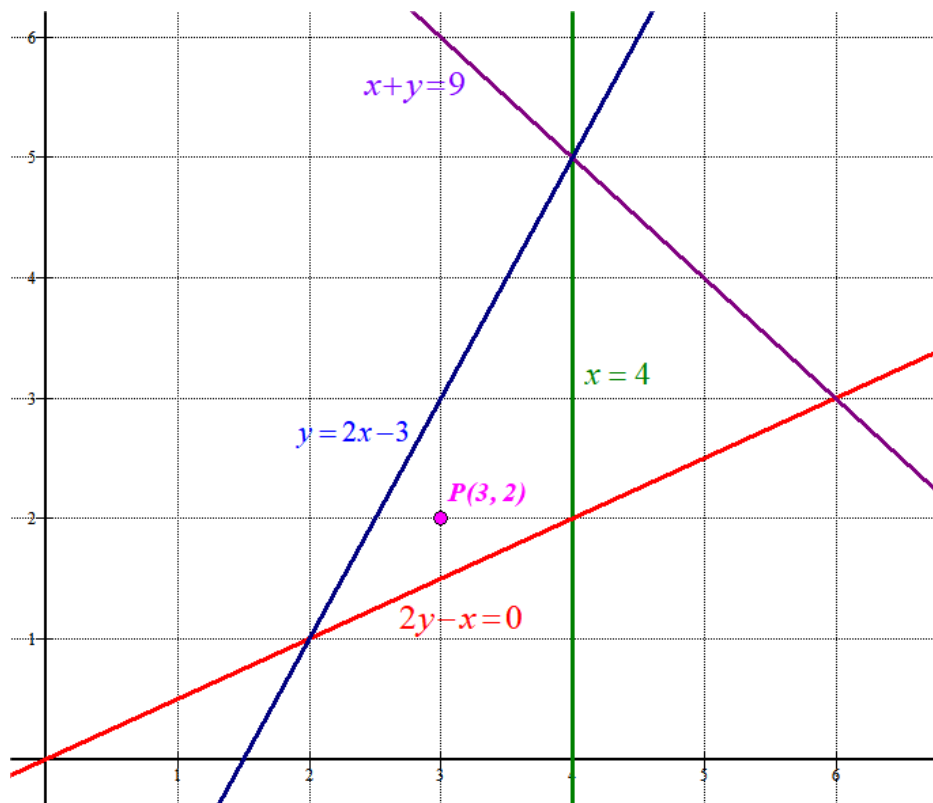
x	y = $2x - 3$
0	-3
2	1
3	3

$$x + y = 9$$

x	y = $9 - x$
0	9
3	6
9	0

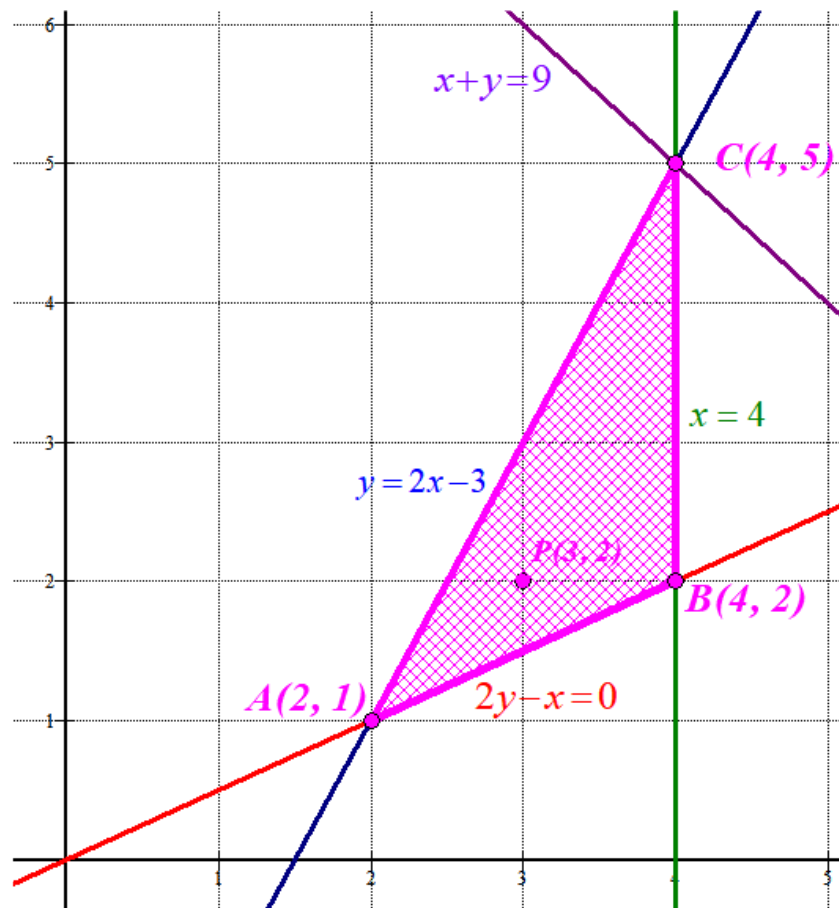
$$x = 4$$

x = 4	y
4	0
4	1



Comprobamos si el punto $P(3, 2)$ cumple todas las inecuaciones.

$$\begin{cases} 4 - 3 \geq 0 \\ 2 \leq 6 - 3 \\ 3 + 2 \leq 9 \\ 3 \leq 4 \end{cases} \quad \text{Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada.}$$



Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ en cada vértice en busca de su valor máximo.

$$A(2, 1) \rightarrow F(2, 1) = 10 + 4 = 14$$

$$B(4, 2) \rightarrow F(4, 2) = 20 + 8 = 28$$

$$C(4, 5) \rightarrow F(4, 5) = 20 + 20 = 40$$

La función objetivo toma un valor máximo de 40 en el punto $C(4, 5)$, para $x = 4$ e $y = 5$.

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

- a) [0,75 puntos] Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.
- b) [0,75 puntos] Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.
- c) [1 punto] Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

- a) Si la función presenta un extremo es que pasa por el punto $(1, -5)$ por lo que $f(1) = -5$.

$$f(1) = -5 \Rightarrow a + b + 1 = -5$$

Por ser un extremo se anula la derivada en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

Juntamos las dos condiciones y resolvemos el sistema que forman.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -a - 6 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a - a - 6 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow \boxed{b = -3 - 6 = -9}$$

- b) Para $a = 2$ y $b = -6$ la función queda $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

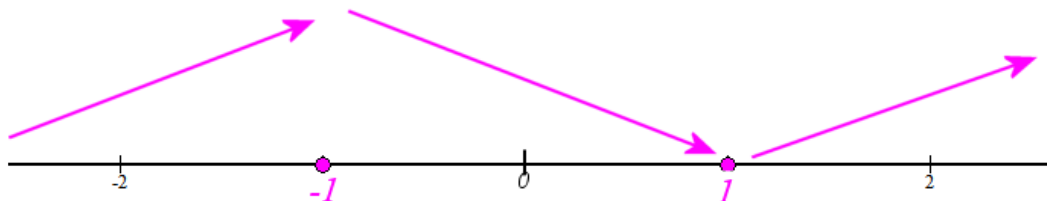
Hacemos la derivada e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores obtenidos.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$, la derivada vale $f'(-2) = 24 - 6 = 18 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$, la derivada vale $f'(0) = -6 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$, la derivada vale $f'(2) = 24 - 6 = 18 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



Según este esquema de evolución de la función existe un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

Como $f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$ y $f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$ el punto máximo tiene coordenadas $(-1, 5)$ y el punto mínimo $(1, -3)$.

Falta determinar el punto de inflexión, para ello utilizo la segunda derivada.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow f''(x) = 12x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Como } f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''(0) = 12 \neq 0$$

En $x = 0$ hay un punto de inflexión ($f(0) = 1$) de coordenadas $(0, 1)$.

c) Para $a = 2$ y $b = -6$ la función queda $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

Hallamos los puntos de corte.

$$2x+1 = 2x^3 - 6x + 1 \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Dibujamos la curva $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ y la recta $y = 2x + 1$ entre -2 y 2 .

x	$y = 2x^3 - 6x + 1$
-2	$-16 + 12 + 1 = -3$
-1	$-2 + 6 + 1 = 5$
0	1
1	$1 - 6 + 1 = -4$
2	$16 - 12 + 1 = 5$

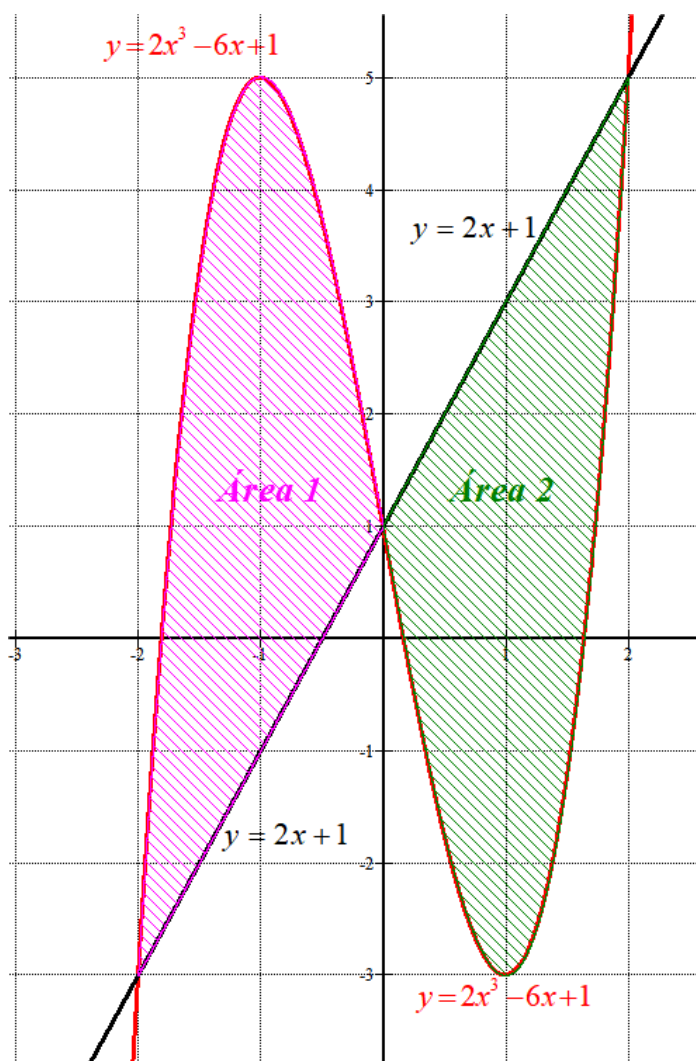
x	$y = 2x + 1$
-2	-3
0	1
2	5

El área la calculamos en dos partes, usando la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-2}^0 (2x^3 - 6x + 1 - (2x + 1)) dx = \\ &= \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x) dx = \left[2 \frac{x^4}{4} - 8 \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2 \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{2} - 0 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{2} - 4(-2)^2 \right] = 8 u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \int_0^2 (2x + 1 - (2x^3 - 6x + 1)) dx = \int_0^2 (-2x^3 + 8x) dx = \left[-2 \frac{x^4}{4} + 8 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{x^4}{2} + 4x^2 \right]_0^2 = \left[-\frac{2^4}{2} + 16 \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 0 \right] = 8 u^2 \end{aligned}$$

El área total es la suma de ambas, por lo que vale $8 + 8 = 16 u^2$.



A 3 [hasta 2,5 puntos]

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

- [1 punto] Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [0,75 puntos] ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [0,75 puntos] Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Se estudian dos características que se mezclan entre sí, hacemos una tabla de contingencia para aclarar la información aportada y obtener datos a partir de ella.

	Chico	Chica	
Nacido en la ciudad		54	90
No nacido en la ciudad			
	42		100

Completamos la tabla.

	Chico	Chica	
Nacido en la ciudad	36	54	90
No nacido en la ciudad	6	4	10
	42	58	100

Ya podemos responder a las preguntas que se planteen haciendo uso de la regla de Laplace, pues cualquier alumno tiene la probabilidad de ser elegido al azar.

- De las 100 personas solo 10 son no nacidos en la ciudad.

$$P(\text{No nacido en la ciudad}) = \frac{10}{100} = 0,1$$

- De las 100 personas solo 4 son chicas nacidas en la ciudad.

$$P(\text{Sea chica y no haya nacido en la ciudad}) = \frac{4}{100} = 0,04$$

- Es una probabilidad condicionada, por lo que los elementos posibles ya no son 100 sino solamente los 90 nacidos en la ciudad.

De los 90 nacidos en la ciudad 36 son chicos.

$$P(\text{Sea chico} / \text{Nacido en la ciudad}) = \frac{36}{90} = \frac{2}{5} = 0,4$$

A 4 [hasta 2,5 puntos]

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.

Se elige un estudiante al azar. Calcula:

- a) [1 punto] La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
 b) [0,75 puntos] La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
 c) [0,75 puntos] Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de “sobresaliente”, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

X = Nota obtenida por un estudiante en una asignatura. $X = N(6,2; 2)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 7)$.

$$P(X > 7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{7-6,2}{2}\right) = P(Z > 0,4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = \boxed{0,3446}$$

- b) Nos piden calcular $P(5 \leq X \leq 8)$.

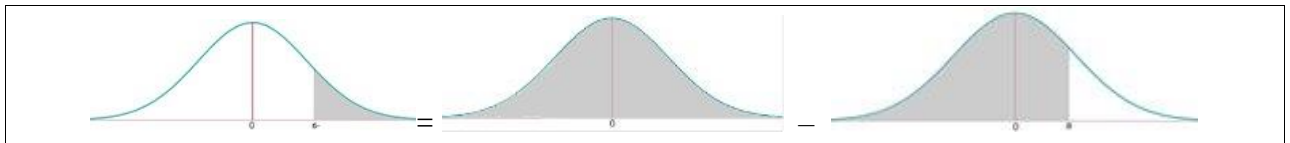
$$P(5 \leq X \leq 8) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{5-6,2}{2} \leq Z \leq \frac{8-6,2}{2}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,9) =$$

$$= P(Z \leq 0,9) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,9) - P(Z > 0,6) = P(Z \leq 0,9) - (1 - P(Z \leq 0,6)) =$$

$$= 0,8159 - 1 + 0,7257 = \boxed{0,5416}$$

- c) Deseamos averiguar “a” tal que $P(X \geq a) = 0,25$.

$$P(X \geq a) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-6,2}{2}\right) = 0,25$$



$$P\left(Z \geq \frac{a-6,2}{2}\right) = 0,25 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{a-6,2}{2}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-6,2}{2}\right) = 0,75$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ y encontramos que $\frac{a-6,2}{2} = 0,675$. Despejamos y averiguamos el valor de “a”.

$$\frac{a-6,2}{2} = 0,675 \Rightarrow a - 6,2 = 1,35 \Rightarrow \boxed{a = 7,55}$$

A partir de 7,55 se ha puesto “Sobresaliente”

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) [0,75 puntos] ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) [0,5 puntos] Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \quad \text{y} \quad A^t \cdot B$$

a) Calculamos el determinante para comprobar si tiene inversa.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+4 & 0+2+6 \\ 0+2+6 & 1+4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 64 = 6 \neq 0$$

La matriz tiene inversa, la calculamos con la fórmula.

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A \cdot A^t)}{|A \cdot A^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} +14 & -8 \\ -8 & +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$b) (A^t \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+2 & 0+3 \\ 0+2 & 1+4 & 2+6 \\ 0+3 & 2+6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y vemos si es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 65 + 48 + 48 - 45 - 52 - 64 = 0$$

La matriz $(A^t \cdot A)$ no tiene inversa.

c) Comprobamos si el producto es posible y lo calculamos cuando lo sea.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{No es posible}$$

$$\begin{matrix} 2 \times & \boxed{3} & \cdot & \boxed{2} & \times 2 \\ \hline & & & & \end{matrix} \rightarrow$$

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0-1 \\ 2+0 & 1-2 \\ 4+0 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \times & \boxed{2} & \cdot & \boxed{2} & \times 2 \\ \hline & & & & \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \times 2 \end{matrix}$$

B 2 [hasta 2,5 puntos]

a) [0,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) [0,75 puntos] Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) [1,25 puntos] Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

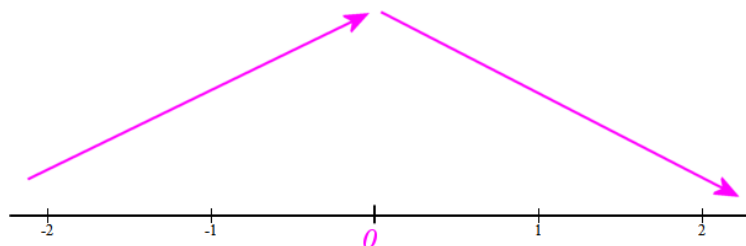
a) Es una parábola por lo que tendrá un máximo o mínimo.

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $y'(-1) = -2(-1) = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $y'(1) = -2(1) = -2 < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.



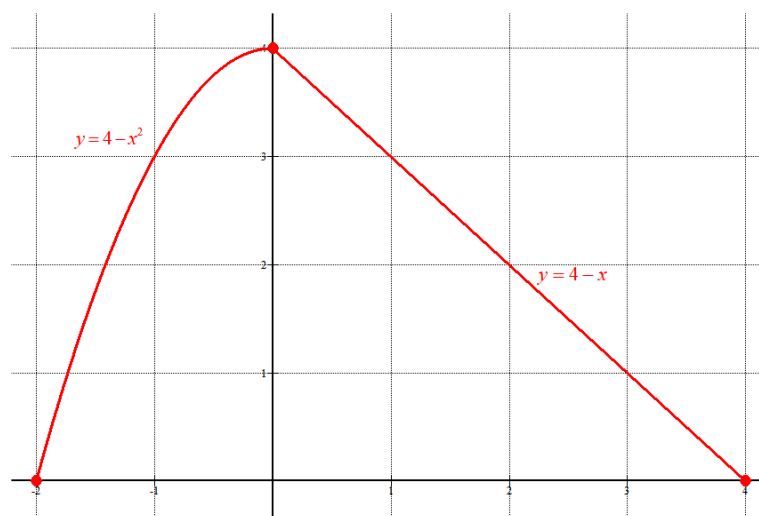
La función presenta un máximo relativo en $x = 0$.

Como $y(0) = 4 - 0^2 = 4$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0, 4)$.

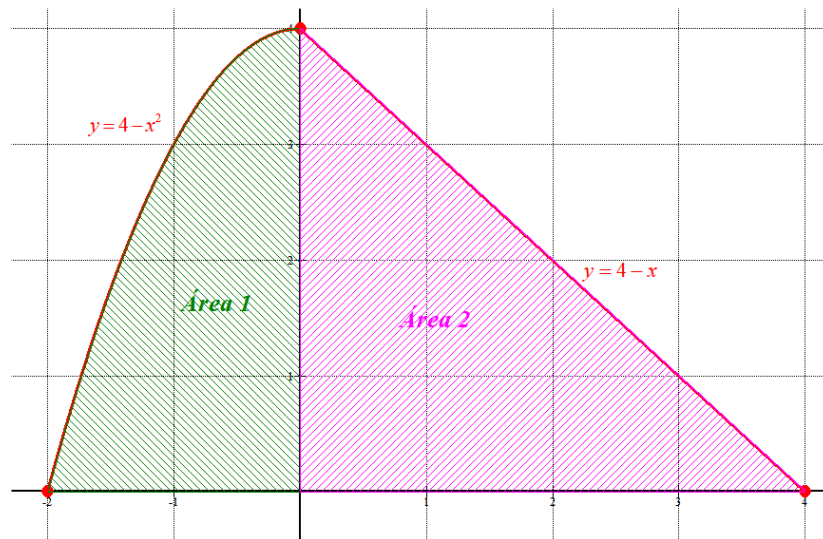
b) La función definida a trozos en un trozo de parábola y un trozo de recta. Hacemos una tabla de valores de cada parte y se puede representar.

x	$y = 4 - x^2$ si $-2 \leq x < 0$
-2	0
-1	$4 - 1 = 3$
0	4 No se incluye

x	$y = 4 - x$ si $0 \leq x \leq 4$
0	4
4	0



c) El área del recinto encerrado entre la gráfica de $f(x)$ y el eje se divide en dos partes.



El área 2 es un triángulo de base 4 y altura 4 por lo que:

$$\text{Área 2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 u^2$$

El área 1 es una integral definida entre -2 y 0 de la función $y = 4 - x^2$.

$$\text{Área 1} = \int_{-2}^0 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 = \left[0 - \frac{0^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} u^2$$

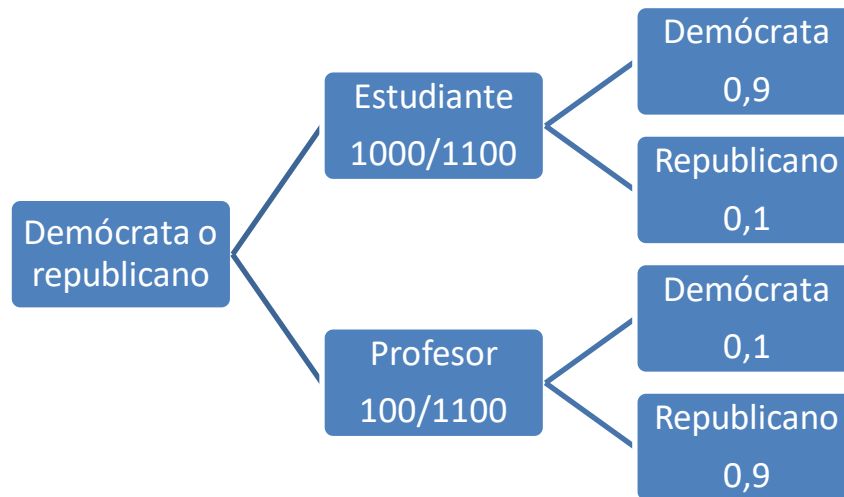
El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $8 + \frac{16}{3} = \boxed{\frac{40}{3} = 13,33 u^2}$

B 3 [hasta 2,5 puntos]

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

- a) [1,5 puntos] Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?
- b) [1 punto] Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

Realizamos un diagrama de árbol.



$$a) P(\text{Sea republicana}) = \frac{1000}{1100} 0,1 + \frac{100}{1100} 0,9 = \boxed{\frac{19}{110} = 0,172}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea estudiante} / \text{Es republicano}) = \frac{P(\text{Sea estudiante} \cap \text{Es republicano})}{P(\text{Sea republicano})} =$$

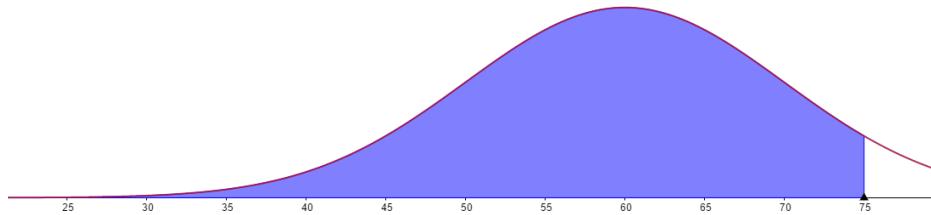
$$= \frac{\frac{1000}{1100} 0,1}{\frac{19}{1100}} = \boxed{\frac{10}{19} = 0,526}$$

B 4 [hasta 2,5 puntos]

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

- a) [1 punto] Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?
- b) [0,75 puntos] Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?
- c) [0,75 puntos] ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

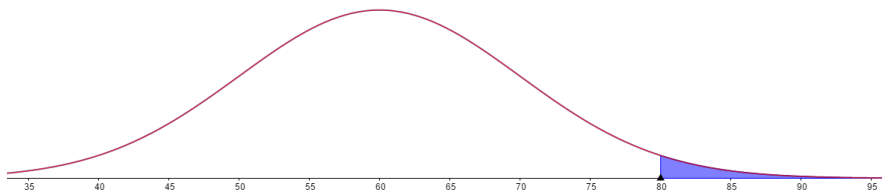
a) X = Tiempo en minutos que necesita un alumno para finalizar un examen. $X = N(60, 10)$



$$P(X \leq 75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1,5) = 0,9332$$

La proporción de alumnos que conseguirán finalizarlo es del 93,32%

b)

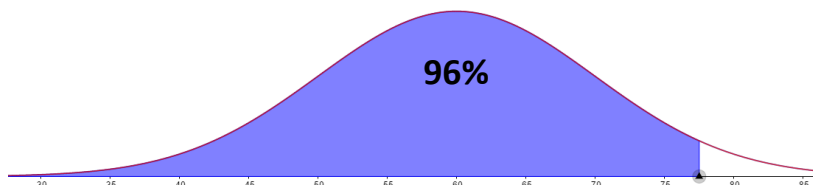


$$P(X > 80) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{80-60}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

La proporción de alumnos que no conseguirán finalizarlo es del 2,28%.

c) Nos piden encontrar “a” tal que $P(X \leq a) = 0,96$.



$$P(X \leq a) = 0,96 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-60}{10}\right) = 0,96 \Rightarrow \frac{a-60}{10} = 1,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 60 = 17,5 \Rightarrow \boxed{a = 77,5 \text{ minutos}}$$



EAU ordinaria 2020
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2020ko EKAINA

ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) [0,5 puntos] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
- b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial.

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
- b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
- c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 [hasta 2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
- c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 [hasta 2,5 puntos]

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

- a) [1,5 puntos] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
- b) [1 punto] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ♦ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ♦ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 [hasta 2,5 puntos]

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
- b) [0,5 puntos] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
- c) [0,5 puntos] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
- d) [0,5 puntos] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 [hasta 2,5 puntos]

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Calcula:

- a) [0,65 puntos] $P(A \cup B)$
- b) [0,6 puntos] $P(A^c \cap B^c)$
- c) [0,6 puntos] $P(A^c \cap B)$
- d) [0,65 puntos] $P(A/B)$

B 4 [hasta 2,5 puntos]

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

- a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
- b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

Soluciones

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial.

a) Supongamos la matriz X es de dimensión $m \times n$.

$$A \cdot X = A^t \cdot B$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1$$

Para poder realizarse $A \cdot X$ debe ser $m=3$.

Una vez hecho el producto $A \cdot X$ obtenemos una matriz $3 \times n$ que debe ser de la misma dimensión que la matriz resultante de $A^t \cdot B$ que es una matriz 3×1 .

Luego debe ser $n=1$.

La matriz X debe ser de dimensión 3×1 .

b) Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ entonces:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b-c \\ b+2c \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+2 \\ 2+0+4 \\ -1+0+0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} a+2b-c=3 \\ b+2c=6 \\ a+2b=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a+2b-c=3 \\ b+2c=6 \\ a=-1-2b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -1-2b+2b-c=3 \\ b+2c=6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -1-c=3 \\ b+2c=6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \boxed{c=-4} \\ b+2c=6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b-8=6 \Rightarrow \boxed{b=14} \Rightarrow \boxed{a=-1-28=-29}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$.

A 2 [hasta 2.5 puntos]Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
- b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
- c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

- a) Para que sea continua en $x = 1$ debe existir el valor de la función y debe coincidir con los límites laterales:

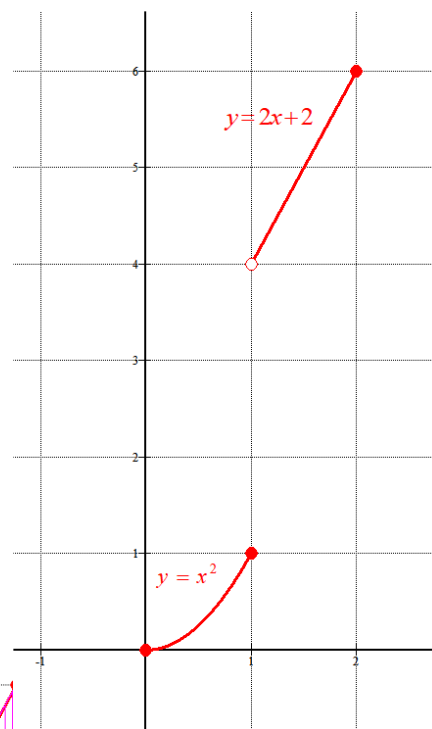
$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + 2 = a + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = a + 2 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

- b) Para $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

Hacemos una tabla de valores de cada rama (recta y parábola).

x	$y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)
0	0
0.5	0.25
1	1

x	$y = 2x + 2$ ($1 < x \leq 2$)
1	4 No se incluye
1.5	5
2	6



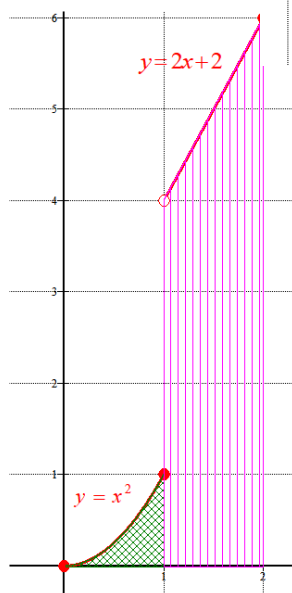
- c) El Área se divide en dos partes que calculamos por separado.

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x + 2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 + 2x \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^3}{3} \right] + [2^2 + 4] - [1^2 + 2] =$$

$$= \frac{1}{3} + 8 - 3 = \boxed{\frac{16}{3} = 5.33 \text{ u}^2}$$

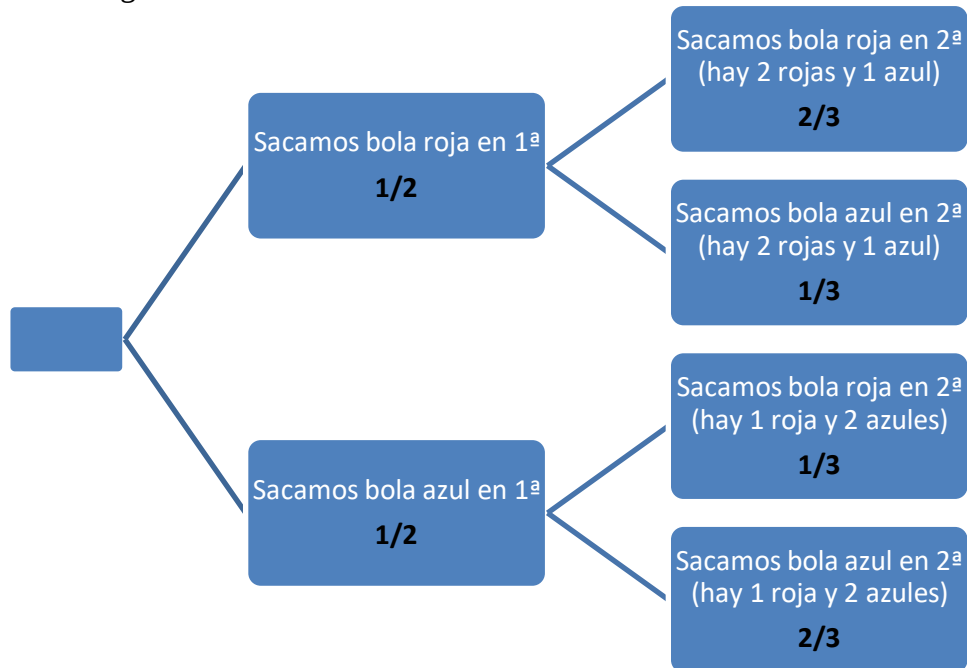


A 3 [hasta 2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
- c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Es una probabilidad condicionada.

$$P(2^{\text{a}} \text{ bola extraída sea roja} / \text{La } 1^{\text{a}} \text{ que se ha sacado era azul}) = \frac{1}{3} = 0.33$$

- b) Ocurre en dos ramas del diagrama de árbol, hallamos la probabilidad de cada rama y las sumamos. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Segunda bola azul}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- c) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

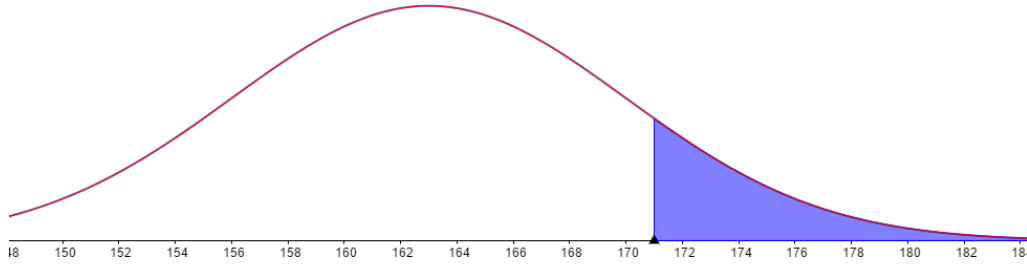
$$P(1^{\text{a}} \text{ roja} / 2^{\text{a}} \text{ es azul}) = \frac{P(1^{\text{a}} \text{ roja} \cap 2^{\text{a}} \text{ es azul})}{P(2^{\text{a}} \text{ es azul})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = 0.33$$

A 4 [hasta 2,5 puntos]

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

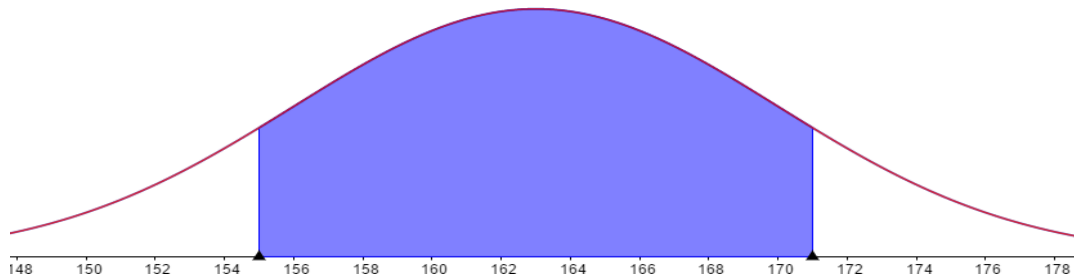
- a) [1,5 puntos] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
- b) [1 punto] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

a) $X =$ Altura en centímetros de una mujer. $X = N(163, 7)$



$$P(X > 171) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{171-163}{7}\right) = P(Z > 1.14) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.14) = 1 - 0.8729 = \boxed{0.1271}$$

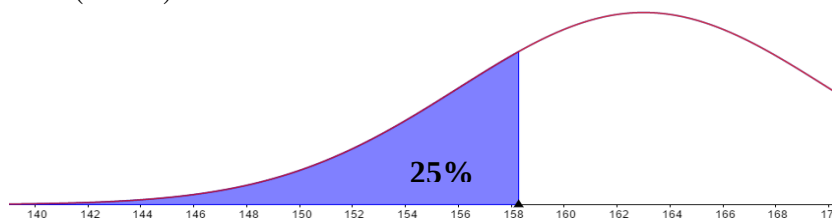


$$P(155 < X < 171) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{155-163}{7} < Z < \frac{171-163}{7}\right) =$$

$$= P(Z < 1.14) - P(Z < -1.14) = P(Z < 1.14) - P(Z > 1.14) =$$

$$= P(Z < 1.14) - [1 - P(Z < 1.14)] = 2 \cdot 0.8728 - 1 = \boxed{0.7458}$$

b) Busco “a” tal que $P(X \leq a) = 0.25$.



Si tipificamos tenemos que:

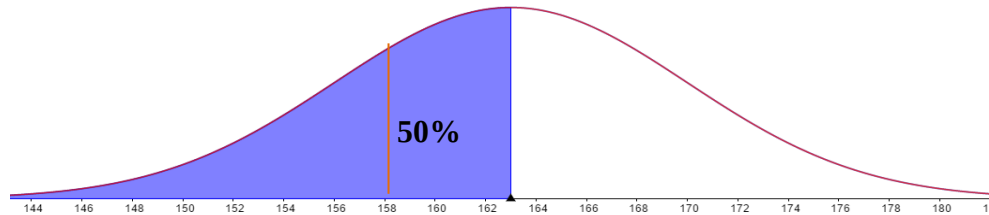
$$P\left(Z \leq \frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \geq -\frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{a-163}{7}\right) = 0.75$$

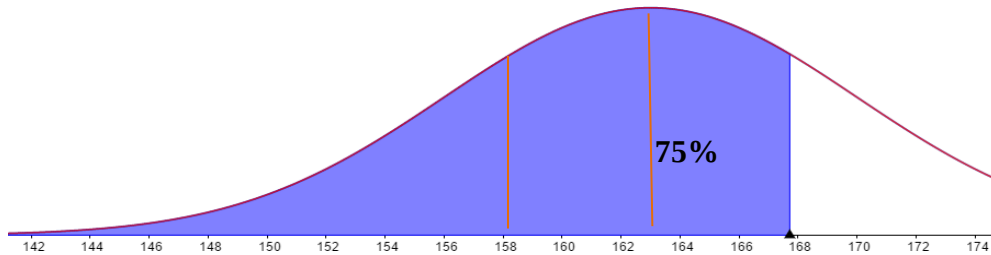
Mirando en la tabla tenemos que:

$$-\frac{a-163}{7} = 0.675 \Rightarrow a-163 = -4,725 \Rightarrow \boxed{a = 158.275 \text{ cm}}$$

Debemos de averiguar la altura que deja la mitad de la población, pero este es la media de la distribución, es decir, 163 cm.



De la misma forma averiguamos el valor de “b” tal que $P(X \leq b) = 0.75$.



Si tipificamos tenemos que: $P\left(Z \leq \frac{b-163}{7}\right) = 0.75$. Mirando en la tabla tenemos que:

$$\frac{b-163}{7} = 0.675 \Rightarrow \boxed{b = 167.725 \text{ cm}}$$

Las alturas que deben separar en cuatro partes iguales a la población de mujeres son: 158.275 cm, 163 cm y 167.725 cm.

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ♦ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ♦ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Llamamos “x” al número de paquetes de la agencia A e “y” al número de paquetes de la agencia B. Hacemos una tabla.

	Nº tickets museo	Nº tickets visita	Nº tickets espectáculo	Coste
Nº paquetes de A (x)	6x	4x	4x	210x
Nº paquetes de B (y)	4y	6y	4y	230y
	6x + 4y	4x + 6y	4x + 4y	210x + 230y

La función objetivo es el coste que viene dado por la expresión $C(x, y) = 210x + 230y$ que deseamos hacer mínimo.

Las restricciones son:

“quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo” $\rightarrow 6x + 4y \geq 16$

“quiere comprar al menos 20 para realizar una visita guiada” $\rightarrow 4x + 6y \geq 20$

“quiere comprar al menos 16 para asistir a un espectáculo” $\rightarrow 4x + 4y \geq 16$

Además, las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 8 \\ 2x + 3y \geq 10 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 2y = 8$$

$$2x + 3y = 10$$

$$x + y = 4$$

$$x \geq 0; y \geq 0 \quad \text{Primer cuadrante}$$

x	$y = \frac{8-3x}{2}$
0	4
2	1

x	$y = \frac{10-2x}{3}$
0	3.33
2	2
5	0

x	$y = 4 - x$
0	4
2	2
4	0



Vemos si el punto $P(3, 3)$ cumple las restricciones.

$$9 + 6 \geq 8$$

$$6 + 9 \geq 10$$

$$3 + 3 \geq 4$$

$$3 \geq 0; \quad 3 \geq 0$$

Se cumplen y la zona rayada es la región factible.



Valoramos la función coste $C(x, y) = 210x + 230y$ en cada uno de los vértices en busca de un coste mínimo.

$$A(0, 4) \rightarrow C(0, 4) = 920$$

$$B(2, 2) \rightarrow C(2, 2) = 420 + 460 = 880$$

$$C(5, 0) \rightarrow C(5, 0) = 1050$$

El coste mínimo se produce en el vértice $B(2, 2)$. Significa que comprando 2 paquetes de cada agencia el coste es mínimo, de 880 €.

B 2 [hasta 2,5 puntos]

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
- [0,5 puntos] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
- [0,5 puntos] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
- [0,5 puntos] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x=0$ toma el valor 1.

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Hallamos los puntos críticos de la función.

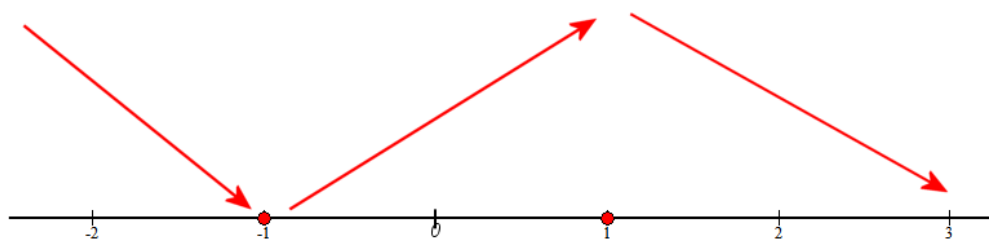
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hay dos puntos críticos $x = -1$ y $x = 1$.

Veamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1}{(1)^2} > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.



La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

Presenta un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

En estos puntos la función vale $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

El punto mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

El punto máximo relativo tiene coordenadas $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

b) Asíntota vertical. $x = a$

No hay pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

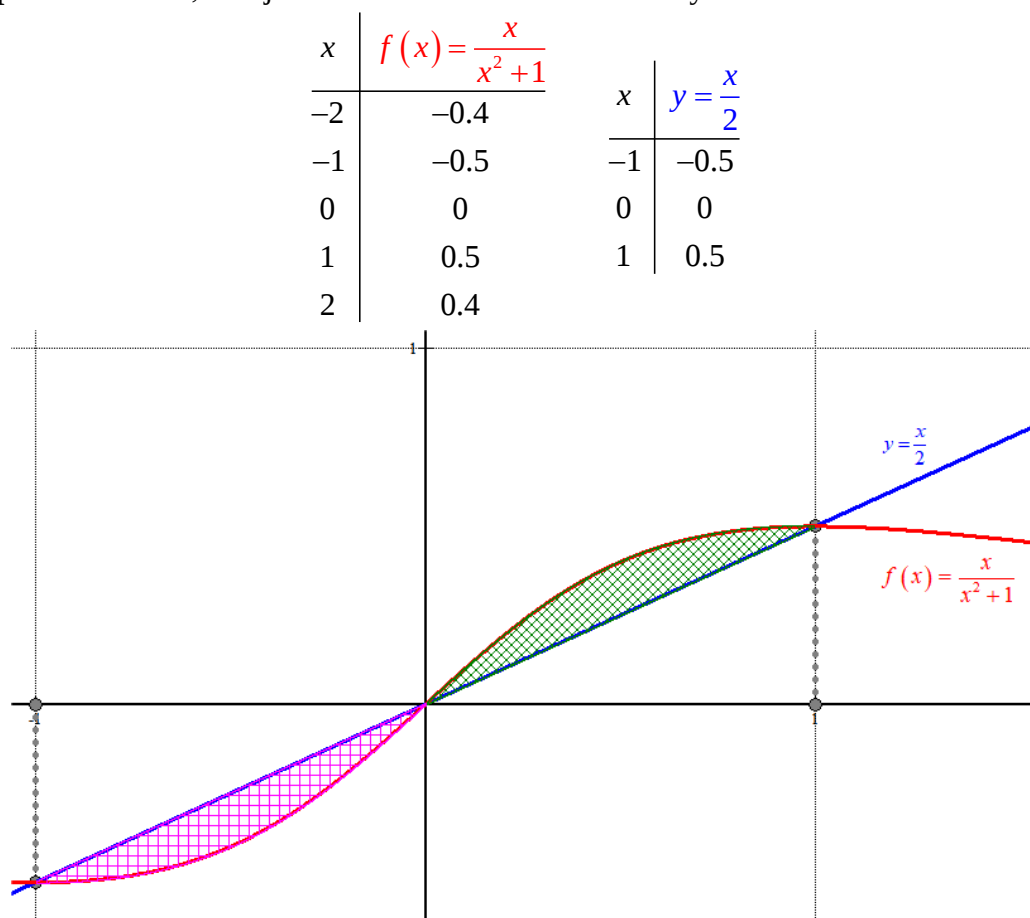
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

c) Averiguamos los puntos de corte de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ y la recta $y = \frac{x}{2}$.

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x = x^3 + x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Hay 3 puntos de corte, dibujamos las dos funciones entre -1 y 1 .



d) La primitiva de la función $f(x)$ es:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

Sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1 entonces $F(0) = 1$.

$$F(0) = \frac{1}{2} \ln(0^2 + 1) + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

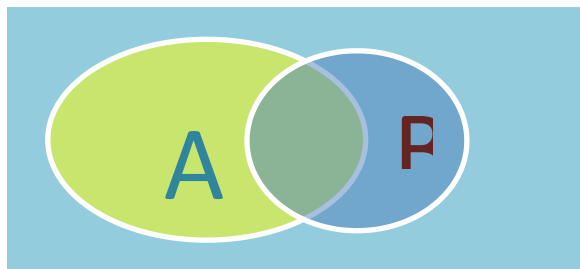
Por lo que la primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 1$

B 3 [hasta 2,5 puntos]

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Calcula:

- a) [0,65 puntos] $P(A \cup B)$
- b) [0,6 puntos] $P(A^c \cap B^c)$
- c) [0,6 puntos] $P(A^c \cap B)$
- d) [0,65 puntos] $P(A/B)$



$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = \boxed{0,7}$$

$$b) P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = \boxed{0,3}$$

$$c) P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,4 = \boxed{0,1}$$

$$d) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,5} = \boxed{0,8}$$

También se puede resolver con una tabla pasando las probabilidades a valores absolutos.

	A	A ^c	
B	40		50
B ^c			
	60		100

La completamos.

	A	A ^c	
B	40	10	50
B ^c	20	30	50
	60	40	100

Con estos datos las respuestas son:

$$a) P(A \cup B) = \frac{40 + 10 + 20}{100} = \boxed{0,7}$$

$$b) P(A^c \cap B^c) = \frac{30}{100} = \boxed{0,3}$$

$$c) P(A^c \cap B) = \frac{10}{100} = \boxed{0,1}$$

$$d) P(A/B) = \frac{40}{50} = \boxed{0,8}$$

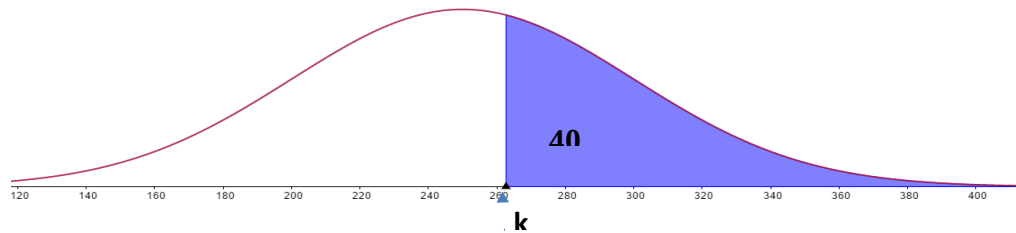
B 4 [hasta 2,5 puntos]

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

- a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
- b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

X = Peso en gramos de una trucha de una piscifactoría. $X = N(250, 50)$

- a) Buscamos “a” para que:



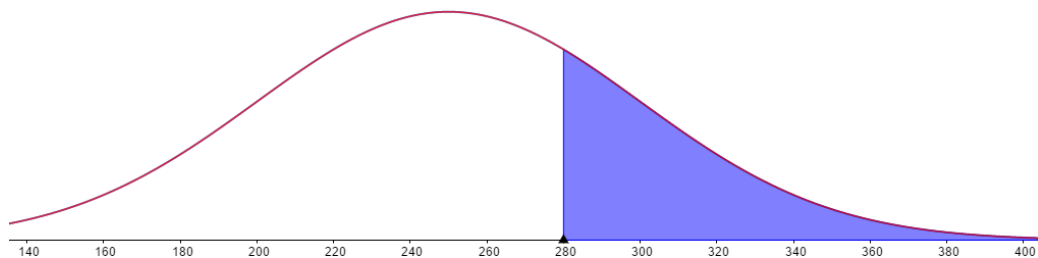
$$P(X > a) = 0,4 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-250}{50}\right) = 0,4 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-250}{50}\right) = 0,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-250}{50}\right) = 1 - 0,4 = 0,6 \Rightarrow \{ \text{Buscamos en la tabla} \} \Rightarrow \frac{a-250}{50} = 0,255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 250 + 50 \cdot 0,255 = 262,75}$$

El peso mínimo tiene que ser de 262,75 gramos.

- b) Calculamos el porcentaje de truchas que superan los 280 gramos.



$$P(X > 280) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{280-250}{50}\right) = P(Z > 0,6) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,6) = \{ \text{Buscamos en la tabla } N(0, 1) \} = 1 - 0,7257 = \boxed{0,2743}$$

El 27,43 % de las truchas son aptas para la venta. Como son 6000 truchas entonces el 27,43% de 6000 truchas son $6000 \cdot 0,2743 = 1645,8$ truchas.

Se pondrán a la venta aproximadamente 1646 truchas.

EAU extraordinaria 2019

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA

JULIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**OPCIÓN A****A 1 (hasta 3 puntos)**

Sea la región definida por las inecuaciones:

$$x + y - 1 \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

A 2 (hasta 3 puntos)Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- Encontrar los valores de los parámetros a , b y c para que la función pase por el punto $(0, 0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
- Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.
- Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

A 3 (hasta 2 puntos)

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes.

En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte.

¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

A 4 (hasta 2 puntos)

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.

Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

OPCIÓN B**B 1 (hasta 3 puntos)**

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Hallar la matriz inversa de $A - B$.
- b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.
- b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.
- c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

B 3 (hasta 2 puntos)

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres. Se elige una persona al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
- b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
- c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

B 4 (hasta 2 puntos)

La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5.

Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Sea la región definida por las inecuaciones:

$$x + y - 1 \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y - 1 = 0$$

x	y = 1 - x
-1	2
0	1
1	0
4	-3

$$x = 0$$

x = 0	y
0	1
0	2
0	3

$$x = 4$$

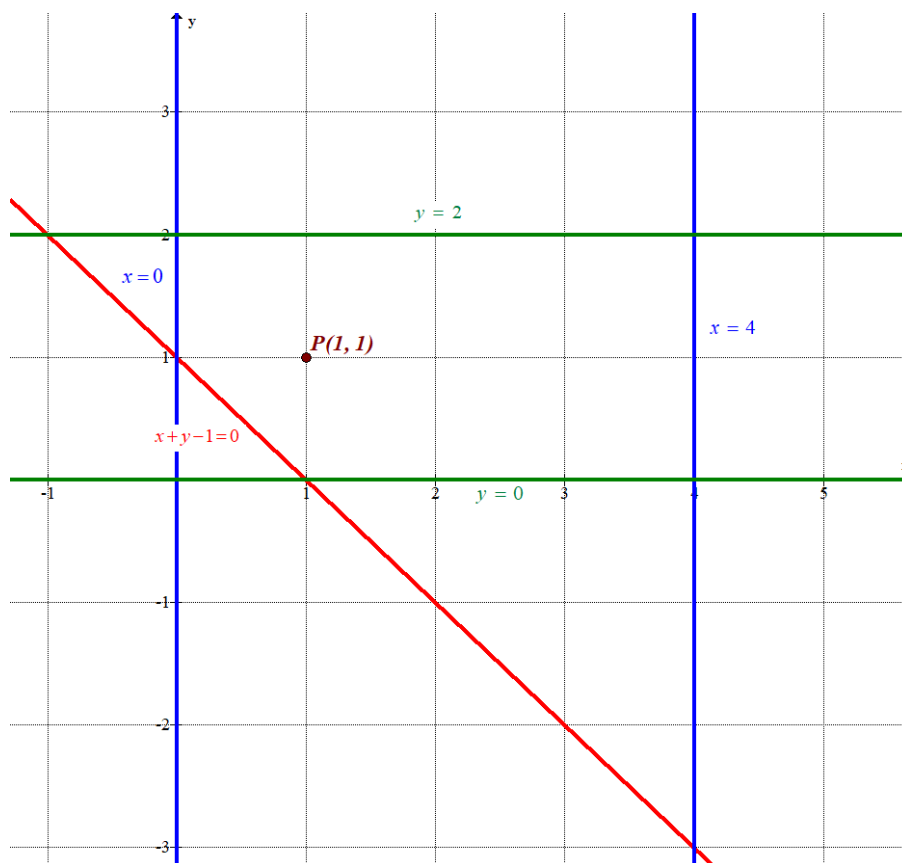
x = 4	y
4	-3
4	0
4	2

$$y = 0$$

x	y = 0
0	0
2	0
4	0

$$y = 2$$

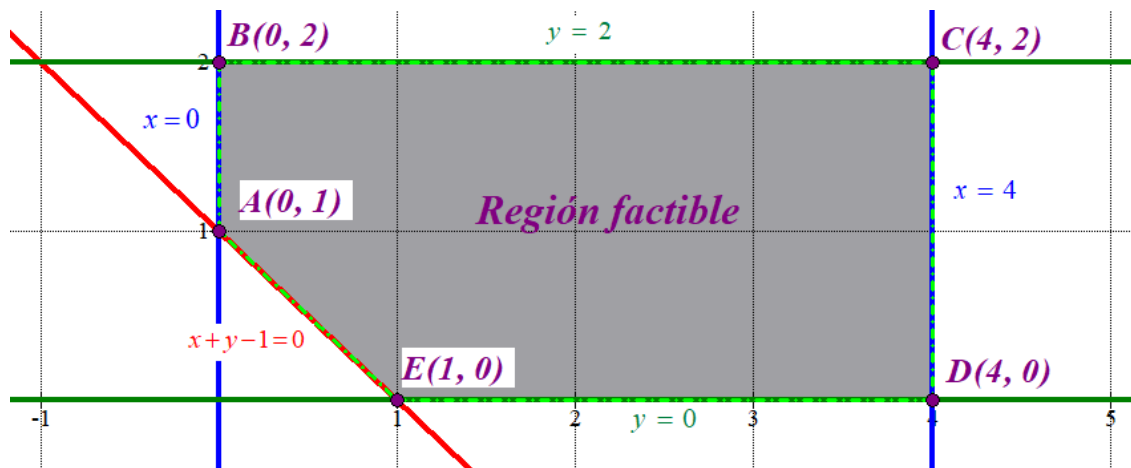
x	y = 2
0	2
2	2
4	2



Comprobamos si el punto $P(1, 1)$ cumple todas las inecuaciones.

$$1 + 1 - 1 \geq 0, \quad 0 \leq 1 \leq 4, \quad 0 \leq 1 \leq 2$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 4x + 2y$ en cada vértice en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \text{ ¡mínimo!}$$

$$B(0, 2) \rightarrow F(0, 2) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$$

$$C(4, 2) \rightarrow F(4, 2) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20 \text{ ¡máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 16$$

$$E(1, 0) \rightarrow F(1, 0) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 4$$

La función objetivo toma un valor máximo de 20 en el punto C(4, 2) y el valor mínimo es de 2 que se alcanza en el punto A(0, 1).

A 2 (hasta 3 puntos)

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- a) Encontrar los valores de los parámetros a , b y c para que la función pase por el punto $(0, 0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
 b) Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.
 c) Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

a) Como la función pasa por el punto $(0, 0)$ entonces $f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Nos falta determinar el valor de a y b .

Si la función tiene un extremo relativo en el punto $(2, -4)$ implica dos cosas: la derivada se anule en $x = 2$, es decir, $f'(2) = 0$ y también que $f(2) = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b \Rightarrow \boxed{0 = 12 + 4a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -4 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \Rightarrow -4 = 8 + 4a + 2b \Rightarrow \boxed{-6 = 2a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 12 + 4a + b \\ -6 = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 12 + 4a + b \\ -6 - 2a = b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 12 + 4a - 6 - 2a \Rightarrow 0 = 6 + 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3} \Rightarrow \boxed{b = -6 - 2(-3) = 0}$$

Los valores de los parámetros son $a = -3$ y $b = c = 0$.

b) La función queda $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

Sustituimos los valores obtenidos en la segunda derivada para determinar si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \\ f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0 \end{array} \right.$$

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6x - 6 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Como la derivada tercera no se anula para $x=1$ la función tiene un punto de inflexión en $x=1$.

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$, $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$ la función tiene un máximo relativo en $(0, 0)$, un mínimo relativo en $(2, -4)$ y un punto de inflexión en $(1, -2)$.

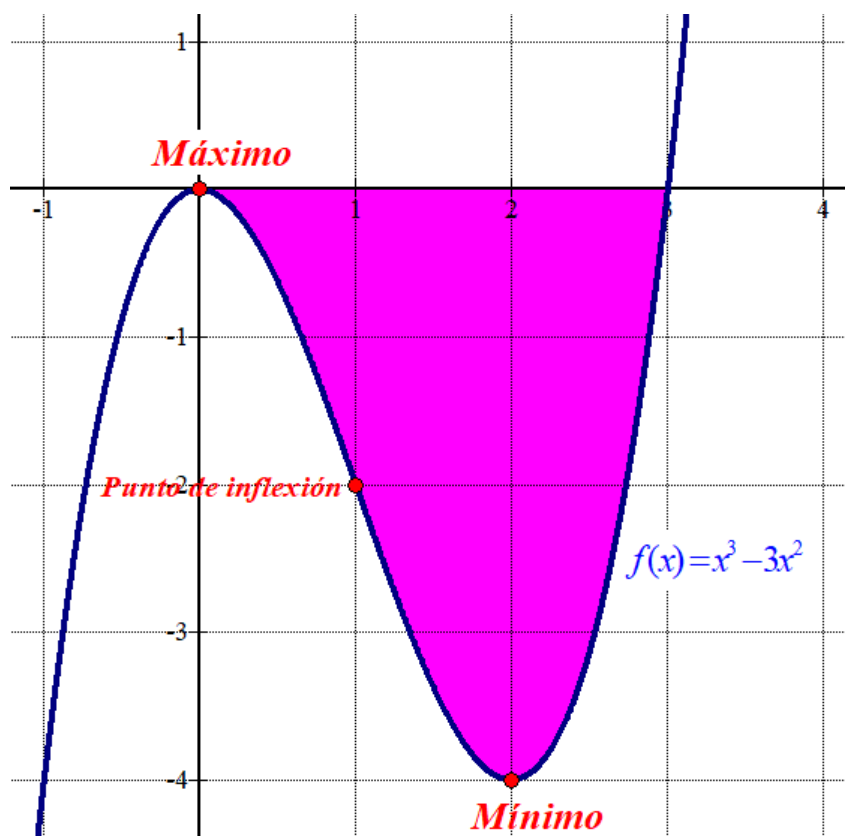
c) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \end{cases}$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la función.

$$\int_0^3 x^3 - 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 = \left[\frac{3^4}{4} - 3^3 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 \right] = \frac{-27}{4} = -6.75$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas tiene un valor de 6.75 unidades cuadradas.



A 3 (hasta 2 puntos)

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes.

En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte.

¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

Pasemos esta información expresada en valores relativos a valores absolutos. Supongamos que en cada clase hay 30 alumnos.

Como en el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte tenemos que $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ alumnos practican deporte, por lo que $30 - 20 = 10$ no practican deporte.

En los grupos B y C practican deporte la mitad de los/las estudiantes por lo que la mitad no practican deporte. 15 alumnos del grupo B y otros 15 del grupo C no practican deporte.

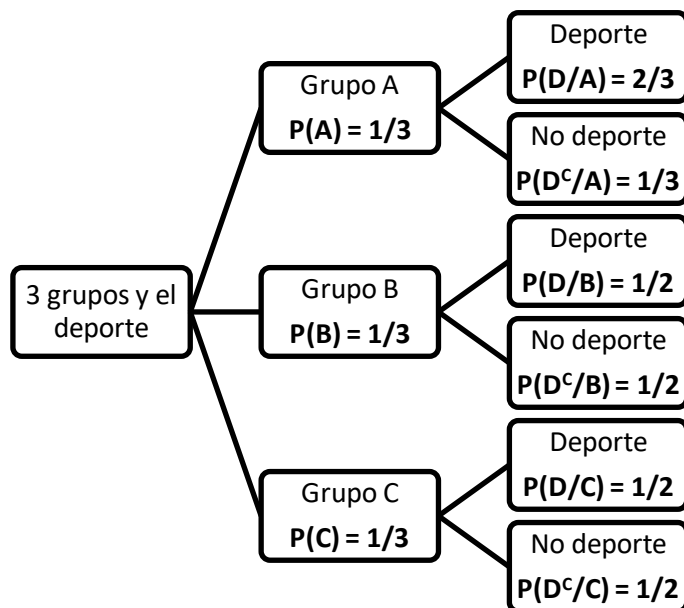
De los estudiantes del instituto $10 + 15 + 15 = 40$ no practican deporte.

Y de esos 40 sabemos que 10 pertenecen al grupo A.

Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una persona que no practica deporte pertenezca al grupo A tiene un valor de $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hacemos un diagrama de árbol



Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(A/D^c) &= \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2+3+3}{18}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{18}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25
 \end{aligned}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.

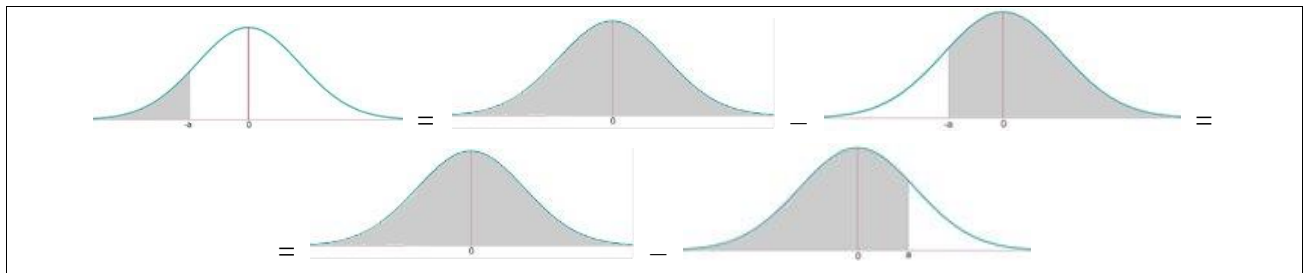
Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

X = Puntuación obtenida en una prueba de cultura general. $X \sim N(68, 18)$.

Deseamos averiguar “a” tal que $P(X \leq a) = 0.20$.

$$P(X \leq a) = 0.20 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow$$



$$1 - P\left(Z \geq \frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-68}{18}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a-68}{18} = \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow$$

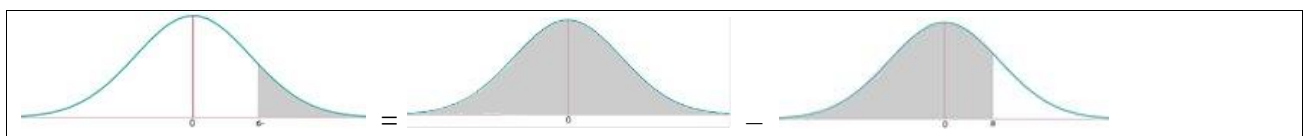
$$\Rightarrow -a + 68 = 15.21 \Rightarrow 68 - 15.21 = a \Rightarrow \boxed{a = 52.79}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7968	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289

El 20 % de la población ha sacado menos de 52.79 puntos.

Averiguamos “b” tal que $P(X \geq b) = 0.15$.

$$P(X \geq b) = 0.15 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-68}{18}\right) = 0.15 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{b-68}{18}\right) = 0.15 \Rightarrow P\left(Z < \frac{b-68}{18}\right) = 0.85$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ y encontramos que $\frac{b-68}{18} = \frac{1.03+1.04}{2} = 1.035$. Despejamos y averiguamos el valor de “b”.

$$\frac{b-68}{18} = 1.035 \Rightarrow b-68 = 18.63 \Rightarrow \boxed{b = 86.63}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508

El 15 % de la población ha sacado más de 86.63 puntos.

El restante 65 % de la población ha sacado entre 52.79 y 86.63 puntos.

Las personas de nivel cultural bajo han sacado menos de 52.79 puntos, las que tienen nivel cultural medio son las que han sacado una puntuación entre 52.79 y 86.63 puntos y las de nivel cultural alto han conseguido una puntuación superior a 86.63 puntos.

B 1 (hasta 3 puntos)

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz inversa de $A - B$.

b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

a) Hallamos la expresión de la matriz $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Hallamos su inversa.

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - B)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X(A - B) = 2A - 3B \Rightarrow X = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$2A - 3B = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3 & -2 + 6 \\ 0 + 3 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (2A - 3B)(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4 & -3 + 8 \\ 3 - 1 & -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$.

- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.
- Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.
- Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

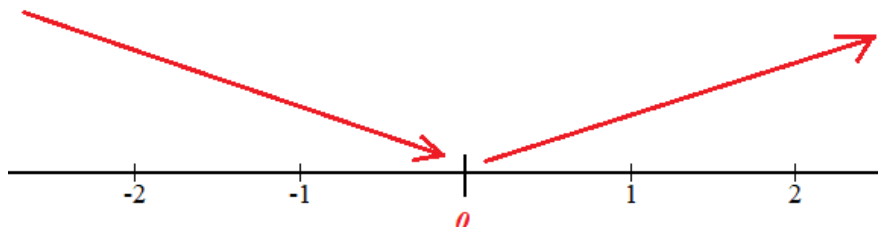
a) Hallamos los puntos críticos de la función $f(x) = x^4 - 4$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La función presenta un punto crítico en $x = 0$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $f(x) = x^4 - 4$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = 0^4 - 4 = -4$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, -4)$. Buscamos los valores que anulan la segunda derivada (candidatos a puntos de inflexión).

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Ya hemos visto que en $x = 0$ la función tiene un mínimo. La función no tiene puntos de inflexión.

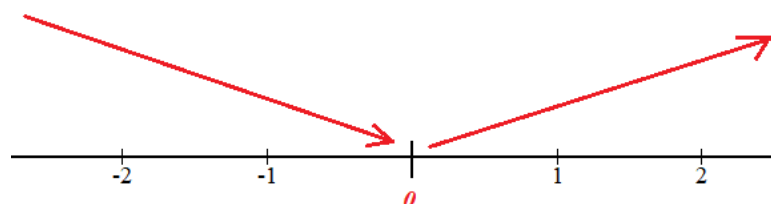
Hallamos los puntos críticos de la función $g(x) = 3x^2$.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 6x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La función presenta un punto crítico en $x=0$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale $g'(-1)=6(-1)=-6<0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $g'(1)=6\cdot 1=6>0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $g(x)=3x^2$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. La función presenta un mínimo relativo en $x=0$. Como $g(0)=3\cdot 0^2=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$. Buscamos los valores que anulan la segunda derivada (candidatos a puntos de inflexión).

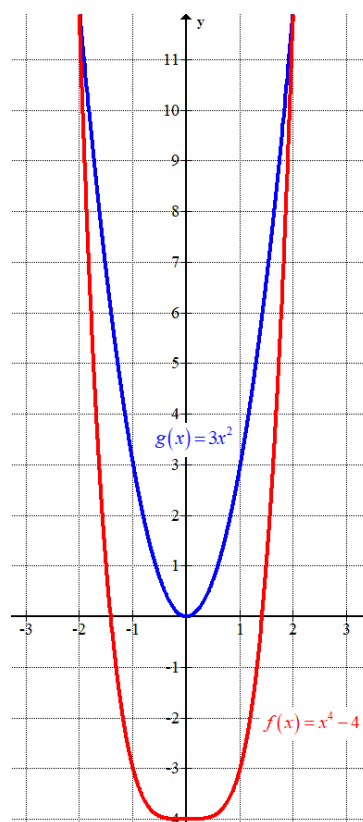
$$\left. \begin{array}{l} g'(x)=6x \Rightarrow g''(x)=6 \\ g''(x)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6=0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

b) Realizamos una tabla de valores y representamos las dos gráficas.

x	$g(x)=3x^2$
-2	12
-1	3
0	0
1	3
2	12

x	$f(x)=x^4-4$
-2	12
-1	-3
0	-4
1	-3
2	12



c) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas, aunque ya los tenemos en el dibujo anterior.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

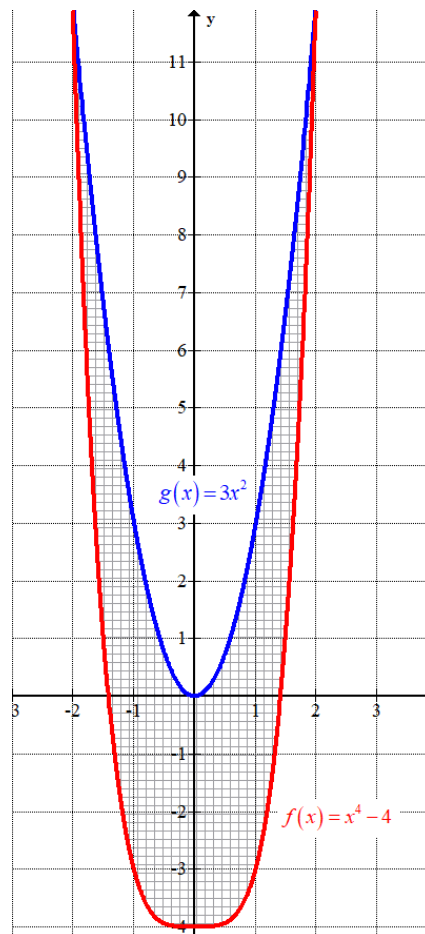
$$\Rightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \\ x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

El área de la región delimitada por las gráficas es el valor de la integral definida entre -2 y 2 de $g(x) - f(x)$.

$$\text{Área} = \int_{-2}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-2}^2 3x^2 - (x^4 - 4) dx = \int_{-2}^2 -x^4 + 3x^2 + 4 dx =$$

$$= \left[\frac{-x^5}{5} + x^3 + 4x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{-2^5}{5} + 2^3 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{-(-2)^5}{5} + (-2)^3 + 4(-2) \right] =$$

$$= \frac{-32}{5} + 8 + 8 - \frac{32}{5} + 8 + 8 = \boxed{\frac{96}{5} = 19.2 \text{ u}^2}$$



B 3 (hasta 2 puntos)

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres. Se elige una persona al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
- Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
- Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Colocamos estos datos en una tabla de contingencia.

	Diabetes	No diabetes	
Mujer	6		54
Hombre		37	
			100

Completamos la tabla.

	Diabetes	No diabetes	
Mujer	6	48	54
Hombre	9	37	46
	15	85	100

- Hay 100 personas y de ellas 15 padecen diabetes. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes vale $\frac{15}{100} = 0.15$.
- Hay 54 mujeres y de ellas 48 no padecen diabetes. La probabilidad de que al elegir una mujer esta no padezca diabetes vale $\frac{48}{54} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$.
- Hay 15 personas con diabetes y de ellas 6 son mujeres. La probabilidad de que al elegir un diabético este sea mujer es de $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$.

B 4 (hasta 2 puntos)

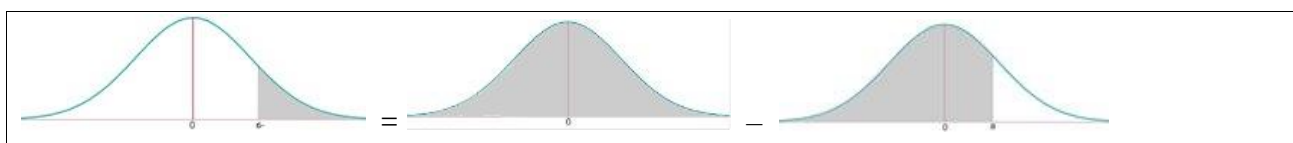
La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5.

Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Sea X = Nota de acceso a la carrera A. $X = N(6.8, 0.6)$.

Averiguamos “a” tal que $P(X \geq a) = 0.25$.

$$P(X \geq a) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.75$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ y encontramos que $\frac{a-6.8}{0.6} = \frac{0.67 + 0.68}{2} = 0.675$. Despejamos y averiguamos el valor de “a”.

$$\frac{a-6.8}{0.6} = 0.675 \Rightarrow a - 6.8 = 0.405 \Rightarrow \boxed{a = 7.205}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0

Sea Y = Nota de acceso a la carrera B. $Y = N(7, 0.5)$.

Averiguamos “b” tal que $P(Y \geq b) = 0.25$.

$$P(X \geq b) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z < \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.75$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ y encontramos que $\frac{b-7}{0.5} = 0.675$. Despejamos y averiguamos el valor de “n”.

$$\frac{b-7}{0.5} = 0.675 \Rightarrow b - 7 = 0.3375 \Rightarrow \boxed{b = 7.3375}$$

La carrera que admite una nota mínima más baja es la carrera A.



EAU ordinaria 2019
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA

JUNIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
- Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
- Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

A 3 (hasta 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos

sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

- La probabilidad de que ocurra el suceso A , condicionada a que se ha producido el suceso B .
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
- La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B .
- La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

A 4 (hasta 2 puntos)

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA

JUNIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**OPCIÓN B****B 1 (hasta 3 puntos)**

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

- a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

B 2 (hasta 3 puntos)

- a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0)$, y tiene un máximo en el punto $(1, 1)$.
b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX .

B 3 (hasta 2 puntos)

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

B 4 (hasta 2 puntos)

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

- a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.
b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Llamamos “x” al número de tartas A e “y” al número de tartas B que se fabrican.

	Kg de masa	Kg de chocolate	Ingresos
Nº tartas A (x)	x	1,5x	24x
Nº tartas B (y)	1,5y	y	30y
TOTALES	$x + 1.5y$	$1.5x + y$	$24x + 30y$

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

“La pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente” $\rightarrow x + 1.5y \leq 300; 1.5x + y \leq 300$

Las cantidades deben ser positivas y enteras $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 300 \\ 1.5x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo son los ingresos que deseamos maximizar: $I(x, y) = 24x + 30y$

Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 1.5y = 300$$

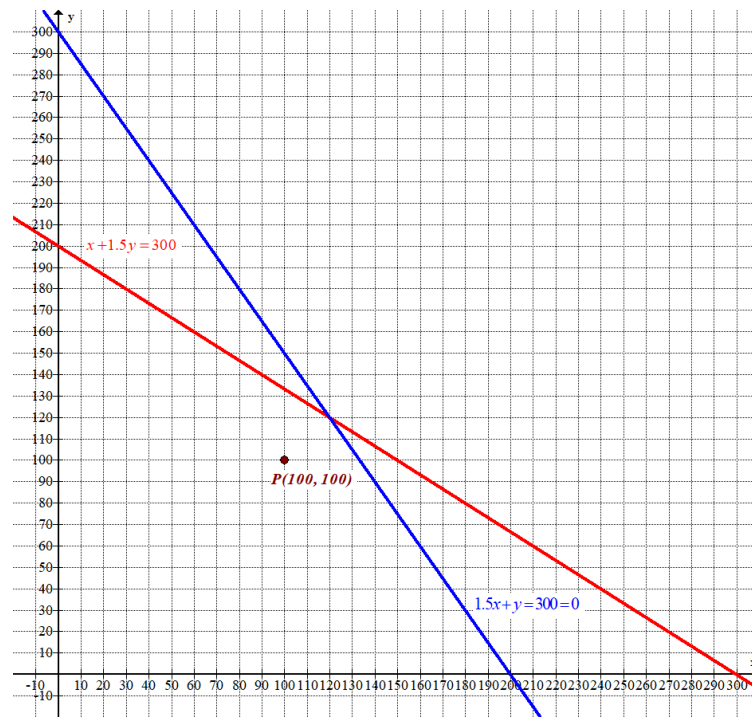
x	$y = \frac{300 - x}{1.5}$
0	200
120	120
300	0

$$1.5x + y = 300$$

x	$y = 300 - 1.5x$
0	300
120	120
200	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

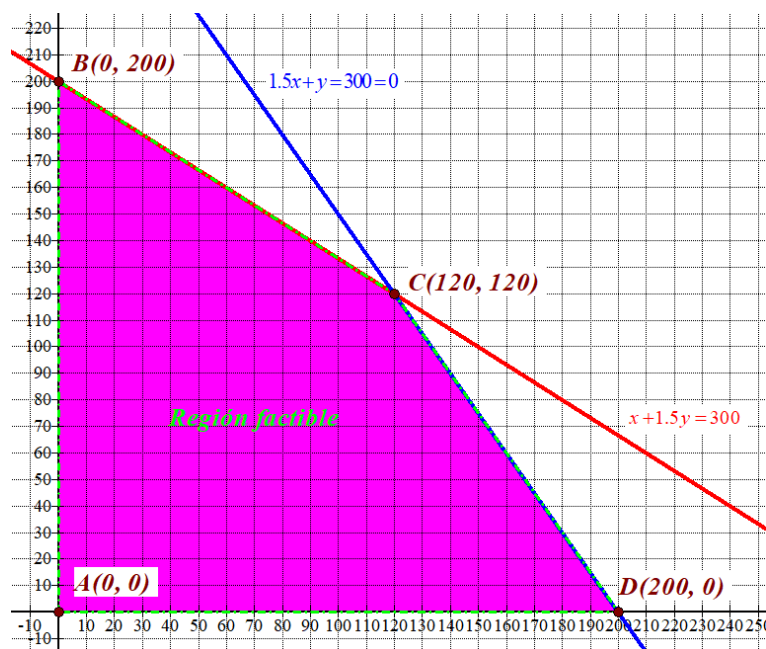
Primer
cuadrante



Comprobamos si el punto $P(100, 100)$ cumple todas las inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 1.5 \cdot 100 \leq 300 \\ 1.5 \cdot 100 + 100 \leq 300 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 24x + 30y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 200) \rightarrow I(0, 200) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 6000$$

$$C(120, 120) \rightarrow I(120, 120) = 24 \cdot 120 + 30 \cdot 120 = 6480 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 24 \cdot 200 + 30 \cdot 0 = 4800$$

Los ingresos máximos que se pueden conseguir son de 6480 euros con la fabricación de 120 tartas de cada tipo.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
- Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
- Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

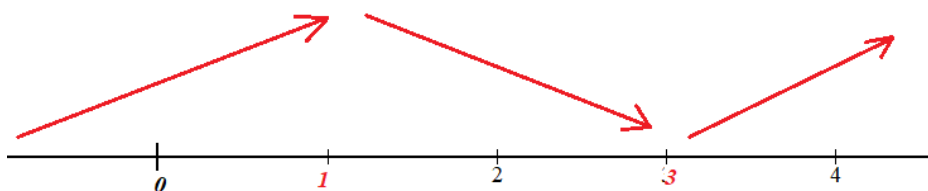
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ consideramos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

- b) Observando el esquema obtenido en el apartado anterior podemos decir que la función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$. Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow f''(x) = 6x - 12 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Como la derivada tercera no se anula para $x = 2$ la función tiene un punto de inflexión en $x = 2$.

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$$

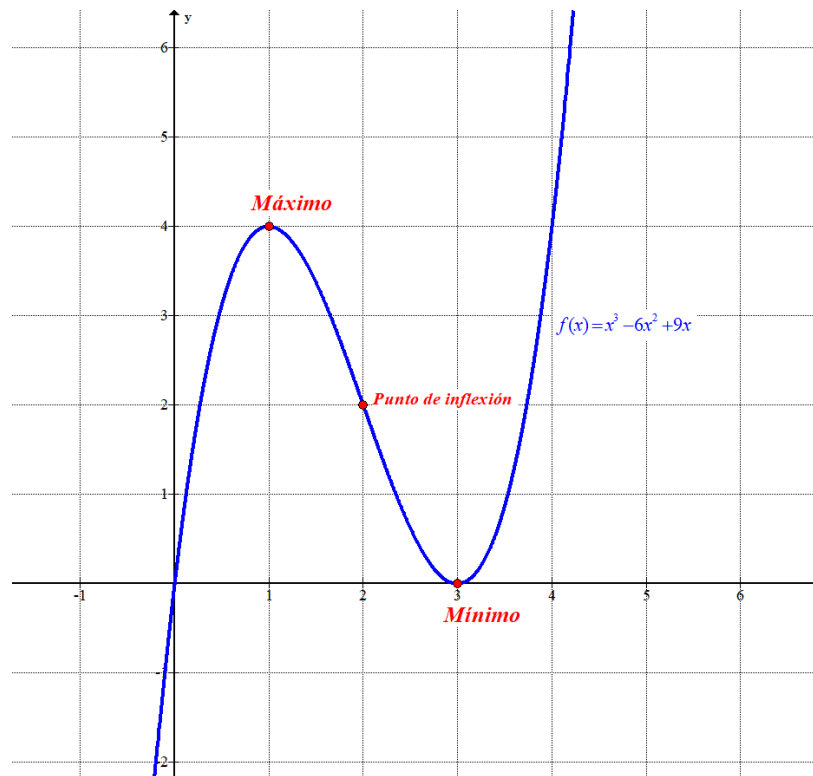
Como $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$, $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2$ y $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ la función tiene un máximo relativo en $(1, 4)$, un mínimo relativo en $(3, 0)$ y un punto de inflexión en $(2, 2)$.

c) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 = x \end{cases}$$

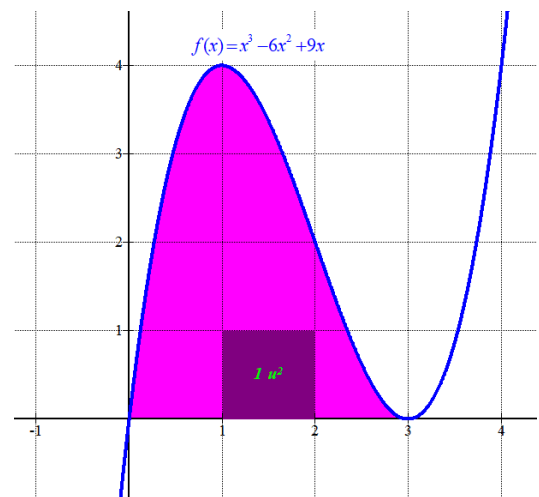
La gráfica de la función corta el eje de abscisas en dos puntos: A(0, 0) y B(3, 0).
Dibujamos la gráfica de la función.



d) El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas es el valor de la integral definida entre 0 y 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + \frac{9 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas tiene un valor de 6.75 unidades cuadradas.



A 3 (hasta 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

- La probabilidad de que ocurra el suceso A , condicionada a que se ha producido el suceso B .
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
- La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B .
- La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

Sabemos que $P(A) = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, $P(B) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

Ponemos estos datos en una tabla de contingencia.

	B	B ^C	
A	1		6
A ^C			
	4		12

Completamos la tabla.

	B	B ^C	
A	1	5	6
A ^C	3	3	6
	4	8	12

A partir de los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

- Miramos los datos de la columna B y tenemos que $P(A/B) = \frac{1}{4} = 0.25$.
- $P(A^C \cap B^C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$.
- $P(A \cap B^C) = \frac{5}{12} \approx 0.4167$.
- $P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)) = \frac{5+3}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Sabemos que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos obtenemos $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

- Nos piden calcular $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Nos piden calcular $P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c \cap B^c) = \{Ley de Morgan\} = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

c) Nos piden calcular $P(A \cap B^c)$

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(A \cap B^c) + \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

d) La probabilidad de “ocurre solo uno de los dos sucesos” es la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos menos la probabilidad de que ocurran los dos sucesos.

$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

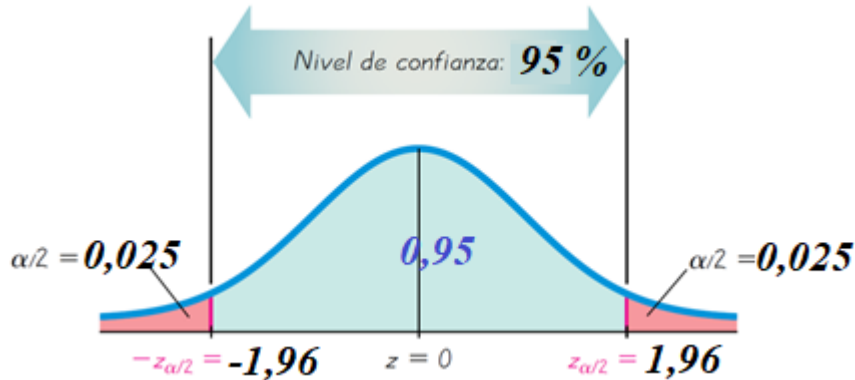
A 4 (hasta 2 puntos)

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

a) La proporción muestral vale $p = \frac{350}{500} = 0.7$. El tamaño de la muestra = $n = 500$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}} \approx 0.04$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.7 - 0.04, 0.7 + 0.04) = (0.66, 0.74)$$

El error máximo para un nivel de confianza del 95% es de 0.04, es decir, del 4%.

- El porcentaje de personas de la población que son aficionados al deporte está entre el 66% y el 74% con un nivel de confianza del 95 %.

B 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

- a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
 b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

a) Hallamos la expresión de la matriz $I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Para que esta matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|I + B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

Hallamos su inversa.

$$(I + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(I + B)}{|I + B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- b) Resolvemos el sistema matricial planteado.

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1} C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30+0 & 33+0 \\ -10+8 & -11+14 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y \Rightarrow \dots$$

Calculamos la inversa de la matriz A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver el sistema.

$$\dots \Rightarrow X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución son $X = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$.

B 2 (hasta 3 puntos)

- a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0)$, y tiene un máximo en el punto $(1, 1)$.
- b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

a) La función polinómica de segundo grado es $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como la función pasa por el punto $(0, 0)$ entonces $f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + bx$.

Si la función tiene un máximo en el punto $(1, 1)$ implica dos cosas: la derivada se anula en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 0$ y también que $f(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 0 \\ f'(x) = 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{0 = 2a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = ax^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \Rightarrow \boxed{1 = a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 2a + b \\ 1 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a = b \\ 1 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a - 2a \Rightarrow 1 = -a \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = -2(-1) = 2}$$

La función que buscamos es $f(x) = -x^2 + 2x$.

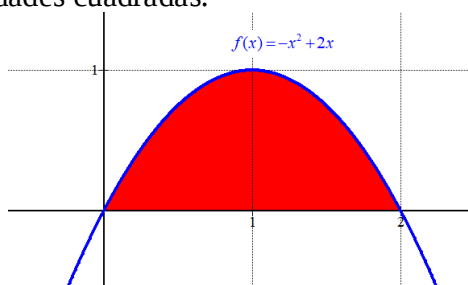
b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 2x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ -x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_0^2 -x^2 + 2x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{-2^3}{3} + 2^2 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 0^2 \right] = \frac{4}{3} \approx 1.333$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 1.333 unidades cuadradas.



B 3 (hasta 2 puntos)

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

De la urna B solo podemos sacar bola negra (no tiene bolas blancas).

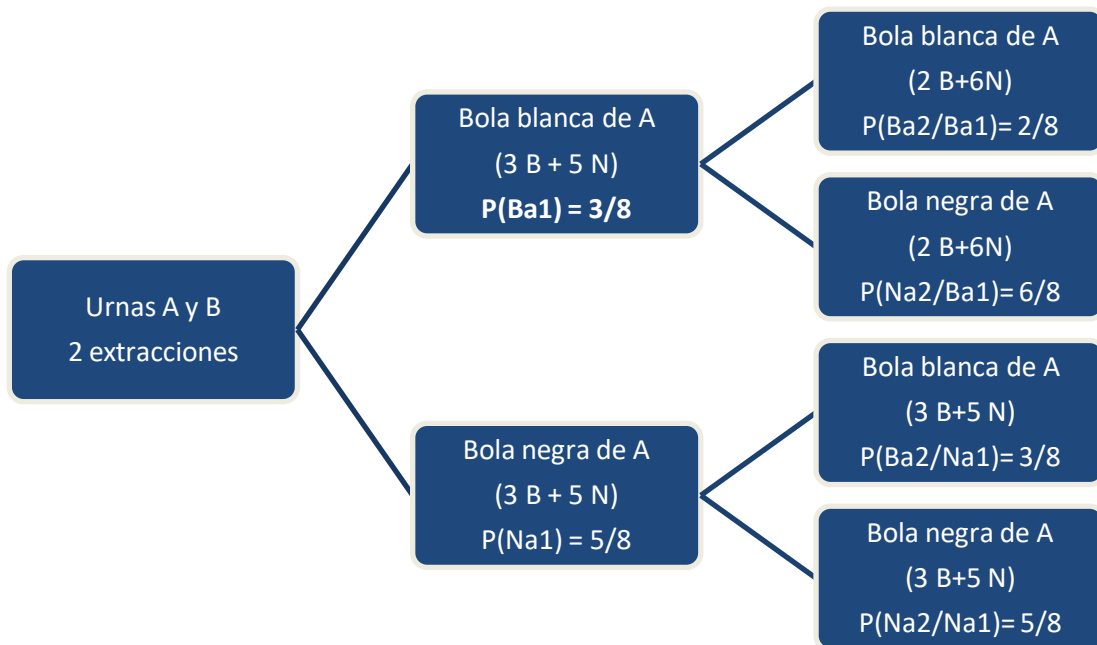
En la primera extracción lo único que puede variar es la bola que sacamos de A (blanca o negra).

Si sacamos bola blanca de A se pasará a la urna B y en la urna A se introduce una bola negra, entonces la urna A contiene 2 bolas blancas y 6 negras.

Si sacamos bola negra de A no cambiará la composición de la urna A (cambiamos bola negra por bola negra).

Llamamos Ba1 al suceso “sacar bola blanca de A en la extracción 1”, Na1 a “sacar bola negra de A en la extracción 1”. De forma análoga llamamos Ba2 al suceso “sacar bola blanca de A en la extracción 2”, Na2 a “sacar bola negra de A en la extracción 2”.

Realizamos un diagrama de árbol del experimento.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Na2) = P(Ba1)P(Na2/Ba1) + P(Na1)P(Na2/Na1) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{43}{64} = 0.671875$$

B 4 (hasta 2 puntos)

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

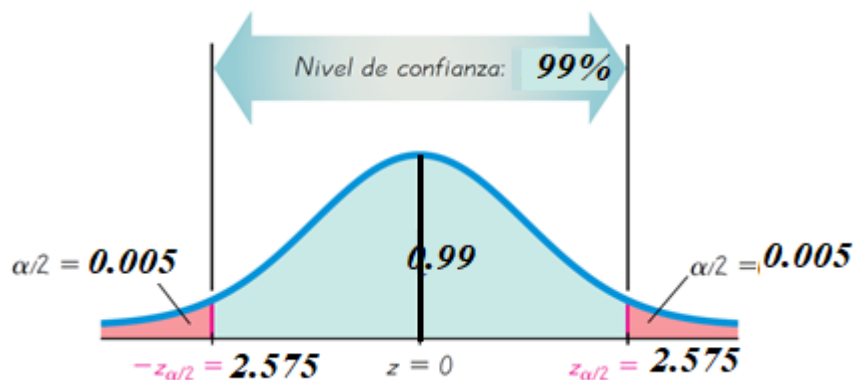
Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

- a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99%.
 b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

X = el gasto anual en transporte público realizado por las familias. $X = N(\mu, 75)$

Tamaño de muestra = $n = 100$. Media muestral $\bar{x} = 250$.

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{100}} = 19.3125 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(250 - 19.3125, 250 + 19.3125) = (230.6875, 269.3125)$$

El gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 % estará entre 230.6875 y 269.3125 euros.

- b) Para un nivel de confianza del 99% hemos visto que $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Utilizamos la fórmula del error. Obtenemos el valor de “n” para un error de 10 euros.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2,575 \cdot \frac{75}{10} \Rightarrow n = \left(2,575 \cdot \frac{75}{10} \right)^2 \approx 372.97$$

La muestra debe ser de un mínimo de 373 familias.

EAU extraordinaria 2018

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II**OPCIÓN A****A 1 (hasta 3 puntos)**

Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $2/3$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

- Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
- La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

A 2 (hasta 3 puntos)

Dada la función $h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, donde la función $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x . Responder:

- ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?
- Dada la función $f(x) = 4 + \ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

A 3 (hasta 2 puntos)

Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

- Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
- Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
- Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

A 4 (hasta 2 puntos)

En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

- El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
- ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea ≤ 0.02 , con un nivel de confianza del 94%?



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

- a) Calcular los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Determinar el exponente n de la matriz A para que se cumpla:

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B 2 (hasta 3 puntos)

La siguiente función $f(x)$, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

- a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.
b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

B 3 (hasta 2 puntos)

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

- a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

B 4 (hasta 2 puntos)

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza $(188,18, 208,82)$ para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

- a) La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
b) El error máximo cometido en la estimación de la media μ , si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n=500$ y el nivel de confianza es del 96%.

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $2/3$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

- a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
 b) La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

a) Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

“La capacidad del depósito es de 10 litros” $\rightarrow K + G \leq 10$

“La cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $2/3$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$ ” $\rightarrow G \geq \frac{2}{3}K$; $K \geq 0$.

“Un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total” $\rightarrow G + 0.5K \leq 8$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} K + G \leq 10 \\ G \geq \frac{2}{3}K \\ K \geq 0 \\ G + 0.5K \leq 8 \end{array} \right\}$$

Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$K + G = 10$$

$$G = \frac{2}{3}K$$

$$G + 0.5K = 8$$

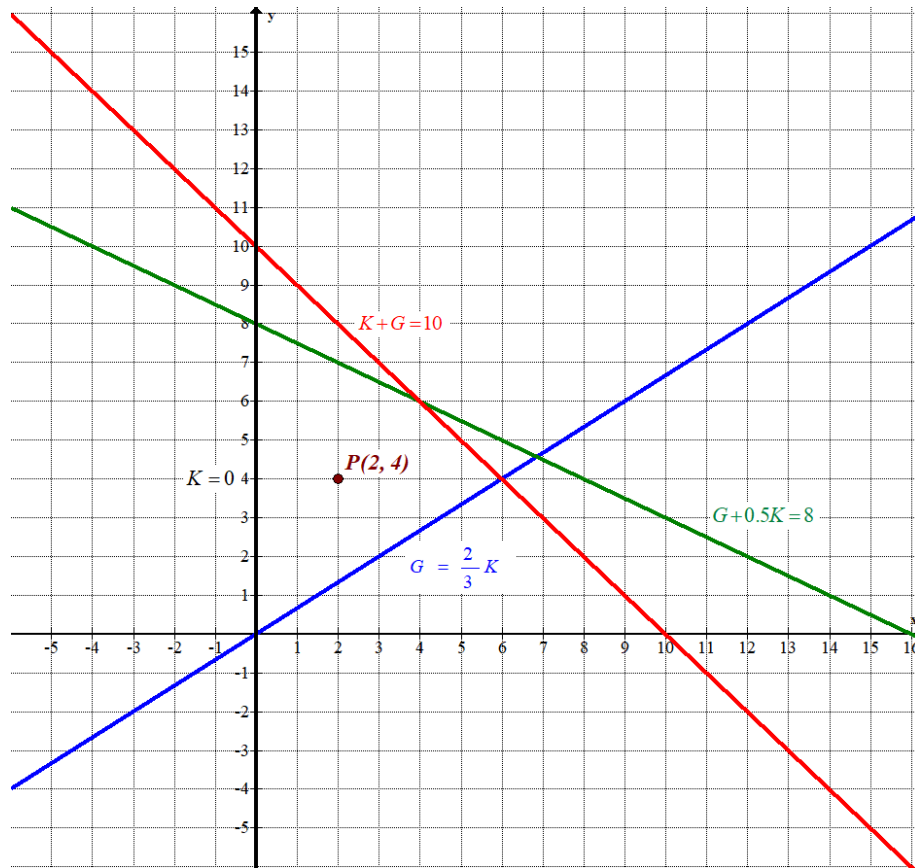
$$K = 0$$

K	$G = 10 - K$
0	10
4	6
6	4

K	$G = \frac{2}{3}K$
0	0
3	2
6	4

K	$G = 8 - 0.5K$
0	8
4	6
16	0

$K = 0$	G
0	0
0	5
0	10

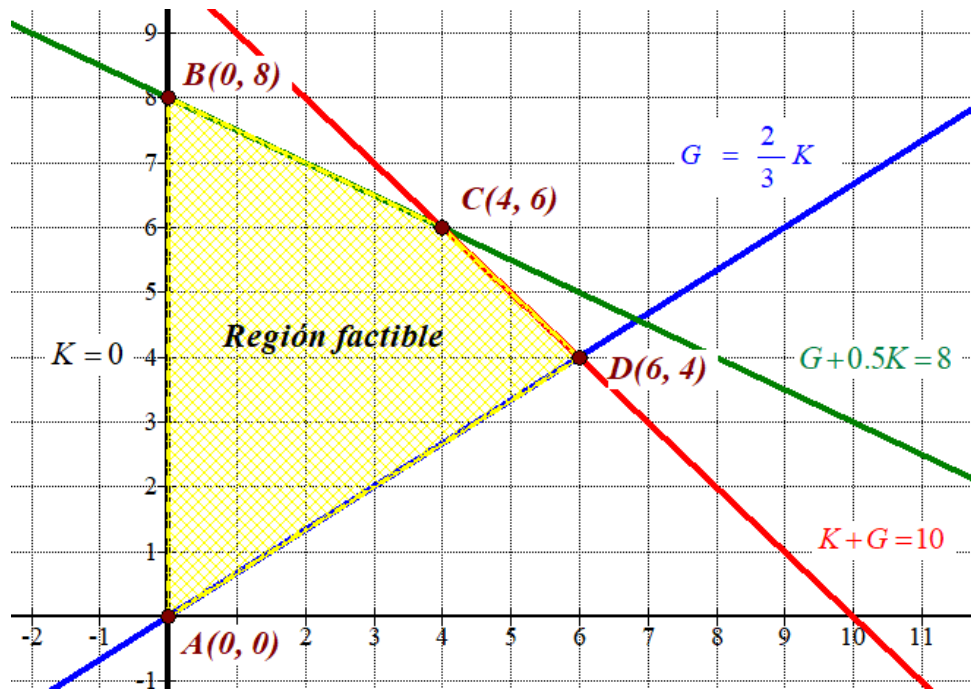


Las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} K \geq 0 \\ G \leq 10 - K \\ G \leq 8 - 0.5K \\ G \geq \frac{2}{3}K \end{array} \right\}$$
 y la región factible es la región del plano situada a la

derecha de la recta vertical negra, por debajo de la recta verde y roja, y por encima de la recta azul. Comprobamos si el punto $P(2, 4)$ cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 4 \leq 10 \\ 4 \geq \frac{2}{3} \cdot 2 \\ 2 \geq 0 \\ 4 + 0.5 \cdot 4 \leq 8 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones. Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función objetivo $F(G, K) = 8G + 5K$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow F(8, 0) = 8 \cdot 8 + 5 \cdot 0 = 64$$

$$C(4, 6) \rightarrow F(6, 4) = 8 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 68$$

$$D(6, 4) \rightarrow F(4, 6) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 70 \text{ ¡Máximo!}$$

La mayor distancia que se puede recorrer cumpliendo con las restricciones es de 70 kilómetros con 6 litros de gasolina y 4 de keroseno.

A 2 (hasta 3 puntos)

Dada la función $h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, donde la función $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x . Responder:

- a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?
- b) Dada la función $f(x) = 4 + \ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

a) Determinamos el valor de a .

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2 \\ h(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = a + \ln(1) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = a + 0 - 6 + 2 \Rightarrow \boxed{a = -1 + 6 - 2 = 3}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 + \frac{1}{x} - 6 + 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} - 6 + 4x = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 6 - 4x \Rightarrow 1 = 6x - 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{20}}{8} \approx 1.31 \in [0.01, 3] \\ \frac{6 - \sqrt{20}}{8} \approx 0.19 \in [0.01, 3] \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''\left(\frac{6 - \sqrt{20}}{8}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{6 - \sqrt{20}}{8}\right)^2} + 4 = -10 - 6\sqrt{5} < 0 \\ f''\left(\frac{6 + \sqrt{20}}{8}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{6 + \sqrt{20}}{8}\right)^2} + 4 = -10 + 6\sqrt{5} > 0 \end{array} \right.$$

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{6 - \sqrt{20}}{8}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{6 + \sqrt{20}}{8}$.

Como $f(0.19) = 4 + \ln(0.19) - 6 \cdot 0.19 + 2 \cdot 0.19^2 \approx 1.27$ las coordenadas del máximo relativo son $(0.19, 1.27)$.

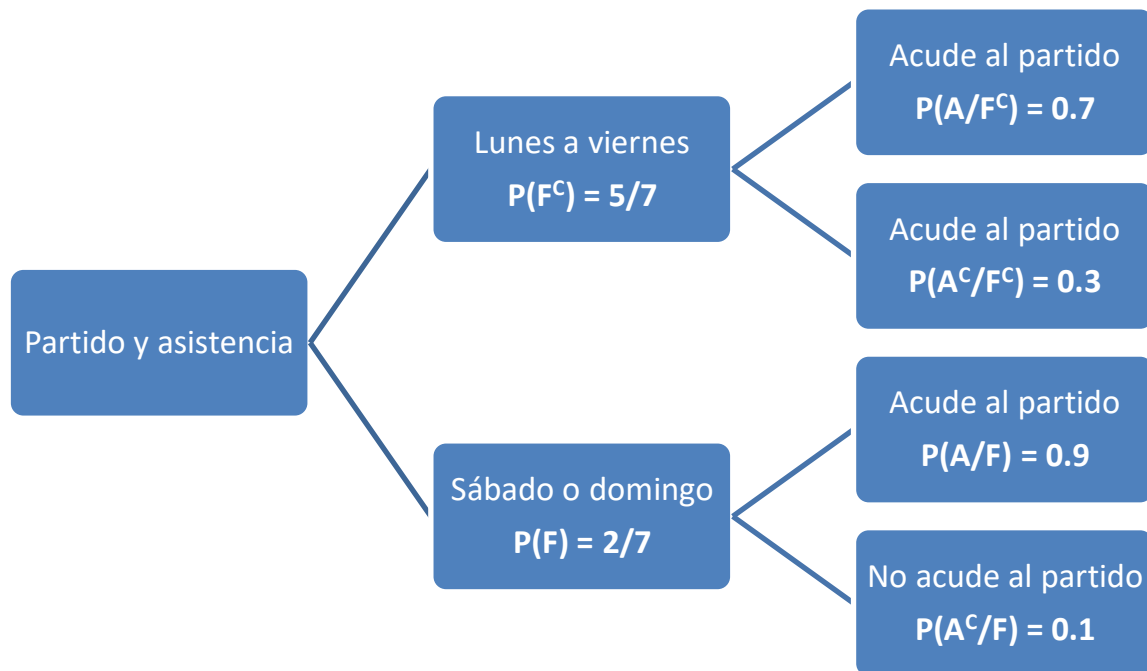
Como $f(1.31) = 4 + \ln(1.31) - 6 \cdot 1.31 + 2 \cdot 1.31^2 \approx -0.16$ las coordenadas del mínimo relativo son $(1.31, -0.16)$.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

- Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
- Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
- Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos A = “Asistir al encuentro”, F a “el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo)”.



- a) Nos piden calcular $P(A^c / F)$. Como a los partidos del fin de semana asiste un 90 % de las veces, entonces no asiste el restante 10%. $P(A^c / F) = 0.10$

- b) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(F^c)P(A/F^c) + P(F)P(A/F) = \frac{5}{7} \cdot 0.7 + \frac{2}{7} \cdot 0.9 = \frac{53}{70} \approx 0.757$$

- c) Nos piden calcular $P(F / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F / A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{P(F)P(A/F)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.9}{53/70} = \frac{18}{53} \approx 0.34$$

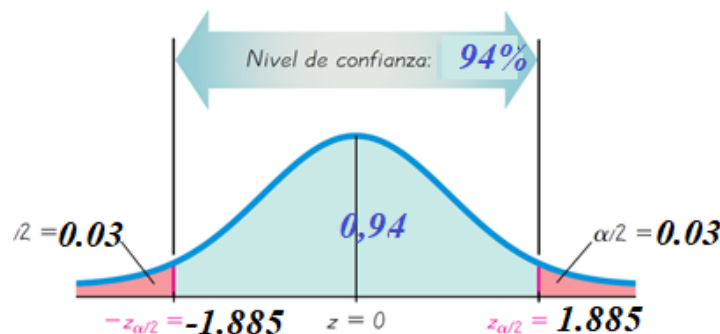
A 4 (hasta 2 puntos)

En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

- El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
- ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea $\leq 0,02$, con un nivel de confianza del 94%?

a) La proporción muestral de hembras es $p = \frac{175}{500} = 0.35$. Tamaño de la muestra = $n = 500$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 94% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.885$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.885 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}} = 0.04$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.35 - 0.04, 0.35 + 0.04) = (0.31, 0.39)$$

b) Para un nivel de confianza del 94% sabemos que $z_{\alpha/2} = 1.885$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.885 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.885} = \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.885} \right)^2 = \frac{0.35 \cdot 0.65}{n} \Rightarrow n = \frac{0.35 \cdot 0.65}{\left(\frac{0.02}{1.885} \right)^2} \approx 2020.9$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2021 peces.

B 1 (hasta 3 puntos)

a) Calcular los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Determinar el exponente n de la matriz A para que se cumpla:

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} F \cdot G &= H \cdot K \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2-2a+2b-4 & 1+a-b-3+d \\ -4-2b+4 & 2+b+3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a+4-6 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2a+2b-6 & a-b-2+d \\ -2b & 5+b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a-2 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2a+2b-6 = -2a-2-2b \\ a-b-2+d = 4a-2 \\ -2b = -c-2b \\ 5+b-d = 2c-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b = 4 \rightarrow \boxed{b=1} \\ d = 3a+b \\ 0 = -c \rightarrow \boxed{c=0} \\ b-d-2c = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3a+1 \\ 1-d-2 \cdot 0 = -11 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} d = 3a+1 \\ \boxed{12=d} \end{cases} \Rightarrow 12 = 3a+1 \Rightarrow 11 = 3a \Rightarrow \boxed{a = \frac{11}{3}} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = \frac{11}{3}$, $b=1$, $c=0$ y $d=12$.

b) Obtenemos las primeras potencias de A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 0+0 \\ 0+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^1 & 0 \\ 0 & -2^1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 4+0 \\ 0-2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 & 0+0 \\ 0+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & -8+0 \\ 0+4 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-8 & 0+0 \\ 0+0 & -8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 \\ 0 & -2^3 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^2 = A^{2^1} = \begin{pmatrix} -2^1 & 0 \\ 0 & -2^1 \end{pmatrix}$, $A^4 = A^{2^2} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^6 = A^{2^3} = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 \\ 0 & -2^3 \end{pmatrix}$.

Como $2048 = 2^{11}$ entonces tenemos que $\begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{11} & 0 \\ 0 & -2^{11} \end{pmatrix} = A^{2^{11}} = A^{22}$.

El valor buscado es $n = 22$.

B 2 (hasta 3 puntos)

La siguiente función $f(x)$, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.

b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{98}{x^2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{98}{x^2} = 2 \Rightarrow 98 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow \{x \geq 1\} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{49} = 7}$$

Tenemos un punto crítico de la función en $x = 7$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2 = 98x^{-2} - 2 \Rightarrow f''(x) = (-2)98x^{-3} = \frac{-196}{x^3} \Rightarrow f''(7) = \frac{-196}{7^3} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada sabemos que en $x = 7$ la función tiene un máximo relativo. Con la instalación de 7 antenas se consigue el máximo beneficio.

b) Averiguamos cuando se anula el beneficio.

$$f(x) = 0 \rightarrow 100 - \frac{98}{x} - 2x = 0 \Rightarrow 100x - 98 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 50x - 49 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 49 = 0 \Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} \frac{50 + 48}{2} = \boxed{49 = x} \\ \frac{50 - 48}{2} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

La función es continua en el intervalo de definición $[1, +\infty)$ por lo que hay que ver en que intervalo de los dos en que se divide su dominio la función es positiva.

- En el intervalo $(1, 49)$ tomamos $x = 10$ y la función vale $f(10) = 100 - \frac{98}{10} - 20 = 70.2 > 0$.

El beneficio es positivo en $(1, 49)$.

- En el intervalo $(49, +\infty)$ tomamos $x = 100$ y la función vale

$$f(100) = 100 - \frac{98}{100} - 200 = -100.98 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (49, +\infty).$$

Para que el beneficio sea positivo x debe estar entre 1 y 49.

B 3 (hasta 2 puntos)

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

- a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
 b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

Pasamos estos porcentajes a valores absolutos. Para ello consideramos que el grupo de personas está compuesto por 100 personas.

Nos dice el ejercicio que hay un 60% de personas casadas, por lo que hay 60 personas casadas. De ellas el 80% tiene trabajo, por lo que $60 \cdot 0.8 = 48$ personas son casadas con trabajo. Por otro lado, el 10% de las personas solteras ($100 - 60 = 40$) está en paro, por lo que $40 \cdot 0.10 = 4$ personas del grupo son solteras en paro.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Con trabajo	En paro	
Casadas	48		60
Solteras		4	
TOTALES			100

Completamos la tabla.

	Con trabajo	En paro	
Casadas	48	12	60
Solteras	36	4	40
TOTALES	84	16	100

- a) En el grupo hay 84 personas con trabajo y de ellas 48 son casadas. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir una persona con trabajo esté casada tiene un valor de

$$\frac{48}{84} = \frac{4}{7} \approx 0.571.$$

- b) Hay 16 personas en paro, de las cuales 12 están casadas, esto es una proporción de $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$

. El porcentaje de las personas que están casadas entre las que están en paro es del 75 %.

B 4 (hasta 2 puntos)

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N=(\mu, 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza (188'18, 208'82) para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

- La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
- El error máximo cometido en la estimación de la media μ , si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n=500$ y el nivel de confianza es del 96%.

X = El tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana. $X= N(\mu, 75)$

- La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{188.18 + 208.82}{2} = 198.5 \text{ minutos}$$

El error de la muestra es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{208.82 - 188.18}{2} = 10.32 \text{ minutos}$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9942	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.32 = 2.575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{10.32}{2.575} = \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{75 \cdot 2.575}{10.32} \Rightarrow n = \left(\frac{75 \cdot 2.575}{10.32} \right)^2 \approx 350.2$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 350.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 96% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846

Calculamos el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} \approx 6.89$ minutos.



EAU ordinaria 2018
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, \quad x + y \geq 3, \quad 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

A 2 (hasta 3 puntos)

Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

- Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t = 12$), disponga del máximo de dinero.
- ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

- Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?
- Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

A 4 (hasta 2 puntos)

En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma = 300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740, 820) para esa media " μ ", con $n_c = 95\%$. Se pide:

- La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- El error cometido en el cálculo de " μ ", si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86\%$.



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2018ko EKAINA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

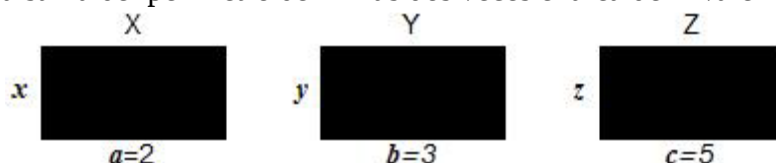
OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

a) Dadas las matrices: $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes

$x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.

b) Se conoce la longitud, $a=2$, $b=3$ y $c=5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$ vale $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$ vale $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a , b , c , d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ y la función y su derivada en $x=3$ valen respectivamente $f(3) = 3$ y $f'(3) = 2$:

- Hallar los valores de los parámetros a , b , c , d y e que determinan la función $f(x)$.
- Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

B 3 (hasta 2 puntos)

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
- Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
- Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

B 4 (hasta 2 puntos)

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
- ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0'12?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, \quad x + y \geq 3, \quad 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

a) Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 7$$

$$x + y = 3$$

$$2y - x = -4$$

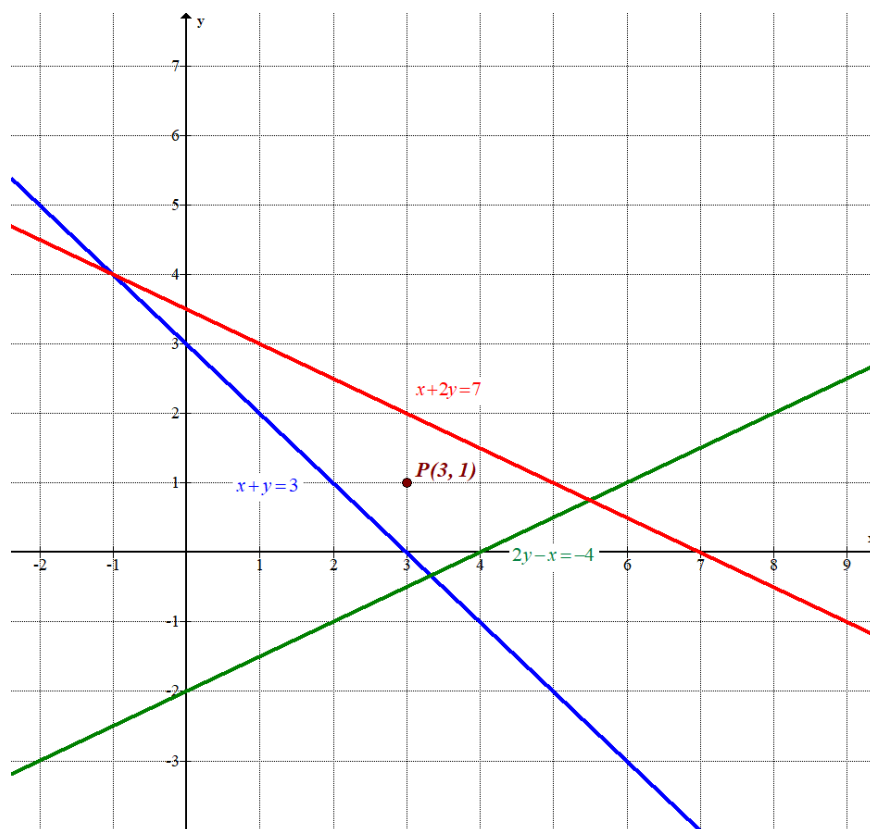
$$x \geq 0, y \geq 0$$

x	y = $\frac{7-x}{2}$
0	3.5
3	2
7	0

x	y = 3 - x
0	3
2	1
3	0

x	y = $\frac{x-4}{2}$
0	-2
2	-1
4	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

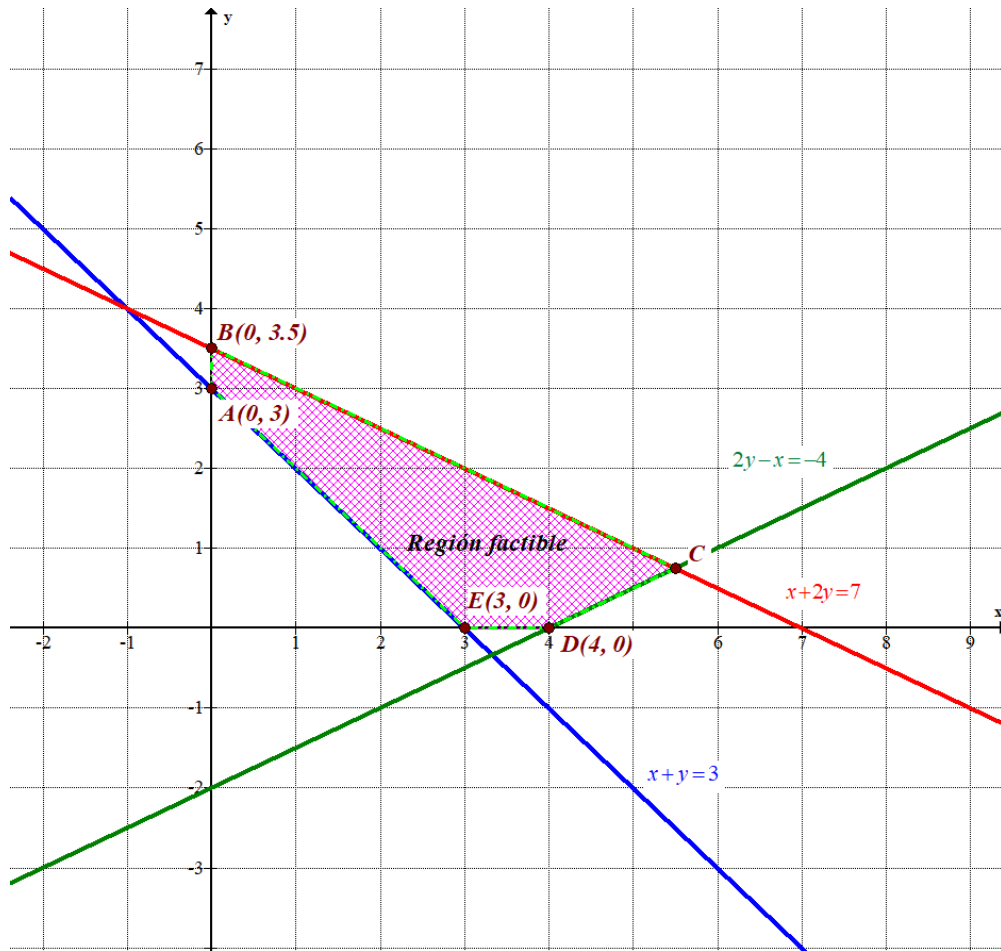
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 7 \\ x + y \geq 3 \\ 2y - x \geq -4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de las rectas azul y verde y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto $P(3, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3+2\cdot 1 \leq 7 \\ 3+1 \geq 3 \\ 2\cdot 1-3 \geq -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 \leq 7 \\ 4 \geq 3 \\ -1 \geq -4 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=7 \\ 2y-x=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=7-2y \\ 2y-x=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y-7+2y=-4 \Rightarrow 4y=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 7 - 2\frac{3}{4} = 5.5 \Rightarrow C(5.5, 0.75)$$

b) Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 2x + 3y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 3) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$B(0, 3.5) \rightarrow F(0, 3.5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3.5 = 10.5$$

$$C(5.5, 0.75) \rightarrow F(5.5, 0.75) = 2 \cdot 5.5 + 3 \cdot 0.75 = 13.25 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$$

$$E(3, 0) \rightarrow F(3, 0) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$$

El valor máximo de la función en la región factible es 13.25 y se consigue en el punto $C(5.5, 0.75)$.

- c) Si los valores deben ser enteros el vértice solución del problema no será válido. El punto cercano a C y situados en las rectas que delimitan la región es (5, 1) y próximo a B es (1, 3). Volvemos a valorar la función en A, D, E y los dos nuevos puntos.

$$A(0, 3) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$B(1, 3) \rightarrow F(1, 3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$

$$C(5, 1) \rightarrow F(5, 1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$$

$$E(3, 0) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$$

El valor máximo de la función en la región factible debiendo ser valores enteros es 13 y se consigue en el punto (5, 1).

A 2 (hasta 3 puntos)

Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

- Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t=12$), disponga del máximo de dinero.
- ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

- Averiguamos cuando sea anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = t^2 - 10t + 16 \\ f'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 = x \\ \frac{10-6}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(t) = t^2 - 10t + 16 \Rightarrow f''(t) = 2t - 10 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 2 \cdot 2 - 10 = -6 < 0 \\ f''(8) = 2 \cdot 8 - 10 = 6 > 0 \end{cases}$$

Al ser negativa la segunda derivada la función tiene un máximo relativo en $x=2$ (febrero) y al ser positiva la segunda derivada tiene un mínimo relativo en $x=8$ (agosto).

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos.

$$f(0) = 0^3/3 - 5 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 + 30 = 30$$

$$f(2) = 2^3/3 - 5 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 30 = 134/3 \approx 44.667$$

$$f(8) = 8^3/3 - 5 \cdot 8^2 + 16 \cdot 8 + 30 = \frac{26}{3} = 8.6667$$

$$f(12) = 12^3/3 - 5 \cdot 12^2 + 16 \cdot 12 + 30 = 78$$

Debe comprar acciones en los meses de cotización baja: enero y agosto. Debe vender en meses de cotización alta: febrero y diciembre.

- Al comienzo del año (30 € por acción) compra 3000 euros de acciones que supone comprar

$$\frac{3000}{30} = 100 \text{ acciones.}$$

$$\text{En febrero } \left(\frac{134}{3} \text{ € por acción}\right) \text{ vende las 100 acciones obteniendo } 100 \cdot \frac{134}{3} = \frac{13400}{3},$$

aproximadamente 4466.667 euros.

$$\text{En agosto } \left(\frac{26}{3} \text{ € por acción}\right) \text{ compramos acciones obteniendo } \frac{13400/3}{26/3} = \frac{6700}{13} \approx 515.38, \text{ no da}$$

exacto, por lo que compra 515 acciones por un valor de $515 \cdot \frac{26}{3} = 4463.333$ €, sobrando 3.33 €.

En diciembre (78 € por acción) vende todas las acciones obteniendo $515 \cdot 78 = 40170$ € que sumándole el sobrante de la compra anterior dispone a final de año de 40173.33 €.

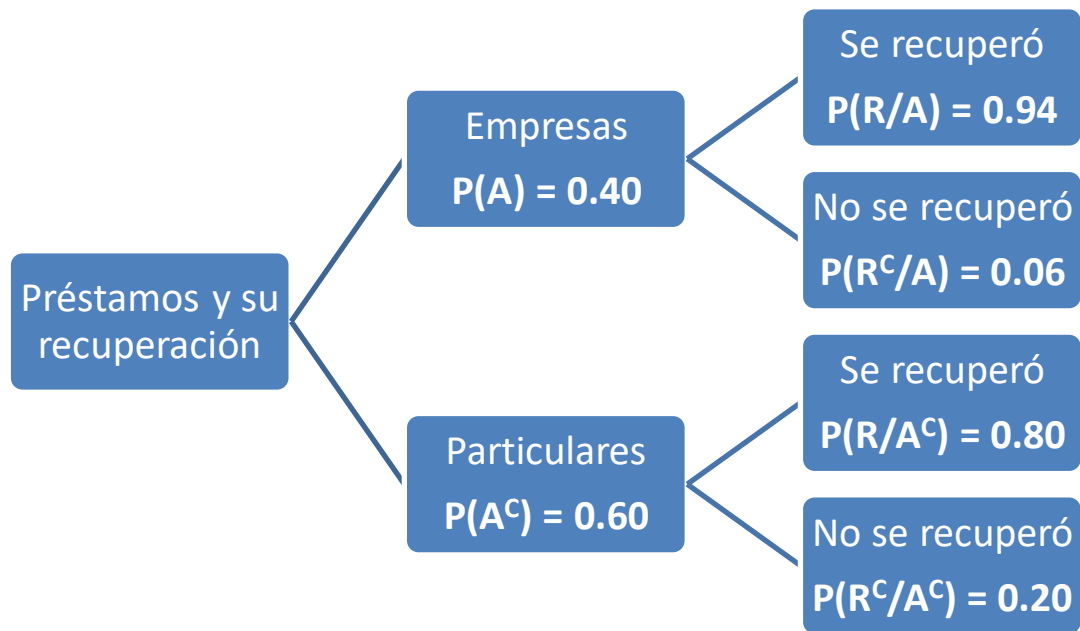
El beneficio que obtiene es de $40173.33 - 3000 = 37173.33$ €.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

- a) Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?
 b) Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

Realizamos un diagrama de árbol describiendo el experimento aleatorio.



- a) Nos piden calcular $P(R^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R^c) = P(A)P(R^c/A) + P(A^c)P(R^c/A^c) = 0.4 \cdot 0.06 + 0.6 \cdot 0.2 = \boxed{0.144}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/R^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/R^c) = \frac{P(A \cap R^c)}{P(R^c)} = \frac{P(A)P(R^c/A)}{P(R^c)} = \frac{0.4 \cdot 0.06}{0.144} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.16667}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma=300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740,820) para esa media “ μ ”, con $n_c = 95\%$. Se pide:

- La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- El error cometido en el cálculo de “ μ ”, si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86\%$.

X = El tiempo en milisegundos de respuesta a señales luminosas. $X = N(\mu, 300)$

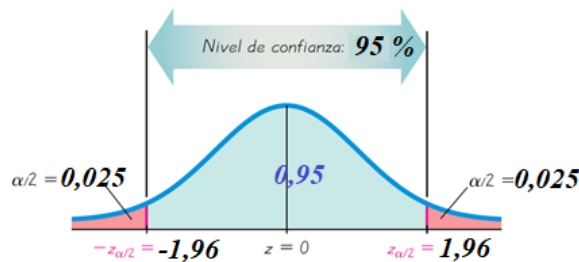
- La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{740 + 820}{2} = 780 \text{ ms}$$

El error de la muestra es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{820 - 740}{2} = 40 \text{ ms}$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6065
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6444
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8079
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8341
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8791
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9293
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 40 = 1.96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{40}{1.96} = \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{300 \cdot 1.96}{40} \Rightarrow n = \left(\frac{300 \cdot 1.96}{40} \right)^2 = 216.09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 217 pacientes.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 86% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.86 \rightarrow \alpha = 0.14 \rightarrow \alpha/2 = 0.07 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.93 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.47 + 1.48}{2} = 1.475$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5318
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429

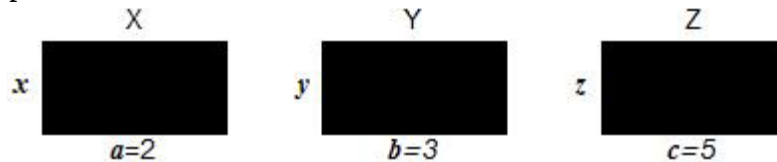
Calculamos el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.475 \cdot \frac{300}{\sqrt{64}} = 55.3125$ milisegundos.

B 1 (hasta 3 puntos)

a) Dadas las matrices: $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes

$x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.

b) Se conoce la longitud, $a=2$, $b=3$ y $c=5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$R^2 = S \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 3 + 3x & 3x + 9y \\ -x + x^2 - 3y + 3xy & -3 + 3x + 9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 3 = 1 \\ 3x + 9y = -15 \\ x^2 - x - 3y + 3xy = 0 \\ -3 + 3x + 9y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 = x \\ \frac{-3-5}{2} = -4 < 0 \end{cases} \\ x + 3y = -5 \\ x^2 - x - 3y + 3xy = 0 \\ 3x + 9y^2 = 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 3y = -5 \rightarrow 3y = -6 \rightarrow y = -2 \\ 1^2 - 1 - 3y + 3y = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ 3 + 9y^2 = 39 \rightarrow 9y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

Los valores buscados son $x=1$ e $y=-2$.

b) La suma del área de los tres rectángulos vale 64 $\rightarrow 2x + 3y + 5z = 64$

La suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 $\rightarrow$

$$2x + 2 \cdot 2 + 2y + 2 \cdot 3 = 34 \rightarrow 2x + 2y + 10 = 34 \rightarrow x + y = 12$$

La suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48 $\rightarrow$

$$2x + 4 + 2 \cdot 3y = 48 \rightarrow 2x + 6y = 44 \rightarrow x + 3y = 22.$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 64 \\ x + y = 12 \\ x + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 64 \\ x = 12 - y \\ x + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(12 - y) + 3y + 5z = 64 \\ 12 - y + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 24 - 2y + 3y + 5z = 64 \\ 2y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 5z = 40 \\ y = \frac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 + 5z = 40 \Rightarrow 5z = 35 \Rightarrow \boxed{z = 7} \\ \boxed{x = 12 - 5 = 7} \end{array} \right.$$

La solución es $x = 7$, $y = 5$, $z = 7$.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$ vale $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$ vale $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a, b, c, d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ y la función y su derivada en $x=3$ valen respectivamente $f(3)=3$ y $f'(3)=2$:

- a) Hallar los valores de los parámetros a, b, c, d y e que determinan la función $f(x)$.
 b) Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

- a) Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ entonces la derivada se anula para este valor $\rightarrow f'(4)=0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2cx + d \\ f'(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow 8c + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -8c}$$

La función queda $f(x) = cx^2 - 8cx + e$ cuando $x \geq 3$.

Como $f(3)=3$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = cx^2 - 8cx + e \\ f(3) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = c \cdot 3^2 - 8c \cdot 3 + e \Rightarrow 3 = 9c - 24c + e \Rightarrow \boxed{3 + 15c = e}$$

La función queda $f(x) = cx^2 - 8cx + 3 + 15c$ cuando $x \geq 3$.

Como $f'(3)=2$ existe la derivada y la función debe ser continua en 3, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} cx^2 - 8cx + 3 + 15c = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + b = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 3 - 3a}$$

La función queda $f(x) = ax + 3 - 3a$ cuando $x \leq 3$.

Como $f'(3)=2$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 - 3a & \text{si } x \leq 3 \\ cx^2 - 8cx + 3 + 15c & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 3 \\ 2cx - 8c & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} a = a \\ f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2cx - 8c = 6c - 8c = -2c \\ f'(3^-) = f'(3^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -2c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ -2c = 2 \rightarrow \boxed{c = -1} \end{cases}$$

Sustituyendo en las expresiones obtenidas previamente obtenemos los valores de b, d y e .

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ c = -1 \\ d = -8c \\ e = 3 + 15c \\ b = 3 - 3a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 3 - 3 \cdot 2 = -3 \\ d = -8(-1) = 8 \\ e = 3 + 15(-1) = -12 \end{array} \right\}$$

Los parámetros buscados son $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$, $d = 8$ y $e = -12$.

b) La función queda $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 - 3 \cdot 2 & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x + 3 - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 12 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

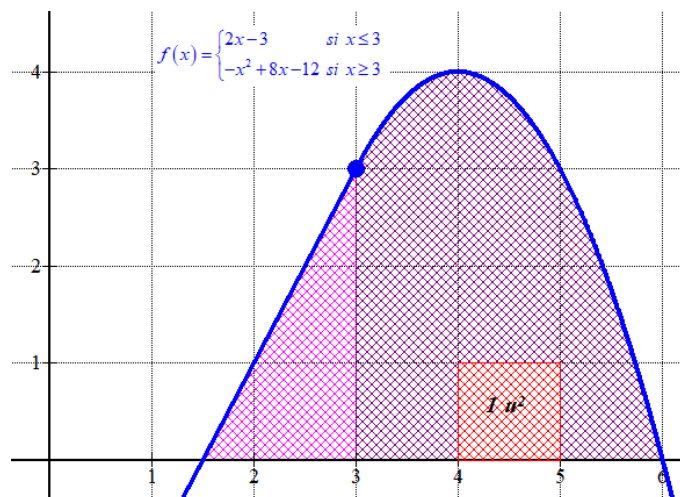
Hallamos los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX ($y = 0$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \in (-\infty, 3) \\ -x^2 + 8x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-1)(-12)}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = \begin{cases} 2 \notin (3, +\infty) \\ 6 \in (3, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $Q(6, 0)$.

Como la función cambia de definición en $x = 3$ la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$ es la suma de dos integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_{1.5}^6 f(x) dx &= \int_{1.5}^3 2x - 3 dx + \int_3^6 -x^2 + 8x - 12 dx = \left[x^2 - 3x \right]_{1.5}^3 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right]_3^6 = \\ &= [3^2 - 3 \cdot 3] - [1.5^2 - 3 \cdot 1.5] + \left[-\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \right] = \\ &= 0 - 2.25 + 4.5 - \cancel{72} + \cancel{144} - 72 + 9 - \cancel{36} + 36 = \boxed{11.25} \end{aligned}$$



B 3 (hasta 2 puntos)

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
- Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
- Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

a) La urna contiene 20 bolas de las cuales 15 son blancas, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al extraer una bola de la urna sea blanca es $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$.

b) Si extraemos dos bolas de la urna para que las dos sean blancas debe ser la primera bola blanca y la segunda bola extraída de las 19 bolas restantes también debe ser blanca. La probabilidad de que la primera bola sea blanca es 0.75 y de que la segunda sea blanca después de haber extraído una bola blanca (quedan 14 bolas blancas) de la urna es $\frac{14}{19}$.

La probabilidad del suceso es $\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} \approx 0.5526$.

c) Si la primera bola extraída es negra y no la devolvemos a la urna entonces nos quedan 19 bolas dentro, siendo 4 las bolas negras. La probabilidad de que la segunda sea también negra es $\frac{4}{19} \approx 0.21$.

d) El suceso “las dos bolas extraídas son de distinto color” es el complementario del suceso “las dos bolas extraídas son del mismo color”. La probabilidad de extraer dos bolas del mismo color es la suma de la probabilidad de que las dos bolas sean blancas y la de que las dos bolas sean negras:

$$\frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{23}{38}.$$

La probabilidad de que al extraer dos bolas sean de distinto color es: $1 - \frac{23}{38} = \frac{15}{38} \approx 0.395$.

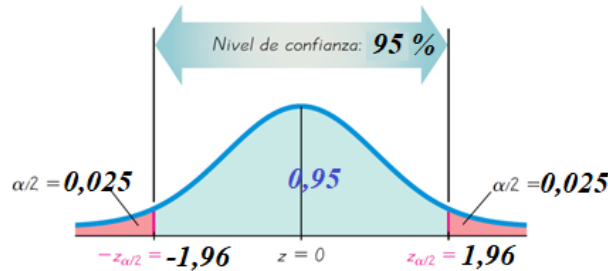
B 4 (hasta 2 puntos)

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

- a) ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
 b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0'12?

a) La proporción muestral vale $p = 0.35$. El tamaño de la muestra es $n = 361$.

Buscamos para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



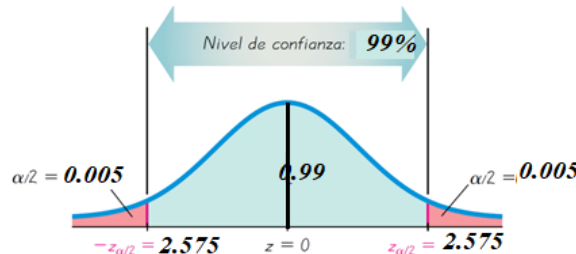
$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{361}} \approx 0.0492$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.35 - 0.0492, 0.35 + 0.0492) = (0.3008, 0.3992)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Si la amplitud del intervalo de confianza al 99% es de 0.12 entonces el error es la mitad de esta amplitud, es decir, el error vale 0.06. Utilizando la fórmula del error:

$$Error = 0.06 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.06 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} = 0.06 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.06}{2.575} = \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2 = \frac{0.35 \cdot 0.65}{n} \Rightarrow n = \frac{0.35 \cdot 0.65}{\left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2} \approx 419.02$$

La muestra debe ser de un mínimo de 420 personas.



EAU extraordinaria 2017
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las cuatro inecuaciones lineales:

$$(i) 4y - x \geq 4, (ii) 2y - x \leq 6, (iii) y - x \leq 1, (iv) 2y + x \leq 8$$

- Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).
- ¿Cuál es el máximo de la función $F(x, y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

A 2 (hasta 3 puntos)

En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 €. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 €. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 € en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

- ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?
- ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

A 3 (hasta 2 puntos)

En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35% de los casos, radiografías, en el 40% y resonancias magnéticas en el 25%. El 60% de las ecografías son de mujeres, el 50% de las radiografías son de mujeres y el 60% de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

- La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.
- Si el paciente elegido ha sido mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.

A 4 (hasta 2 puntos)

El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?
- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98%?

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOAEVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA IIMATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II**OPCIÓN B****B 1 (hasta 3 puntos)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

- $AMB = C$
- $AHB^{-1} = C$.

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean el polinomio cúbico $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

- Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.
- Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

B 3 (hasta 2 puntos)

Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50% en tiendas locales, el 40% por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

- Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.
- Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.

B 4 (hasta 2 puntos)

Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

- El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32%. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92%, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3%.
- En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30%. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2% para la proporción p de miopes de la población.

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las cuatro inecuaciones lineales:

(i) $4y - x \geq 4$, (ii) $2y - x \leq 6$, (iii) $y - x \leq 1$, (iv) $2y + x \leq 8$

a) Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).

b) ¿Cuál es el máximo de la función $F(x, y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

a) Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$4y - x = 4$$

x	$y = \frac{4+x}{4}$
-4	0
-2	0.5
0	1

$$2y - x = 6$$

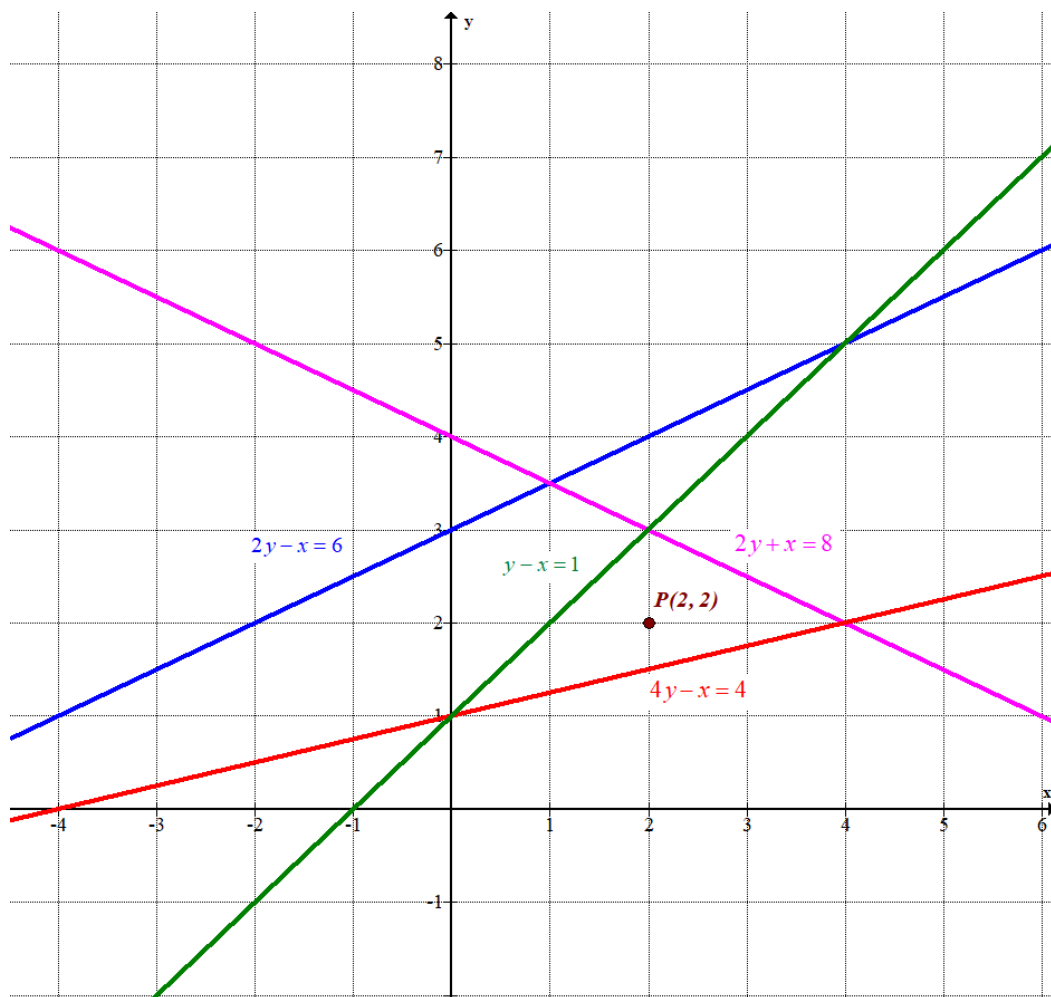
x	$y = \frac{6+x}{2}$
-6	0
-4	1
0	3

$$y - x = 1$$

x	$y = 1+x$
-1	0
0	1
2	3

$$2y + x = 8$$

x	$y = \frac{8-x}{2}$
0	4
4	2
8	0



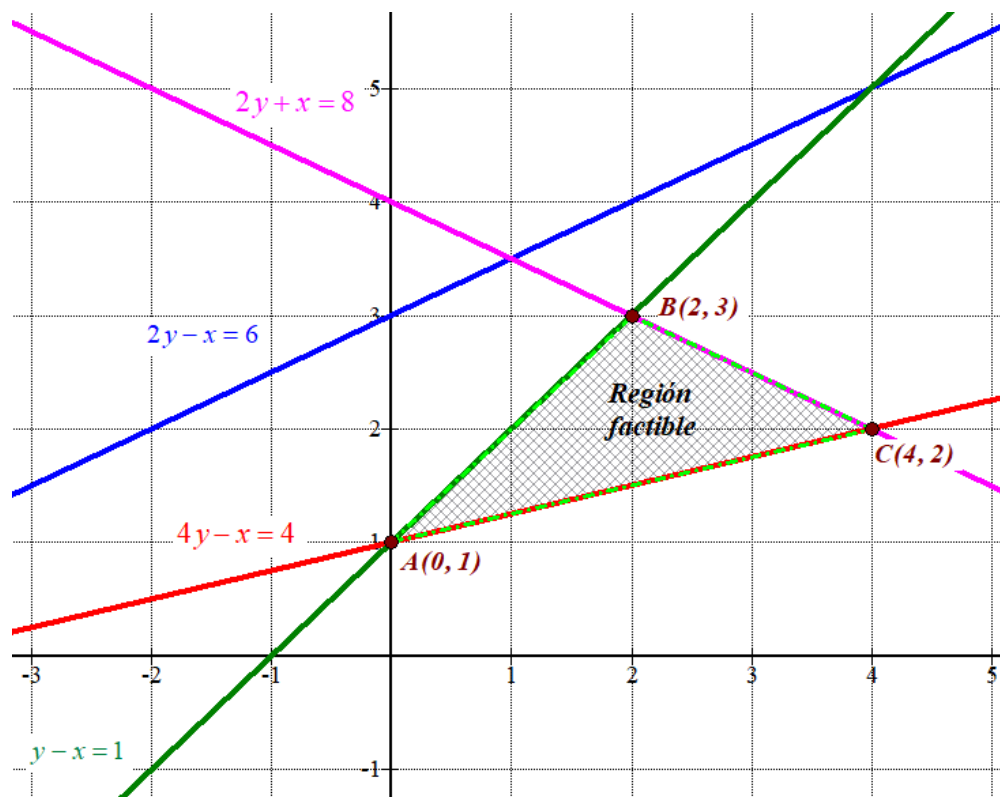
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 4y - x \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 2y - x \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad y - x \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 2y + x \leq 8 \end{array} \right\} \text{ el recinto limitado por las inecuaciones es la región}$$

del plano situada por encima de la recta roja y por debajo de las rectas azul, verde y rosa. Comprobamos si el punto $P(2, 2)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 4 \cdot 2 - 2 \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 2 \cdot 2 - 2 \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad 2 - 2 \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 2 \cdot 2 + 2 \leq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 8 - 2 \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 4 - 2 \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad 2 - 2 \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 4 + 2 \leq 8 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones. Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



La inecuación que no afecta a la región factible es la (ii) $2y - x \leq 6$. Como se observa en el dibujo la recta asociada a esta inecuación no es frontera de la región factible.

La inecuación (ii) la cumplen todos los puntos de la región factible, pero si se suprime de las restricciones la región factible es la misma. La inecuación (ii) es superflua.

b) Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 3x - 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$B(2, 3) \rightarrow F(2, 3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$C(4, 2) \rightarrow F(4, 2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8 \text{ ¡Máximo!}$$

La función objetivo toma un valor máximo de 8 en el punto $C(4, 2)$.

A 2 (hasta 3 puntos)

En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 €. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 €. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 € en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

- a) ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?
 b) ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

a) Hallamos la expresión del balance mensual dependiente de los x anuncios mensuales.

$$f(x) = 100 \cdot A(x) - 12000 - 300x = 100 \cdot (-x^2 + 28x) - 12000 - 300x =$$

$$= -100x^2 + 2800x - 12000 - 300x = -100x^2 + 2500x - 12000$$

Averiguamos cuando el balance es cero.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -100x^2 + 2500x - 12000 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 120}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{145}}{2} = \begin{cases} \frac{25 - \sqrt{145}}{2} \approx \boxed{6.48 = x} \\ \frac{25 + \sqrt{145}}{2} \approx 18.52 \notin [0, 14] \end{cases}$$

- En el intervalo $[0, 6.48]$ tomamos $x = 1$ y la función vale

$$f(1) = -100 \cdot 1^2 + 2500 \cdot 1 - 12000 = -9600 < 0. \text{ La función es negativa en el intervalo } [0, 6.48].$$

- En el intervalo $[6.48, 14]$ tomamos $x = 7$ y la función vale

$$f(7) = -100 \cdot 7^2 + 2500 \cdot 7 - 12000 = 600 > 0. \text{ La función es positiva en el intervalo } [6.48, 14].$$

El menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas es de 7 anuncios mensuales.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de $f(x)$.

$$f(x) = -100x^2 + 2500x - 12000 \Rightarrow f'(x) = -200x + 2500$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2500 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2500}{200} = 12.5}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -200x + 2500 \Rightarrow f''(x) = -200 \Rightarrow f''(12.5) = -200 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo relativo para $x = 12.5$.

Pero el número de anuncios mensuales debe ser un número entero entre 0 y 14, por lo que valoramos la función en 12 y 13 para decidir cuando son mayores las ganancias.

$$\left. \begin{aligned} f(12) &= -100 \cdot 12^2 + 2500 \cdot 12 - 12000 = 3600 \\ f(13) &= -100 \cdot 13^2 + 2500 \cdot 13 - 12000 = 3600 \end{aligned} \right\}$$

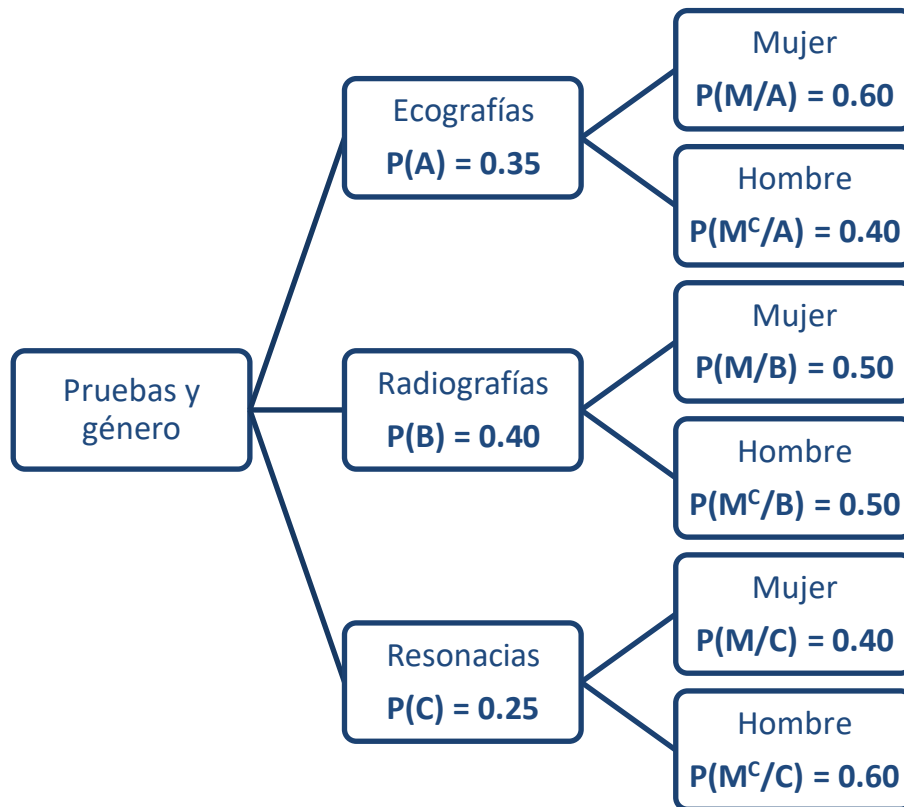
Para maximizar las ganancias se deben contratar 12 o 13 anuncios siendo estas ganancias máximas de 3600 €.

A 3 (hasta 2 puntos)

En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35% de los casos, radiografías, en el 40% y resonancias magnéticas en el 25%. El 60% de las ecografías son de mujeres, el 50% de las radiografías son de mujeres y el 60% de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

- La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.
- Si el paciente elegido ha sido mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.

Llamamos A, B y C a los sucesos realizarse una ecografía, radiografía o resonancia magnética, respectivamente. Llamamos M al suceso “el paciente es mujer”, por lo que el suceso complementario M^c será “el paciente es hombre”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) = \\
 &= 0.35 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.4 = \boxed{0.51}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{0.35 \cdot 0.6}{0.51} = \boxed{\frac{7}{17} \approx 0.4118}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?
- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98%?

a) X = El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao. $X = N(\mu, 10)$

Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de significación del 4%.



$$\alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 0.822$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.822, 16 + 0.822) = (15.178, 16.822)$$

b) Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98%.



$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 0.932$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.932, 16 + 0.932) = (15.068, 16.932)$$

B 1 (hasta 3 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

a) $AMB = C$

b) $AHB^{-1} = C$.

a) Despejamos M en la igualdad: $AMB = C \Rightarrow M = A^{-1}CB^{-1}$.

Hallamos las inversas de las matrices A y B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{2+6} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz M.

$$\begin{aligned} M &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -18 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -28+12 & 42+6 \\ -36-44 & 54-22 \end{pmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -16 & 48 \\ -80 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Despejamos H en la ecuación matricial: $AHB^{-1} = C \Rightarrow H = A^{-1}CB$

Obtenemos la expresión de la matriz H.

$$\begin{aligned} H &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -18 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -14-12 & -42+12 \\ -18+44 & -54-44 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -26 & -30 \\ 26 & -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ -13 & 49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean el polinomio cúbico $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

- a) Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.
- b) Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

- a) Para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$ las dos gráficas deben coincidir para estos valores.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 2x^3 + bx^2 + c \\ q(x) = -x^2 + 6x + 10 \\ p(0) = q(0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = -0^2 + 6 \cdot 0 + 10 \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 2x^3 + bx^2 + 10 \\ q(x) = -x^2 + 6x + 10 \\ p(6) = q(6) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + 10 = -6^2 + 6 \cdot 6 + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 432 + 36b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-432}{36} = -12}$$

Los valores buscados son $b = -12$ y $c = 10$. La función queda $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$. Hallamos el tercer punto de corte de las gráficas de las funciones.

$$p(x) = q(x) \Rightarrow -x^2 + 6x + 10 = 2x^3 - 12x^2 + 10 \Rightarrow$$

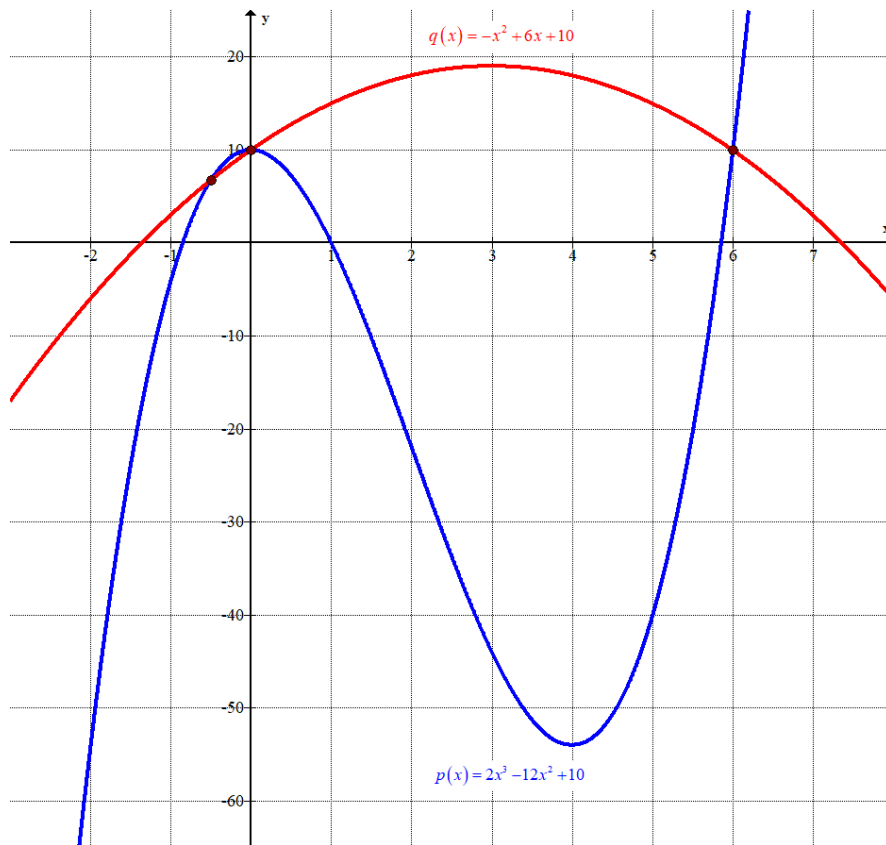
$$\Rightarrow 0 = 2x^3 - 11x^2 - 6x \Rightarrow x(2x^2 - 11x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 2x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 + 48}}{4} = \frac{11 \pm 13}{4} = \left\{ \begin{array}{l} = \frac{11+13}{4} = \boxed{6 = x} \\ = \frac{11-13}{4} = \boxed{-0.5 = x} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos sus gráficas.

x	$p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$
-0.5	6.75
0	10
1	0
6	10
7	108

x	$q(x) = -x^2 + 6x + 10$
-0.5	6.75
0	10
1	15
6	10
7	3



b) El valor del área es la integral definida de 0 a 6 de la diferencia de las dos funciones:

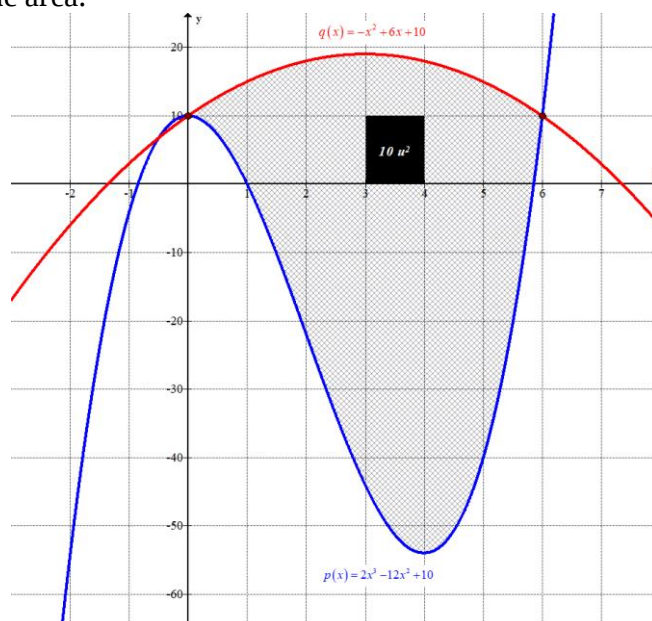
$$q(x) - p(x).$$

$$\text{Área} = \int_0^6 q(x) - p(x) dx = \int_0^6 -x^2 + 6x + 10 - (2x^3 - 12x^2 + 10) dx = \int_0^6 -2x^3 + 11x^2 + 6x dx =$$

$$= \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 = \left[\frac{-2 \cdot 6^4}{4} + \frac{11 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 \right] - \left[\frac{-2 \cdot 0^4}{4} + \frac{11 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right] = 252 \text{ u}^2$$

El área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$ tiene un valor de 252 unidades cuadradas.

Comprobamos el valor del área con el dibujo, teniendo en cuenta que cada cuadradito tiene 10 unidades cuadradas de área.



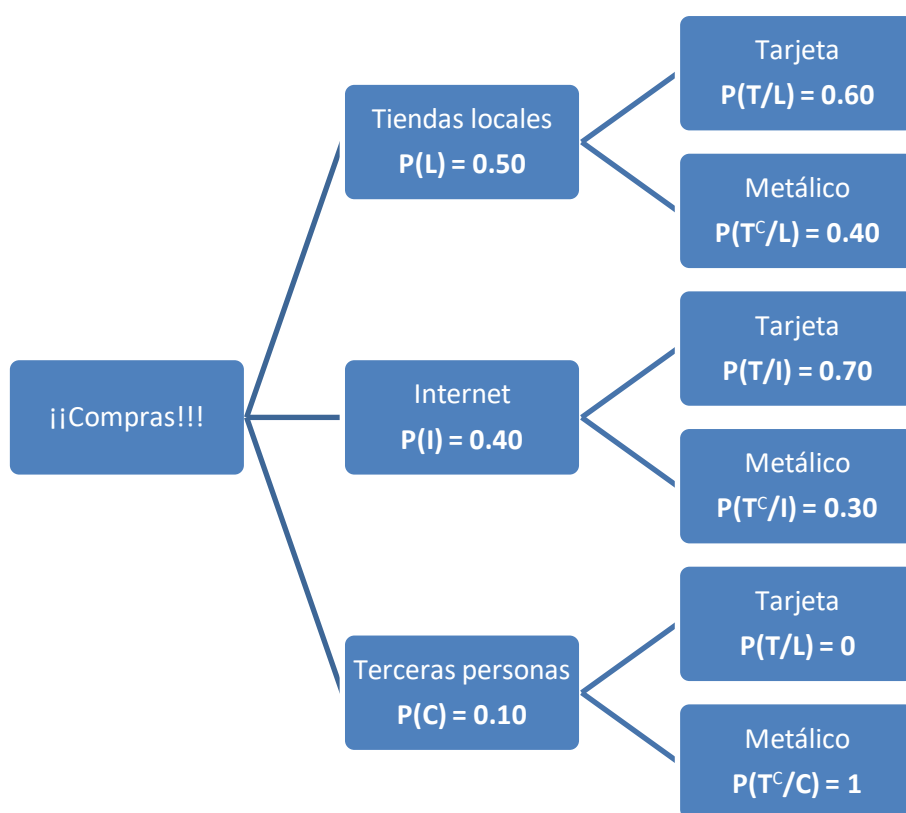
B 3 (hasta 2 puntos)

Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50% en tiendas locales, el 40% por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

- Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.
- Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.

Llamamos L al suceso “comprar en tiendas locales”, I a “comprar por internet”, C a “comprar a través de terceras personas”, T a “pagar con tarjeta” y T^C a “pagar en metálico”.

Hacemos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(T^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T^C) &= P(L)P(T^C/L) + P(I)P(T^C/I) + P(C)P(T^C/C) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 1 = \boxed{0.42}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(L/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{P(L)P(T/L)}{1 - P(T^C)} = \frac{0.5 \cdot 0.6}{1 - 0.42} = \boxed{\frac{15}{29} \approx 0.5172}$$

B 4 (hasta 2 puntos)

Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

- El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32%. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92%, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3%.
- En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30%. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2% para la proporción p de miopes de la población.

a) La proporción muestral de miopes es $p = 0.32$. Tamaño de la muestra = n .

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 92% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744

Utilizando la fórmula del error:

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.75} = \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.75} \right)^2 = \frac{0.32 \cdot 0.68}{n} \Rightarrow n = \frac{0.32 \cdot 0.68}{\left(\frac{0.03}{1.75} \right)^2} \approx 740.44
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 741 personas.

b) La proporción muestral de miopes es $p = 0.30$. Tamaño de la muestra = $n = 625$.

Para un nivel de significación del 2% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$\alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{625}} \approx 0.0426$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.3 - 0.0426, 0.3 + 0.0426) = (0.2574, 0.3426)$$



EAU ordinaria 2017
UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

- Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
- El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

A 3 (hasta 2 puntos)

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

- Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
- Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

A 4 (hasta 2 puntos)

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 0.35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18.2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

- Dibuja en el plano (P,T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
- Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$ vale $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

- Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
- Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

B 3 (hasta 2 puntos)

En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

- Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
- Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

B 4 (hasta 2 puntos)

Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2.5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13.7 años. Responder:

- ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0.4 años, con un nivel de confianza del 95%?
- Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- b) Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+6y & 2x-6 \\ -9-5y & -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+6y=9 \\ 2x-6=z \\ -9-5y=-z \\ -6+5=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-6=z \\ -9-5y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ -9-5y=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ -5y=-2x+15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -2(3-2y) + 15 \Rightarrow -5y = -6 + 4y + 15 \Rightarrow -9y = 9 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3 - 2(-1) = 5} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 5 - 6 = 4}$$

Los valores de los parámetros son $x=5$, $y=-1$, $z=4$.

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz E en busca de una regularidad.

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-2 \\ 2-2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = E^2 E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = E^3 E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+20 & 10-10 \\ 10-10 & 20+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 5^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^5 = E^4 E = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = 5^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^6 = E^5 E = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+100 & 50-50 \\ 50-50 & 100+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} = 5^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el patrón obtenido podemos decir que $E^{20} = E^{2 \cdot 10} = 5^{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

- a) Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
- b) El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

a) Averiguamos cuando se anula cada función para establecer su dominio.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -3x^2 + 24x \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Rightarrow -3x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

El dominio de la función $f(x)$ es $[0, 8]$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -4x^2 + 44x - 96 \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x^2 + 44x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{11+5}{2} = 8 = x \\ \frac{11-5}{2} = 3 = x \end{cases}$$

El dominio de la función $g(x)$ es $[3, 8]$.

Las dos funciones son polinómicas de segundo grado y sus gráficas son parábolas. Determinamos el vértice de cada una de ellas.

$$f(x) = -3x^2 + 24x \Rightarrow f'(x) = -6x + 24$$

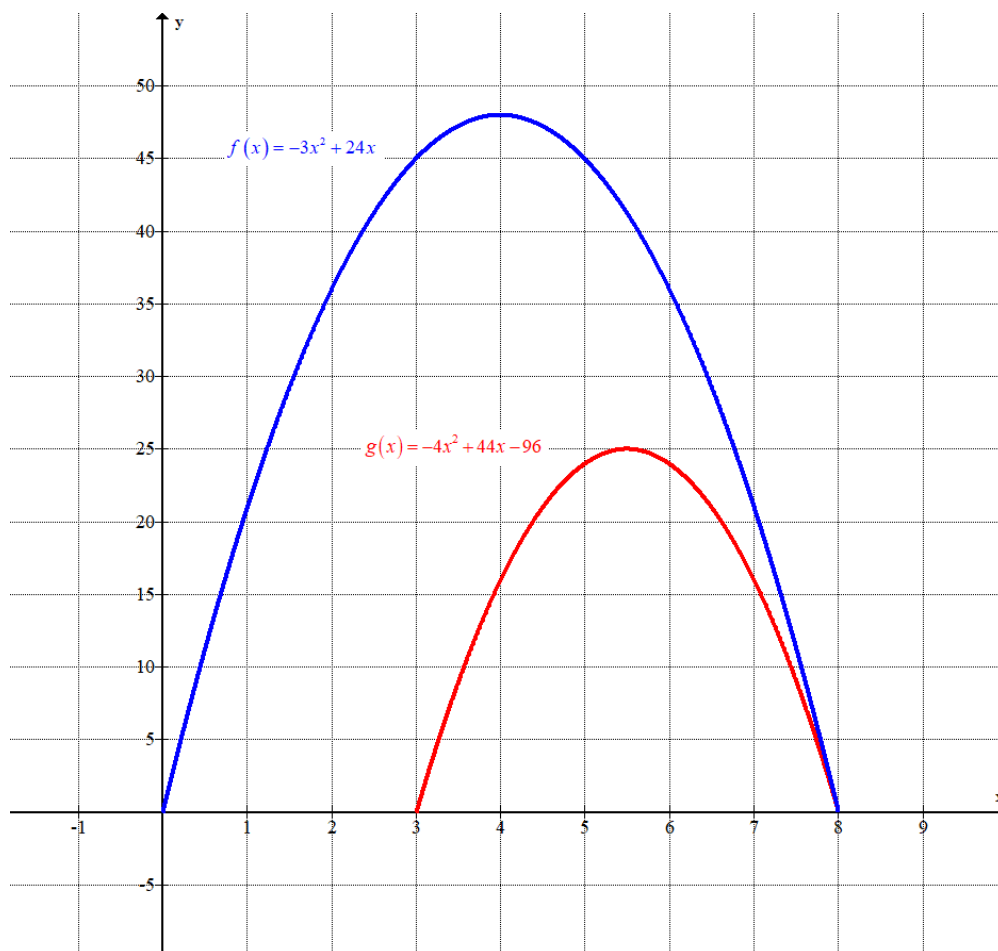
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$g(x) = -4x^2 + 44x - 96 \Rightarrow g'(x) = -8x + 44$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 44 = 0 \Rightarrow 8x = 44 \Rightarrow x = \frac{44}{8} = 5.5$$

La función $f(x)$ alcanza el máximo en $x = 4$ y la función $g(x)$ alcanza el máximo en $x = 5.5$. Obtenemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas.

x	$f(x) = -3x^2 + 24x$	x	$g(x) = -4x^2 + 44x - 96$
0	0	3	0
2	36	4	16
4	48	5.5	25
6	36	7	16
8	0	8	0



b) Obtenemos la expresión de $h(x) = f(x) - g(x)$. Esta función está definida entre 0 y 8, siendo una función a trozos pues $g(x)$ no está definida en el intervalo $(0, 3)$.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} f(x) = -3x^2 + 24x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -3x^2 + 24x - (-4x^2 + 44x - 96) = x^2 - 20x + 96 & \text{si } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} -3x^2 + 24x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 20x + 96 & \text{si } 3 \leq x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} -6x + 24 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x - 20 & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -6x + 24 = 0 \rightarrow x = 4 \notin (0, 3) \\ 2x - 20 = 0 \rightarrow x = 10 \notin (3, 8) \end{cases}$$

La función $h(x)$ no tiene puntos críticos. Estudiamos su crecimiento y decrecimiento en los dos intervalos en que está dividido su dominio.

- En el intervalo $[0,3)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $h'(1) = -6 + 24 = 18 > 0$. La función crece en $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,8]$ consideramos $x=4$ y la derivada vale $h'(4) = 8 - 20 = -12 < 0$. La función decrece en $(3,8)$.

La función $h(x)$ es creciente en $[0,3)$ y decreciente en $(3,8]$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

También se podía haber razonado el crecimiento o decrecimiento de la función $h(x)$ a partir de las gráficas.

En el intervalo $[0,3)$ la función $h(x) = f(x)$ y se aprecia en el dibujo que la función es creciente.

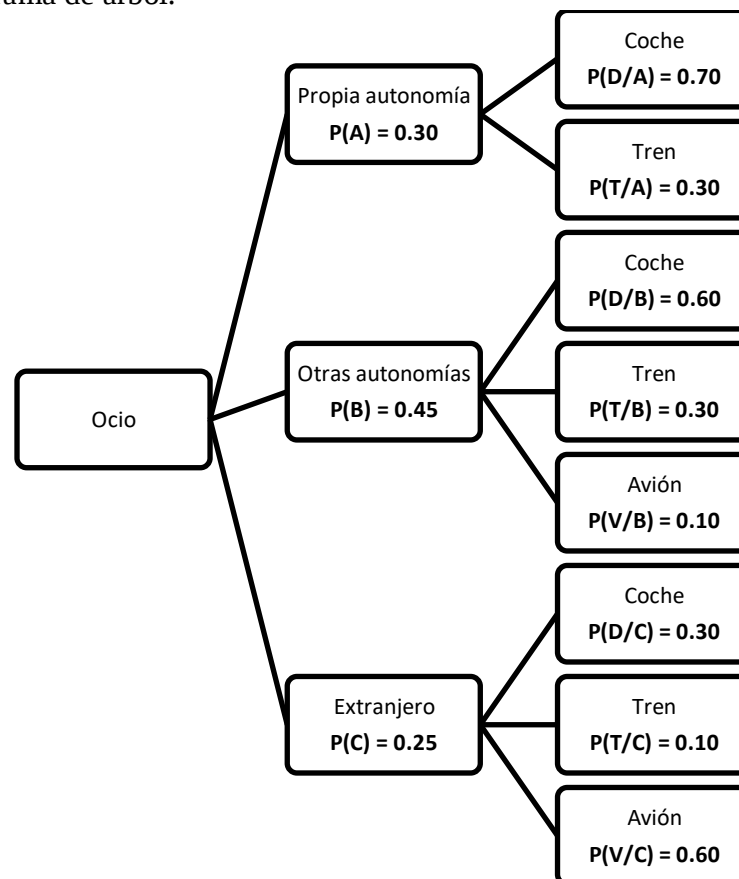
En el intervalo $(3,8]$ la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Se aprecia que la distancia entre los puntos de la gráfica de $f(x)$ y $g(x)$ es cada vez menor, siendo 9 para $x=3$ hasta valer 0 cuando $x=8$. Apreciamos que en el intervalo $(3,8]$ la función $h(x)$ decrece

A 3 (hasta 2 puntos)

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

- a) Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
 b) Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Calculamos la probabilidad del suceso contrario “viajar en tren”. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.1 = 0.25
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión es $1 - 0.25 = 0.75$.

- b) Nos piden calcular $P(C^c/V)$. Es una probabilidad a posteriori.

$$\begin{aligned}
 P(C^c/V) &= \frac{P(C^c \cap V)}{P(V)} = \frac{P(B)P(V/B)}{P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C)} = \\
 &= \frac{0.45 \cdot 0.1}{0.45 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.6} = \frac{3}{13} \approx 0.2307
 \end{aligned}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma=0.35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18.2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.

X = La edad de los alumnos que han acabado bachillerato. $X = N(\mu, 0.35)$

La media muestral es $\bar{x} = 18.2$ años. Tamaño de la muestra = $n = 120$ alumnos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 96% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{0.35}{\sqrt{120}} \approx 0.0657 \text{ años}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (18.2 - 0.0657, 18.2 + 0.0657) = (18.1343, 18.2657)$$

B 1 (hasta 3 puntos)

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

- Dibuja en el plano (P,T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
- Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

- Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Agua diaria	Siembra	Beneficio
Áreas de pimientos (P)	10P	20P	200P
Áreas de tomates (T)	20T	10T	250T
	$10P + 20T$	$20P + 10T$	$200P + 250T$

Obtenemos las restricciones;

Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno $\rightarrow 10P + 20T \leq 180 \rightarrow P + 2T \leq 18$.

El presupuesto disponible para siembra es de 160 €. $\rightarrow 20P + 10T \leq 160 \rightarrow 2P + T \leq 16$.

Un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno $\rightarrow P + T \leq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow P \geq 0; T \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} P + 2T \leq 18 \\ 2P + T \leq 16 \\ P + T \leq 10 \\ P \geq 0; T \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$P + 2T = 18$$

$$2P + T = 16$$

$$P + T = 10$$

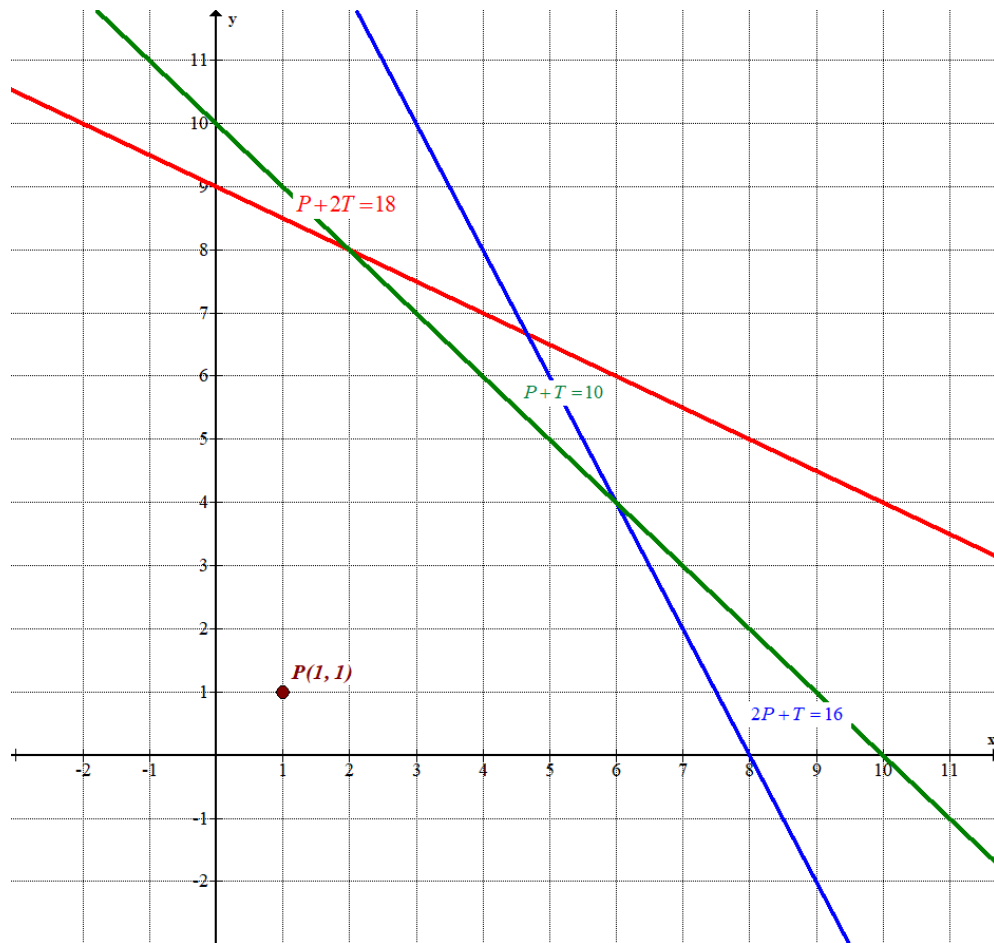
$$P \geq 0, T \geq 0$$

P	$T = \frac{18-P}{2}$
0	9
2	8
10	4

P	$T = 16 - 2P$
0	16
6	4
8	0

P	$T = 10 - P$
0	10
2	8
6	4

Primer
cuadrante



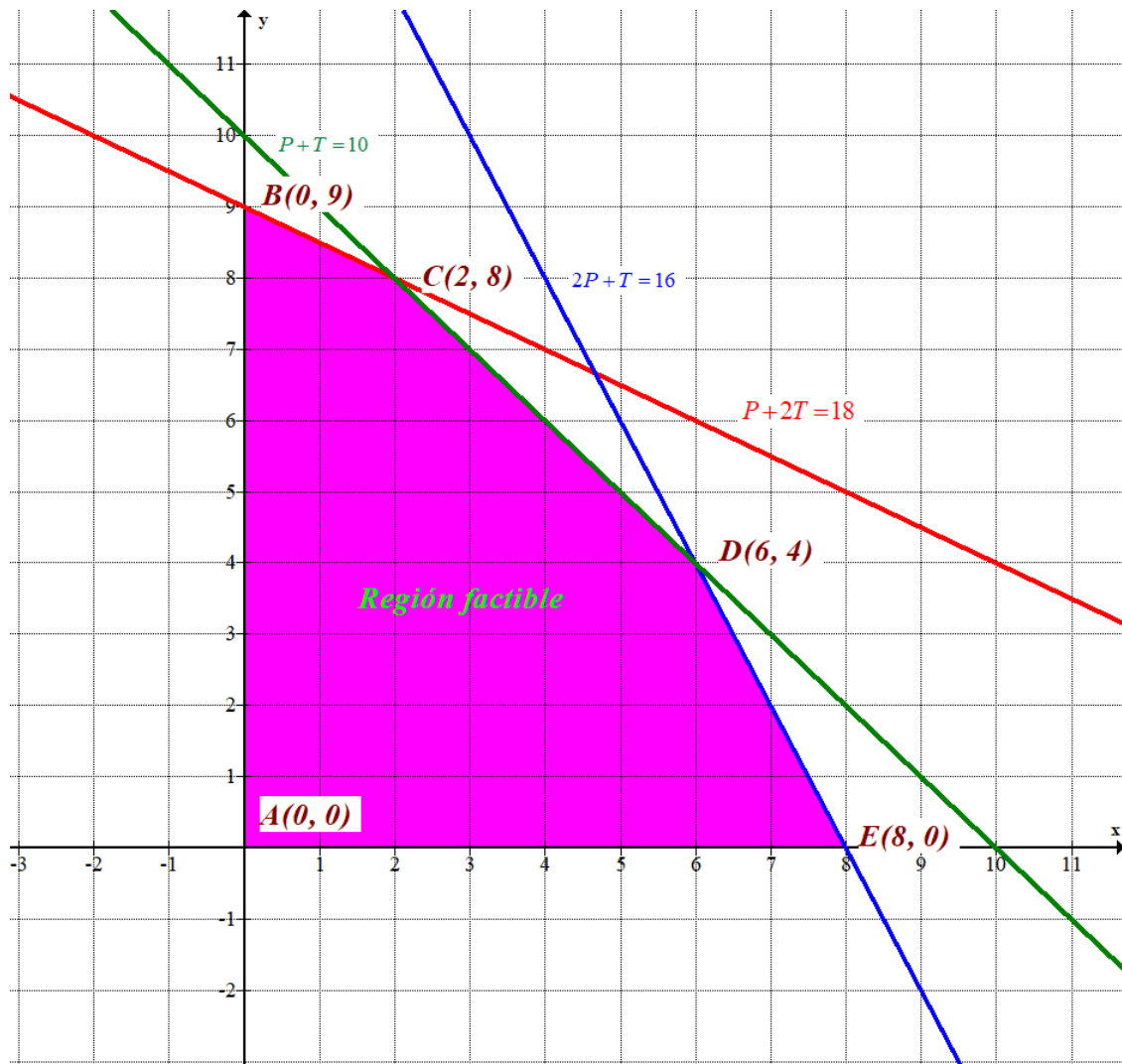
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} P + 2T \leq 18 \\ 2P + T \leq 16 \\ P + T \leq 10 \\ P \geq 0; T \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \leq 18 \\ 2 + 2 \leq 16 \\ 1 + 1 \leq 10 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



- b) La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(P,T) = 200P + 250T$.
 Valoramos la función objetivo en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,9) \rightarrow B(0,9) = 200 \cdot 0 + 250 \cdot 9 = 2250$$

$$C(2,8) \rightarrow B(2,8) = 200 \cdot 2 + 250 \cdot 8 = 2400 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(6,4) \rightarrow B(6,4) = 200 \cdot 6 + 250 \cdot 4 = 2200$$

$$E(8,0) \rightarrow B(8,0) = 200 \cdot 8 + 250 \cdot 0 = 1600$$

El valor máximo que alcanza la función en la región factible es 2400 euros y se consigue sembrando 2 áreas de pimientos y 9 de tomates.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$ vale $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

- a) Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
- b) Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

a) La función corta el eje OX en $x = 3/2$, por lo que $f(3/2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(3/2) = 0 \\ f(x) = ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \frac{3}{2} + b \Rightarrow \boxed{b = \frac{-3a}{2}}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ ax - \frac{3a}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 - 2x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax - \frac{3a}{2} = \frac{-3a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = \frac{-3a}{2} \Rightarrow 6 = -3a \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Como $a = -2$ sustituyendo tenemos que $b = \frac{-3 \cdot (-2)}{2} = 3$.

b) La función queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Encontramos los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX.

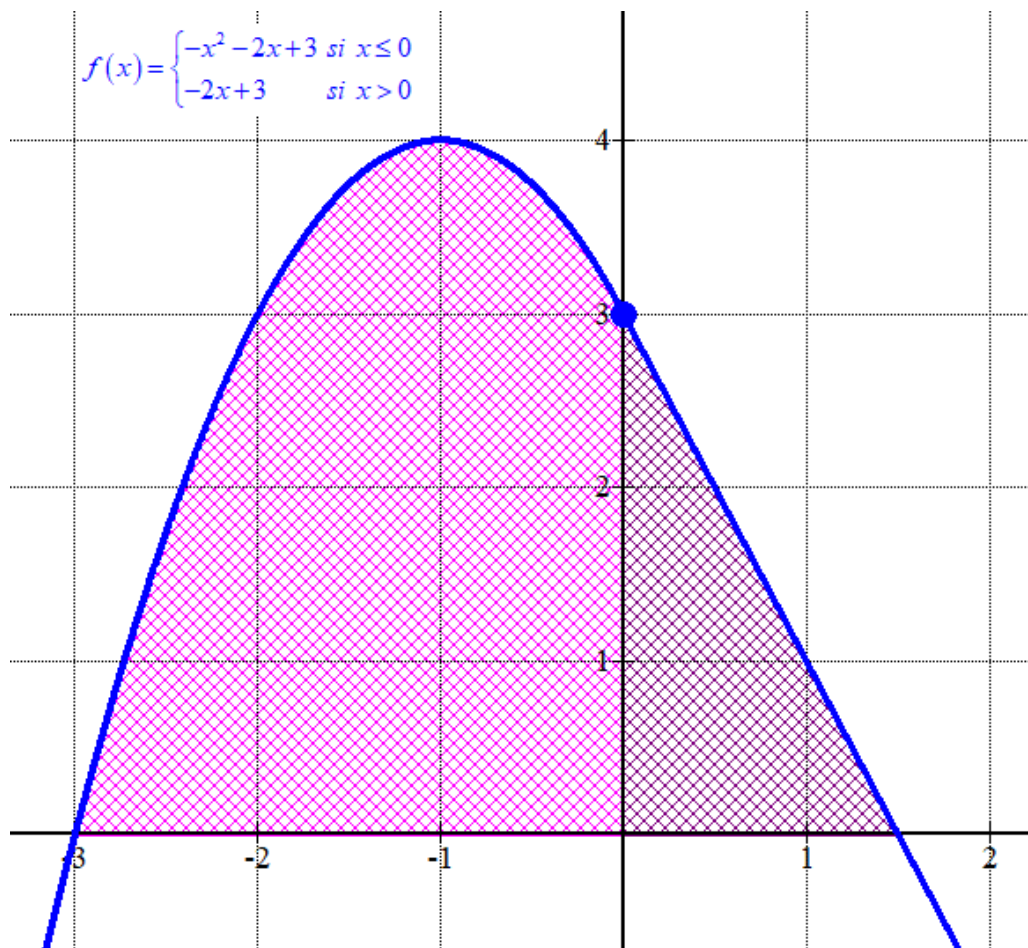
$$f(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)3}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = \boxed{-3 = x} \\ \frac{2-4}{-2} = \mathbf{1 > 0} \end{cases} \\ -2x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

El área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos la calculamos como la suma de dos integrales definidas, pues la función cambia de definición $x = 0$, situado entre -3 y 1.5 .

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^{1.5} f(x) dx \right| = \dots$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 -x^2 - 2x + 3 dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^0 = \\ &= \left[-\frac{0^3}{3} - 0^2 + 3 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3) \right] = -9 + 9 + 9 = 9 \\ \int_0^{1.5} -2x + 3 dx &= \left[-x^2 + 3x \right]_0^{1.5} = \left[-1.5^2 + 3 \cdot 1.5 \right] - \left[-0^2 + 3 \cdot 0 \right] = 2.25 \end{aligned}$$

$$\dots = 9 + 2.25 = \boxed{11.25 \text{ u}^2}$$



B 3 (hasta 2 puntos)

En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

- Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
- Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

De los 100 ratones a los que se inocula la bacteria A el 40% contrae neumonía, es decir, 40 ratones del grupo A contraen neumonía.

De los 100 ratones a los que se inocula la bacteria B el 60% contrae neumonía, es decir, 60 ratones del grupo B contraen neumonía.

De los 100 ratones a los que se inocula la bacteria C el 25% contrae neumonía, es decir, 25 ratones del grupo A contraen neumonía.

En total $40 + 60 + 25 = 125$ ratones contraen la neumonía de los 300 ratones del ensayo.

- De 300 ratones 125 contraen neumonía, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un ratón elegido al azar haya contraído la neumonía es de $\frac{125}{300} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$.
- De los 125 ratones que han contraído la neumonía hay 60 del grupo B, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un ratón con neumonía sea del grupo B es de $\frac{60}{125} = 0.48$.

B 4 (hasta 2 puntos)

Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2,5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13,7 años. Responder:

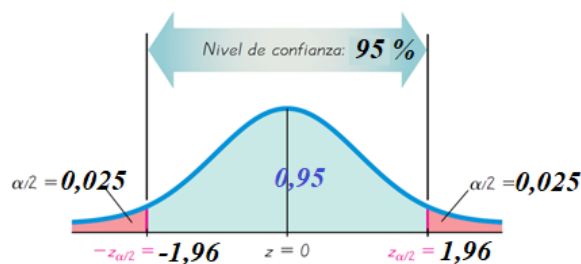
- ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0,4 años, con un nivel de confianza del 95%?
- Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?

X = Edad de los chicos y chicas presentados a una selección. $X \sim N(\mu, 2.5)$

- La media muestral es $\bar{x} = 13.7$ años.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6065
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6444
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8079
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8341
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693
1'9	0'9712	0'9719	0'9726	0'9733	0'9739	0'9746	0'9752	0'9759
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.4 = 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.5 \cdot 1.96}{0.4} \Rightarrow n = \left(\frac{2.5 \cdot 1.96}{0.4} \right)^2 = 150.0625$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 151 personas.

- Para un nivel de confianza del 95% sabemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Calculamos el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{144}} \approx 0.4083$ años.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (13.7 - 0.4083, 13.7 + 0.4083) = (13.2917, 14.1083)$$