Matemáticas II

PAU 2017 a 2026
Aragón

WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Aragón desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.
La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026 3
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2026 16
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025 28
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025 44
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2024 59
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024 74
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023 90
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2023 105
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022 123
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2022 141
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021 160
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021 176
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020 193
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020 207
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019 220
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019 237
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018 252
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2018 268
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017 284
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017 299

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. *(2 puntos)* Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2,3,120)$, $B(20,42,120)$, $C(-1,4,165)$ y $D(20,43,165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = sen(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar F(x) a la primitiva de *f(x)* que cumple F(0) = 0.

a) *(0,8 puntos)* ¿Cuál es la derivada de F(x)?

b) *(1,2 puntos)* Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$$

3. Sean A, M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4 × 4 que satisfacen la condición

$$M\cdot A = I + N\cdot A,$$

donde *I* es la matriz identidad de orden 4.

a) *(1 punto)* Justifica que A es regular.

b) *(1 punto)* Si $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1}.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

a) *(0,8 puntos)* Calcula sus asíntotas.

b) *(1,2 puntos)* Estudia su monotonía. Justifica que $f(x)\geq 8$ si $x\in[3,5]$

4.2 *(2 puntos)* Sea $f(x)=-x^3+4x^2+x-4$. Calcula el área de la región delimitada por *f(x)* y la recta tangente a *f(x)* en $x=2$.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 Tenemos dos urnas, A y B, con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) *(1 punto)* Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) *(1 punto)* Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

5.2 *(2 puntos)* El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área con la expresión $Área=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$.
- Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $Área=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $Volumen=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D* puede ser obtenido por la expresión $Volumen=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. *(2 puntos)* Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2,3,120)$, $B(20,42,120)$, $C(-1,4,165)$ y $D(20,43,165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

Para que la silla no cojee al bajarla de la mesa los cuatro puntos A, B, C y D deben ser coplanarios cuando están sobre la mesa.

Hallamos el plano π que contiene los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} A(-2,3,120)\in\pi \\ B(20,42,120)\in\pi \\ C(-1,4,165)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(20,42,120)-(-2,3,120)=(22,39,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,4,165)-(-2,3,120)=(1,1,45) \\ C(-1,4,165)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-165 \\ 22 & 39 & 0 \\ 1 & 1 & 45 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39\cdot 45(x+1)+0+22(z-165)-39(z-165)-22\cdot 45(y-4)+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1755x+1755+22z-3630-39z+6435-990y+3960=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 1755x-990y-17z+8520=0}$$

Comprobamos si los cuatro puntos son coplanarios viendo si el punto D pertenece al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 1755x-990y-17z+8520=0 \\ ¿D(20,43,165)\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1755\cdot 20-990\cdot 43-17\cdot 165+8520=0? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ¿35100-42570-2805+8520=0? \Rightarrow ¿43620-45375=0? \Rightarrow ¡¡¡NO!!!$$

Los cuatro puntos no son coplanarios y la silla cojeará al ponerla en el suelo.

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x)=sen(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar F(x) a la primitiva de *f(x)* que cumple F(0) = 0.

a) *(0,8 puntos)* ¿Cuál es la derivada de F(x)?

b) *(1,2 puntos)* Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$$

a) La derivada de F(x) es la función $f(x)=sen(x^2)$.

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}=\frac{F(0)}{0^3}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{F´(x)}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{3x^2}=\frac{sen(0^2)}{3\cdot 0^2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}\cdot\cos(x^2)}{6\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{3}=\frac{\cos(0^2)}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

3. Sean A, M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4 × 4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) *(1 punto)* Justifica que A es regular.

b) *(1 punto)* Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1}.

a) Despejamos I de la igualdad $M \cdot A = I + N \cdot A$.

$$M \cdot A - N \cdot A = I \Rightarrow (M - N)A = I \Rightarrow \boxed{M - N = A^{-1}}$$

La matriz A es regular o invertible y su inversa es $A^{-1} = M - N$.

b) En el apartado anterior hemos obtenido que $A^{-1} = M - N$. Determinamos la inversa de A usando esta igualdad.

$$A^{-1} = M - N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1 Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

a) *(0,8 puntos)* Calcula sus asíntotas.

b) *(1,2 puntos)* Estudia su monotonía. Justifica que $f(x)\geq 8$ si $x\in[3,5]$

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\frac{2^2}{2-2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La recta $x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}}{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{2}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}}=\frac{1}{1-\dfrac{2}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}}=\frac{2}{1-\dfrac{2}{\infty}}=\frac{2}{1}=2$$

La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua de la función.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

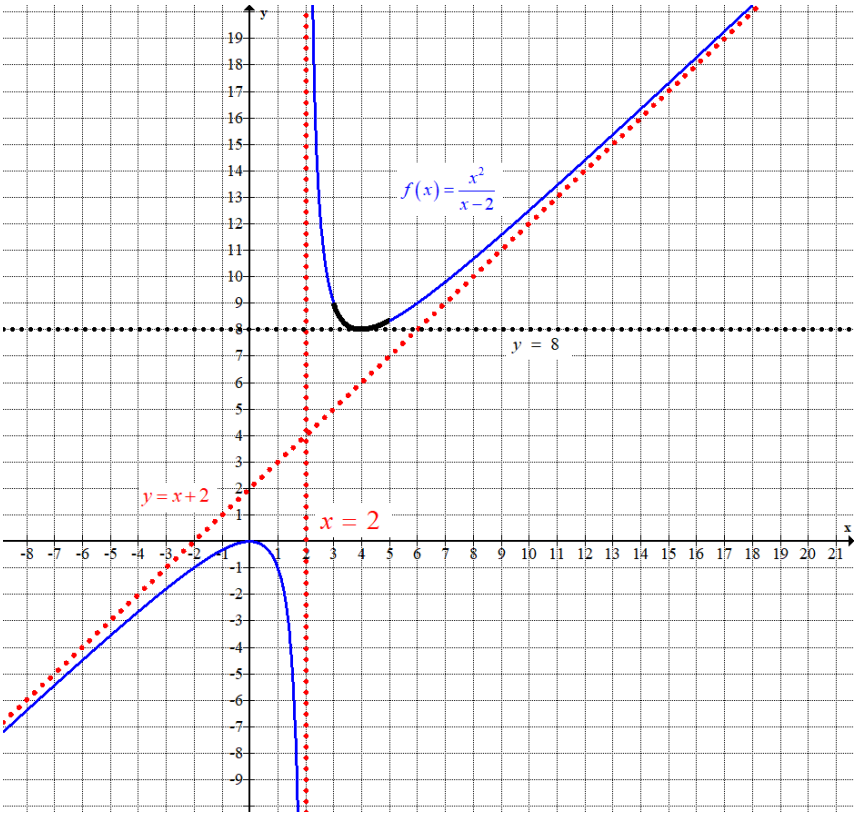
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-4=0\rightarrow\boxed{x=4}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos $x=0$, $x=4$ y el punto excluido del dominio $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{(-1)^2-4(-1)}{(-1-2)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{1^2-4\cdot 1}{(1-2)^2}=-3<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,4)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{3^2-4\cdot 3}{(3-2)^2}=-3<0$. La función decrece en $(2,4)$.
- En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos $x=5$ y la derivada vale $f'(5)=\dfrac{5^2-4\cdot 5}{(5-2)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(4,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,4)$.

La función es continua en el intervalo $[3,5]$. Hemos visto que en el intervalo $[3,4)$ la función decrece y en el intervalo $(4,5]$ la función crece. Por ello la función tiene un mínimo relativo en $x=4$ que es mínimo absoluto en el intervalo $[3,5]$. En este intervalo todos los valores de la función serán mayores o iguales que $f(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=\dfrac{16}{2}=8$.



4.2 *(2 puntos)* Sea $f(x)=-x^3+4x^2+x-4$. Calcula el área de la región delimitada por *f(x)* y la recta tangente a *f(x)* en $x=2$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=-2^3+4\cdot 2^2+2-4=6 \\ f'(x)=-3x^2+8x+1 \rightarrow f'(2)=-3\cdot 2^2+8\cdot 2+1=5 \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-6=5(x-2) \Rightarrow$$

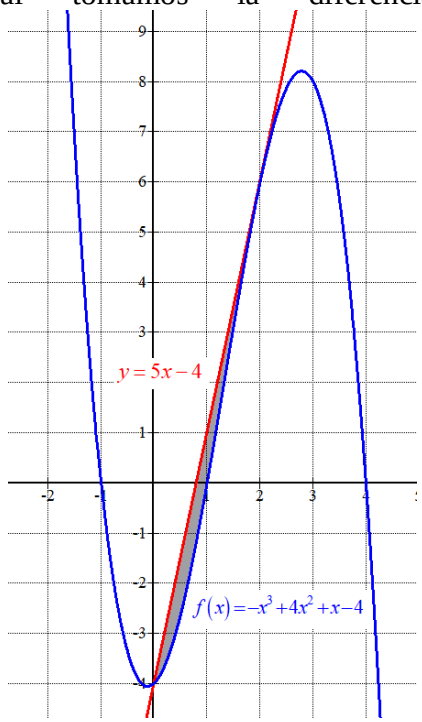
$$\Rightarrow y-6=5x-10 \Rightarrow \boxed{y=5x-4}$$

Hallamos los puntos de corte entre la gráfica de *f(x)* y la recta tangente $y=5x-4$. Sabemos que uno de ellos es $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} y=5x-4 \\ f(x)=-x^3+4x^2+x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x-4=-x^3+4x^2+x-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3+4x^2-4x=0 \Rightarrow -x(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-4x+4=0 \rightarrow \boxed{x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4}}{2}=2} \end{cases}$$

El área de la región del plano encerrada entre la gráfica de la función y la tangente a la función en $x=2$ se obtiene como el valor absoluto de la integral definida de 0 a 2 de la diferencia de las dos funciones. Si tomamos un valor $x=1\in(0,2)$ tenemos que el valor de la función es $f(1)=-1^3+4\cdot 1^2+1-4=0$ y el valor de la tangente es $y=5\cdot 1-4=1$. La función está situada por debajo de la tangente. Para calcular la integral tomamos la diferencia $(5x-4)-(-x^3+4x^2+x-4)=x^3-4x^2+4x$.



$$Área=\int_0^2 x^3-4x^2+4x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-\frac{4\cdot 2^3}{3}+2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-\frac{4\cdot 0^3}{3}+2\cdot 0^2\right]=$$

$$=4-\frac{32}{3}+8=\boxed{\frac{4}{3}\simeq 1.3333u^2}$$

El área de la región delimitada por *f(x)* y la recta tangente a *f(x)* en $x=2$ tiene un valor de $\frac{4}{3}\simeq 1.3333$ unidades cuadradas.

5.1 Tenemos dos urnas, A y B, con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) *(1 punto)* Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) *(1 punto)* Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

a) Llamamos Ra a "sacar bola roja de la urna A", Rb a "sacar bola roja de urna B", Aa a "sacar bola azul de la urna A" y Ab a "sacar bola azul de la urna B".

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(Ra)=\frac{2}{5}=0.4;\ P(Rb)=\frac{3}{5}=0.6;\ P(Aa)=\frac{3}{5}=0.6 \text{ y } P(Ab)=\frac{2}{5}=0.4$$

Calculamos la probabilidad de sacar dos bolas azules y de sacar dos bolas rojas

$$P(\text{Dos bolas azules})=P(Aa\cap Ab)=P(Aa)\cdot P(Ab)=0.6\cdot 0.4=0.24$$

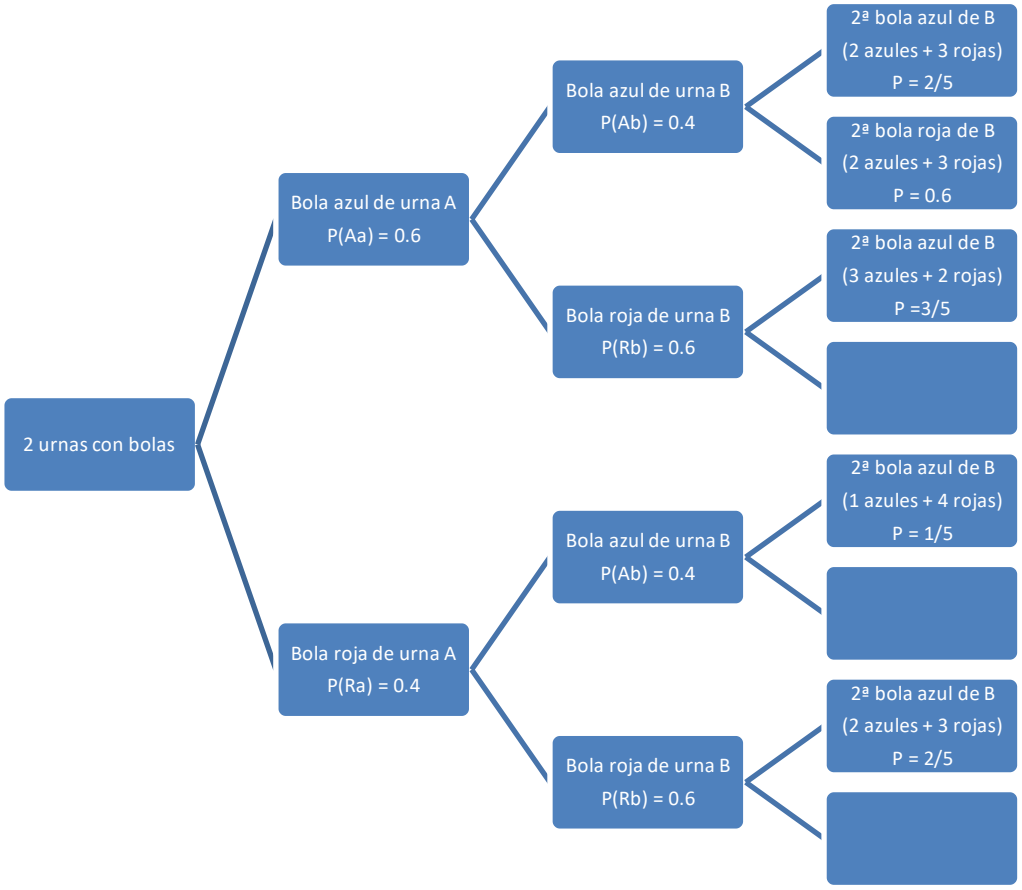
$$P(\text{Dos bolas rojas})=P(Ra\cap Rb)=P(Ra)\cdot P(Rb)=0.4\cdot 0.6=0.24$$

La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color es la suma de las probabilidades obtenidas previamente: 0.24 + 0.24 = 0.48.

Como sacar dos bolas de distinto color es el suceso contrario su probabilidad es 1 – 0.48 = 0.52.

Como 0.52 > 0.48 podemos concluir que es más probable sacar dos bolas de distinto color.

b) Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de sacar una bola azul de la urna B tras el intercambio de bolas es la suma de cada una de las probabilidades que aparecen favorables a este suceso en el diagrama de árbol.

$$P\left(2^{a}\, bola\ azul\right) = 0.6\cdot 0.4\cdot \frac{2}{5} + 0.6\cdot 0.6\cdot \frac{3}{5} + 0.4\cdot 0.4\cdot \frac{1}{5} + 0.4\cdot 0.6\cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{11}{25} = 0.44}$$

5.2 *(2 puntos)* El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Consideramos X = "el consumo diario de agua (en litros) por persona en los hogares de la comunidad" $X = N(135, \sigma)$.

Los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día → $P(X > 148.44) = 0.20$.

Hallamos el valor de la desviación típica.

$$P(X > 148.44) = 0.20 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 135}{\sigma} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{148.44 - 135}{\sigma} \right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{13.44}{\sigma} \right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{13.44}{\sigma} \right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.84 = \frac{13.44}{\sigma} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{13.44}{0.84} = 16}$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995

La distribución normal del consumo diario de agua por dia y persona tiene desviación típica $\sigma = 16$ litros. $X = N(135, 16)$.

Determinamos la cantidad de agua *c* que consumen el 20% de los hogares que consumen menos.

$$P(X < c) = 0.2 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 135}{16} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{c - 135}{16} \right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > -\frac{c - 135}{16} \right) = 0.2 \Rightarrow$$

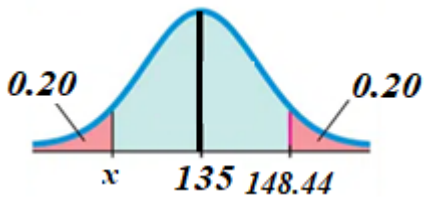
$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{135 - c}{16} \right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{135 - c}{16} \right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{135 - c}{16} = 0.84 \Rightarrow 135 - c = 13.44 \Rightarrow 135 - 13.44 = c \Rightarrow \boxed{c = 121.56}$$

El 20 % de los hogares con menor consumo tienen un consumo por persona y día inferior a 121,56 litros.

OTRA FORMA DE RAZONARLO

La media de la distribución normal es de 135 litros. El 20% de los hogares de mayor consumo tienen un consumo superior a 148,44 litros. Este consumo supera en 148.44 – 135 = 13.44 litros la media de consumo.
Por la simetría de la distribución el 20% de los hogares con menor consumo estarán 13.44 litros por debajo de la media, es decir, por debajo de 135 – 13.44 = 121.56 litros por persona y día.



Los hogares a los que le bajarán las tasas tienen un consumo diario por persona inferior a 121.56 litros.

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2026
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k, b_k y c_k, respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

donde a_0, b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

2. Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0,+\infty)$ tal que $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$, y $f(1) = 2e - 2$:

a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Justifica que $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

3. Sean los planos $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d : 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?

b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5

respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

4.2 En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

a) (0,5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?

b) (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?

c) (0,5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 (2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes.
Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

5.2 (2 puntos) Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{sen(x)}-e^{x}}{1-\cos(x)}$.

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área con la expresión $Área = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$.
- Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $Área = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $Volumen = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D* puede ser obtenido por la expresión $Volumen = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k, b_k y c_k, respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k+1$ y en el mes anterior, k:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

donde a_0, b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in N$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

a) Calculamos los ejemplares que hay un mes después.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100+124 \\ 100+234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix}$$

Calculamos los ejemplares que hay dos meses después.

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100+224 \\ 100+334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 434 \end{pmatrix}$$

Pasados 2 meses hay 100 ejemplares de la especie A (no cambia), 324 de la especie B (200 más que al principio) y 334 de la especie C (200 más que al principio).

b)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \cdot M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^3 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}}$$

c) Calculamos la potencia k-ésima de M.

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+1 & 1 & 0 \\ 1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+1 & 1 & 0 \\ 2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo visto en el apartado anterior cuando pasa un mes la especie A se mantiene en número de ejemplares, la especie B y C aumentan en 100 ejemplares.

Cuando pasen *k* meses la especie A seguirá con 100 ejemplares y las especies B y C habrán aumentado en $k \cdot 100$ ejemplares.

2. Sea *f(x)* una función continua definida en $[0,+\infty)$ tal que $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x>0$, y $f(1)=2e-2$:

a) (1 punto) Calcula *f(x)* y $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. Justifica que $f(x)\geq 0, \forall x\geq 0$.

a) La función *f(x)* es la primitiva de $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x>0$. Determinamos su expresión.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\rightarrow dx=2\sqrt{x}dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int \frac{e^t}{\cancel{\sqrt{x}}}2\cancel{\sqrt{x}}\,dt=\int 2e^t dt=2e^t=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\end{array}\right\}=2e^{\sqrt{x}}+K$$

Hemos obtenido que $f(x)=2e^{\sqrt{x}}+K$. Aplicamos que $f(1)=2e-2$ para obtener el valor de K.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=2e^{\sqrt{x}}+K\\ f(1)=2e-2\end{array}\right\}\Rightarrow 2e-2=2e+K\Rightarrow \boxed{K=-2}$$

La función tiene la expresión $f(x)=2e^{\sqrt{x}}-2$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2e^{\sqrt{x}}-2=2e^{\sqrt{0}}-2=2-2=0$$

b) Calculamos la derivada de *f(x)*.

$$f(x)=2e^{\sqrt{x}}-2\Rightarrow f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

Esta expresión de la derivada es positiva para todo valor de $x>0$.

$$\left.\begin{array}{l}x>0\rightarrow \sqrt{x}>0\\ e^{\sqrt{x}}>0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}>0$$

Tenemos que *f(0) = 0*, la función es continua y creciente entonces la función siempre tendrá valores positivos.

3. Sean los planos $\pi: x-2y+4z+1=0$ y $\pi_d: 2x-3y+6z=d$, con $d \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in$ R para el cual los planos π y π_d no se corten?

b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d.

a) Estudiamos la posición relativa de los dos planos. Los dos planos son paralelos o coincidentes si sus vectores normales tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-2y+4z+1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-2,4)\\ \pi_d: 2x-3y+6z=d \rightarrow \vec{n_d}=(2,-3,6)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6}$$

Los vectores normales de los dos planos no tienen coordenadas proporcionales. Los planos se cortan independientemente del valor de *d*.

No existe ningún valor $d \in$ R para el cual los planos π y π_d no se corten.

b) Para $d = -2$ hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos de corte de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-2y+4z+1=0\\ \pi_d: 2x-3y+6z=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=2y-4z-1\\ 2x-3y+6z=-2\end{array}\right\} \Rightarrow 2(2y-4z-1)-3y+6z=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y-8z-2-3y+6z+2=0 \Rightarrow y-2z=0 \Rightarrow \boxed{y=2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2\cdot 2z-4z-1=-1} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x=-1 \\ y=2\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Los puntos de corte entre los planos π y π_d son los puntos pertenecientes a la recta con ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x=-1 \\ y=2\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

4.1 Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

a) Para sacar nota mayor o igual a 9 solo se puede conseguir sacando un 10, es decir, respondiendo correctamente a las 4 preguntas.

La probabilidad de que respondiendo al azar a una pregunta esta respuesta sea correcta vale $\frac{1}{5}$. La probabilidad de responder correctamente a las 4 preguntas vale $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}=0.016$.

b) Si se responde mal a las 4 preguntas se obtiene un 0.

Si se responde mal a 3 preguntas y correctamente a 1 obtenemos $2.5 - 3 \cdot 0.625 = 0.625$.

Si se responde mal a 2 preguntas y correctamente a las otras 2 obtenemos $2.5 \cdot 2 - 2 \cdot 0.625 = 3.75$.

Si se responde mal a 1 pregunta y correctamente a las otras 3 obtenemos $2.5 \cdot 3 - 0.625 = 6.875$.

Si se responde bien a todas las preguntas obtenemos 10.

Solo se obtiene una nota superior a 5 cuando se responde bien a todas las preguntas o cuando respondemos mal a solo una de ellas.

Sabemos que la probabilidad de acertar las 4 preguntas vale $\frac{1}{625}$.

Calculamos la probabilidad de fallar 1 de las 4 preguntas.

Esto puede ocurrir de 4 formas distintas (fallando la 1ª, la 2ª, la 3ª o la 4ª) y la probabilidad de fallar la 1ª pregunta y acertar el resto vale $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5^4}$.

La probabilidad de fallar una cualquiera de las 4 preguntas y acertar las otras tres vale $4\cdot\frac{4}{5^4}=\frac{16}{625}$.

Para sacar nota mayor que 5 debemos fallar 1 pregunta o ninguna. La probabilidad de sacar nota mayor que 5 vale $\frac{1}{625}+\frac{16}{625}=\frac{17}{625}$.

La probabilidad de sacar nota menor que 5 vale $1-\frac{17}{625}=\frac{608}{625}=0.9728$.

4.2 En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

a) (0,5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?

b) (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?

c) (0,5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

Llamamos T1 al suceso "se utiliza la técnica 1 en la intervención", T2 al suceso "se utiliza la técnica 2 en la intervención", G a "La lesión es grave", L a "La lesión es leve" y E a "la intervención ha sido efectiva".

a) Ha habido 30 +120 + 102 + 36 = 288 intervenciones efectivas. De estas 120 +30 = 150 han sido realizadas con la técnica 1 y 102 + 36 = 138 con la técnica 2.

Como 150 > 138 podemos afirmar que si la intervención ha sido efectiva es más probable que se haya utilizado la técnica 1.

b) Para lesiones leves con la técnica 1 se han realizado 136 intervenciones siendo efectivas 120 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 1 es $\frac{120}{136}=\frac{15}{17}\simeq 0.8824$.

Para lesiones leves con la técnica 2 se han realizado 40 intervenciones siendo efectivas 36 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 2 es $\frac{36}{40}=0.9$.

Como 0.9 > 0.8824 podemos decir que la técnica 2 tiene más probabilidad de ser efectiva en una intervención de lesión leve.

Para lesiones graves con la técnica 1 se han realizado 44 intervenciones siendo efectivas 30 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 1 es $\frac{30}{44}=\frac{15}{22}\simeq 0.6818$.

Para lesiones leves con la técnica 2 se han realizado 140 intervenciones siendo efectivas 102 de

ellas. La proporción de efectividad con la técnica 2 es $\frac{102}{140}=\frac{51}{70}\simeq 0.7286$.

Como 0.7286 > 0.6818 podemos decir que la técnica 2 tiene más probabilidad de ser efectiva en una intervención de lesión grave.

c) Calculamos la probabilidad de que la intervención sea efectiva con la técnica 1 y con la técnica 2 para determinar cual de ellas es mayor.

$$P(E/T1)=\frac{30+120}{44+136}=\frac{150}{180}=\simeq 0.8333$$

$$P(E/T2)=\frac{102+36}{140+40}=\frac{138}{180}\simeq 0.7666$$

Como $\frac{150}{180}>\frac{138}{180}$ podemos decir que la probabilidad de efectividad de la intervención es mayor con la técnica 1.

Esta conclusión la hemos realizado teniendo en cuenta el total de intervenciones, independientemente de la gravedad de la lesión.

Sin embargo, en el apartado anterior teniendo en cuenta si la lesión es leve o grave era más efectiva la técnica 2 en ambos casos. La técnica 2 parece ser la más efectiva si estudiamos por separado los casos leves y los graves.

5.1 (2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes.
Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

Llamamos *x* al número de archiveros que se añaden al equipo y *f(x)* el número de expedientes que se digitalizan mensualmente por el equipo de archiveros.

Si $x=0$ nos dicen que $f(0)=80\cdot 50=4000$.

Si $x=1$ nos dicen que $f(1)=(80-1)(50+1)=4029$.

Si $x=2$ nos dicen que $f(2)=(80-2)(50+2)=4056$.

Tenemos que $f(x)=(80-x)(50+x)=4000+80x-50x-x^2=-x^2+30x+4000$, siendo $x\in[0,20]$.

Obtenemos la derivada de esta función y buscamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x)=-x^2+30x+4000 \Rightarrow f'(x)=-2x+30$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+30=0 \Rightarrow 2x=30 \Rightarrow \boxed{x=15}$$

Sustituimos $x=15$ en la segunda derivada.

$$f'(x)=-2x+30 \Rightarrow f''(x)=-2 \Rightarrow f''(15)=-2<0$$

Para $x=15$ se anula la primera derivada y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo para este valor.
Con 50 + 15 = 65 archiveros se digitalizan $(80-15)(50+15)=4225$, que es el máximo número de expedientes que se pueden digitalizar mensualmente.

5.2 (2 puntos) Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{sen(x)}-e^{x}}{1-\cos(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{sen(x)}-e^{x}}{1-\cos(x)}=\frac{e^{sen(0)}-e^{0}}{1-\cos(0)}=\frac{e^{0}-e^{0}}{1-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\cdot e^{sen(x)}-e^{x}}{-(-sen(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\cdot e^{sen(x)}-e^{x}}{sen(x)}=\frac{\cos(0)\cdot e^{sen(0)}-e^{0}}{sen(0)}=$$

$$=\frac{1\cdot e^{0}-e^{0}}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)\cdot e^{sen(x)}+\cos(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{sen(x)}-e^{x}}{\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\cos^{2}(x)-sen(x)\right]\cdot e^{sen(x)}-e^{x}}{\cos(x)}=$$

$$=\frac{\left[\cos^{2}(0)-sen(0)\right]\cdot e^{sen(0)}-e^{0}}{\cos(0)}=\frac{\left[1^{2}-0\right]e^{0}-e^{0}}{1}=\boxed{0}$$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos A(0, 0, 0), B(2, 0, 1/2) y C(3/2, 3, 1) y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos E(0, 1, 3) y F(3, 2, 3) (es decir, $D = E + \lambda \overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).
a) *(1,5 puntos)* Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).
b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.
2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + my - 6z = -8 \\ -x - 2y + m^2 z = m \end{cases}$$

Con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.
a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.
b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

2.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases} A \cdot B = -B \\ A \cdot C = B - C \end{cases}.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.
b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A \cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot D = D$.

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) *(0.5 puntos)* Dada la función $f(x)=2+sen(x)\cos(x)$ con $x\in\mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) *(1 punto)* Obtén $\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx$.

c) *(1 punto)* Calcula (si existe), en función del valor de $k\in\mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}$$

3.2 Sea $g(x)=x-sen(x)$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g(x)*.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de *g(x)* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) *(1 punto)* Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) *(1 punto)* Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?

c) *(0,5 puntos)* Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1,25 puntos)* El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) *(1,25 puntos)* El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

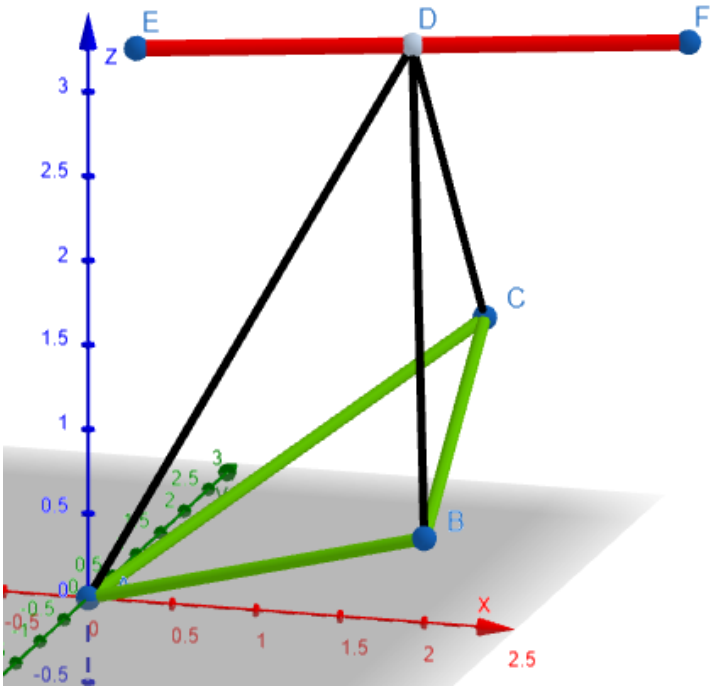
SOLUCIONES

1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos A(0, 0, 0), B(2, 0, 1/2) y C(3/2, 3, 1) y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos E(0, 1, 3) y F(3, 2, 3) (es decir, $D = E + \lambda\overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).

a) *(1,5 puntos)* Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

La situación planteada es la del dibujo donde hemos elegido un punto D de la viga EF.



a) Hallamos las coordenadas del punto D.

$$\overrightarrow{EF} = (3,2,3) - (0,1,3) = (3,1,0)$$

$$D = E + \lambda\overrightarrow{EF} = (0,1,3) + \lambda(3,1,0) = (3\lambda, 1+\lambda, 3)$$

El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2,0,0.5) - (0,0,0) = (2,0,0.5)\\ \overrightarrow{AC} = (1.5,3,1) - (0,0,0) = (1.5,3,1)\\ \overrightarrow{AD} = (3\lambda, 1+\lambda, 3) - (0,0,0) = (3\lambda, 1+\lambda, 3)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 3 & 1 \\ 3\lambda & 1+\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 18 + 0.75(1+\lambda) - 4.5\lambda - 2(1+\lambda) = 18 + 0.75 + 0.75\lambda - 4.5\lambda - 2 - 2\lambda = 16.75 - 5.75\lambda$$

El volumen del tetraedro depende del valor de λ según la expresión:

$$V(\lambda)=\frac{16.75-5.75\lambda}{6};\ \text{siendo}\ \lambda\in[0,\ 1]$$

El máximo valor se alcanza para el valor de λ más pequeño, es decir, para λ = 0.

El volumen máximo es de $V(0)=\frac{-5.75\cdot 0+16.75}{6}=\frac{16.75}{6}\simeq 2.79167$ metros cúbicos.

b) Para $\lambda=1$ el volumen de la pirámide es $V(1)=\frac{-5.75+16.75}{6}=\frac{11}{6}$ metros cúbicos.

El área de la base es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(2,0,0.5)\\ \overrightarrow{AC}=(1.5,3,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 0 & 0.5\\ 1.5 & 3 & 1\end{vmatrix}=0.75j+6k-2j-1.5i=(-1.5,-1.25,6)$$

$$Área\ Base=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-1.5)^2+(-1.25)^2+6^2}}{2}=\frac{7\sqrt{13}}{8}$$

Despejamos la altura de la pirámide en la expresión del volumen.

$$Volumen=\frac{Área\,base\cdot Altura}{3}\Rightarrow\frac{11}{6}=\frac{\frac{7\sqrt{13}}{8}\cdot Altura}{3}\Rightarrow\frac{11}{2}=\frac{7\sqrt{13}}{8}\cdot Altura\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Altura=\frac{88}{14\sqrt{13}}=\boxed{\frac{44\sqrt{13}}{91}\simeq 1.7433\ metros}$$

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 8x+my-6z=-8 \\ -x-2y+m^2z=m \end{cases}$$

Con $m\in\mathbb{R}$ un parámetro.

a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m=1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & m & -6 & -8 \\ -1 & -2 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{vmatrix}=\{\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a\}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{vmatrix}=\{\text{Fila } 2^a-8\cdot\text{Fila } 1^a\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m-16 & 2 \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{vmatrix}=(m-16)(m^2-1)=(m-16)(m-1)(m+1)$$

$$|A|=0\Rightarrow(m-16)(m-1)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{m=16}\\ \boxed{m=1}\\ \boxed{m=-1}\end{cases}$$

El determinante se anula para $m=16$, $m=1$ y $m=-1$. Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m\neq 16$, $m\neq 1$ *y* $m\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=16$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 16 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 256 & 16 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a+Fila\,1^a & & & \\ -1 & -2 & 256 & 16 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 255 & 15\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-8\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 16 & -6 & -8 \\ -8 & -16 & 8 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^{a}-255\cdot Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 510 & 30 \\ 0 & 0 & -510 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 30 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 0 & 1 & 0}^{A/B} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 30 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a}+Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-8\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 1 & -6 & -8 \\ -8 & -16 & 8 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -15 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & -1}^{A/B} \\ 0 & -15 & 2 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 4. $m=-1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & -1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a}+Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-8\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 8 & -1 & -6 & -8 \\ -8 & -16 & 8 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -17 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & -1}^{A/B} \\ 0 & -17 & 2 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -2 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 16$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema tiene 1 solución, si $m = 16$ o $m = -1$ el sistema tiene 0 soluciones y si $m = 1$ el sistema ∞ soluciones.

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A/B}\right)_{A} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y-z=-1 \\ -15y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y-z=-1 \\ 2z=15y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y-z=-1 \\ z=\frac{15}{2}y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2y-\frac{15}{2}y=-1 \Rightarrow x-\frac{11}{2}y=-1 \Rightarrow x=-1+\frac{11}{2}y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-1+\frac{11}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{15}{2}\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=-1+\frac{11}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{15}{2}\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$.

2.2 Sea $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases}A\cdot B=-B\\A\cdot C=B-C\end{cases}.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A\cdot D=D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot D=D$.

a) Para que sean posibles los productos $A\cdot B$ y $A\cdot C$ las matrices columna deben ser de dimensiones 4×1.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b\\-c+d\\-d\end{pmatrix}\qquad A\cdot C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e+f\\f\\-g+h\\-h\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}A\cdot B=-B\\A\cdot C=B-C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}a+b\\b\\-c+d\\-d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}e+f\\f\\-g+h\\-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-a\to b=-2a\\b=-b\to\boxed{b=0}\\-c+d=-c\to\boxed{d=0}\\-d=-d\to 0=0\\\\e+f=a-e\to 2e+f=a\\f=b-f\to 2f=b\\-g+h=c-g\to h=c\\-h=d-h\to\boxed{0=d}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=-2a\to\boxed{a=0}\\2e+f=a\\2f=0\to\boxed{f=0}\\h=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2e+0=0\to\boxed{e=0}\\h=c\end{cases}\Rightarrow\boxed{h=c}$$

Las matrices columna que cumplen lo pedido son $B=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0\\0\\g\\c\end{pmatrix}$

b) Suponemos que se cumple $A\cdot D=D$ y sabemos que existe la inversa de la matriz A. Multiplicamos en ambos lados de la igualdad por la inversa de A.

$$A\cdot D=D\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot D=A^{-1}\cdot D\Rightarrow I\cdot D=A^{-1}\cdot D\Rightarrow A^{-1}\cdot D=D$$

3.1 a) *(0.5 puntos)* Dada la función $f(x)=2+sen(x)\cos(x)$ con $x\in\mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) *(1 punto)* Obtén $\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx$.

c) *(1 punto)* Calcula (si existe), en función del valor de $k\in\mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}$$

a) Determinamos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x)=2+sen(x)\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x)\cos(x)-sen(x)sen(x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$

b) Acabamos de ver que la derivada del denominador del integrando es el numerador.

$$\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx=\ln\left|2+sen(x)\cos(x)\right|+K$$

c) Para el cálculo del límite influye es signo del exponente del denominador. Analizamos tres situaciones diferentes, en función de que el exponente sea negativo, cero o positivo.

CASO 1. $k\in\mathbb{Z}$ y $k\le -1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\left\{\begin{matrix}2k<0\\-2k>0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 1}\left(x^4+x^3-x^2-x\right)\left(x^2-1\right)^{-2k}=$$

$$=\left(1^4+1^3-1^2-1\right)\left(1^2-1\right)^{-2k}=0\cdot 0^{-2k}=\boxed{0}$$

CASO 2. $k\in\mathbb{Z}$ y $k=0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{0}}=\lim_{x\to 1}x^4+x^3-x^2-x=1^4+1^3-1^2-1=\boxed{0}$$

CASO 3. $k\in\mathbb{Z}$ y $k\ge 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\frac{1^4+1^3-1^2-1}{\left(1^2-1\right)^{2k}}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{2k\left(x^2-1\right)^{2k-1}(2x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\frac{4\cdot 1^3+3\cdot 1^2-2\cdot 1-1}{4k\cdot 1\left(1^2-1\right)^{2k-1}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}k\ge 1\to 2k\ge 2\to 2k-1\ge 1\\2k-1\text{ es impar}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\\lim_{x\to 1^+}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\frac{4}{0^+}=+\infty\end{matrix}\right.=\boxed{\infty}$$

Resumiendo: Si $k\le 0$ el límite vale 0 y si $k\ge 1$ el límite vale ∞.

3.2 Sea $g(x)=x-sen(x)$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g(x)*.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de *g(x)* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

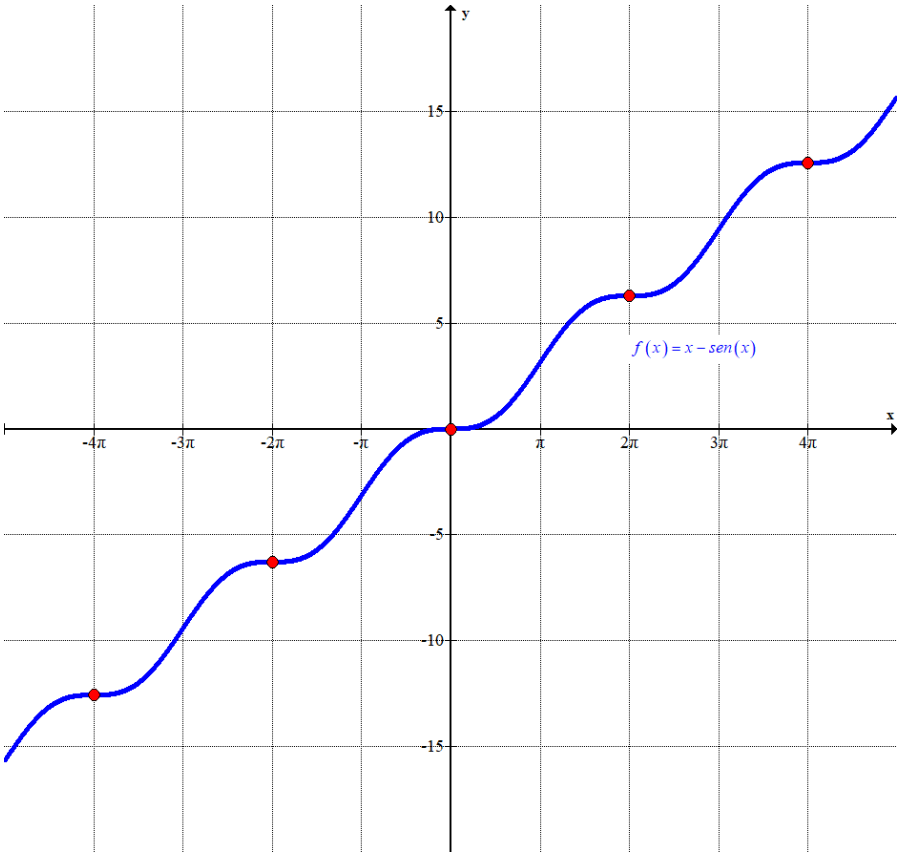
c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$.

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$g(x)=x-sen(x)\Rightarrow g'(x)=1-\cos(x)$$

$$g'(x)=0\Rightarrow 1-\cos(x)=0\Rightarrow\cos(x)=1\Rightarrow\begin{cases}\dots\\ x=-2\pi\\ x=0\\ x=2\pi\\ \dots\end{cases}$$

La derivada es siempre positiva pues $\cos(x)\le 1\rightarrow 0\le 1-\cos(x)$ → $g'(x)=1-\cos(x)\ge 0$. La función crece en todo su dominio $\mathbb{R}$. La función tiene puntos de inflexión en $x=-2\pi$, $x=0$, $x=2\pi,\dots$



b) Como la función es siempre creciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ el mínimo absoluto lo tiene en $x=\frac{\pi}{2}$ y el máximo absoluto se tiene en $x=\pi$.

Para $x=\frac{\pi}{2}$ la función vale $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$. El mínimo absoluto tiene coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Para $x=\pi$ la función vale $g(\pi)=\pi-sen(\pi)=\pi$. El máximo absoluto tiene coordenadas (π,π).

c) Hallamos los puntos de corte de la función $h(x)=xg(x)=x\left(x-sen(x)\right)=x^2-xsen(x)$ con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=xg(x)=x\left(x-sen(x)\right) \\ Eje\ X\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x\left(x-sen(x)\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-sen(x)=0\rightarrow\boxed{x=0}\end{cases}$$

La gráfica de la función corta el eje X fuera del intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

El área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$ es el valor de la integral definida entre $\frac{\pi}{2}$ y π de la función.

Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\int h(x)\,dx=\int x^2-xsen(x)\,dx=\int x^2dx-\int xsen(x)\,dx=\ldots$$

$$\int xsen(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=sen(x)\,dx\rightarrow v=\int sen(x)\,dx=-\cos(x)\end{array}\right\}=$$

$$=x\left(-\cos(x)\right)-\int-\cos(x)\,dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)\,dx=-x\cos(x)+sen(x)+K$$

$$\ldots=\frac{x^3}{3}+x\cos(x)-sen(x)+K$$

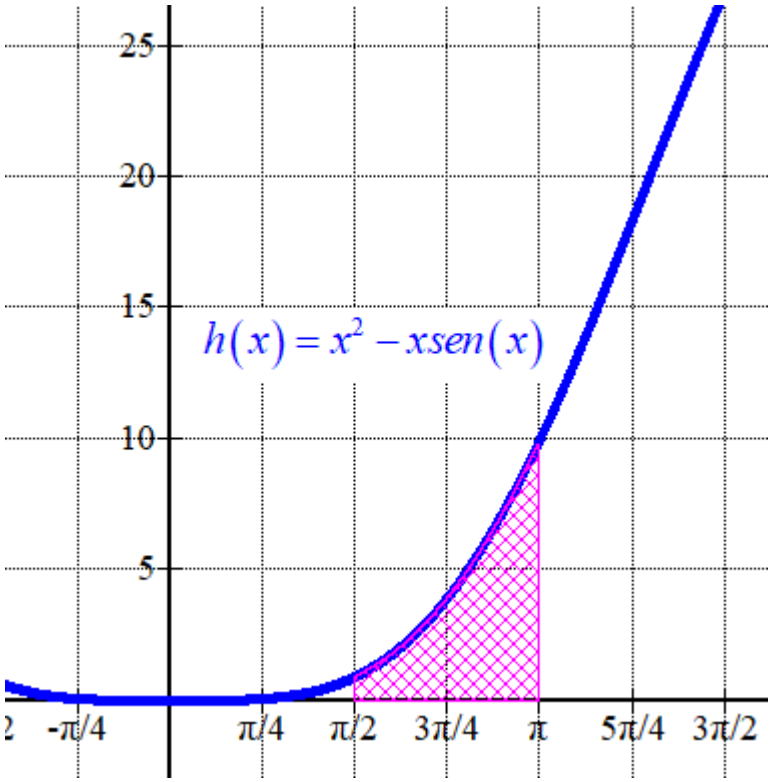
Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$Área=\int_{\pi/2}^{\pi}h(x)\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi}x^2-xsen(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\cos(x)-sen(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=\left[\frac{\pi^3}{3}+\pi\cos(\pi)-sen(\pi)\right]-\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$= \frac{\pi^3}{3} - \pi - \frac{\pi^3}{24} + 1 = \frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \simeq 6.902 u^2$$

El área buscada tiene un valor de $\frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \simeq 6.902$ unidades cuadradas.



4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.
La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.
Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:
a) *(1 punto)* Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) *(1 punto)* Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?
c) *(0,5 puntos)* Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

a) En total hay matriculados en Teruel 1550 + 250 + 150 = 1950 estudiantes. Son mujeres el 74% de los estudiantes matriculados en la FCS, es decir, 0.74 · 1550 = 1147 mujeres estudian en la FCS. Son mujeres el 18% de los estudiantes de la Politécnica, es decir, 0.18 · 250 = 45 mujeres estudian en la Politécnica. El 76% de los matriculados en Enfermeria son mujeres, es decir, 0.76 · 150 = 114 mujeres están matriculadas en Enfermería.
Colocamos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147		1550
Politécnica	45		250
Enfermería	114		150
TOTALES			1950

Completamos la tabla.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147	**403**	1550
Politécnica	45	**205**	250
Enfermería	114	**36**	150
TOTALES	**1306**	**644**	1950

De los 1950 estudiantes de Teruel 1306 son mujeres. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante de Teruel este sea mujer tiene un valor de $\frac{1306}{1950}=\frac{653}{975}\simeq 0.6697$.

b) De las 1306 mujeres matriculadas en Teruel solo 45 lo están en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un estudiante de la Politécnica este sea mujer tiene un valor de $\frac{45}{1306}\simeq 0.0345$.

c) Hay 644 hombres matriculados y solo 205 en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un hombre esté matriculado en la Politécnica tiene un valor de $\frac{205}{644}\simeq 0.3183$.

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1,25 puntos)* El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) *(1,25 puntos)* El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

a) Llamamos X = Beneficio mensual de PI S.A. en euros. Y = Beneficio mensual de RHO M.A. en euros. X = N(11125, 527). Y = N(10950, 430).

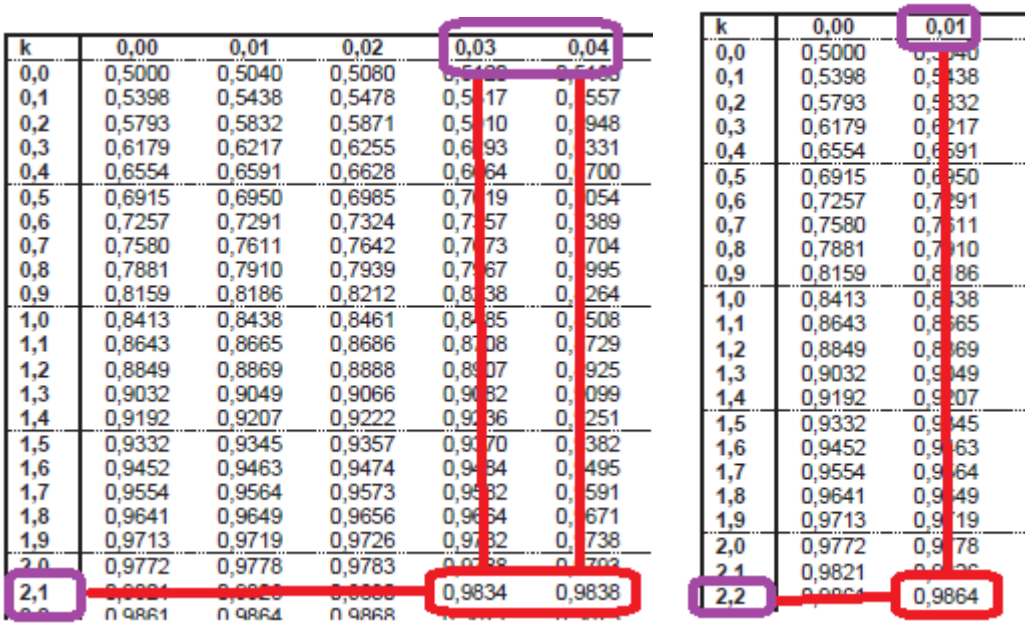
Hallamos $P(X>10000)$ y $P(Y>10000)$.

$$P(X>10000)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{10000-11125}{527}\right)=P(Z>-2.135)=$$

$$=P(Z<2.135)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\frac{0.9834+0.9838}{2}=\boxed{0.9836}$$

$$P(Y>10000)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{10000-10950}{430}\right)=P(Z>-2.21)=$$

$$=P(Z<2.21)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.9864}$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478		
0,2	0,5793	0,5832	0,5871		
0,3	0,6179	0,6217	0,6255		
0,4	0,6554	0,6591	0,6628		
0,5	0,6915	0,6950	0,6985		
0,6	0,7257	0,7291	0,7324		
0,7	0,7580	0,7611	0,7642		
0,8	0,7881	0,7910	0,7939		
0,9	0,8159	0,8186	0,8212		
1,0	0,8413	0,8438	0,8461		
1,1	0,8643	0,8665	0,8686		
1,2	0,8849	0,8869	0,8888		
1,3	0,9032	0,9049	0,9066		
1,4	0,9192	0,9207	0,9222		
1,5	0,9332	0,9345	0,9357		
1,6	0,9452	0,9463	0,9474		
1,7	0,9554	0,9564	0,9573		
1,8	0,9641	0,9649	0,9656		
1,9	0,9713	0,9719	0,9726		
2,0	0,9772	0,9778	0,9783		
2,1				0,9834	0,9838
	0,9861	0,9864	0,9868		

k	0,00	0,01
0,0	0,5000	
0,1	0,5398	
0,2	0,5793	
0,3	0,6179	
0,4	0,6554	
0,5	0,6915	
0,6	0,7257	
0,7	0,7580	
0,8	0,7881	
0,9	0,8159	
1,0	0,8413	
1,1	0,8643	
1,2	0,8849	
1,3	0,9032	
1,4	0,9192	
1,5	0,9332	
1,6	0,9452	
1,7	0,9554	
1,8	0,9641	
1,9	0,9713	
2,0	0,9772	
2,1	0,9821	
2,2		0,9864

Comparamos ambas probabilidades.

$$P(Y>10000)=0.9864>0.9836=P(X>10000)$$

La probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 € es mayor con la empresa RHO M.A.

b) Hallamos $P(X<0)$ y $P(Y<0)$.

$$P(X<0)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{0-11125}{527}\right)=P(Z<-21.11)=P(Z>21.11)$$

$$P(Y<0)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{0-10950}{430}\right)=P(Z<-25.46)=P(Z>25.46)$$

Ambas probabilidades son prácticamente nulas, pero aunque las diferencias sean mínimas, si las comparamos:

$$25.46>21.11\Rightarrow P(Z>25.46)<P(Z>21.11)\Rightarrow P(Y<0)<P(X<0)$$

La probabilidad de tener pérdidas es menor en la empresa RHOM.A.

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:
Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, Mc, con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.
Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz Mc obtenida en el paso anterior.
El resultado del último paso, M_{final}, es el mensaje encriptado.
a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.
b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.
c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cuál es el mensaje original?
d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.
2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de R^3 perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u, v y w.

2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4,-3,\ 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto Q(1, 2, 3) y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo [0, 1], por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en R. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$err(m) = \int_0^1 \left(f(x) - g_m(x) \right)^2 dx$$

a) (1,5 puntos) Comprueba que $err(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in$ R.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in$ R que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

3.2 a) (1,25 puntos) Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - sen(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

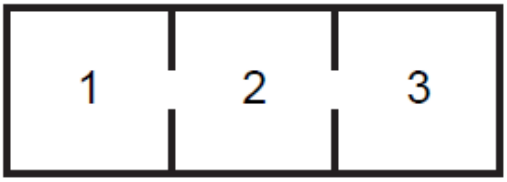
b) (1,25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2(x) sen(x), \qquad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) (0,5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.

b) (1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?

c) (1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es 1/2 y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de 1/4 para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que P(A|B) = 2/3 y P(B|A) = 3/4.

a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría P(A∪B)?

b) (1,5 puntos) Si P(A∪B) = 5/6, ¿cuáles son las probabilidades P(A), P(B) y $P(A \cup \overline{B})$?

SOLUCIONES

1. Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, Mc, con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz Mc obtenida en el paso anterior.

El resultado del último paso, M_{final}, es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

a) Las correspondencias son H – 8, O – 16, L – 12, A – 1 y la matriz queda $M_C = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicamos por la matriz M_E.

$$M_{final} = M_E M_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+16+12+1 \\ -8+0-12-1 \\ -8-16+0-1 \\ -8-16-12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$4\times \boxed{4 \quad \cdot \quad 4} \times 1 \longrightarrow 4\times 1$$

El mensaje encriptado es $M_{final} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$.

b) Como $M_{final} = M_E M_C$ entonces $(M_E)^{-1} \cdot M_{final} = M_C$. Después miramos la correspondencia de cada número con la letra según la tabla y obtenemos el mensaje descifrado.
Calculamos la matriz inversa usando del método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a + Fila\,1^a \\ Fila\,3^a + Fila\,1^a \\ Fila\,4^a + Fila\,1^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{Fila\,1^a - Fila\,2^a - Fila\,3^a - Fila\,4^a\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (M_E)^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c) Aplicamos el desencriptado a la matriz cifrada $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$.

$$M_C = (M_E)^{-1} \cdot M_{final} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60+21+25+16 \\ 30-21+0+0 \\ 30+0-25+0 \\ 30+0+0-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Buscando la correspondencia en la tabla: 2 – B, 9 – I, 5 – E, 14 – N.
La palabra que se ha enviado es BIEN.

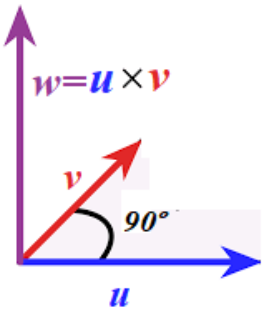
d) La matriz de encriptado debe tener inversa (matriz de desencriptado), por lo que su determinante debe ser distinto de cero.

2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de R^3 perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u, v y w.

a = (u × v) + w es un vector pues u × v es un vector (w) y al sumarle w obtenemos un vector que es igual a 2w.

b = v × (v × w) es un vector pues los productos vectoriales siempre dan como resultado un vector.

c = u · (v × w) es un escalar, de hecho, es el producto mixto de los vectores u, v y w que se usa para determinar el volumen del paralelepípedo determinado por dichos vectores.



El vector a = (u × v) + w hemos visto que es igual a 2w, por lo que es paralelo a w y perpendicular a u y v pues a = 2(u × v) y con el producto vectorial u × v obtenemos un vector perpendicular a u y v.
El vector b = v × (v × w) es perpendicular a u y v, paralelo a w. Con v × w obtenemos un vector paralelo a u y con v × (v × w) obtenemos un vector perpendicular a u y v, por lo tanto, paralelo a w.

Otra forma de razonarlo. Situamos el vector u sobre el eje X, así sería u = (m, 0, 0). Situamos el vector v sobre el eje Y, así sería v = (0, n, 0).
Al realizar el producto vectorial u × v tendríamos un vector w situado en el eje Z, así sería w = (0, 0, mn).

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{vmatrix} = mnk = (0, 0, mn)$$

El vector v × w estaría sobre el eje X y seria v × w = (mn^2, 0, 0).

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & mn^2 \end{vmatrix} = mn^3 i = (mn^3, 0, 0)$$

El vector b = v × (v × w) estaría sobre el eje Z y seria paralelo a w y perpendicular a u y v.

$$b = v \times (v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ mn^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = mn^4 k = (0, 0, mn^4)$$

2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que pasa por el punto $P(4,-3,\ 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.
b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto Q(1, 2, 3) y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

a) Si la recta debe ser perpendicular al plano π entonces debe tener como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x-2y+z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s}=\vec{n}=(1,-2,1) \\ P(4,-3,0)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-3-2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

b) Hallamos dos puntos de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0+0+z=1 \\ 0-2\cdot 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow A_r(0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=4,\ y=2 \\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4+2+z=1 \\ 4-2\cdot 2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-5 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow B_r(4,2,-5)$$

El plano que contiene el punto Q y la recta *r* es el plano que contiene los puntos Q, A_r y B_r.

$$\left.\begin{array}{l} Q(1,2,3)\in\pi \\ A_r(0,0,1)\in\pi \\ B_r(4,2,-5)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{A_rB_r}=(4,2,-5)-(0,0,1)=(4,2,-6) \\ \vec{v}=\overrightarrow{A_rQ}=(1,2,3)-(0,0,1)=(1,2,2) \\ A_r(0,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-6y+8(z-1)-2(z-1)-8y+12x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-6y+8z-8-2z+2-8y+12x=0 \Rightarrow 1$$

$$\Rightarrow 16x-14y+6z-6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 8x-7y+3z-3=0}$$

La ecuación del plano que contiene al punto Q y a la recta *r* es $\pi: 8x-7y+3z-3=0$.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x)=e^x$, con x en el intervalo [0, 1], por otra función $g_m(x)=mx$ con m un parámetro en R. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$err(m)=\int_0^1 \left(f(x)-g_m(x)\right)^2 dx$$

a) (1,5 puntos) Comprueba que $err(m)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-2m+\frac{m^2}{3}$ con $m \in$ R.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in$ R que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

a) Determinamos la expresión de la función *err(m)*.

$$err(m)=\int_0^1 \left(f(x)-g_m(x)\right)^2 dx=\int_0^1 \left(e^x-mx\right)^2 dx=\int_0^1 e^{2x}+m^2x^2-2mxe^x dx=\ldots$$

$$\int xe^x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^x dx\rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$$

$$\ldots=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{m^2x^3}{3}-2m\left(xe^x-e^x\right)\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^2+\frac{m^2\cdot 1^3}{3}-2m\left(e^1-e^1\right)\right]-\left[\frac{1}{2}e^0+\frac{m^2\cdot 0^3}{3}-2m\left(0\cdot e^0-e^0\right)\right]=\boxed{\frac{e^2}{2}+\frac{m^2}{3}-\frac{1}{2}-2m}$$

Queda comprobado que $err(m)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-2m+\frac{m^2}{3}$.

b) Derivamos la función y buscamos cuando se anula.

$$err(m)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-2m+\frac{m^2}{3}\Rightarrow err'(m)=-2+\frac{2m}{3}$$

$$err'(m)=0\Rightarrow -2+\frac{2m}{3}=0\Rightarrow \frac{2m}{3}=2\Rightarrow 2m=6\Rightarrow \boxed{m=3}$$

Sustituimos $m=3$ en la segunda derivada.

$$err'(m)=-2+\frac{2m}{3}\Rightarrow err''(m)=\frac{2}{3}\Rightarrow err''(3)=\frac{2}{3}>0$$

Al tomar la segunda derivada valor positivo la función presenta un mínimo relativo en $m=3$. El error se minimiza para $m=3$. Hallamos el valor del error para $m=3$.

$$err(3)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-2\cdot 3+\frac{3^2}{3}=\boxed{\frac{e^2}{2}-\frac{7}{2}\simeq 0.1945}$$

3.2 a) (1,25 puntos) Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-sen\left(x^2\right)}{1-\cos\left(x\right)}$$

b) (1,25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f\left(x\right)=\cos^2\left(x\right)sen\left(x\right),\qquad x\in\left[0,\pi\right]$$

y el eje de abscisas.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-sen\left(x^2\right)}{1-\cos\left(x\right)}=\frac{0^2-sen\left(0^2\right)}{1-\cos\left(0\right)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x\cos\left(x^2\right)}{0+sen\left(x\right)}=\frac{0-0}{sen\left(0\right)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos\left(x^2\right)-2x\left(-2xsen\left(x^2\right)\right)}{\cos\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos\left(x^2\right)+4x^2sen\left(x^2\right)}{\cos\left(x\right)}=$$

$$=\frac{2-2\cos\left(0^2\right)+4\cdot 0^2sen\left(0^2\right)}{\cos\left(0\right)}=\frac{2-2}{1}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

b) Estudiamos si la gráfica de la función corta el eje de abscisas en el intervalo $\left[0,\pi\right]$.

$$\left.\begin{array}{l}f\left(x\right)=\cos^2\left(x\right)sen\left(x\right)\\ Eje\,abscisas\to y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\cos^2\left(x\right)sen\left(x\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(x\right)=0\to\boxed{x=\dfrac{\pi}{2}}\\ sen\left(x\right)=0\to\begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{x=\pi}\end{cases}\end{cases}$$

Como la gráfica corta el eje de abscisas en $x=\frac{\pi}{2}$ la región la dividimos en dos partes. Calculamos el área de esta región como el valor absoluto de la integral definida de la función entre $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ más el valor absoluto de la integral definida de la función entre $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\pi$.

$$\int_0^{\pi/2}f\left(x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2\left(x\right)sen\left(x\right)dx=...$$

$$\int \cos^2(x)\,sen(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos(x)=t \rightarrow -sen(x)\,dx = dt\\ sen(x)\,dx = -dt\end{array}\right\} = \int t^2(-dt) = -\int t^2 dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

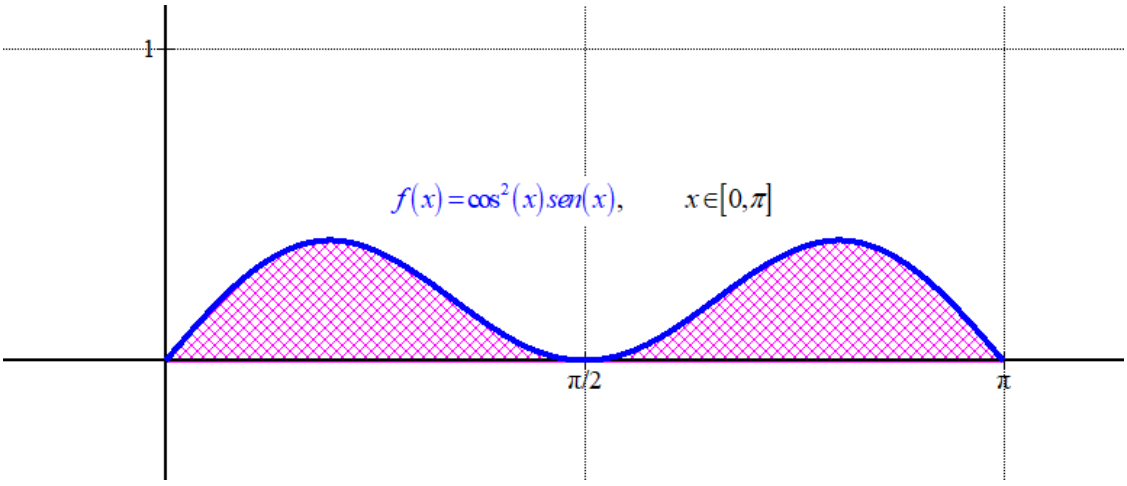
$$\ldots = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3}\right] - \left[-\frac{\cos^3(0)}{3}\right] = \boxed{\frac{1}{3}}$$

El área de la primera parte de la región vale 1/3 unidades cuadradas.

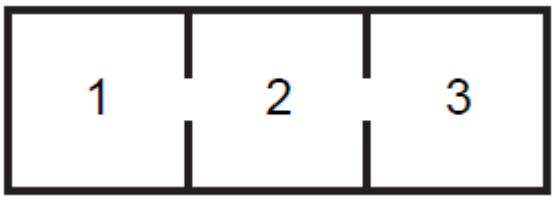
$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(x)\,sen(x)\,dx = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left[-\frac{\cos^3(\pi)}{3}\right] - \left[-\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3}\right] = \frac{1}{3} + 0 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

El área de la segunda parte de la región vale 1/3 unidades cuadradas.
El área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos^2(x)\,sen(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,\pi]$ vale 2/3 unidades cuadradas.



4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



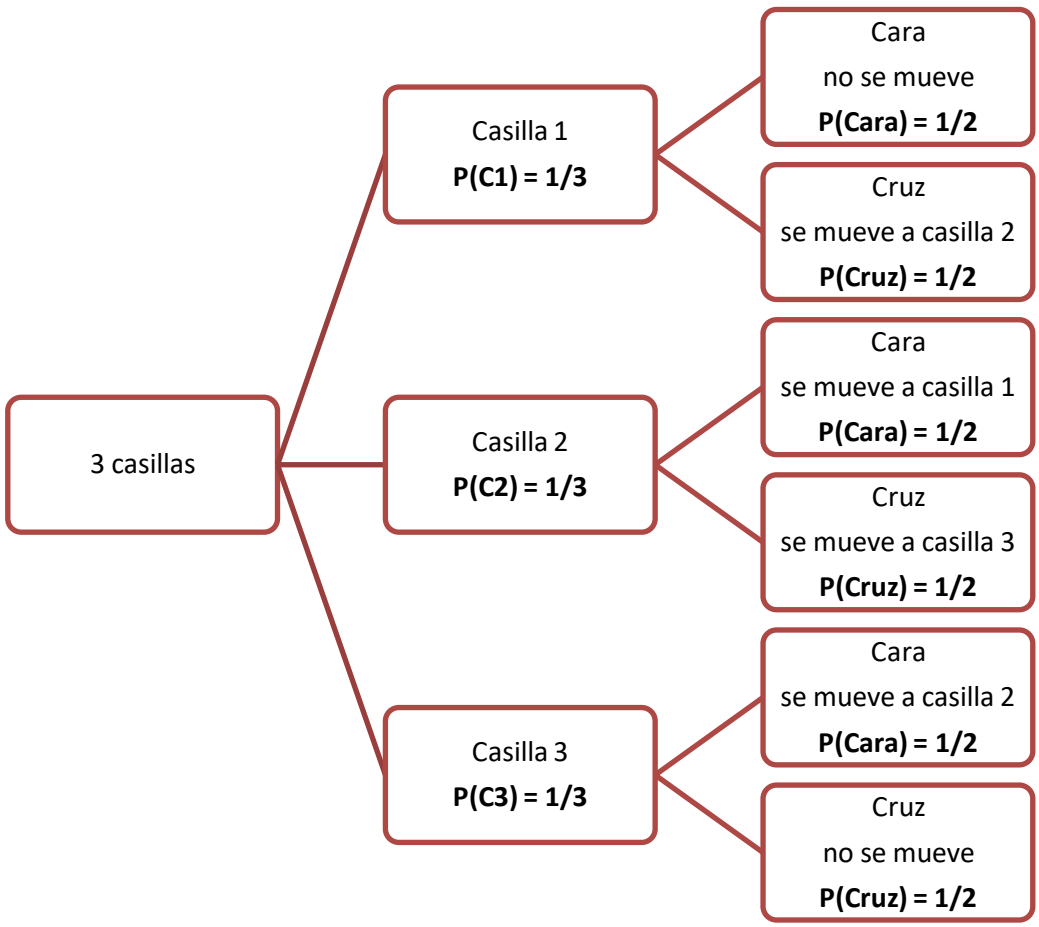
Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) (0,5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.

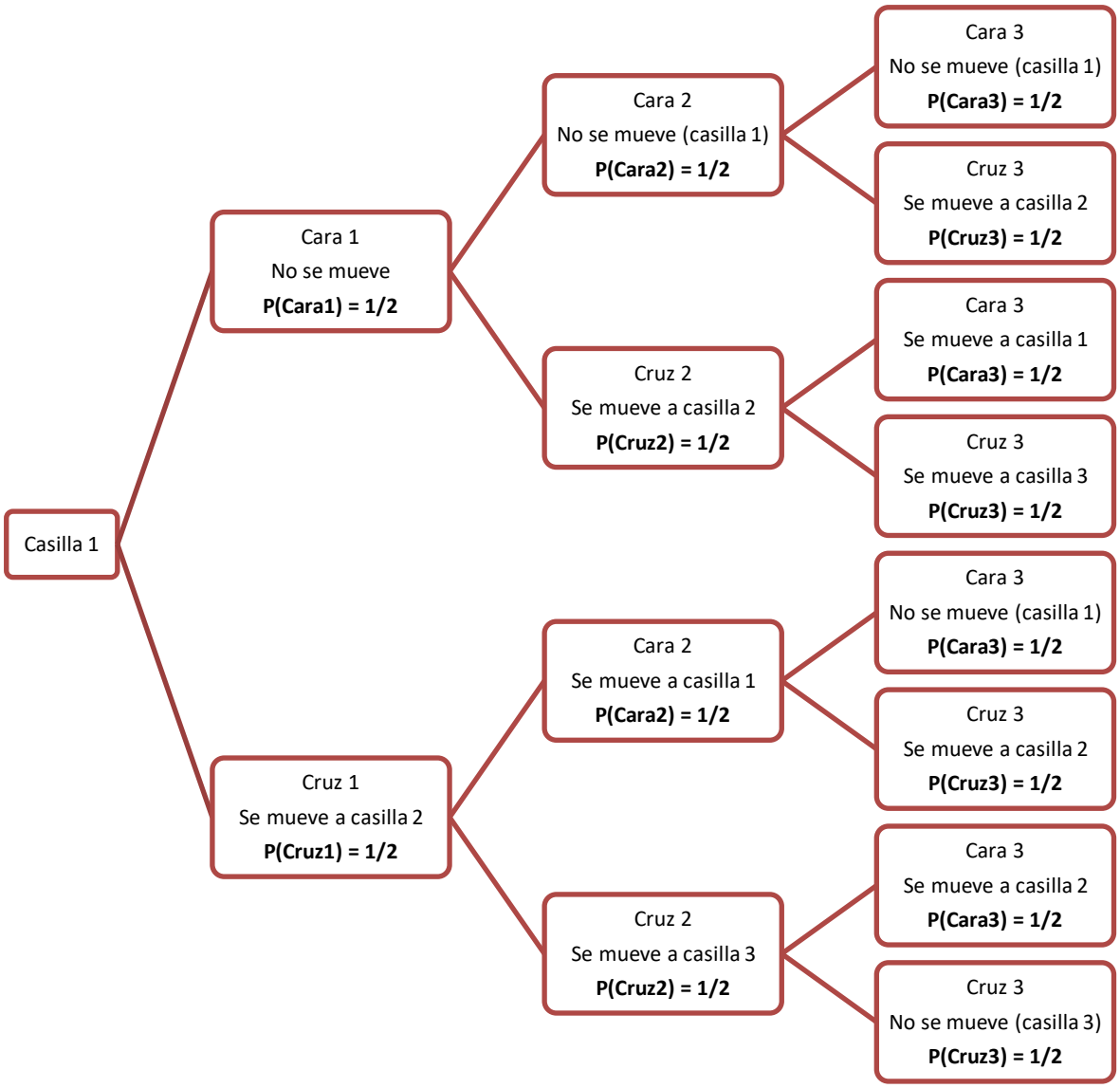
b) (1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?

c) (1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es 1/2 y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de 1/4 para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

a) Construimos el diagrama de probabilidades de los movimientos. Consideramos igual de probable estar situado en cualquiera de las 3 casillas.

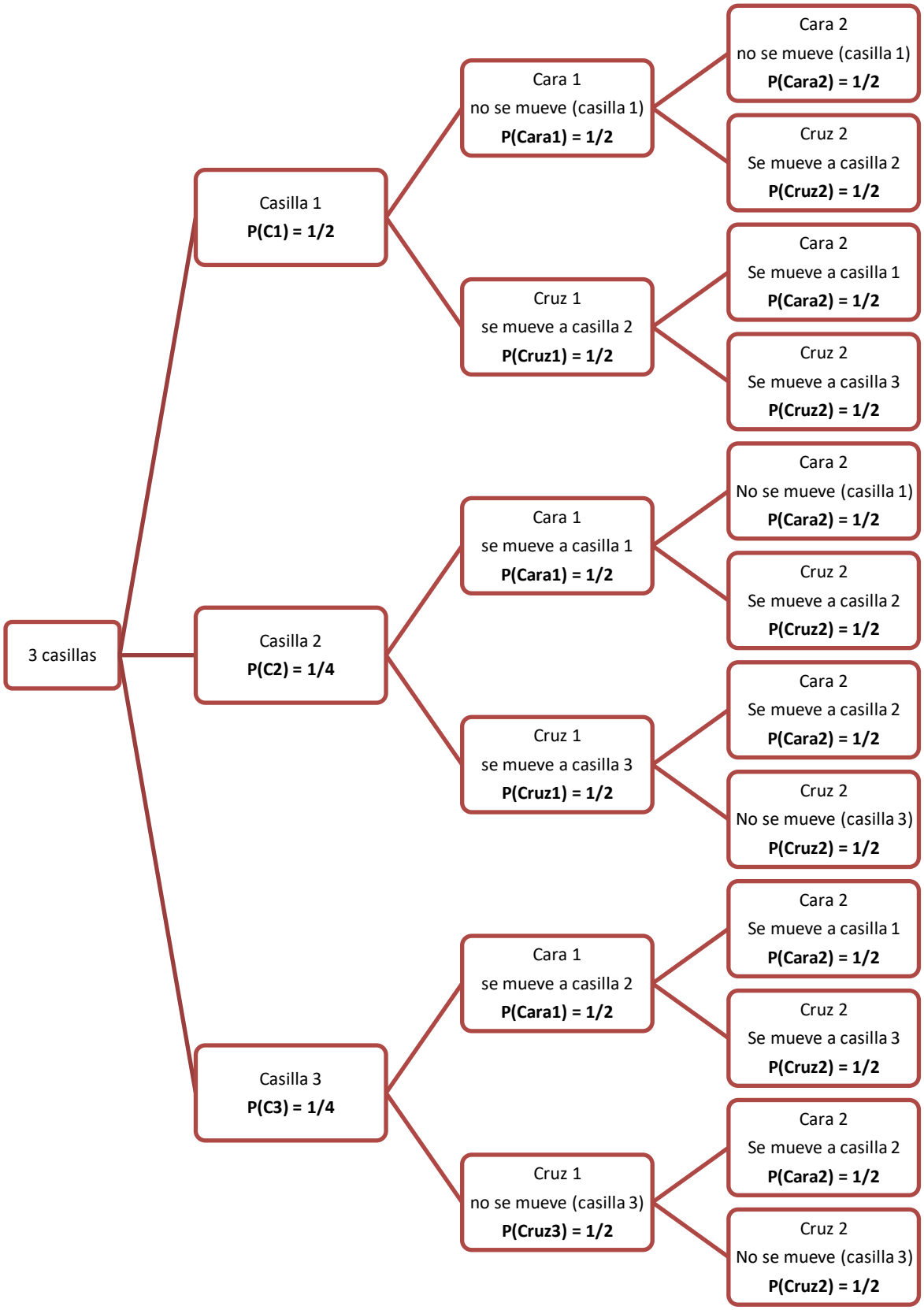


b) Realizamos un diagrama de árbol con los 3 lanzamientos.



Vemos en el diagrama de árbol que vuelve a la casilla 1 sacando Cara 1, Cara 2 y Cara 3, también con Cara 1, Cruz 2 y Cara 3, también con Cruz 1, Cara 2 y Cara 3.
Como cualquiera de los movimientos son equiprobables tenemos que 3 movimientos favorecen a quedarse en casilla 1 y los restantes 8 – 3 = 5 movimientos te desplazan de la casilla 1, por lo que la probabilidad de quedarte en la casilla 1 vale $\frac{3}{8} = 0.375$.

c) Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de lo que ocurre en las dos tiradas partiendo de cada una de las casillas del tablero.



Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 1 sumando el producto de las probabilidades de cada rama que acaba en casilla 1.

$$P(Casilla1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 2.

$$P(Casilla1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\boxed{\frac{5}{16}}$$

Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 3.

$$P(Casilla1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\boxed{\frac{5}{16}}$$

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que P(A|B) = 2/3 y P(B|A) = 3/4.
a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría P(A∪B)?
b) (1,5 puntos) Si P(A∪B) = 5/6, ¿cuáles son las probabilidades P(A), P(B) y $P(A\cup\overline{B})$?

a) Determinamos las probabilidades de los sucesos A y B.

$$P(A/B)=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left.\begin{cases}A\,y\,B\,son\,independientes\\P(A\cap B)=P(A)P(B)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{P(A)\,\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\boxed{P(A)=\frac{2}{3}}$$

$$P(B/A)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{4}\Rightarrow\left.\begin{cases}A\,y\,B\,son\,independientes\\P(A\cap B)=P(A)P(B)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{P(A)}P(B)}{\cancel{P(A)}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\boxed{P(B)=\frac{3}{4}}$$

Calculamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos usando la fórmula.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\boxed{\frac{11}{12}}$$

b) Sin considerar los sucesos A y B independientes calculamos sus probabilidades.

$$\left.\begin{aligned}&P(A/B)=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{3}{2}P(A\cap B)\\&P(B/A)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{4}P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{4}{3}P(A\cap B)\\&P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{5}{6}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{6}=\frac{3}{2}P(A\cap B)+\frac{4}{3}P(A\cap B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{5}{6}=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-1\right)P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{6}=\frac{11}{6}P(A\cap B)\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=\frac{5}{11}}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{P(B)=\frac{3}{2}P(A\cap B)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{22}}\\\boxed{P(A)=\frac{4}{3}P(A\cap B)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{11}=\frac{20}{33}}\end{cases}$$

Hemos determinado que $P(A)=\frac{20}{33}$ y $P(B)=\frac{15}{22}$.

Calculamos $P(A\cup\overline{B})$.

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)+1-P(B)-\left[P(A)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=\frac{20}{33}+1-\frac{15}{22}-\left[\frac{20}{33}-\frac{5}{11}\right]=\boxed{\frac{17}{22}}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de *a* y *b*.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de *b* para que, en el punto con $x=\dfrac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y=\dfrac{\pi}{2}x$.

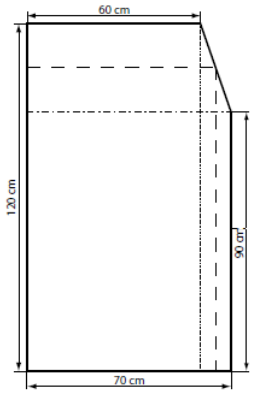
2. Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}$$

3. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+6$ y

$$g(x)=\begin{cases} -2x & si\ x<0 \\ x^2 & si\ x\ge 0 \end{cases}$$

4. En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



5. De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B,$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

6. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}.$$

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para el valor $m = 2$.

7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1g de M_1	10	10	20
para 1g de M_2	10	20	30
para 1g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

9. Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

10. El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

SOLUCIONES

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de *a* y *b*.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de *b* para que, en el punto con $x=\dfrac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y=\dfrac{\pi}{2}x$.

a) La función en el intervalo $(-\infty,0)$ es $f(x)=a-\cos(x)$ que es una función continua.

La función en el intervalo $(0,+\infty)$ es $f(x)=x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ que es una función continua.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición: $x=0$.
Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y los límites laterales de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a-\cos(x)=a-\cos(0)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a-\cos(x)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0^2-bsen\left(0+\dfrac{\pi}{2}\right)=-b \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow a-1=-b\Rightarrow \boxed{b=1-a}$$

La función es continua en $x = 0$ cuando $b = 1-a$.
La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $b = 1-a$.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ cuando $b \neq 1-a$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases} 1-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases}$, $b\in\mathbb{R}$.

La ecuación de la recta tangente en $x=\dfrac{\pi}{2}$ es $y-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x)=x^2-bsen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-bsen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-bsen(\pi)=\frac{\pi^2}{4}$$

$$f'(x)=2x-b\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\frac{\pi}{2}-b\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi-b\cos\pi=\pi+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+b \\ y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{\pi^2}{4}=(\pi+b)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{2}-b\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en $x=\frac{\pi}{2}$ es $y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}$.

Como la recta tangente queremos que sea $y=\frac{\pi}{2}x$ deben cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{\pi}{2}x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \pi+b=\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{b=\frac{\pi}{2}-\pi=\frac{-\pi}{2}} \\ -\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}=0 \rightarrow -\pi^2-2b\pi=0 \rightarrow -\pi-2b=0 \rightarrow \boxed{b=\frac{-\pi}{2}} \end{cases}$$

El valor buscado es $b=\frac{-\pi}{2}$.

2. Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}$$

Intentamos calcular el límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}=$$

$$=\frac{(2-2)\cdot\left(3\cdot 2^5+5\cdot 2^4-7\cdot 2^3+2\cdot 2^2-2+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2\cdot 2^2\right)+\left(\cos(2)\right)^2+\log(2+5)}}=$$

$$=\frac{0\cdot 129+2}{3-0\cdot\sqrt{sen(8)+\left(\cos(2)\right)^2+\log 7}}=\frac{2}{3-0\cdot\sqrt{1.983}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

El límite existe pues el radicando de la raíz del denominador existe en un entorno de $x = 2$. La función está definida en un entorno de $x = 2$ y es continua. El valor del límite es 2/3.

3. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}$

Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$g(x)=\left.\begin{cases}-2x & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x+6\\ f(x)=g(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x=x+6\rightarrow -3x=6\rightarrow x=\dfrac{6}{-3}=\boxed{-2\in(-\infty,0)}\\ x^2=x+6\rightarrow x^2-x-6=0\rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-6)}}{2}=\\ \qquad=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=\boxed{3\in[0,+\infty)}\\ \dfrac{1-5}{2}=-2\notin[0,+\infty)\end{cases}\end{cases}$$

Las gráficas de las funciones se cortan en $x = -2$ y en $x = 3$. El área encerrada por sus gráficas la dividimos en dos partes: una entre –2 y 0 y otra entre 0 y 3.

Área de la zona 1.

$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-2}^{0} x+6-(-2x)\,dx=\int_{-2}^{0} 3x+6\,dx=$$

$$=\left[3\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{0}=\left[3\frac{0^2}{2}+6\cdot 0\right]-\left[3\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right]=-6+12=6$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 6 unidades cuadradas.

Área de la zona 2.

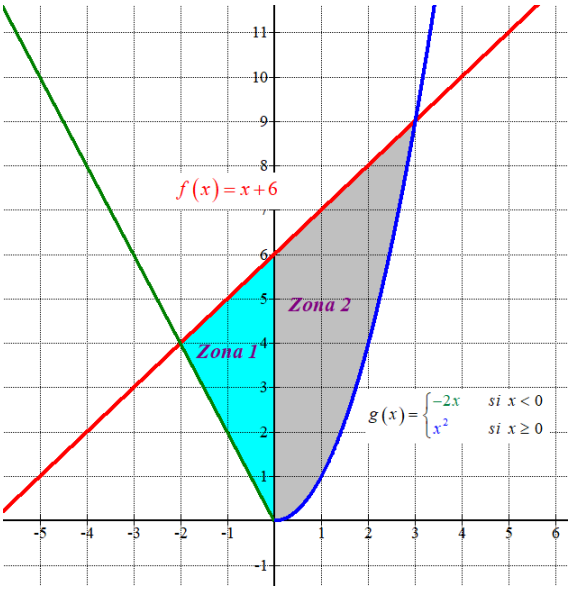
$$\int_{0}^{3} f(x)-g(x)\,dx=\int_{0}^{3} x+6-x^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}=$$

$$=\left[\frac{3^2}{2}+6\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}+6\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{9}{2}+18-9=13.5$$

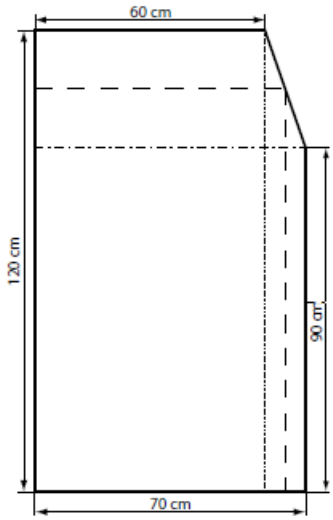
El área de la zona 2 tiene un valor de 13.5 unidades cuadradas.

El área encerrada por las gráficas de las dos funciones es la suma de lo obtenido.

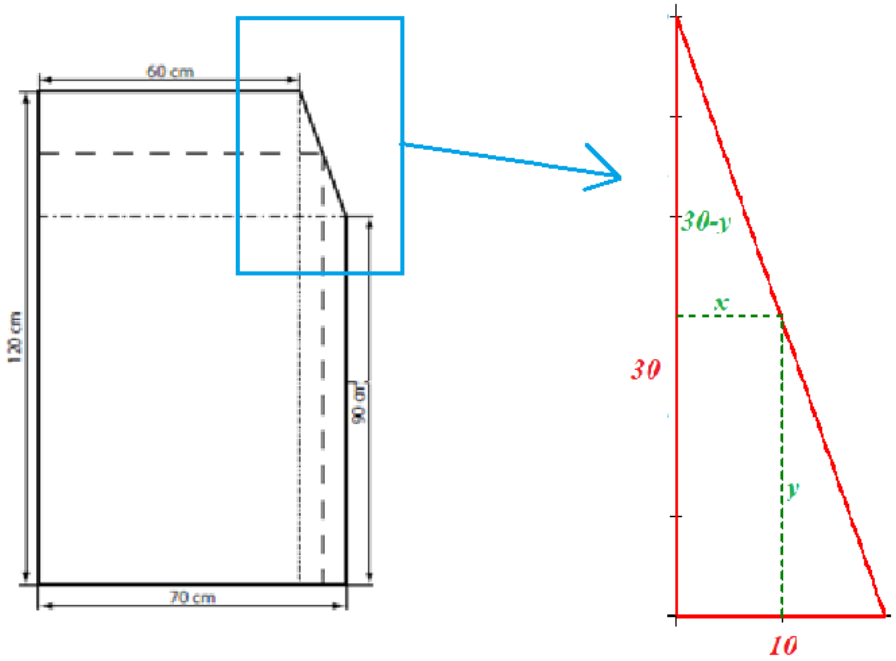
$Área = 6+13.5=19.5\ u^2$



4. En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



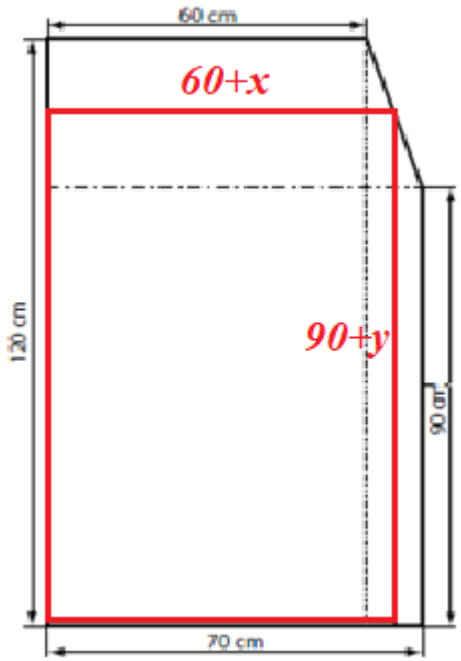
Queremos cortar un rectángulo de base "x" y altura "y".
La situación es la del dibujo.



Como el triángulo rojo de catetos 10 y 30 es semejante al de catetos "$30 - y$" y "x" tenemos:

$$\frac{30-y}{30}=\frac{x}{10}\Rightarrow\frac{30-y}{3}=x\Rightarrow 30-y=3x\Rightarrow 30-3x=y$$

El rectángulo que queremos cortar tiene de lados "$60 + x$" y "$90 + y$".



El área del rectángulo es $A(x,y)=(x+60)(y+90)$, siendo $0\le x\le 10;\ 0\le y\le 30$.
El área del nuevo rectángulo queda:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=(x+60)(y+90) \\ y=30-3x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=(x+60)(30-3x+90)=(x+60)(120-3x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x)=120x-3x^2+7200-180x=-3x^2-60x+7200$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x)=-3x^2-60x+7200\Rightarrow A'(x)=-6x-60$$

$$A'(x)=0\Rightarrow -6x-60=0\Rightarrow x+10=0\Rightarrow x=-10\notin[0,10]$$

El punto crítico obtenido no pertenece al intervalo [0, 10].
La función área solo está definida entre 0 y 10, siendo la derivada negativa en todo el intervalo, por lo que el valor más alto lo alcanza en el extremo inferior del intervalo: $x = 0$.

La función área en el intervalo [0, 10] tiene un valor máximo en $x = 0$.
Para este valor tenemos que $y=30-0=30$.
Las dimensiones del rectángulo de área máxima son 60 + 0 = 60 y 90 + 30 = 120.
El nuevo cristal rectangular recortado con área máxima tiene dimensiones 60 × 120 cm.

5. De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B,$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

Despejamos B en la igualdad planteada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \right] \cdot B = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$$

Existe la inversa de B y tiene la expresión $B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$.

6. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 4 & 4 & 2m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 12\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{R}.$$

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A\cdot X=B$ para el valor $m = 2$.

(a) Usamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz A para establecer su rango.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 4 & 4 & 2m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ 1 \quad m \quad m\\ -1 \quad -1 \quad -1\\ \hline 0 \quad m-1 \quad m-1\rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}Fila\,3^{a}-4\cdot Fila\,1^{a}\\ 4 \quad 4 \quad 2m\\ -4 \quad -4 \quad -4\\ \hline 0 \quad 0 \quad 2m-4\rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-1 & m-1\\ 0 & 0 & 2(m-2)\end{pmatrix}$$

Existen tres posibilidades.

1ª posibilidad. $m-1=0\rightarrow m=1$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

2ª posibilidad. $m-2=0\rightarrow m=2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

3ª posibilidad. $m\neq 1$ y $m\neq 2$

En este caso la matriz equivalente tiene tres filas no nulas. El rango de A es 3.

(b) Cuando $m = 2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$. Obtenemos el sistema y lo resolvemos.

$$A\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 12\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\\ 4x+4y+4z=12\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\\ x+y+z=3\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{Ecuación\,1^{a}=Ecuación\,3^{a}\}\Rightarrow\begin{matrix}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=3-y-z\\ x+2y+2z=5\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-y-z+2y+2z=5 \Rightarrow y+z=2 \Rightarrow \boxed{y=2-z} \Rightarrow \boxed{x=3-2+z-z=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Cuando $m = 2$ las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x=1 \\ y=2-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1g de M_1	10	10	20
para 1g de M_2	10	20	30
para 1g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Llamamos "x" a los gramos del medicamento M_1, "y" a los gramos del medicamento M_2 y "z" a los gramos de M_3**.**

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
x g de M_1	10x	10x	20x
y g de M_2	10y	20y	30y
z g de M_3	20z	30z	50z
TOTALES	$10x+10y+20z$	$10x+20y+30z$	$20x+30y+50z$

Se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3 → $10x+10y+20z=70000$, $10x+20y+30z=90000$, $20x+30y+50z=160000$.
Planteamos un sistema con las tres ecuaciones e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{matrix}10x+10y+20z=70000\\10x+20y+30z=90000\\20x+30y+50z=160000\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y+2z=7000\\x+2y+3z=9000\\2x+3y+5z=16000\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=7000-y-2z\\x+2y+3z=9000\\2x+3y+5z=16000\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}7000-y-2z+2y+3z=9000\\2(7000-y-2z)+3y+5z=16\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y+z=2000\\14000-2y-4z+3y+5z=16000\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}y+z=2000\\y+z=2000\end{matrix}\right\}\Rightarrow y+z=2000\Rightarrow\boxed{y=2000-z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=7000-2000+z-2z=5000-z}\Rightarrow\begin{cases}x=5000-\lambda\\y=2000-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio, por ejemplo, dando el valor $\lambda=0$ se consigue fabricando 5000 gramos del medicamento M_1, 2000 gramos de M_2 y 0 gramos de M_3.
Existen muchas formas posibles de hacerlo, dando valores de λ que hagan que la solución sea positiva (gramos), lo que implica que el valor de λ debe estar entre 0 y 2000.

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

Hallamos el vector director de la recta.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ z=-3+y-x \end{cases} \Rightarrow 2x+y+3-y+x=0 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3}{3}=-1 \Rightarrow z=-3+y+1=-2+y \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$$

El vector normal del plano es el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$. Hallamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ (3,2,1)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: y+z+D=0 \\ (3,2,1)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+1+D=0 \Rightarrow D=-3 \Rightarrow \pi: y+z-3=0$$

La ecuación de un plano que es perpendicular a la recta y además pasa por el punto (3, 2, 1) es el plano de ecuación $\pi: y+z-3=0$.

9. Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

(a) Hallamos las coordenadas de los vectores.

$$\vec{v_1} = \overrightarrow{AB} = (1,0,-1) - (1,2,3) = (0,-2,-4)$$

$$\vec{v_2} = \overrightarrow{BC} = (2,2,2) - (1,0,-1) = (1,2,3)$$

$$\vec{v_3} = \overrightarrow{CA} = (1,2,3) - (2,2,2) = (-1,0,1)$$

Comprobamos el valor del producto mixto $\left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right]$.

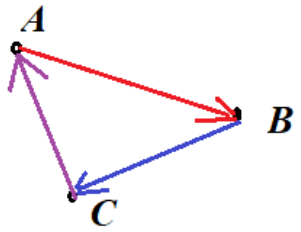
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1} = (0,-2,-4)\\ \vec{v_2} = (1,2,3)\\ \vec{v_3} = (-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+6+0-8+2+0 = 0$$

El producto mixto es nulo y los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo es pensar que los tres puntos definen un plano y los tres vectores pertenecen al mismo plano, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1} = \overrightarrow{AB}\\ \vec{v_2} = \overrightarrow{BC}\\ \vec{v_3} = \overrightarrow{CA}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$$



Los vectores son linealmente dependientes.

(b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,-2,-4)\\ \overrightarrow{AC} = (2,2,2) - (1,2,3) = (1,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i - 4j + 0 + 2k - 0 - 0 = 2i - 4j + 2k = (2,-4,2)$$

$$Área = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}\ u^2$$

El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C tiene un valor de $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

10. El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.
(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?
(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

Llamamos X a la variable aleatoria que da el número de exámenes con una nota inferior a 5 de una muestra de 15 exámenes.
Esta variable es binomial de parámetros n = 15 y p = 1 – 0.84 = 0.16. X = B(15, 0.16)

(a) Nos piden calcular $P(X=2)$.

$$P(X=2)=\binom{15}{2}0.16^2\cdot 0.84^{13}\simeq 0.27865$$

La probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5 es de 0.27865.

(b) Hallamos la probabilidad de los sucesos "menos de 2 exámenes con nota inferior a 5" y "más de 2 exámenes con nota inferior a 5".

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{15}{0}0.16^0\cdot 0.84^{15}+\binom{15}{1}0.16^1\cdot 0.84^{14}\simeq 0.2821$$

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(x<2)+P(X=2)\right]\simeq 1-\left[0.2821+0.27865\right]\simeq 0.43925$$

Tenemos que $P(X<2)=0.2821<0.43925=P(X>2)$.
Es más probable que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si\ \ x\neq 0\\ a & si\ \ x=0\end{cases},\quad a\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.
(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

2. Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

3. (a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c\in\mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x)=ax+bsen(x)\cos(x)+c$$

sea una primitiva de $g(x)=sen^2(x)$.

(*Nota: recuerda que* $sen^2(x)+\cos^2(x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.)

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$, demuestra que

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$

4. Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=A^T\cdot B+I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.
(a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n\in\mathbb{N}$.
(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)$.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = 0$ cuando $m = 6$.

7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

8. Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)$ y $P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen 1/3.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

9. Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

10. Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

SOLUCIONES

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si\ \ x\neq 0\\ a & si\ \ x=0\end{cases},\quad a\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.
(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

(a) Para $x\neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=\frac{2e^0}{1}=\boxed{2}$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y el límite de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

La función es continua en x = 0 cuando a = 2.
La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = 2$.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ para cualquier valor de a distinto de 2.

(b) Para el valor de $a = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 1 & si\ \ x=0\end{cases}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot x-1\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{x^2}=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{e^2-1}{1}=e^2-1\\ f'(1)=\dfrac{2e^2-e^2+1}{1^2}=e^2+1\\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\left(e^2-1\right)=\left(e^2+1\right)(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\left(e^2+1\right)x-e^2-1+e^2-1\Rightarrow \boxed{y=\left(e^2+1\right)x-2}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y=\left(e^2+1\right)x-2$.

Obtenemos los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(e^2+1\right)x-2 \\ OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=\left(e^2+1\right)x-2\Rightarrow \left(e^2+1\right)x=2\Rightarrow x=\frac{2}{e^2+1}\Rightarrow A\left(\frac{2}{e^2+1},0\right)$$

El punto de corte de la tangente con el eje OX es $A\left(\frac{2}{e^2+1},0\right)$.

Calculamos el punto de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(e^2+1\right)x-2 \\ OY\rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y=\left(e^2+1\right)0-2=-2\Rightarrow B\left(0,-2\right)$$

El punto de corte de la tangente con el eje OY es $B\left(0,-2\right)$.

2. Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=\infty-\infty=\text{Indeterminación (conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-\left(x^2+4x+4\right)}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-4x-4}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-4x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}}=\frac{-4+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{5}{\infty^2}}+1+\frac{2}{\infty}}=\frac{-4+0}{\sqrt{1+0}+1+0}=\boxed{-2}$$

3. (a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + bsen(x)\cos(x) + c$$

sea una primitiva de $g(x) = sen^2(x)$.

(*Nota: recuerda que* $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.)

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$, demuestra que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

(a) Si la función *f(x)* es una primitiva de *g(x)* → $\int g(x)dx = f(x)$ → la derivada de *f(x)* es la función *g(x)* → $f'(x) = g(x)$.

Calculamos la derivada de la función *f(x)*.

$$f(x) = ax + bsen(x)\cos(x) + c \Rightarrow f'(x) = a + b\cos(x)\cos(x) - bsen(x)sen(x)$$

$$f'(x) = a + b\cos^2(x) - bsen^2(x)$$

$$\boxed{Sabemos\ que\ sen^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - sen^2(x)}$$

$$f'(x) = a + b\left[1 - sen^2(x)\right] - bsen^2(x) = a + b - bsen^2(x) - bsen^2(x)$$

$$f'(x) = a + b - 2bsen^2(x)$$

Se debe cumplir la igualdad $f'(x) = g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = sen^2(x) \\ f'(x) = a + b - 2bsen^2(x) \\ f'(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow a + b - 2bsen^2(x) = sen^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \rightarrow a = -b \\ -2b = 1 \rightarrow \boxed{b = \dfrac{-1}{2}} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

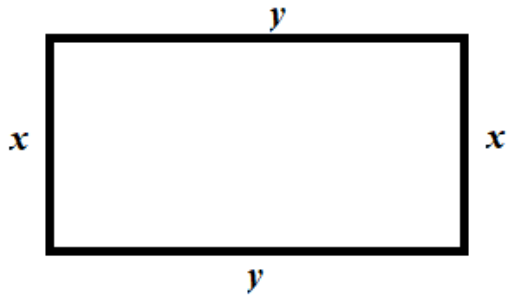
Los valores buscados son $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{-1}{2}$ y c puede ser cualquier valor real.

(b) Consideramos la función $f(x) = sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$ y la derivamos.

$$f'(x) = 2\cos(2x) = 2\cos(x)\cos(x) - 2sen(x)sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cos(2x) = \cancel{2}\cos^2(x) - \cancel{2}sen^2(x) \Rightarrow \boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)}$$

4. Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.



El perímetro del rectángulo es P → $2x+2y=P$.

El área del rectángulo es $A(x,y)=xy$.

Sustituimos en esta expresión "y" para obtener una expresión del área en función solo de "x".

$$2x+2y=P \Rightarrow x+y=\frac{P}{2} \Rightarrow y=\frac{P}{2}-x$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\dfrac{P}{2}-x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\left(\frac{P}{2}-x\right)=\frac{P}{2}x-x^2$$

Derivamos la función $A(x)=\dfrac{P}{2}x-x^2$ y averiguamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=\dfrac{P}{2}x-x^2 \Rightarrow A'(x)=\dfrac{P}{2}-2x \\ A'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P}{2}-2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{P}{4}}$$

En $x=\dfrac{P}{4}$ la función área tiene un punto crítico. Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$A'(x)=\frac{P}{2}-2x \Rightarrow A''(x)=-2 \Rightarrow A''\left(\frac{P}{4}\right)=-2<0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función área tiene un máximo relativo en $x=\dfrac{P}{4}$.

Averiguamos el valor de "y".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{P}{2}-x \\ x=\dfrac{P}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$$

Las dimensiones del rectángulo de área máxima es un rectángulo de lados $x=\dfrac{P}{4}$ e $y=\dfrac{P}{4}$, es decir, un cuadrado de lado $x=\dfrac{P}{4}$.

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=A^T\cdot B+I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de *A*, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.

(a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n\in\mathbb{N}$.

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)$.

Calculamos la expresión de la matriz C.

$$C=A^T\cdot B+I_2=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2+0+0 & 0+2+0\\ 1+0+1 & 0+0+0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz C tiene la expresión $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

(a) Calculamos las primeras potencias pares de la matriz C.

$$C^{2\cdot 1}=C^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & -2+2\\ -2+2 & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$C^{2\cdot 2}=C^4=C^2C^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25+0 & 0+0\\ 0+0 & 0+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{pmatrix}$$

$$C^{2\cdot 3}=C^6=C^4C^2=\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^3 & 0\\ 0 & 5^3\end{pmatrix}$$

...

$$C^{2n}=\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$$

(b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)\Rightarrow X=5C^{-1}\left(A^T\cdot B\right)$$

Como $C^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2\Rightarrow\frac{1}{5}C^2=I_2\Rightarrow\left(\frac{1}{5}C\right)\cdot C=I_2\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{5}C$.

Por otro lado, en la expresión $C=A^T\cdot B+I_2$ multiplicamos por C^{-1}.

$$C = A^T \cdot B + I_2 \Rightarrow C^{-1}C = C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) + C^{-1}I_2 \Rightarrow I_2 = C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) + C^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) = I_2 - C^{-1}$$

Sustituimos en la expresión de la matriz X.

$$\left.\begin{array}{l} X = 5C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) \\ C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) = I_2 - C^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow X = 5\left(I_2 - C^{-1}\right) = 5I_2 - 5C^{-1} \Rightarrow \left\{C^{-1} = \frac{1}{5}C\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 5I_2 - 5\frac{1}{5}C = 5I_2 - C = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La expresión de la matriz X es la siguiente $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m\in\mathbb{R}$ un parámetro.

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$.

(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A\cdot X=0$ cuando $m = 6$.

(a) Usamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz A para establecer su rango.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} Fila\,2^{a}+2\cdot Fila\,1^{a} \\ -4 \quad 6 \quad m-6 \\ \hline 4 \quad -6 \quad 8 \\ 0 \quad 0 \quad m+2\rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,1^{a} \\ 2 \quad -3 \quad m+6 \\ \hline -2 \quad 3 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad m+2\rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a} \\ 0 \quad 0 \quad m+2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -m-2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen dos posibilidades.

1ª posibilidad. $m+2=0\rightarrow m=-2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de A es 1

2ª posibilidad. $m+2\neq 0\rightarrow m\neq -2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2\neq 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

(b) Cuando $m = 6$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$. Podemos resolver el sistema partiendo de esta matriz, pero lo resolvemos partiendo de la matriz equivalente obtenida en el apartado (a).

Cuando $m = 6$ la matriz queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el sistema sería:

$$A\cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3y+4z=0 \\ 8z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3y+4z=0 \\ \boxed{z=0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-3y=0 \Rightarrow 2x=3y \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}y}$$

Las soluciones del sistema planteado son: $x=\frac{3}{2}\lambda;\ y=\lambda;\ z=0;$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Llamamos "x" al precio sin IVA de un artículo A, "y" al precio sin IVA de un artículo B y "z" al precio sin IVA de un artículo C.

El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 € → $x+2y+5z=483$

El total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A (4 %), 10 productos de alimentación B (10 %) y 100 pequeños electrodomésticos C (21 %), es de 1954 € → $100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954$.

El precio sin IVA del pequeño electrodoméstico (C) es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad (A) más ocho artículos de alimentación (B) → $z=4x+8y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 4x+y+21z=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5(4x+8y)=483 \\ 4x+y+21(4x+8y)=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+20x+40y=483 \\ 4x+y+84x+168y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 21x+42y=483 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=23 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=23-2y \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88(23-2y)+169y=1954 \Rightarrow 2024-176y+169y=1954 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7y=-70 \Rightarrow \boxed{y=\frac{70}{7}=10} \Rightarrow \boxed{x=23-20=3} \Rightarrow \boxed{z=12+80=92}$$

El precio con IVA de un producto A es 3 · 1.04 = 3.12 €, un producto B vale 10 · 1.10 = 11 € y un producto C vale 92 · 1.21 = 111.32 €.

8. Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)$ y $P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen 1/3.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

(a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]$.

Calculamos el valor del producto mixto.

$$\left.\begin{matrix} P_1(-2,1,1) \\ P_2(0,a,-2) \\ P_3(-1,1,-1) \\ P_4(1,3,-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = (0,a,-2)-(-2,1,1) = (2,a-1,-3) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,1,-1)-(-2,1,1) = (1,0,-2) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (1,3,-3)-(-2,1,1) = (3,2,-4) \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0-6(a-1)-6-0+4(a-1)+8 =$$

$$= -6a+6-6+4a-4+8 = -2a+4$$

Igualamos el volumen a 1/3.

$$Volumen = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{2} = 1 \Rightarrow |-2a+4| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+4 = 2 \rightarrow -2a = -2 \rightarrow \boxed{a=1} \\ -2a+4 = -2 \rightarrow -2a = -6 \rightarrow \boxed{a=3} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $a = 3$.

(b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el producto mixto $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]$ debe ser nulo.

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = -2a+4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

9. Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

(a) De 54 alumnas aprueban 28. Es una proporción de $\frac{28}{54} \simeq 0.5185$. El porcentaje de alumnas que aprueban es de 51.89 %.

De 45 alumnos aprueban 21. Es una proporción de $\frac{21}{45} \simeq 0.4667$. El porcentaje de alumnos que aprueban es del 46.67 %.

(b) Han aprobado 49 personas y de ellas 28 son mujeres. La probabilidad de que al elegir una persona que haya aprobado sea una mujer es de $\frac{28}{49} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714$.

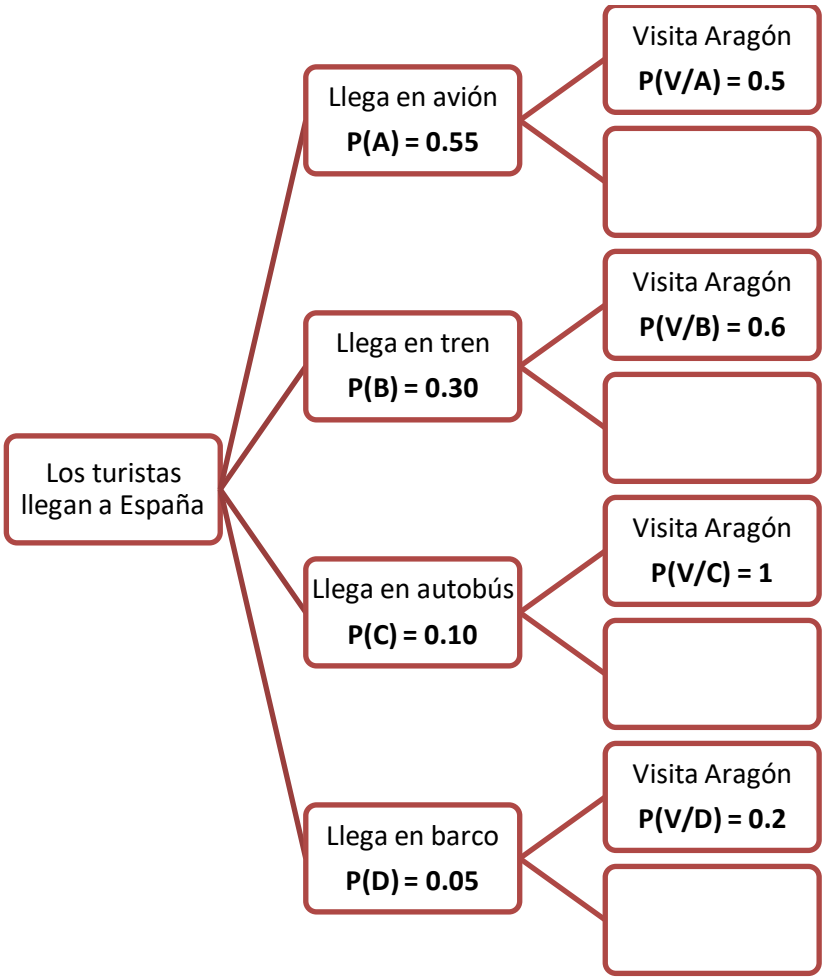
10. Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Llamamos A al suceso "el turista llega a España en avión", B al suceso "el turista llega a España en tren", C al suceso "el turista llega a España en autobús", D al suceso "el turista llega a España en barco" y V al suceso "el turista visita Aragón".

Realizamos un diagrama de árbol para detallar las probabilidades de cada suceso.



(a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V)=P(A)P(V/A)+P(B)P(V/B)+P(C)P(V/C)+P(D)P(V/D)=$$

$$=0.55\cdot 0.5+0.30\cdot 0.6+0.10\cdot 1+0.05\cdot 0.2=\boxed{0.565}$$

La probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón es de 0.565.

(b) Nos piden calcular $P\left(\left(B\cup C\right)/V\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\left(B\cup C\right)/V\right)=\frac{P\left(\left(B\cup C\right)\cap V\right)}{P\left(V\right)}=\left\{B\cap C=\varnothing\right\}=\frac{P\left(B\cap V\right)+P\left(C\cap V\right)}{P\left(V\right)}=$$

$$=\frac{P\left(B\right)P\left(V/B\right)+P\left(C\right)P\left(V/C\right)}{P\left(V\right)}=\frac{0.30\cdot 0.6+0.10\cdot 1}{0.565}=\boxed{\frac{56}{113}\simeq 0.4956}$$

La probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren es de $\frac{56}{113}\simeq 0.4956$.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.
b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int xf\left(x\right)dx$

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)-asen\left(x\right)+3x\cos\left(2x\right)}{x^2}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.
b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde × representa el producto vectorial de dos vectores.

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

SOLUCIONES

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x=0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int xf\left(x\right)dx$

a) La función tiene un extremo relativo en $x = 0$, lo que significa que $f\,'(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f\,'(x)=\left(e^{ax}+b\right)+x\left(ae^{ax}\right)=e^{ax}+b+axe^{ax} \\ f\,'(0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow e^{a\cdot 0}+b+a\cdot 0\cdot e^{a\cdot 0}=0\Rightarrow 1+b=0\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

La función queda $f(x)=\left(e^{ax}-1\right)x-e,\quad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 2$, lo que significa que $f\,''(2) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f\,'(x)=e^{ax}-1+axe^{ax}\Rightarrow f\,''(x)=ae^{ax}+ae^{ax}+axae^{ax} \\ f\,''(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow ae^{2a}+ae^{2a}+2aae^{2a}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ae^{2a}+2a^2e^{2a}=0\Rightarrow 2ae^{2a}\left(1+a\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ e^{2a}\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1+a=0\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = -1$.

b) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$ la función queda $f(x)=\left(e^{x}+2\right)x-e=xe^{x}+2x-e$.

$$\int xf\left(x\right)dx=\int x\left(xe^{x}+2x-e\right)dx=\int x^2e^{x}+2x^2-exdx=\int x^2e^{x}dx+\int 2x^2dx-\int exdx=$$

$$=\int x^2e^{x}dx+2\int x^2dx-e\int xdx=\int x^2e^{x}dx+2\frac{x^3}{3}-e\frac{x^2}{2}=\ldots$$

$$\int x^2e^{x}dx=\left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x^2=u\rightarrow 2xdx=du \\ dv=e^{x}dx\rightarrow v=\int e^{x}dx=e^{x} \end{array}\right]=x^2e^{x}-\int e^{x}2xdx=x^2e^{x}-2\int xe^{x}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x=u\rightarrow dx=du \\ dv=e^{x}dx\rightarrow v=\int e^{x}dx=e^{x} \end{array}\right]=x^2e^{x}-2\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)=$$

$$=x^2e^{x}-2\left(xe^{x}-e^{x}\right)=x^2e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}$$

$$\ldots=x^2e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}+2\frac{x^3}{3}-e\frac{x^2}{2}=\boxed{x^2e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}+2\frac{x^3}{3}-\frac{e}{2}x^2+K}$$

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2} = \frac{\ln(0+1) - a\,sen(0) + 0\cdot\cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= In\det er\min ación(L´Hôpital) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x\,sen(2x)}{2x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{0+1} - a\cos(0) + 3\cos(0) - 0\,sen(0)}{0} = \frac{1-a+3}{0} = \frac{4-a}{0} = \ldots$$

Como el límite debe ser finito el numerador debe de ser nulo y así seguimos resolviendo el límite con la regla de L´Hôpital → *4 – a = 0* → *a = 4*.

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 4\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x\,sen(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = In\det er\min ación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4\,sen(x) - 6\,sen(2x) - 6\,sen(2x) - 12x\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{(0+1)^2} + 4\,sen(0) - 6\,sen(0) - 6\,sen(0) - 0\cos(0)}{2} = \frac{-1+0-0-0-0}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Descomponemos $\sqrt{3}$ como $x+y=\sqrt{3}$.

La función $f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y$ debe ser máxima. Convertimos esta función en una función de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\sqrt{3}\to y=\sqrt{3}-x \\ f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{3}-x\right)$$

Esta función solo existe cuando $x > 0$ y cuando $\sqrt{3}-x>0\Rightarrow\sqrt{3}>x$.

El dominio de la función es $\left(0,\sqrt{3}\right)$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\log_3\left(\sqrt{3}x-x^2\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_3 e+\frac{-1}{\sqrt{3}-x}\log_3 e=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\cdot\log_3 e=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}=0\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}-x}\Rightarrow\sqrt{3}-x=x\Rightarrow\sqrt{3}=2x\Rightarrow\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$f'(0.1)=\dfrac{\sqrt{3}-0.2}{\sqrt{3}\cdot 0.1-0.1^2}\cdot\log_3 e\simeq 8.54>0$. La función crece en $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1^2}\cdot\log_3 e\simeq -0.33<0$. La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Los dos sumandos que buscamos son $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow y=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La función toma el valor:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}+\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\log_3\frac{3}{4}=\log_3 3-\log_3 4=\boxed{1-\log_3 4}$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.
b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=1$$

Este valor está excluido del dominio. Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$

Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-2x+1\right)-x^2\left(2x-2\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2+2x-\cancel{2x^3}+2x^2}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x\left(x-1\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x\left(x-1\right)}{\left(\left(x-1\right)^2\right)^2}=\frac{-2x\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4}=\frac{-2x}{\left(x-1\right)^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{\left(x-1\right)^3}=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada, antes y después de $x = 0$. Añadimos el valor excluido del dominio $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\frac{-2(-1)}{(-1-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale
  $f'(0-5)=\frac{-2(0.5)}{(0.5-1)^3}=\frac{-1}{-0.125}=8>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2(2)}{(2-1)^3}=\frac{-4}{1}=-4<0$.
  La función decrece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x-1)^3-(-2x)(3)(x-1)^2}{\left((x-1)^3\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cancel{(x-1)^2}(x-1)+6x\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{6}_{4}}=\frac{-2(x-1)+6x}{(x-1)^4}=\frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4}=\frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{4x+2}{(x-1)^4}=0\Rightarrow 4x+2=0\Rightarrow 4x=-2\Rightarrow \boxed{x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor. Añadimos el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,-0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale
  $f''(-1)=\frac{4\cdot(-1)+2}{(-1-1)^4}=-\frac{1}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-0.5)$.
- En el intervalo $(-0.5,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale
  $f''(0)=\frac{4\cdot 0+2}{(0-1)^4}=2>0$. La función es convexa (∪) en $(-0.5,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale
  $f''(2)=\frac{4\cdot 2+2}{(2-1)^4}=10>0$. La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava en $(-\infty,-0.5)$ y convexa en $(-0.5,1)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -0.5$.

Como $f(-0.5)=\frac{(-0.5)^2}{(-0.5)^2-2(-0.5)+1}=\frac{1}{9}$ la función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{9}\right)$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}= m-(m+2)(m-1)+4m-m^2(m-1)+2-2(m+2)=$$

$$= m-\left(m^2-m+2m-2\right)+4m-m^3+m^2+2-2m-4=$$

$$= m-\cancel{m^2}+m-2m+2+4m-m^3+\cancel{m^2}+2-2m-4=-m^3+2m=-m\left(m^2-2\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow -m\left(m^2-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m^2-2=0 \rightarrow m^2=2 \rightarrow m=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ y $m \neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
- Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=-\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

  La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m\neq\pm\sqrt{2}$ y $m\neq 0$ el rango de A es 3. Si $m=\pm\sqrt{2}$ o *m = 0* el rango de A es 2.

b) Para *m = 1* la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1-0+4-0+2-6=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$$

Consideramos $A = B^2$. Hallamos el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Si en la fila 1ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 3\left[\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 3\left[4\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{La fila 1ª y 2ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{matrix} \right\} = 3\left[0 + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Si en la fila 3ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 6\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{La fila 2ª y 3ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 6\left[0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Intercambiamos} \\ \text{la fila 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante} \\ \text{cambia de signo} \end{matrix} \right\} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-3}$$

Aplicamos el resultado al cálculo del determinante de A.

$$\boxed{|A| = |B^2| = |B|^2 = (-3)^2 = 9}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Llamamos "x" al número de voluntarios de la sede de Huesca, "y" al número de voluntarios de la sede de Zaragoza y "z" al número de voluntarios de la sede de Teruel.

"El número total de voluntarios es de 31" → $x+y+z=31$.

"Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza" → $x-3=y+3$.

"El número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes" → $x=y+z+1$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x=y+6 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+6+y+z=31 \\ y+6=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=25 \\ \boxed{5=z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+5=25 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow \boxed{y=10} \Rightarrow \boxed{x=10+6=16}$$

Hay 16 voluntarios en la sede de Huesca, 10 en la de Zaragoza y 5 en la de Teruel.

8) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w},\quad \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w},\quad \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s}\times(\vec{t}-\vec{r})$ donde × representa el producto vectorial de dos vectores.

a) Calculamos el producto mixto de los tres vectores. Si da un resultado nulo son linealmente dependientes, en caso contrario son independientes.
Como $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes sabemos que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ y forman una base.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(1,-1,-2)\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}=(1,0,3)\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\1&0&3\\2&-1&1\end{vmatrix}=0-6+2-0+1+3=0$$

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes si encontramos un valor de *a* y de *b* tal que $\vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\\ \vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a(\vec{u}+3\vec{w})+b(2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a\vec{u}+3a\vec{w}+2b\vec{u}-b\vec{v}+b\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(a+2b)\vec{u}-b\vec{v}+(3a+b)\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=a+2b\\-1=-b\rightarrow \boxed{b=1}\\-2=3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=a+2\\-2=3a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{-1=a}\\-3=3a\rightarrow \boxed{a=-1}\end{cases}$$

Como hemos encontrado los valores que permiten expresar $\vec{r}$ como combinación lineal de los otros dos sabemos que los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes

b) Calculamos la expresión de los vectores y luego calculamos su producto vectorial

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\vec{s}=3\vec{u}+9\vec{w}\\ \vec{t}-\vec{r}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}-\left(\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}\right)=\vec{u}+3\vec{w}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\vec{s}\times\left(\vec{t}-\vec{r}\right)=\left(3\vec{u}+9\vec{w}\right)\times\left(\vec{u}+3\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\\ 3 & 0 & 9\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=9\vec{v}-9\vec{v}=\boxed{\vec{0}}$$

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.
a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

a) La probabilidad de que un turista elegido al azar entre los que visitan España visite Aragón es de 0.35 y la probabilidad de que no visite Aragón es de 0.65.
De los 7 turistas elegidos al azar es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón y 5 que no lo visitaron que el hecho de que sean 5 los que visitan Aragón y 2 no, pues es más alta la probabilidad de no visitar Aragón.

Si necesitamos más detalle.
Llamamos X a la variable que cuenta los turistas que visitaran Aragón de un grupo de 7. Esta variable es binomial pues las repeticiones son independientes y solo hay dos posibilidades (visita Aragón o no).
Los parámetros son *n = nº de repeticiones = 7*. *p = P(Visite Aragón) = 0.35*

X = B(7, 0.35)

$$\left.\begin{aligned} P(X=5)&=\binom{7}{5}0.35^5\cdot 0.65^2=\underbrace{\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2}\cdot 0.35^3 \\ P(X=2)&=\binom{7}{2}0.35^2\cdot 0.65^5=\underbrace{\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2}\cdot 0.65^3 \\ &0.35<0.65\rightarrow 0.35^3<0.65^3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow P(X=5)<P(X=2)$$

Es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón.

b) Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

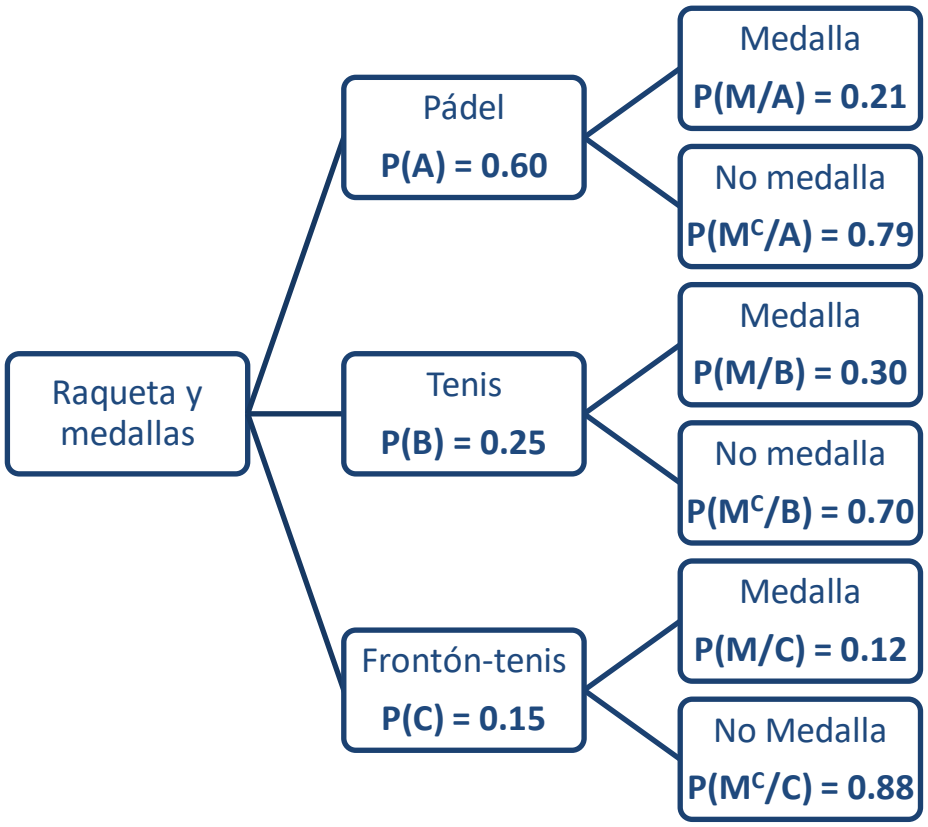
$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{7}{0}0.35^0\cdot 0.65^7=1-0.65^7=\boxed{0.951}$$

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=0.60\cdot 0.21+0.25\cdot 0.30+0.15\cdot 0.12=\boxed{0.219}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{P(B)P(M/B)}{P(M)}=\frac{0.25\cdot 0.30}{0.219}=\boxed{\frac{25}{73}\simeq 0.3425}$$

Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} ax-\dfrac{senx}{x}+2 & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\dfrac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\dfrac{7}{2}$.

4) Dada la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.
b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

5) Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=A\cdot B^T-2I$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.
a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.
b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX=A^T\cdot B$, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & & +mz & = & 0 \\ & my & +2z & = & 2+m^2 \\ x & +y & & = & 2m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

7) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

8) El plano $\pi \equiv 2x+by-2z+4=0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r} + \vec{v}\cdot\vec{s} + \vec{w}\cdot\vec{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

SOLUCIONES

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} ax-\dfrac{senx}{x}+2 & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases} , \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

a) Para $x\neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} ax-\frac{senx}{x}+2=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2-senx+2x}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax-\cos x+2}{1}=\frac{2a\cdot 0-\cos 0+2}{1}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0\neq 1=\lim_{x\to 0} f(x)$$

La función no es continua, independientemente del valor de a.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ para todo valor de a.

b) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ la derivada debe anularse.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=a-\dfrac{x\cos x-senx}{x^2}, \quad para\ x\neq 0 \\ f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0-(-1)}{\frac{\pi^2}{4}}\Rightarrow a=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}\Rightarrow \boxed{a=\frac{4}{\pi^2}}$$

El valor buscado es $a=\dfrac{4}{\pi^2}$.

Para $a=\dfrac{4}{\pi^2}$ comprobamos que tipo de extremo hay en $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

  $f'(-2) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-2)\cos(-2) - sen(-2)}{(-2)^2} = -0.03 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f'(-1) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-1)\cos(-1) - sen(-1)}{(-1)^2} = 0.1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$. Tomamos un intervalo cercano al valor, pues no sabemos si existen más puntos críticos y por tanto, cambios de signo de la derivada.

Decrece y luego crece → En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación(número e)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]}=\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{x^2+2x+1-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{-x}{x^2+3x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-x\frac{1}{x}}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-1}{2x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

$$\ldots=e^0=\boxed{1}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

Hallamos la ecuación de la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+4\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{4}+14=\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} pendiente=\frac{1}{2} \\ pasa\ por\left(\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x}$$

Debemos calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ y la recta $y=\frac{1}{2}x$.

Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x \\ y=\frac{1}{2}x\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=\frac{x}{2}\Rightarrow -2x^2+8x=x\Rightarrow -2x^2+7x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-2x+7)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ -2x+7=0\rightarrow -2x=-7\Rightarrow x=\frac{7}{2}\end{cases}$$

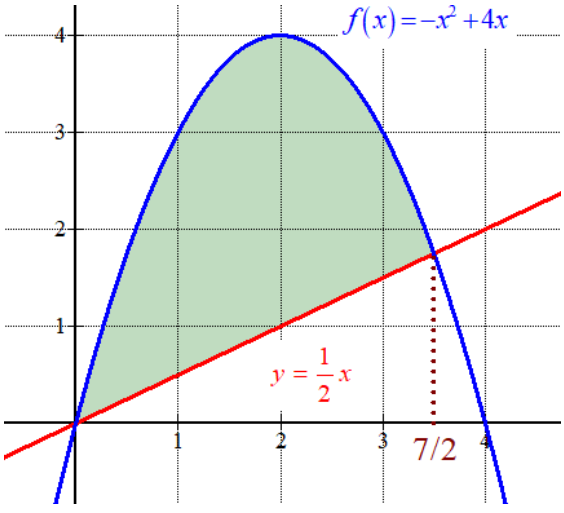
Calculamos la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 7/2.

$$\int_0^{7/2}-x^2+4x-\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^{7/2}-x^2+\frac{7}{2}x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{7/2}=$$

$$=\left[-\frac{(7/2)^3}{3}+\frac{7(7/2)^2}{4}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{7\cdot 0^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{343}{48}\simeq 7.15$$



El área de la región pedida es $\frac{343}{48}\simeq 7.15$ unidades cuadradas.

4) Dada la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.
b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-x-2=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Estos valores están excluidos del dominio.

Vemos cuando existe la raíz. Para ello debe ser el radicando positivo ($x^2-x-2>0$)

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la el radicando vale $(-2)^2-(-2)-2=4>0$. La función existe en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,2)$ tomamos $x = 0$ y la el radicando vale $0^2-0-2=-2<0$. La función **no** existe en $(-1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la el radicando vale $3^2-3-2=3>0$. La función existe en $(2,+\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2\cdot 2-1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\frac{3}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2-(-1)-2}}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=2$$

$y=2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\left\{\begin{array}{l}\text{Como } x<0\\ \text{introduzco en la raiz}\\ -x\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{-\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{-\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{-\sqrt{1}}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal

La función no tiene ramas parabólicas, pues los límites en el infinito son finitos.

5) Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ D=A\cdot B^T-2I$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX=A^T\cdot B$, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos la expresión de la matriz D.

$$D=A\cdot B^T-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2+1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 1-1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=0+4+0-0-8-0=-4\neq 0$$

Existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1}=\frac{Adj\left(D^T\right)}{|D|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -4\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 4 & 12 & -8\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ 0 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $CX = A^T \cdot B$.

$$CX = A^T \cdot B \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$C^{-1} = \frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+2-2 & 0+2+0 \\ 1+0+2 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & & +mz & = & 0 \\ & my & +2z & = & 2+m^2 \\ x & +y & & = & 2m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-m^2-0+2 = -m^2+2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2+2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = +\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2\sqrt{2} \\ -1 \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \end{matrix}}^{A/B} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2\sqrt{2} \\ \hline -1 \quad 0 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad -\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -\sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \end{matrix}}^{A/B} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ el sistema es compatible determinado y si $m = -\sqrt{2}$ o $m = +\sqrt{2}$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & 2y & +2z & = & 6 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} + \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ -x \quad +2z = 0 \\ x \quad +y \quad = 4 \\ \hline y \quad +2z = 4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ & y & +2z & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ y \quad +2z = 4 \\ -y \quad -z = -3 \\ \hline z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ y+z=3 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ y+1=3 \rightarrow \boxed{y=2} \end{cases}$$

La solución es $x = 2, y = 2, z = 1$.

7) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n\in\mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)X=B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

a) Calculamos las potencias sucesivas de la matriz A, en busca de alguna regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-1 & \frac{1}{2}-2\\ -\frac{1}{2}+2 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{4} & \frac{-3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{2-1}}{2^2} & \frac{(-3)^{2-1}}{2^{2-1}}\\ \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} & \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-2}}\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}\frac{-3}{4} & \frac{-3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{8}+\frac{3}{2} & \frac{-3}{4}+3\\ \frac{3}{4}-3 & \frac{3}{2}-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{4}\\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{3-1}}{2^3} & \frac{(-3)^{3-1}}{2^{3-1}}\\ \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} & \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-2}}\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{4}\\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{16}-\frac{9}{4} & \frac{9}{8}-\frac{9}{2}\\ \frac{-9}{8}+\frac{9}{2} & \frac{-9}{4}+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-27}{16} & \frac{-27}{8}\\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{4-1}}{2^4} & \frac{(-3)^{4-1}}{2^{4-1}}\\ \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} & \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-2}}\end{pmatrix}$$

....

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{n-1}}{2^n} & \frac{(-3)^{n-1}}{2^{n-1}}\\ \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} & \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-2}}\end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE OBTENERLO

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1-4 & 2-8\\ -2+8 & -4+16\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 6 & 12\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(-3)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-3}{2^3}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{(-3)^2}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

...

$$\boxed{A^n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación $(A+2I)X = B$.

$$(A+2I)X = B \Rightarrow X = (A+2I)^{-1} B$$

Comprobamos que A + 2I tiene inversa y la calculamos.

$$A+2I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A+2I| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A+2I)^{-1} = \frac{Adj(A+2I)^T}{|A+2I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = (A+2I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3+5 & 5+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 15/2 \end{pmatrix}}$$

8) El plano $\pi \equiv 2x+by-2z+4=0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos *A*, *B* y *C*. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos *A*, *B* y *C* sea 6 u^2.

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2,0,0)$$

$$B \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow by+4=0 \Rightarrow y=\frac{-4}{b} \Rightarrow B\left(0,\frac{-4}{b},0\right)$$

$$C \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -2z+4=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow C(0,0,2)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{-4}{b},0\right)-(-2,0,0)=\left(2,\frac{-4}{b},0\right) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,2)-(-2,0,0)=(2,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & \frac{-4}{b} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-8}{b}i+\frac{8}{b}k-4j=\left(-\frac{8}{b},-4,\frac{8}{b}\right)$$

$$Área = \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{b}\right)^2+(-4)^2+\left(\frac{8}{b}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{64}{b^2}+16+\frac{64}{b^2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2}$$

Igualamos el valor del área a 6 y obtenemos el valor de *b*.

$$Área = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2} = 6 \Rightarrow \sqrt{\frac{128}{b^2}+16} = 12 \Rightarrow \frac{128}{b^2}+16 = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{128}{b^2} = 128 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Los valores de *b* buscados son –1 y +1.

9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r} + \vec{v}\cdot\vec{s} + \vec{w}\cdot\vec{t}$ donde · representa el producto escalar de dos vectores.

a) Comprobamos si el producto mixto de los vectores en nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{r} = (2,0,1) \\ \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} \Rightarrow \vec{s} = (1,1,-1) \\ \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{t} = (-3,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+0-1+3+0-2 = 2 \neq 0$$

Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente independientes.

b)

$$\vec{u}\cdot\left(2\vec{u} + \vec{w}\right) + \vec{v}\cdot\left(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\right) + \vec{w}\cdot\left(-3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\right) =$$

$$= 2\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{w} - 3\vec{w}\cdot\vec{u} - \vec{w}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por ser unitarios} \\ \vec{u}\cdot\vec{u} = 1 \\ \vec{v}\cdot\vec{v} = 1 \\ \vec{w}\cdot\vec{w} = 1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Por ser ortogonales} \\ \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \end{array}\right\} = 2+0+0+1-0-0-0+1 = \boxed{4}$$

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

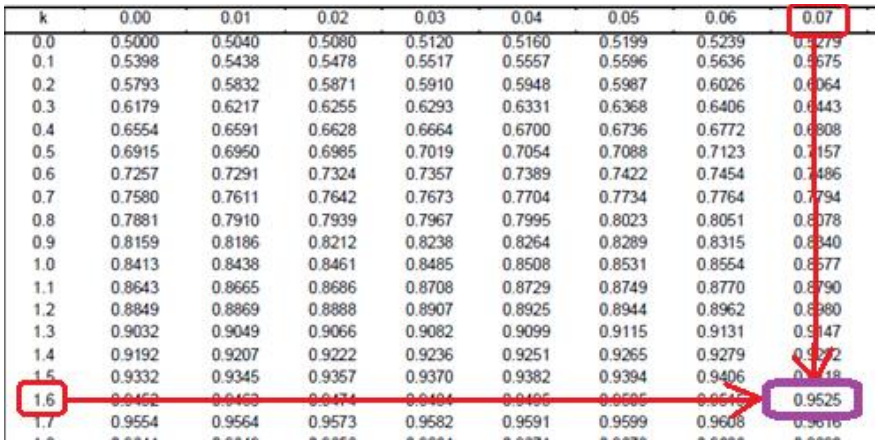
b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

X = El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino. X = N(150, 30)

a) Nos piden determinar $P(X \geq 200)$

$$P(X \geq 200) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 150}{30} \end{matrix} \right\} = P\left(Z \geq \frac{200 - 150}{30} \right) = P(Z \geq 1.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.67) = \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9525 = \boxed{0.0475}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616

b) Calculamos el valor de $P(110 \leq X \leq 150)$.

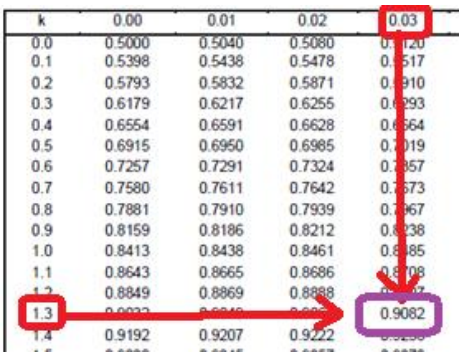
$$P(110 \leq X \leq 150) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 150}{30} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{110 - 150}{30} \leq \frac{X - 150}{30} \leq \frac{150 - 150}{30} \right) =$$

$$= P(-1.33 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) =$$

$$= 0.5 - P(Z \geq 1.33) = 0.5 - \left[1 - P(Z \leq 1.33) \right] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 0.5 - [1 - 0.9082] = \boxed{0.4082}$$

El porcentaje de los vinos producidos en esta bodega que tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l es del 40.82%.



k	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236

Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = xe^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva *f(x)* entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

2) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}, \; a \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que $\lim_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 3x + 2x^2$$
$$g(x) = x^2 + 4x + 2$$

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{3 - x^2}$$

a) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.
b) (0.75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz $P=AB^T+C$, donde B^T es la matriz traspuesta de *B*.

b) (1 punto) Para el valor *m = 1*, calcula la inversa de la matriz *P* del apartado anterior.

.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+ay+z=0\\ x+y+a^2z=0\\ x+y+2az=0\end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a\in\mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para *a = 0*.

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice *D* sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = xe^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva *f(x)* entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

a) La función es continua, pues es composición y producto de funciones continuas (exponencial y polinómica).
Para que tenga como asíntota horizontal $y = 0$ debe cumplirse que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-ax^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax^2}} = \{a > 0\} = \frac{\infty}{\infty} = In\det er\min ación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2ae^{ax^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

La condición es que sea $a > 0$.

Si $a < 0$ el límite vale $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-ax^2} = \{-a > 0\} = \infty$. Y no tendría asíntota horizontal.

b) Si $a = \frac{1}{2}$ la función queda $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

Vemos si la gráfica corta el eje X entre 0 y 1.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = xe^{-x^2/2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xe^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Solo corta el eje X en $x = 0$.

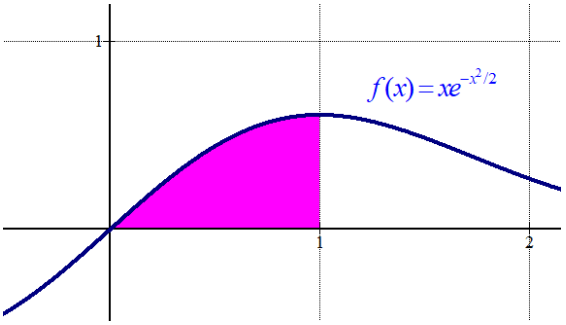
El área se calcula con la integral definida entre 0 y 1 de la función.
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^{-x^2/2}dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ -\frac{x^2}{2} = t \Rightarrow -2\frac{x}{2}dx = dt \\ -xdx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-x} \end{array}\right\} = \int^{0} xe^{t}\frac{dt}{-x} = -\int e^{t}dt = -e^{t} = -e^{-x^2/2} + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$Área = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2/2}dx = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[-e^{-1^2/2}\right] - \left[-e^{-0^2/2}\right] = \boxed{-e^{-1/2} + 1 \simeq 0.39\ u^2}$$



2) Para la siguiente función:

$$f(x)=\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2},\ a\in\mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a,b\in\mathbb{R}$, para que $\lim_{x\to 1} f(x)=L\in\mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\frac{2+a+b+3}{-1+4-5+2}=\frac{5+a+b}{0}$$

Este límite tiene valor finito $L\in\mathbb{R}$ cuando $5 + a + b = 0$.

Supongamos que $5 + a + b = 0 \rightarrow b = -5 - a$..

UNA FORMA DE RESOLVERLO. Sugerencia de Germán Jesús Rubio Luna.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\frac{2+a+b+3}{-1+4-5+2}=\frac{5+a+b}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+2ax+(-5-a)}{-3x^2+8x-5}=\frac{6+2a-5-a}{-3+8-5}=\frac{1+a}{0}=...$$

Este límite tiene valor finito $L\in\mathbb{R}$ cuando $1 + a = 0 \rightarrow a = -1$.

$$...=\frac{1+a}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{12x+2(-1)}{-6x+8}=\frac{12-2}{-6+8}=\frac{10}{2}=\boxed{5}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = -5—(-1) = -4$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+ax^2+(-5-a)x+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=...$$

	-1	4	-5	2
1		-1	3	-2
	-1	3	-2	$\underline{\lfloor 0}$

$$\Rightarrow -x^3+4x^2-5x+2=(x-1)(-x^2+3x-2)$$

$$-x^2+3x-2=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases}\frac{-3+1}{-2}=1\\ \frac{-3-1}{-2}=2\end{cases}$$

$$-x^3+4x^2-5x+2=-(x-1)(x-1)(x-2)$$

	2	a	$-5-a$	3
1		2	$2+a$	-3
	2	$2+a$	-3	$\underline{\vert 0}$

$\Rightarrow 2x^3+ax^2+(-5-a)x+3=(x-1)\left(2x^2+(2+a)x-3\right)$

$$\ldots=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+(2+a)x-3\right)}{-\cancel{(x-1)}(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+(2+a)x-3}{-(x-1)(x-2)}=\frac{2+2+a-3}{0}=\frac{1+a}{0}$$

Para que sea finito el límite debe ser $1 + a = 0 \rightarrow a = -1$.

Y por lo anterior $b = -5 - (-1) = -4$.

Terminamos de calcular el límite con estos valores.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-4x+3}{-x^3+4x^2-5x+2}=\ldots$$

$-x^3+4x^2-5x+2=-(x-1)(x-1)(x-2)$

$2x^3-x^2-4x+3=\ldots$

	2	-1	-4	3
1		2	1	-3
	2	1	-3	$\underline{\vert 0}$

1		2	3
	2	3	$\underline{\vert 0}$

$\Rightarrow 2x^3-x^2-4x+3=(x-1)(x-1)(2x+3)$

$$\ldots=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)(x-1)}(2x+3)}{-\cancel{(x-1)(x-1)}(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{-(x-2)}=\frac{5}{1}=\boxed{5}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=3x+2x^2$$

$$g(x)=x^2+4x+2$$

Buscamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 3x+2x^2=x^2+4x+2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=x}\\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 2 de la diferencia de las funciones.

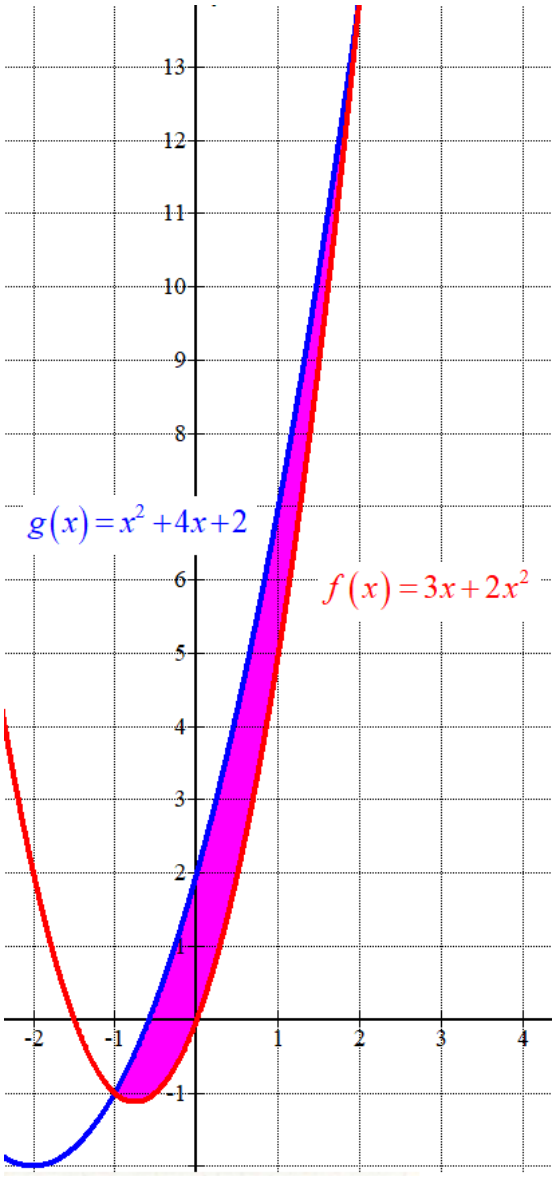
$$f(x)-g(x)=3x+2x^2-\left(x^2+4x+2\right)=$$
$$=3x+2x^2-x^2-4x-2=x^2-x-2$$

$$Área=\left|\int_{-1}^{2} f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{2} x^2-x-2\,dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-4\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=|-4.5|=\boxed{4.5u^2}$$



4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}$$

a) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.
b) (0.75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}\Rightarrow 3-x^2=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow \text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$$

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=-\sqrt{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{3-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{0}=\infty$$

$x=-\sqrt{3}$ es asíntota vertical

¿ $x=\sqrt{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{3-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{0}=\infty$$

$x=\sqrt{3}$ es asíntota vertical**.**

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\left\{\begin{matrix}\text{Numerador y denominador}\\ \text{del mismo grado}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{-1}=-1$$

$y=-1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Ramas parabólicas. No tiene pues tiene asíntota horizontal.

b) La recta tangente a la función en el punto tiene la expresión: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.
Calculamos el valor de la función y de la derivada y obtenemos la recta tangente.

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}\Rightarrow f(1)=\frac{1^2+1}{3-1^2}=1$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(3-x^2)-(-2x)(x^2+x)}{(3-x^2)^2}=\frac{6x-\cancel{2x^3}+3-x^2+\cancel{2x^3}+2x^2}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2+6x+3}{(3-x^2)^2}$$

$$f\,'(1)=\frac{1^2+6+3}{\left(3-1^2\right)^2}=\frac{10}{4}=2.5$$

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=1 \\ f\,'(1)=2.5 \\ y-f(1)=f\,'(1)(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-1=2.5(x-1)\Rightarrow \boxed{y=2.5x-1.5}$$

La recta tangente a la función en el punto $x=1$ tiene ecuación $y=2.5x-1.5$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & k+1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que se verifique $A^2=3I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para *k = 0*, la matriz B^n con $B=2A-I$, siendo *I* la matriz identidad de orden 2, y $n\in\mathbb{N}$.

a)

$$A^2=3I\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & k+1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-k & k+k^2+k\\ -1-k-1 & -k+(k+1)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}1-k&=3\\ k^2+2k&=0\\ -2-k&=0\\ -k+(k+1)^2&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-2&=k\\ k(k+2)=0\rightarrow&\begin{cases}k=0\\ o\\ k=-2\end{cases}\\ -k+k^2+1+2k=3\rightarrow k^2+k-2=0\rightarrow&\begin{cases}k=1\\ o\\ k=-2\end{cases}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{k=-2}$$

Como deben de cumplirse todas las ecuaciones el único valor de *k* posible es *k = –2*.

b) Para *k = 0* tenemos que $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculamos la expresión de la matriz B.

$$B=2A-I=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos las potencias sucesivas de B.

$$B^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tenemos\ que\ B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 1 & 1 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 2 & 1 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 3 & 1 \end{pmatrix}; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos deducir que solo cambia el término que ocupa la primera posición en la segunda fila y sigue la regla de valer el doble de la potencia cambiado de signo. $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot n & 1 \end{pmatrix}$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz $P=AB^T+C$, donde B^T es la matriz traspuesta de *B*.

b) (1 punto) Para el valor *m = 1*, calcula la inversa de la matriz *P* del apartado anterior.

.

a) Calculamos la matriz P.

$$B^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$P=AB^T+C=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m & -1 & 1-m\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & 1 & m-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente a P más sencilla de estudiar.

$$P=\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lll}\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a & & \\ m-1 & 1 & m\\ 2-m & 0 & 2-m\\ \hline 1 & 1 & 2\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lll}\text{Fila } 2^a-2\cdot\text{Fila } 3^a & & \\ 2 & 2m+1 & 3\\ -2 & -2 & -4\\ \hline 0 & 2m-1 & -1\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva fila } 2^a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 0 & 2m-1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

El rango de P es el rango de $\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 0 & 2m-1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 0 & 2m-1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2m-1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-m)(4m-2-2m+1+1) =$$

$$= (2-m)(2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ o \\ m = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de *m* distinto de 0 y de 2 el determinante es no nulo. Por tanto, el rango de *P* es 3 para cualquier valor de *m* distinto de 0 y de 2.
Veamos cual es el rango de P para 0 y 2.

Si *m = 0* la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ aplicamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a P.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \frac{1}{2}\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz equivalente tiene dos filas no nulas. El rango de P es 2.

Si *m = 2* la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esta matriz tiene rango 2 pues tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo.

Quitamos la fila 1ª y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7 \neq 0$

Resumiendo: Si $m \neq 0$ *y* $m \neq 2$ el rango de P es 3. Si $m = 0$ *o* $m = 2$ el rango de P es 2.

b) Para $m = 1$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de P.}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 0$.

a) Obtenemos un sistema equivalente al que nos dan pero más sencillo. Utilizamos el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{ Ecuación } 2^a \\ x \quad +y \quad +2az \quad =0 \\ -x \quad -y \quad -a^2z \quad =0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad \left(2a-a^2\right)z \quad =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{ Ecuación } 1^a \\ x \quad +y \quad +a^2z \quad =0 \\ -x \quad -ay \quad -z \quad =0 \\ \hline 0 \quad (1-a)y \quad +\left(a^2-1\right)z \quad =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \quad +ay \quad +z=0 \\ (1-a)y+\left(a^2-1\right)z=0 \\ \left(2a-a^2\right)z=0 \end{cases}$$

Vemos cuando se anulan los elementos de la diagonal:

$$1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$2a-a^2=0 \Rightarrow a(2-a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ o \\ \boxed{a=2} \end{cases}$$

Si el valor de a es distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (solución única).

Si el valor de a es 0 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x \quad +z=0 \\ y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si el valor de *a* es 1 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si el valor de *a* es 2 intentamos resolver el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -y+3z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ y=3z \end{cases} \Rightarrow x+6z+z=0 \Rightarrow x=-7z \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=-7t \\ y=3t \\ z=t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

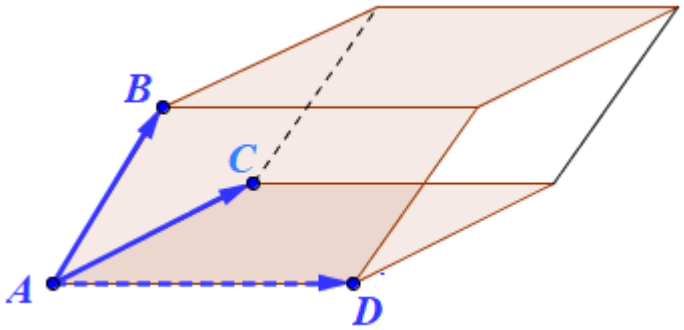
Resumiendo: Para cualquier valor de *a* distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (una única solución) y si *a* es 0, 1 o 2 el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 0$ lo hemos resuelto en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Si el vértice D se encuentra en el eje Y tiene coordenadas *D(0, d, 0)*.



El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)-(1,1,1)=(-3,0,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,3)-(1,1,1)=(-1,0,2)\\ \overrightarrow{AD}=(0,d,0)-(1,1,1)=(-1,d-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-3 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & d-1 & -1\end{vmatrix}=d-1+6d-6=7d-7$$

$$\left.\begin{array}{l}Volumen\,del\,tetraedro\,ABCD=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\dfrac{|7d-7|}{6}\\ Volumen\,del\,tetraedro\,ABCD=10\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|7d-7|}{6}=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7d-7=60\rightarrow 7d=67\rightarrow d=\dfrac{67}{7}\rightarrow \boxed{D\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)}\\ o\\ 7d-7=-60\rightarrow 7d=-53\rightarrow d=\dfrac{-53}{7}\rightarrow \boxed{D'\left(0,\dfrac{-53}{7},0\right)}\end{cases}$$

Hay dos soluciones del problema: $D\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)$ y $D'\left(0,\dfrac{-53}{7},0\right)$

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Si un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza entonces un 17 – 5 = 12 % practica solo danza clásica. Un 45 – 5 = 40 % solo practica danza de cabaret. Si sumamos esos porcentajes tenemos que 12 + 40 + 5 = 57 % practica danza.
Entonces el 100 – 57 = 43 % hace teatro.
Con estos porcentajes y aplicando la regla de Laplace calculamos las probabilidades pedidas.

a) $P\left(\textit{practique algún tipo de danza } \left(\textit{o los dos}\right)\right)=\frac{57}{100}=\boxed{0.57}$

b) He supuesto que no hay nadie que practique teatro y danza al mismo tiempo ya que no dan información de esta posibilidad.

$$P\left(Teatro\right)=\frac{43}{100}=\boxed{0.43}$$

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Esta situación planteada es una distribución binomial.
X = "Número de huevos desechados de un grupo de 5"
Número de repeticiones = n = 5 y p = Probabilidad de que sea desechado un huevo = 0.20.
X = B(5, 0.2)

a) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 1 - 0.8^5 = \boxed{0.67232}$$

b) b.1) Calculamos ambas probabilidades y las comparamos.

$$\left.\begin{array}{l} P(X=2) = \binom{5}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = \boxed{0.2048} \\ P(X=3) = \binom{5}{3} 0.2^3 \cdot 0.8^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.0512 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Es más probable que hayan} \\ \text{2 huevos no aptos}\end{array}$$

b.2) Al ser la probabilidad de ser apto cuatro veces la probabilidad de ser no apto parece razonable que sea más probable tener 2 no aptos y 3 aptos que 3 no aptos y 2 aptos.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+e^3, & x\le 0\\ (1-x)^{a/x}, & x>0\end{cases},\quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para $a = 1$ la recta tangente a la función en $x=-4$.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]$$

3) Calcula:

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión, caso de existir.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX-2I=A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A-mB$, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcula justificadamente $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x \quad\quad +az=-4 \\ 4x \quad\quad -3z=a+1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para *a = 1*.

8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo

$$r_1 = \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \text{ y } r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2,k,2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

9)

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v_1} = a\vec{u_1} - 2\vec{u_2} + 3\vec{u_3}$, $\vec{v_2} = -\vec{u_1} + a\vec{u_2} + \vec{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, siendo

$$\vec{v_1} = (1,0,-2) \text{ y } \vec{v_2} = (3,1,0)$$

10) El peso de los recién nacidos de una localidad sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+e^3, & x\le 0\\ (1-x)^{a/x}, & x>0\end{cases},\quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para $a=1$ la recta tangente a la función en $x=-4$.

a) La función es continua en $x<0$ pues existe la raíz, también es continua en $x>0$ pues existe y es continua, el único problema es en $x=0$ pero no se incluye.
Estudiamos la continuidad en $x=0$ comprobando que los límites laterales coincidan con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}+e^3=\sqrt{-0}+e^3=\boxed{e^3}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{a/x}=1^{a/0^+}=1^{+\infty}=In\det er\min ación=\\ \qquad =e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a}{x}(1-x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a}{x}(-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-a}=\boxed{e^{-a}}\\ f(0)=\sqrt{-0}+e^3=\boxed{e^3}\end{array}\right\}$$

Para que sean los tres valores iguales debe cumplirse $e^{-a}=e^3\Rightarrow -a=3\Rightarrow\boxed{a=-3}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=-4$ es $y-f(-4)=f'(-4)(x-(-4))$.
La función en $x=-4$ es $f(x)=\sqrt{-x}+e^3$

Calculamos el valor de la función y su derivada en $x=-4$ y lo sustituimos en la ecuación de la recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{-x}+e^3\Rightarrow f(-4)=\sqrt{4}+e^3=2+e^3\\ f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}+0=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}\Rightarrow f'(-4)=\dfrac{-1}{2\sqrt{4}}=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow y-\left(2+e^3\right)=-\frac{1}{4}(x+4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2-e^3=-\frac{1}{4}x-1\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{4}x+e^3+1}$$

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]=\infty-\infty=\textit{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}{\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2-\left(\sqrt{3}x+5\right)^2}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-\left(\left(\sqrt{3}x\right)^2+5^2+2\cdot\sqrt{3}x\cdot5\right)}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-\left(3x^2+25+10\cdot\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3x^2}-2-\cancel{3x^2}-25-10\cdot\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-27-10\cdot\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{27}{x}-\frac{10\cdot\sqrt{3}x}{x}}{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}+\frac{\sqrt{3}x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{27}{x}-10\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}+\frac{5}{x}}=\frac{-0-10\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3-0}+\sqrt{3}+0}=\frac{-10\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-10\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\boxed{-5}$$

3) Calcula:

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx$$

Es una integral que podemos calcular usando el método de integración por partes.

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2-1\rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\left(x^2-1\right)\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)2xdx=-e^{-x}\left(x^2-1\right)+2\int xe^{-x}dx=...$$

$$\int xe^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=x\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}dx=$$

$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$

$$...=-e^{-x}\left(x^2-1\right)+2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]=-x^2e^{-x}+e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$$

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-e^{-x}+K$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión, caso de existir.

a) El dominio de definición son todos los números reales menos los valores que anulan el denominador, por lo que $Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$.

Obtenemos la expresión de la derivada y buscamos sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{2(x-1)x^2-2x(x-1)^2}{x^4}=\frac{2(x^3-x^2)-2x(x^2-2x+1)}{x^4}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-2x^2-\cancel{2x^3}+4x^2-2x}{x^4}=\frac{2x^2-2x}{x^4}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-2x}{x^4}=0\Rightarrow 2x^2-2x=0\Rightarrow 2x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

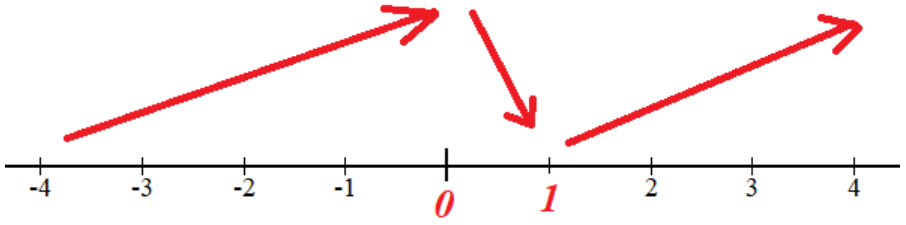
Los puntos críticos son $x = 0$ (no pertenece al dominio pero puede influir en el cambio de signo de la derivada) y $x = 1$. Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1\Rightarrow f\,'(-1)=\frac{2(-1)^2-2(-1)}{(-1)^4}=4>0\Rightarrow$ crece en $(-\infty,0)$

En $(0,1)$ tomamos $x=0.5\Rightarrow f\,'(0.5)=\frac{2\cdot 0.5^2-2\cdot 0.5}{0.5^4}=-8<0\Rightarrow$ decrece en $(0,1)$

En $(1,+\infty)$ tomamos $x=2\Rightarrow f\,'(2)=\frac{2\cdot 2^2-2\cdot 2}{2^4}=\frac{4}{16}>0\Rightarrow$ crece en $(1,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(0,1)$.

b) Para el estudio de la concavidad o convexidad utilizamos el signo de la derivada segunda.

$$f\,'(x)=\frac{2x^2-2x}{x^4}=\frac{x(2x-2)}{x^4}=\frac{2x-2}{x^3}$$

$$f\,''(x)=\frac{2\cdot x^3-3x^2(2x-2)}{x^6}=\frac{2x^3-6x^3+6x^2}{x^6}=\frac{-4x^3+6x^2}{x^6}=\frac{x^2(-4x+6)}{x^6}=\frac{-4x+6}{x^4}$$

$$f\,''(x)=0\Rightarrow\frac{-4x+6}{x^4}=0\Rightarrow -4x+6=0\Rightarrow 4x=6\Rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1.5$$

El posible punto de inflexión es $x = 1.5$.

Como en $x = 0$ la función presenta una discontinuidad estudiamos el cambio de signo de la derivada segunda antes de $x = 0$, entre $x = 0$ y $x = 1.5$ y después de $x = 1.5$.

En $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1\Rightarrow f\,''(-1)=\frac{-4(-1)+6}{(-1)^4}=10>0\Rightarrow$ convexa en $(-\infty,0)$

En $(0,1.5)$ tomamos $x=1\Rightarrow f\,''(1)=\frac{-4(1)+6}{(1)^4}=2>0\Rightarrow$ convexa en $(0,1.5)$

En $(1.5,+\infty)$ tomamos $x=2\Rightarrow f\,''(2)=\frac{-4(2)+6}{(2)^4}=\frac{-2}{16}<0\Rightarrow$ cóncava en $(1.5,+\infty)$

La función es convexa en $(-\infty,0)\cup(0,1.5)$ y cóncava en $(1.5,+\infty)$.

En $x = 1.5$ hay un cambio de convexidad a concavidad, por lo que $x = 1.5$ es un punto de inflexión. Como $f(1.5)=\frac{(1.5-1)^2}{1.5^2}=\frac{1}{9}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{9}\right)$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX-2I=A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A-mB$, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Comprobamos si la matriz A es invertible viendo si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0-1+0+0+0+0=-1\neq 0$$

La matriz A tiene inversa. La hallamos para utilizarla en la resolución de la ecuación matricial.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos de la ecuación la matriz X.

$$AX-2I=A^2\Rightarrow AX=A^2+2I\Rightarrow X=A^{-1}\left(A^2+2I\right)$$

Sustituimos y calculamos la matriz X.

$$A^2+2I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&-1+0+0&0-1+0\\1&0&1\\1+0+1&-1+0+0&0+0+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(A^2+2I\right)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+2&0-2-1&0-1+3\\-3-1+2&1-2-1&1-1+3\\0+1+0&0+2+0&0+1+0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&-2&3\\1&2&1\end{pmatrix}}$$

b) Determinamos la expresión de la matriz $A-mB$

$$A-mB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1+m&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 3 debe tener determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix}1&-1+m&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{vmatrix}=0+(-1+m)(1-m)+0-0-(-m)(-1+m)-m(1-m)=$$

$$=-1\cancel{+m}+\cancel{m}\cancel{-m^2}\cancel{-m}+\cancel{m^2}\cancel{-m}+m^2=m^2-1$$

$$|A-mB|=0\Rightarrow m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm1}$$

Si $m\neq\pm1$ el determinante de $A-mB$ es no nulo y su rango es 3.
Si $m = 1$ o $m = -1$ el determinante es nulo y su rango no es 3.

Veamos cuál es su rango si $m = 1$ o $m = -1$.

Si $m = 1$ la matriz queda $A-mB=A-B=\begin{pmatrix}1&-1+1&0\\-1&0&1-1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la última columna. Su determinante es no nulo. Por lo que su rango es 2.

$$\text{Menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si $m = -1$ la matriz queda $A - mB = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la última fila y la última columna. Su determinante es no nulo. Por lo que su rango es 2.

$$\text{Menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Resumiendo: El rango de $A - mB$ es 3 si $m \neq \pm 1$ y es 2 si $m = 1$ o $m = -1$.

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcula justificadamente $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos el valor del determinante pedido.

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{Saco factor común 1/2 en la fila } 2^{\text{a}}\} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x & z & y \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Saco factor común 3 en la fila } 3^{\text{a}}\} = \frac{1}{2}\cdot 3\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\begin{vmatrix} -a & -c & -b \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right] = \left\{\begin{matrix}\text{Fila } 1^{\text{a}} \text{ es el doble de la } 3^{\text{a}} \\ \text{el determinante vale 0}\end{matrix}\right\} = \frac{3}{2}\left[\begin{vmatrix} -a & -c & -b \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\right] =$$

$$= \{\text{Saco factor común } -1 \text{ en la fila } 1^{\text{a}}\} = \frac{3}{2}(-1)\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Fila } 1^{\text{a}} \leftrightarrow \text{Fila } 3^{\text{a}}\} =$$

$$= \frac{-3}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ a & c & b \end{vmatrix} = \{\text{Columna } 2^{\text{a}} \leftrightarrow \text{Columna } 3^{\text{a}}\} =$$

$$= \frac{3}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{-3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{-3}{2}(-2) = \boxed{3}$$

b) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-10+0-0-0+9 = -4 \neq 0$$

Al ser no nulo el determinante la matriz B es invertible. Calculamos su matriz inversa.

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}}{-4}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 5\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ -5 & -3 & 3\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & 1/2\\ 5/4 & 3/4 & -3/4\\ 5/4 & -1/4 & -3/4\end{pmatrix}}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x \quad\quad +az=-4 \\ 4x \quad\quad -3z=a+1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0+12a+0-0+18+0=12a+18$$

$$|A|=0 \Rightarrow 12a+18=0 \Rightarrow a=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}$$

Estudiamos dos casos.

CASO 1. $a \neq -\frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $a=-\frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3/2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3/2 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1.5 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -1.5 & -4 \\ -2 & 6 & 2 & 10 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 6 & 0.5 & 6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a}+4\cdot\text{ Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}4 & 0 & -3 & -0.5\end{array}\\ \begin{array}{cccc}-4 & 12 & 4 & 20\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 12 & 1 & 19.5\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 6 & 0.5 & 6\\ 0 & 12 & 1 & 19.5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a}-2\cdot\text{ Fila } 2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 12 & 1 & 19.5\end{array}\\ \begin{array}{cccc}0 & -12 & -1 & -12\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 0 & 0 & 7.5\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 6 & 1/2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 7.5\end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz A/B tiene rango 3 por lo que el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases}-x+3y+z=5\\ 2x\quad\ +z=-4\\ 4x\quad\ -3z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+3y+z=5\\ z=-4-2x\\ 4x\quad\ -3z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+3y+(-4-2x)=5\\ 4x\quad\ -3(-4-2x)=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+3y-4-2x=5\\ 4x\quad\ +12+6x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+3y=9\\ 10x=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+3y=9\\ \boxed{x=\dfrac{-10}{10}=-1}\end{cases}\Rightarrow 3+3y=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y=6\Rightarrow\boxed{y=2}\Rightarrow\boxed{z=-4-2(-1)=-2}$$

La solución es $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$.

8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo

$$r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \text{ y } r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2,k,2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

a) Estudiamos la posición relativa de ambas rectas.

$$r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1 = (0,-2,0) \in r_1 \\ \vec{v_1} = (3,1,1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2 = (-1,0,0) \in r_2 \\ \vec{u_2} = (6,-2,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que ni son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_1} = (3,1,1) \\ \vec{u_2} = (6,-2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1}$$

Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{v_1}, \vec{u_2}$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = (-1,0,0) - (0,-2,0) = (-1,2,0)$$

$$\left[\vec{v_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-1+12-2+0-6 = 3 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan. El plano que contenga a ambas rectas no existe.

Podemos hallar el plano ***paralelo*** a ambas rectas que pasa por el punto (–1,2,1).

$$\left.\begin{matrix} \vec{v} = \vec{v_1} = (3,1,1) \\ \vec{u} = \vec{u_2} = (6,-2,1) \\ (-1,2,1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+6y-12-6z+6-6z+6-3y+6+2x+2=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x+3y-12z+9=0$$

La ecuación del plano ***paralelo*** a las rectas r_1 y r_2, y que pasa por el punto $(-1,2,1)$ tiene como ecuación $\pi \equiv x+y-4z+3=0$.

b) Para que tres vectores sean dependientes el producto mixto de dichos vectores debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(2,k,2k)\\ \overrightarrow{v_1}=(3,1,1)\\ \overrightarrow{u_2}=(6,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u_2},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 6 & -2 & 1\\ 2 & k & 2k\end{vmatrix}=-12k+2+6k+4-12k-3k=-21k+6$$

$$\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u_2},\vec{v}\right]=0\Rightarrow -21k+6=0\Rightarrow 21k=6\Rightarrow \boxed{k=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}}$$

9)

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v_1} = a\vec{u_1} - 2\vec{u_2} + 3\vec{u_3}$, $\vec{v_2} = -\vec{u_1} + a\vec{u_2} + \vec{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, siendo $\vec{v_1} = (1,0,-2)$ y $\vec{v_2} = (3,1,0)$

a) Que los vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ sean ortogonales y de módulo igual a 1 implica que:

$$\textit{Ortogonales} \rightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0;\ \vec{u_1}\cdot\vec{u_3} = 0;\ \vec{u_2}\cdot\vec{u_3} = 0$$
$$\textit{Módulo } 1 \rightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_1} = 1;\ \vec{u_2}\cdot\vec{u_2} = 1;\ \vec{u_3}\cdot\vec{u_3} = 1$$

Para que los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sean ortogonales su producto escalar debe ser 0.

$$\begin{aligned}\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \left(a\vec{u_1} - 2\vec{u_2} + 3\vec{u_3}\right)\left(-\vec{u_1} + a\vec{u_2} + \vec{u_3}\right) &= a\vec{u_1}\cdot\left(-\vec{u_1}\right) + a\vec{u_1}\cdot\left(a\vec{u_2}\right) + a\vec{u_1}\cdot\left(\vec{u_3}\right) + \\ &- 2\vec{u_2}\cdot\left(-\vec{u_1}\right) - 2\vec{u_2}\cdot\left(a\vec{u_2}\right) - 2\vec{u_2}\cdot\left(\vec{u_3}\right) + \\ &+ 3\vec{u_3}\cdot\left(-\vec{u_1}\right) + 3\vec{u_3}\cdot\left(a\vec{u_2}\right) + 3\vec{u_3}\cdot\left(\vec{u_3}\right) = \\ = -a\vec{u_1}\cdot\vec{u_1} + a^2\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} + a\vec{u_1}\cdot\vec{u_3} - 2\vec{u_2}\cdot\vec{u_1} - 2a\vec{u_2}\cdot\vec{u_2} - 2\vec{u_2}\cdot\vec{u_3} - 3\vec{u_3}\cdot\vec{u_1} + 3a\vec{u_3}\cdot\vec{u_2} + 3\vec{u_3}\cdot\vec{u_3} &= \\ = -a + a^2\cdot 0 + a\cdot 0 - 2\cdot 0 - 2a - 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 3 = -3a + 3\end{aligned}$$

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0 \Rightarrow -3a + 3 = 0 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

b) Obtenemos las coordenadas del vector $\vec{v_3}$

$$\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = (1,0,-2) + (3,1,0) = (4,1,-2)$$

Aplicamos la fórmula del volumen del tetraedro como la sexta parte del producto mixto de los tres vectores que lo definen.
Calculamos primero el producto mixto.

$$\left.\begin{aligned}\vec{v_1} &= (1,0,-2)\\ \vec{v_2} &= (3,1,0)\\ \vec{v_3} &= (4,1,-2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right] = \begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -2\end{vmatrix} = -2 + 0 - 6 + 8 + 0 + 0 = 0$$

Este valor es el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores, al ser este 0 el volumen del tetraedro también será 0.

Es lógico pues el vector $\vec{v_3}$ es combinación lineal de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, y por tanto son dependientes siendo su producto mixto nulo.
Los tres vectores son coplanarios y no forman ningún tetraedro, forman una superficie plana.

10) El peso de los recién nacidos de una localidad sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

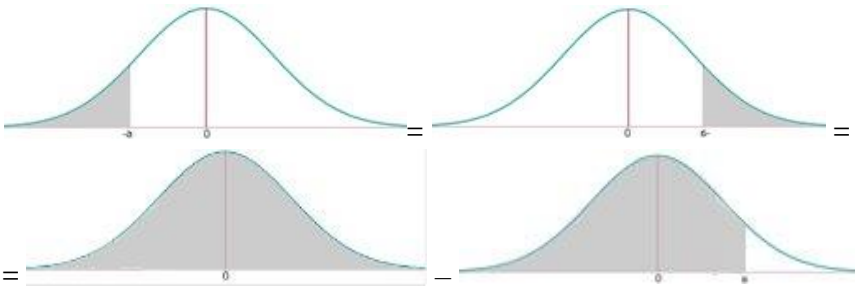
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

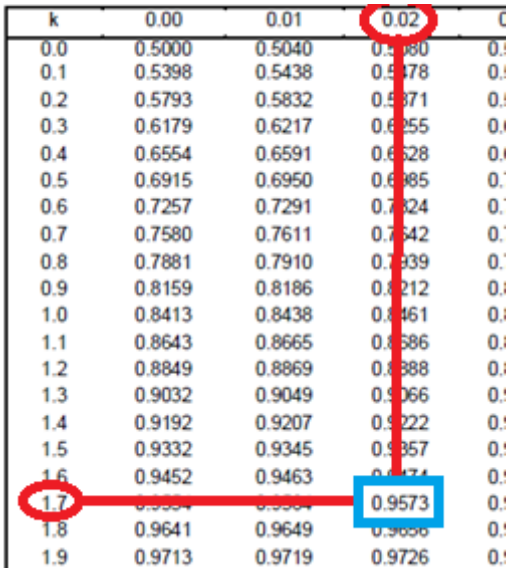
X = Peso de un recién nacido. X = N(3300, 465)

a) Nos piden determinar $P(X<2500)$

$$P(X<2500)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-3300}{465}\end{matrix}\right\}=P\left(\frac{X-3300}{465}<\frac{2500-3300}{465}\right)=P(Z<-1.7204)=$$



$$=P(Z\geq 1.7204)=1-P(Z\leq 1.7204)=\{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\}=1-0.9573=\boxed{0.0427}$$

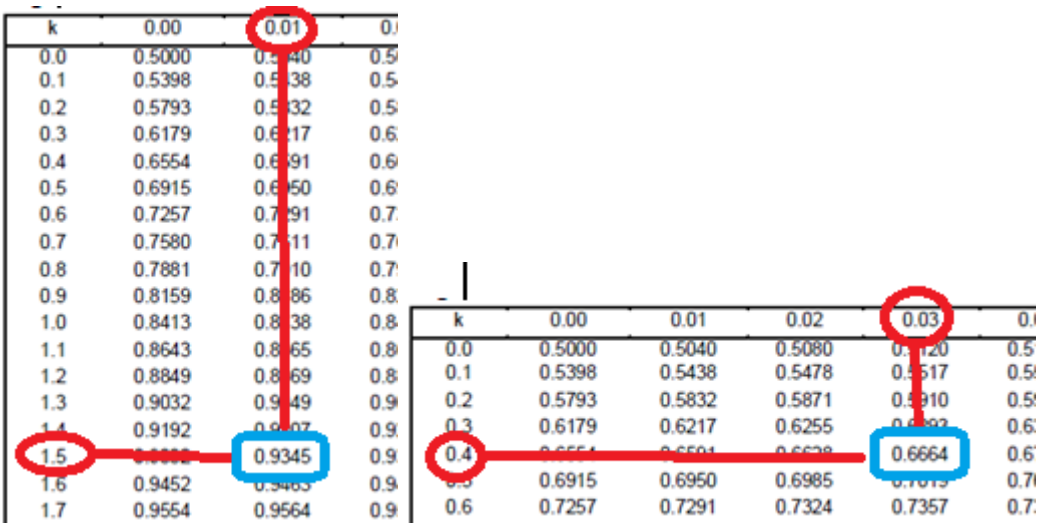


k	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	
0.1	0.5398	0.5438	
0.2	0.5793	0.5832	
0.3	0.6179	0.6217	
0.4	0.6554	0.6591	
0.5	0.6915	0.6950	
0.6	0.7257	0.7291	
0.7	0.7580	0.7611	
0.8	0.7881	0.7910	
0.9	0.8159	0.8186	
1.0	0.8413	0.8438	
1.1	0.8643	0.8665	
1.2	0.8849	0.8869	
1.3	0.9032	0.9049	
1.4	0.9192	0.9207	
1.5	0.9332	0.9345	
1.6	0.9452	0.9463	
1.7			0.9573
1.8	0.9641	0.9649	
1.9	0.9713	0.9719	0.9726

b) Nos piden determinar $P(3500\leq X\leq 4000)$.

$$P(3500\leq X\leq 4000)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-3300}{465}\end{matrix}\right\}=P\left(\frac{3500-3300}{465}\leq\frac{X-3300}{465}\leq\frac{4000-3300}{465}\right)=$$

$$=P(0.43\leq Z\leq 1.505)=P(Z\leq 1.51)-P(Z\leq 0.43)=\{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\}=...$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582

$$\ldots = 0.9345 - 0.6664 = \boxed{0.2681}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}5-ax^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1\end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea 6 u^2.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -k & -2k\\ 1 & -k & 0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I+BX=C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=3 \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}5-ax^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1\end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea 6 u^2.

a) La función es continua en $(-\infty,1)$ pues es un polinomio, también es continua en $(1,+\infty)$ pues el denominador de la fracción solo se anula en $x = 0$ que no pertenece al intervalo $(1,+\infty)$.
Solo falta comprobar la continuidad en $x = 1$, donde la función cambia de definición. Para ello debe cumplirse que $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=5-a\cdot 1^2=5-a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 5-ax^2=5-a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{6}{ax}=\dfrac{6}{a}\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow 5-a=\frac{6}{a}\Rightarrow 5a-a^2=6\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}=\dfrac{5-1}{2}=2\\ =\dfrac{5+1}{2}=3\end{cases}$$

La función es continua cuando $a = 2$ o $a = 3$.

b) El área debemos dividirla en dos partes, una entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra entre $x = 1$ y $x = e$.

La parábola $y=5-ax^2$ corta el eje en $x=\sqrt{\dfrac{5}{a}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\pm 1.58\\ o\\ \sqrt{\dfrac{5}{3}}=\pm 1.29\end{cases}$, por lo que ninguno de los valores pertenece al intervalo (0, 1).

$$\int_0^1 5-ax^2dx=\left[5x-a\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[5-a\frac{1^3}{3}\right]-\left[0-a\frac{0^3}{3}\right]=5-\frac{a}{3}=\begin{cases}\boxed{a=2}\to 5-\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{3}\\ o\\ \boxed{a=3}\to 5-\dfrac{3}{3}=4\end{cases}$$

La función $y = \frac{6}{ax}$ no corta el eje OX.

$$\int_1^e \frac{6}{ax}dx = \frac{6}{a}\int_1^e \frac{1}{x}dx = \left[\frac{6}{a}\ln|x|\right]_1^e = \frac{6}{a}\ln|e| - \frac{6}{a}\ln|1| = \frac{6}{a} = \begin{cases} \boxed{a=2} \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \\ o \\ \boxed{a=3} \rightarrow \frac{6}{3} = 2 \end{cases}$$

Por lo que para $a = 2$ el área del recinto es $\frac{13}{3} + 3 = \frac{22}{3}u^2$ y para $a = 3$ el área del recinto es $4 + 2 = 6\ u^2$, por lo que el valor de "a" que cumple lo pedido es $a = 3$.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=In\det er\min ación$$

Tomamos logaritmo neperiano para convertir la indeterminación en un producto.

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=a\Rightarrow\lim_{x\to 1}\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{(1-x)^2}=\frac{\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{(1-1)^2}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

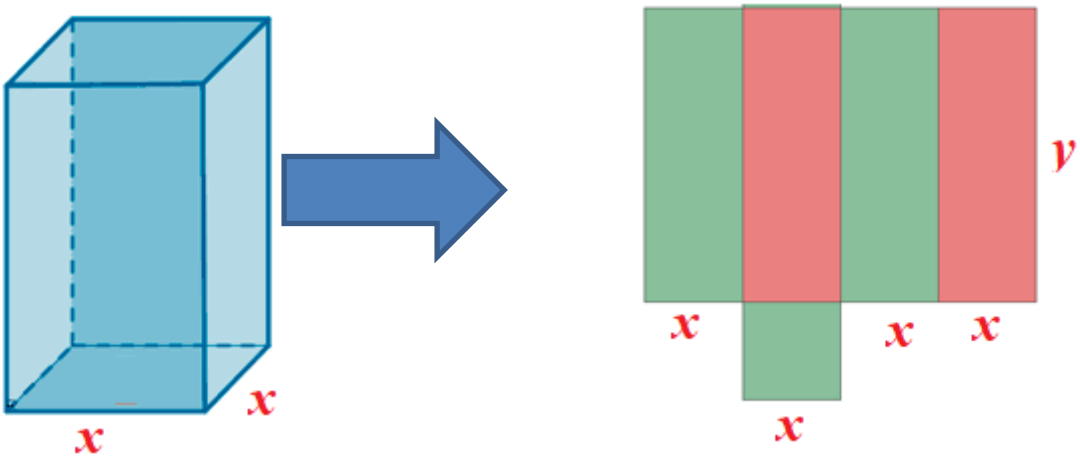
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-2(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-2(1-x)sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2(1-1)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2(1-x)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-2(1-1)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=-\frac{\pi^2}{8}=\ln a\Rightarrow a=e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{-\frac{\pi^2}{8}}}$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.



El volumen es 64 m^3 → $x^2 y = 64$

Área lateral son 4 rectángulos de lados x e y → $\text{Área lateral} = 4xy$

Área de la base es un cuadrado de lado x → $\text{Área base} = x^2$

El coste del material de construcción es $C(x,y) = 70 \cdot 4xy + 140x^2 = 280xy + 140x^2$

Como tenemos que $x^2 y = 64 \Rightarrow y = \dfrac{64}{x^2}$ y sustituyendo en la función coste nos queda:

$$C(x,y) = 280x\frac{64}{x^2} + 140x^2 \Rightarrow C(x) = \frac{17920}{x} + 140x^2 \ .$$

Buscamos minimizar el coste. Derivamos la función e igualamos a cero.

$$C(x) = \frac{17920}{x} + 140x^2 \Rightarrow C'(x) = -\frac{17920}{x^2} + 280x$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{17920}{x^2} + 280x = 0 \Rightarrow \frac{17920}{x^2} = 280x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17920 = 280x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{17920}{280} = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo en $x = 4$.

$$C'(x) = -\frac{17920}{x^2} + 280x \Rightarrow C''(x) = 2\frac{17920}{x^3} + 280 \Rightarrow C''(4) = 2\frac{17920}{4^3} + 280 > 0$$

Por lo que en $x = 4$ la función coste $C(x) = \dfrac{17920}{x} + 140x^2$ presenta un mínimo relativo.

Como $x = 4$ entonces $y = \dfrac{64}{x^2} = \dfrac{64}{16} = 4$.

El depósito con menor coste tiene de base un cuadrado de lado 4 metros y su altura es 4 metros. Sería un cubo de arista 4 metros.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-1=0\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1\end{cases}$$

$$Dominio\ de\ f\left(x\right)=\mathbb{R}-\left\{0,1,-1\right\}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = 0$?

$$\lim_{x\to0} f\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^0}{0^3-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿$x = 1$?

$$\lim_{x\to1} f\left(x\right)=\lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^1}{1^3-1}=\frac{e}{0}=\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

¿$x = -1$?

$$\lim_{x\to-1} f\left(x\right)=\lim_{x\to-1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-1}}{\left(-1\right)^3+1}=\frac{e^{-1}}{0}=\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}\left(x^3-x\right)}=\frac{1}{e^{+\infty}\left(-\infty\right)}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función tiene asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene asíntota oblicua en $-\infty$, pues tiene horizontal.

Veamos si la tiene en $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{4x^3-2x}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24x}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24}=\frac{\infty}{24}=0$$

No tiene asíntota oblicua.

b) La recta tangente a la curva en el punto $x = 2$ tiene ecuación $y-f(2)=f\,'(2)(x-2)$.

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{e^x\left(x^3-x\right)-\left(3x^2-1\right)e^x}{\left(x^3-x\right)^2}=\frac{e^x\left(x^3-x-3x^2+1\right)}{\left(x^3-x\right)^2}=\frac{e^x\left(x^3-3x^2-x+1\right)}{\left(x^3-x\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{e^2}{2^3-2}=\dfrac{e^2}{6} \\ f\,'(2)=\dfrac{e^2\left(2^3-3\cdot2^2-2+1\right)}{\left(2^3-2\right)^2}=-\dfrac{5e^2}{36} \\ y-f(2)=f\,'(2)(x-2) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{e^2}{6}=-\frac{5e^2}{36}(x-2)\Rightarrow \boxed{y=-\frac{5e^2}{36}x+\frac{4e^2}{9}}$$

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -k & -2k\\ 1 & -k & 0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

a) Hallamos la expresión de la matriz A.

$$A=I+P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -k & -2k\\ 1 & -k & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-k & -2k\\ 1 & -k & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-k & -2k\\ 1 & -k & 1\end{vmatrix}=1-k-2k-k-1+k-1-2k^2=-2k^2-3k-1$$

$$|A|=0\Rightarrow -2k^2-3k-1=0\Rightarrow 2k^2+3k+1=0\Rightarrow$$

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-8}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}=\begin{cases}\frac{-3-1}{4}=-1=k\\ \frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2}=k\end{cases}$$

Si k es distinto de –1 y de $-\frac{1}{2}$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $k = -1$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que la columna 2ª y 3ª son iguales, pero diferentes a la 1ª, el rango de A es 2. También podemos razonarlo tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª (= fila 1ª) y la columna 3ª (= columna 2ª) cuyo determinante vale $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$. El rango de A es 2

Si $k=-\frac{1}{2}$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3/2 & 1\\ 1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 3ª son iguales, pero diferentes a la 2ª, el rango de A es 2. También podemos razonarlo tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª cuyo determinante vale $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3/2\end{vmatrix}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\neq 0$. El rango de A es 2

Resumiendo: Si $k \neq -1$ *y* $k \neq -\frac{1}{2}$ el rango de A es 3. Si $k = -1$ *o* $k = -\frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

b) Para *k = 1* el determinante de A es no nulo y podemos hallar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 1 - 0 - 1 - 2 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz *B* tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz *X* que verifica la siguiente ecuación matricial: $I+BX=C_1C_2$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3.

a) El determinante de B es $|B|=\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-3+1+1+1-1-3=-4\neq 0$. Por lo que existe B^{-1}.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}}{-4}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&-1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&1\\-1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\-1/2&1/2&-1\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$I+BX=C_1C_2\Rightarrow BX=C_1C_2-I\Rightarrow X=B^{-1}\left(C_1C_2-I\right)$$

Sustituimos el valor de las matrices y determinamos X.

$$C_1C_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3&2+2&0+1\\-3-3&6-2&0-1\\-1+0&2+0&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-6&4&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$C_1C_2-I=\begin{pmatrix}2&4&1\\-6&4&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\left(C_1C_2-I\right)=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\-1/2&1/2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}&2+1&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\-3-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}+1&-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}-3+1&-2+\frac{3}{2}-2&-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}0&3&0\\-7/2&5/2&-1\\-5/2&-5/2&0\end{pmatrix}$.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$

Hallamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + a + 15 = 13a - 13$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 13a - 13 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Distinguimos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente triangular y analizamos el rango de A y de A/B con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -12 & -3 & -9 \\ \hline 0 & -13 & -1 & -8 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -5 & 1 & -2 \\ -2 & -8 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -13 & -1 & -8 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 13 & 1 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como la última fila es todo ceros el rango de A y el de A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para *a = 0* el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-30+16+5}{-13} = \frac{7}{13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-4-12+6}{-13} = \frac{8}{13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-24-6-5-8-2+45}{-13} = 0$$

La solución es $x = \frac{7}{13};\ y = \frac{8}{13};\ z = 0$

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

Hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 0, 1), B(3, 1, 0) y C(2, –1, 1).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,1,0)-(1,0,1)=(2,1,-1)\\ v=AC=(2,-1,1)-(1,0,1)=(1,-1,0)\\ A(1,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-2z+2-z+1-x+1=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+y+3z-4=0}$$

Si la recta r es perpendicular al plano $\pi\equiv x+y+3z-4=0$ el vector director de la recta es el normal del plano → $\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,3)$.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P(1, –2, 0) y con vector director $\vec{v_r}=(1,1,3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,1,3)\\ A(1,-2,0)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}$$

Como nos piden expresarla como intersección de dos planos.

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}\rightarrow x-1=y+2\rightarrow x-y-3=0\\ \dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}\rightarrow 3y+6=z\rightarrow 3y-z+6=0\end{cases}$$

$$\boxed{r\equiv\begin{cases}x-y-3=0\\ 3y-z+6=0\end{cases}}$$

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Utilizamos una tabla de contingencia para obtener la información que viene implícita con los datos del problema.

	Con errores en software	Sin errores en software	TOTALES
Coches eléctricos	**12**		**85**
Coches híbridos			**145**
TOTALES	**43**		

Completamos la tabla.

	Con errores en software	Sin errores en software	TOTALES
Coches eléctricos	**12**	**73**	**85**
Coches híbridos	**31**	**114**	**145**
TOTALES	**43**	**187**	**230**

Respondemos a las preguntas aplicando la regla de Laplace.

a) Hay 114 coches híbridos sin errores en software. Y un total de 230 coches.

$$P\left(\text{Híbrido y sin errores en software}\right)=\frac{114}{230}=\boxed{\frac{57}{115}\simeq 0.496}$$

b) Hay 145 coches híbridos y de ellos 31 con errores en software.

$$P\left(\text{Con errores en software / Híbrido}\right)=\boxed{\frac{31}{145}\simeq 0.21}$$

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de deportistas de la selección española de gimnasia deportiva elegidos para las próximas olimpiadas.
El número de repeticiones es n = 9 y la probabilidad de que sea elegido un deportista de la selección es p = 1/7.
X es una variable binomial. N = 9, p = 1/7, q = 6/7. X = B(9, 1/7)

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de una binomial.

$$P(X=2)=\binom{9}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^7=\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{6^7}{7^9}\boxed{\simeq 0.25}$$

b) Consideramos el suceso contrario a "Al menos 1 es elegido para las olimpiadas" que es "Ninguno es elegido para las olimpiadas".

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+...+P(X=9)=$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{9}{0}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^9=1-\left(\frac{6}{7}\right)^9\simeq\boxed{0.75}$$

Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de $a, b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

2) Calcule el valor de $a\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2$$

3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2} A^T \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde A^T es la matriz traspuesta de A.

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2,-1,0).$$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u_1} = (-1,1,1),\ \vec{u_2} = (0,3,1),\ \vec{u_3} = (1,-2,0),\ \vec{u_4} = (-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{v_1} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2},\ \vec{v_2} = \vec{u_1} + \vec{u_3},\ \vec{v_3} = \vec{u_4}$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$\left(2\vec{u_1} - \vec{u_2}\right) \cdot \left(2\vec{u_1} - \vec{u_2}\right),\ \left(\vec{u_4} - \vec{u_1}\right) \times \left(\vec{u_4} - \vec{u_1}\right),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a, $b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

a) Para que sea continua en $\mathbb{R}$ debe serlo en $x = 0$ y para ello el valor de la función y los límites laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3+0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3+bx+2\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{ax}=\ldots\boxed{1}\ldots=\dfrac{1}{a} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow 2=\frac{1}{a}\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=\frac{\frac{1}{1}}{a}=\frac{1}{a}$$

La continuidad de la función no depende del valor de b. La función es continua si $a=\dfrac{1}{2}$.

b) Para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$ la derivada debe anularse para este valor → $f\,'(-1)=0$.

En $x = -1$ la función es $f(x)=x^3+bx+2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+bx+2\Rightarrow f\,'(x)=3x^2+b \\ f\,'(-1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3(-1)^2+b=0\Rightarrow \boxed{b=-3}$$

La función es $f(x)=x^3-3x+2$.

Calculamos la derivada segunda. Su signo para $x = -1$ decide si es mínimo o máximo.

$$f(x)=x^3-3x+2\Rightarrow f\,'(x)=3x^2-3\Rightarrow f\,''(x)=6x\Rightarrow f\,''(-1)=-6<0$$

En $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

2) Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}} = 2$$

Usamos la igualdad trigonométrica $1-sen^2(x)=cos^2(x)$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}} = \left(\cos^2(0)\right)^{\frac{a}{0^2}} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación}$$

Tomamos logaritmo neperiano a ambos lados de la igualdad.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}\right) = \ln 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln\left(\cos^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{2a}{x^2}} = \ln 2$$

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{2a}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2a}{x^2}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{2a\cdot\ln(\cos 0)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot\frac{-senx}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{2}a\cdot senx}{\cancel{2}x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot senx}{x\cdot\cos x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\cos x}{\cos x - x\cdot senx} = \frac{-a\cos(0)}{\cos(0)-0\cdot sen(0)} = \frac{-a}{1} = -a$$

Lo igualamos a ln2 y tenemos que $-a=\ln 2 \Rightarrow \boxed{a=-\ln 2}$.

3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$$

Calculamos la integral haciendo un cambio de variable.

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cambio de variable} \\ x^3-3x+2=t \\ 3x^2-3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{3x^2-3} \end{array} \right\} = \int \frac{x^2-1}{t}\frac{dt}{3x^2-3} =$$

$$= \int \frac{x^2-1}{t\left(3x^2-3\right)}dt = \int \frac{\cancel{x^2-1}}{3t\left(\cancel{x^2-1}\right)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\ln t =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ x^3-3x+2=t \end{array} \right\} = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left(x^3-3x+2\right)+K}$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1-3}{2}=-1\\ \frac{1+3}{2}=2\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = -1$?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{2(-1)^3-(-1)^2}{(-1)^2+1-2}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿$x = 2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{2\cdot 2^3-2^2}{2^2-2-2}=\frac{12}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^3}-x^2-\cancel{2x^3}+2x^2+4x}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0-0}=1$$

La asíntota oblicua es $y=2x+1$.

b) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$ es $y-f(1)=f\,'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}\Rightarrow f(1)=\frac{2-1}{1-1-2}=-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{\left(6x^2-2x\right)\left(x^2-x-2\right)-\left(2x^3-x^2\right)(2x-1)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f\,'(1)=\frac{(6-2)(1-1-2)-(2-1)(2-1)}{(1-1-2)^2}=\frac{-8-1}{4}=-\frac{9}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f\,'(1)(x-1)\\ f(1)=-\frac{1}{2}\\ f\,'(1)=-\frac{9}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow y+\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k = 0$.

a) Nos planteamos cuando el rango es 3, es decir, cuando su determinante no se anula.

$$A-kI=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}$$

$$|A-kI|=\begin{vmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{vmatrix}=-k(2-k)(3-k)+2(2-k)$$

$$|A-kI|=(2-k)\left[-k(3-k)+2\right]=(2-k)\left(k^2-3k+2\right)$$

$$|A-kI|=0\Rightarrow(2-k)\left(k^2-3k+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=2\\ k^2-3k+2=0\Rightarrow k=\dfrac{3-\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3-1}{2}=1\\ \dfrac{3+1}{2}=2\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $k \neq 1$ *y* $k \neq 2$

En este caso el determinante de $A-kI$ es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k=1$

La matriz queda $A-kI=\begin{pmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Su determinante es 0, por lo que su rango no es 3.

¿El rango es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera y calculamos su determinante.

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de $A - kI$ es 2.

CASO 3. $k = 2$

La matriz queda $A - kI = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Su determinante es 0, por lo que su rango no es 3.

¿El rango es 2?

Observamos que la columna 2ª es todo 0 y la columna 1ª y 3ª son iguales, por lo que su rango es 1.

b) Para *k = 0* la matriz queda $A - kI = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$|A - kI| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Existe la inversa de la matriz $A - kI$. La calculamos.

$$(A - kI)^{-1} = \frac{Adj\left((A - kI)^T\right)}{|A - kI|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

$$(A - kI)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2} A^T \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde A^T es la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos el determinante pedido.

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Saco factor común 2} \\ \text{en fila 1ª} \end{matrix} \right\} = 2 \begin{vmatrix} d & e+f & f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Separo la columna 2ª} \\ \text{en suma de 2 determinantes} \end{matrix} \right\} = 2 \left[\begin{vmatrix} d & e & f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & f & f \\ -g & -i & -i \\ a & c & c \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{El segundo determinante es nulo pues} \\ \text{tiene la columna 2ª y 3ª iguales.} \\ \text{En el primero saco factor común en 2ª fila el } -1 \end{matrix} \right\} = 2 \left[- \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Cambio la fila 1ª por la 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo} \end{matrix} \right\} = -2(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Cambio la fila 2ª por la 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo} \end{matrix} \right\} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = \boxed{-10}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A - \frac{1}{2} A^T \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Buscamos las dimensiones de la matriz X.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3\times \boxed{3 \quad \cdot \ m} \times n \longrightarrow 3\times 1$$

Por este esquema del producto de matrices los valores son $m = 3$ y $n = 1$. La matriz X debe ser de dimensiones 3x1.

Tomamos la matriz $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b-c \\ 2a+b+2c \\ 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b-c=0 \\ 2a+b+2c=9 \\ 2a-b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b+c \\ 2a+b+2c=9 \\ 2a-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(b+c)+b+2c=9 \\ 2(b+c)-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+2c+b+2c=9 \\ 2b+2c-b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b+4c=9 \\ b+2c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b+4c=9 \\ b=5-2c \end{cases} \Rightarrow 3(5-2c)+4c=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15-6c+4c=9 \Rightarrow -2c=-6 \Rightarrow \boxed{c=3} \Rightarrow \boxed{b=5-6=-1} \Rightarrow \boxed{a=3-1=2}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$

a) Resolvemos el sistema matricial**.**

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Multiplico la 1ª ecuación por 3} \\ \text{y la 2ª por } -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 6X+9Y=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \\ -6X+4Y=\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Sumo las dos ecuaciones}\} \Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 13 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \{\text{Sustituyo en la 1ª ecuación}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X+3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Calculamos las primeras potencias e intentamos buscar una fórmula general para $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2-1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$$

Resumimos lo que apreciamos en estas primeras potencias.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ -\left(2^2-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ -\left(2^3-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ -\left(2^4-1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Hay dos términos de la matriz resultado que se mantienen constantes ($a_{12} = 0$ y $a_{22} = 1$) y otros dos que varían en función del valor de la potencia que deseamos calcular.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -\left(2^n-1\right) & 1 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}$$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2,-1,0).$$

Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3. Dicho plano tiene como vectores directores los que unen uno de esos puntos con los otros dos.

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = \overrightarrow{B_1B_2} = (1,3,1)-(-1,0,2) = (2,3,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{B_1B_3} = (2,-1,0)-(-1,0,2) = (3,-1,-2) \\ B_1(-1,0,2) \in \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x-6-3y-2z+4-9z+18+4y-x-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0}$$

Comprobamos que los planos π_1 y π_2 son secantes (coinciden en una recta). Para ello basta comprobar que los respectivos vectores normales no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0 \Rightarrow \vec{n_1} = (-7,1,-11) \\ \pi_2 \equiv x+2z=1 \Rightarrow \vec{n_2} = (1,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{-7}{1} = \frac{1}{0} = \frac{-11}{2}?$$

No son ciertas ninguna de las igualdades y los vectores normales no tienen la misma dirección. Los planos no son paralelos y por tanto son secantes.

La recta que nos piden hallar tendrá la misma dirección y por tanto el mismo vector director que la recta intersección de ambos planos.
La recta tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -7x+y-11z+15=0 \Rightarrow \vec{n_1} = (-7,1,-11) \\ \pi_2 \equiv x+2z=1 \Rightarrow \vec{n_2} = (1,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_r} = 2i-11j-k+14j = 2i+3j-k = (2,3,-1)$$

La recta tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (2,3,-1) \\ A=(0,1,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3x = 2y-2 \rightarrow 3x-2y+2=0 \\ \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow -y+1 = 3z-3 \rightarrow -y-3z+4=0 \end{cases}$$

La recta solución es $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ -y-3z+4=0 \end{cases}$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u_1}=(-1,1,1),\ \vec{u_2}=(0,3,1),\ \vec{u_3}=(1,-2,0),\ \vec{u_4}=(-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{v_1}=2\vec{u_1}-\vec{u_2},\ \vec{v_2}=\vec{u_1}+\vec{u_3},\ \ \vec{v_3}=\vec{u_4}$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)\cdot\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right),\ \left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)\times\left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right),$$

siendo · y × los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

a) Calculamos las coordenadas de los vectores $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$

$$\vec{v_1}=2\vec{u_1}-\vec{u_2}=2(-1,1,1)-(0,3,1)=(-2,-1,1)$$
$$\vec{v_2}=\vec{u_1}+\vec{u_3}=(-1,1,1)+(1,-2,0)=(0,-1,1)$$
$$\vec{v_3}=\vec{u_4}=(-2,0,1)$$

Para que sean linealmente independientes su producto mixto debe ser no nulo.

$$\left[\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2+2+0-2-0-0=2\neq 0$$

Los vectores $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ son linealmente independientes.

b) Hacemos el producto escalar planteado.

$$\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)\cdot\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)=(-2,-1,1)\cdot(-2,-1,1)=4+1+1=6$$

Hacemos también el producto vectorial, aunque sabemos que dará como resultado el vector cero pues es el producto vectorial de un vector por sí mismo.

$$\vec{u_4}-\vec{u_1}=(-2,0,1)-(-1,1,1)=(-1,-1,0)$$
$$\left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)\times\left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)=(-1,-1,0)\times(-1,-1,0)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0=(0,0,0)$$

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

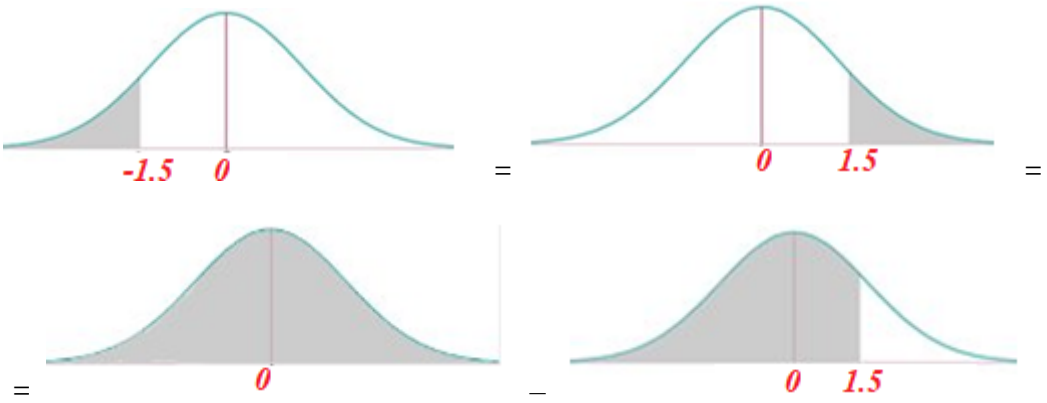
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

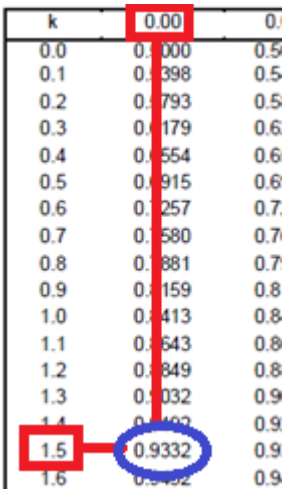
X = Cantidad de hierro en suero de una mujer adulta. X = N(120, 30)
Una mujer tiene anemia si X < 75.

a) Nos piden calcular $P(X<75)$.

$$P(X<75)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{75-120}{30}\right)=P(Z<-1.5)=...$$



$$...=P(Z\geq 1.5)=1-P(Z<1.5)=\{\text{Miro en la tabla de la N(0, 1)}\}=1-0.9332=\boxed{0.0668}$$



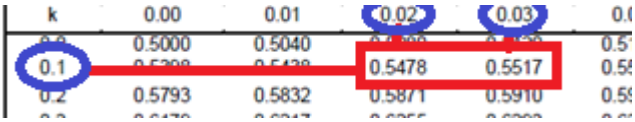
b) Nos dicen que $P(X>k)=0.45$ y nos piden que averigüemos el valor de k.

$$P(X>k)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{k-120}{30}\right)=P\left(Z>\frac{k-120}{30}\right)=0.45\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{k-120}{30}\right)=0.45\Rightarrow P\left(Z\le\frac{k-120}{30}\right)=1-0.45=0.55$$

Buscamos la probabilidad 0.55 en la tabla de la N(0, 1)

$$\frac{k-120}{30}=\frac{0.12+0.13}{2}=0.125\Rightarrow k-120=3.75\Rightarrow \boxed{k=123.75}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.(
	0.5000	0.5040			0.5
0.1			0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5

El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a 123.75 $\mu g/dl$

Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a
b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $4+\pi\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

7) Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$

a) (0,*25 puntos)* Calcule el dominio de *f(x)*
b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

8) *(2 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\int x^3 e^{x^2} dx$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

a) A es la matriz de coeficientes del sistema.

$$|A|=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix}=4a+2a(a-3)=4a+2a^2-6a=2a^2-2a$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-2a=0\Rightarrow 2a(a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0\rightarrow a=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $a\neq 0$ *y* $a\neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo que su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=0$

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

El determinante de A es 0 y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La columna 2ª es todo ceros, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 2ª columna y la 3ª fila (es proporcional a la 2ª) $\rightarrow\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=6-4=2\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada es $A/b=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

¿El rango de A/b es 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª $\rightarrow\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+4+4-4+0-6=-2\neq 0$

El rango de A/b es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/b.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=1$

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

El determinante de A es 0 y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La columna 1ª y la 3ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª columna y la 1ª fila (es proporcional a la 2ª) $\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/b=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

¿El rango de A/b es 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª (columna 1ª y 3ª son proporcionales) $\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2-2=0$. El rango de A/b no es 3.

Por lo que el rango de A/b es igual al rango de A que es 2 y menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado.

b) Cuando $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3). Lo resolvemos.

$$AX=b\Rightarrow\left.\begin{array}{rr}-2x & +4z=2\\ x & -2z=-1\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 1^{\text{ª}}=-2\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{ª}}\\ \text{Quito la ecuación } 1^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{rr}x & -2z=-1\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\boxed{x=-1+2z}\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1-2z+y+2z=1\Rightarrow\boxed{y=0}$$

Las soluciones son $x=-1+2t;\quad y=0;\quad z=t$

2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Llamemos "x" al número de mascarillas quirúrgicas desechables, "y" al número de mascarillas higiénicas y "z" al número de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

"*El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €*" → $\frac{x+y+z}{3}=0,90$

"*Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €*" → $30x+20y+10z=56$

"*Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €*" → $20x+25z=31$

Reunimos las ecuaciones en un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y+z}{3}=0,90\\30x+20y+10z=56\\20x+25z=31\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=2,7\\15x+10y+5z=28\\20x+25z=31\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{rrrl}\text{Ecuación } 2^a & - & 15\cdot\text{Ecuación } 1^a & \\ 15x & +10y & +5z & =28\\ -15x & -15y & -15z & =-40,5\\ \hline & -5y & -10z & =-12,5\rightarrow E\text{cuación } 2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl}\text{Ecuación } 3^a & - & 20\cdot\text{Ecuación } 1^a & \\ 20x & & +25z & =31\\ -20x & -20y & -20z & =-54\\ \hline & -20y & +5z & =-23\rightarrow\text{Nueva ecuación } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=2,7\\-5y-10z=-12,5\\-20y+5z=-23\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl}\text{Ecuación } 3^a & - & 4\cdot\text{Ecuación } 2^a & \\ -20y & +5z & = & -23\\ 20y & +40z & = & 50\\ \hline & 45z & = & 27\rightarrow\text{Nueva ecuación } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=2,7\\-5y-10z=-12,5\\45z=27\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=2,7\\-5y-10z=-12,5\\\boxed{z=\frac{27}{45}=0,6}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+0,6=2,7\\-5y-6=-12,5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=2,1\\-5y=-6,5\Rightarrow\boxed{y=\frac{6,5}{5}=1,3}\end{array}\right\}\Rightarrow x+1,3=2,1\Rightarrow\boxed{x=0,8}$$

La mascarilla desechable cuesta 0,8 €, la higiénica 1,3 € y la reutilizable 0,6 €.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&0&-1\end{pmatrix}$

Despejo X en la ecuación matricial.

$$XA+XA^t=B\Rightarrow X\left(A+A^t\right)=B\Rightarrow X=B\left(A+A^t\right)^{-1}$$

He supuesto que la matriz $A+A^t$ es invertible. Lo comprobamos.

$$A+A^t=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&-1\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0+1+1-2-0-2=-2\neq 0$$

Existe la inversa. La calculamos.

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+A^t\right)^T\right)}{\left|A+A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&2\\-1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&-1\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=B\left(A+A^t\right)^{-1}\Rightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-1-1&0-1+1&0-1-3\\-3+0-1&-3+0+1&3+0-3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&-4\\-4&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$.

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

Llamamos π´ al plano que buscamos.
Si π´ contiene a la recta *r* contiene a cualquier punto P_r que pertenezca a la recta y tiene como vector director el director de la recta $\vec{v_r}$.
Si π´ es perpendicular al plano π el vector normal $\vec{n}$ del plano π es un vector director de π´.

$$r:\left.\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}\right\}\text{Tomamos } x=1 \Rightarrow \begin{cases}3+y-4z+1=0\\2+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4z-4\\y-z+4=0\end{cases}\Rightarrow 4z-4-z+4=0\Rightarrow 3z=0$$

$$\Rightarrow z=0\Rightarrow y=0-4=-4\Rightarrow P_r(1,-4,0)$$

$$r:\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}=(3,1,-4)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix}i & j & k\\3 & 1 & -4\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-i-8j+3k-2k+3j+4i$$

$$\vec{v_r}=3i-5j+k=(3,-5,1)$$

Tenemos $P_r(1,-4,0)$ un punto de la recta *r* **y** $\vec{v_r}=(3,-5,1)$ un vector director de dicha recta.

Tenemos también el vector normal $\vec{n}=(2,-1,3)$ del plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$.

$$\pi':\begin{cases}P_r(1,-4,0)\in\pi'\\\vec{u}=\vec{v_r}=(3,-5,1)\Rightarrow\pi':\\\vec{v}=\vec{n}=(2,-1,3)\end{cases}\begin{vmatrix}x-1 & y+4 & z\\3 & -5 & 1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15x+15+2y+8-3z+10z-9y-36+x-1=0\Rightarrow \pi':-14x-7y+7z-14=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': 2x+y-z+2=0}$$

5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = 1^{2/0} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación(número e)}$$

Tomo logaritmos en la expresión $L = \lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}\right)$$

Conmuta el ln con el límite, por ser la función continua.

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{2/tg(x)}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{2}{tgx}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{tgx} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x}{1+x} = \frac{2}{1} = 2$$

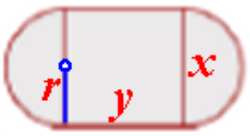
Obtenemos el valor de L.

$$\ln L = 2 \Rightarrow L = e^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = L = e^2}$$

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $4+\pi\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.



El radio del semicírculo es la mitad del lado *x*, es decir, $r=\frac{x}{2}$.

La superficie del campo de juego es la suma del área del rectángulo ($x\cdot y$) y el área del circulo de radio *r* (πr^2 , hay dos semicírculos).

$$Superficie(x,y)=xy+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=xy+\frac{\pi x^2}{4}$$

Como el área debe ser $4+\pi\ m^2$ tenemos que:

$$Superficie(x,y)=xy+\frac{\pi x^2}{4}=4+\pi\Rightarrow xy=4+\pi-\frac{\pi x^2}{4}\Rightarrow y=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x^2}{4x}\Rightarrow y=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x}{4}$$

Deseamos minimizar la longitud de las líneas a pintar.

$$L(x,y)=2x+2y+2\pi r=2x+2y+2\pi\frac{x}{2}=2x+2y+\pi x$$

Sustituimos y obtenemos la función longitud dependiendo solo de *x*.

$$\left.\begin{array}{l}L(x,y)=2x+2y+\pi x\\ y=\dfrac{4+\pi}{x}-\dfrac{\pi x}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow L(x)=2x+2\left(\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x}{4}\right)+\pi x\Rightarrow$$

$$L(x)=2x+\frac{8+2\pi}{x}-\frac{\pi x}{2}+\pi x=2x+\frac{8+2\pi}{x}+\frac{\pi x}{2}=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)x+\frac{8+2\pi}{x}=\frac{\pi+4}{2}x+\frac{8+2\pi}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero.

$$L(x)=\frac{\pi+4}{2}x+\frac{8+2\pi}{x}\Rightarrow L'(x)=\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{x^2}$$

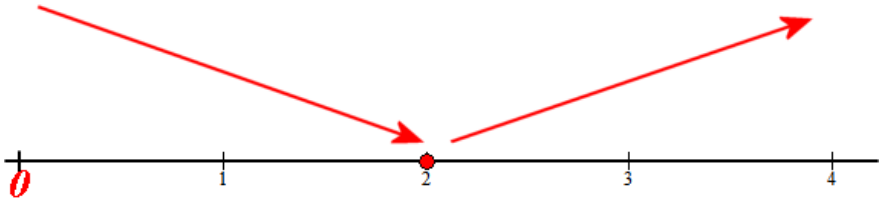
$$L'(x)=0\Rightarrow\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{x^2}=0\Rightarrow(\pi+4)x^2-16-4\pi=0\Rightarrow(\pi+4)x^2=16+4\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{16+4\pi}{4+\pi}=\frac{4(4+\pi)}{4+\pi}=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Solo tiene sentido el valor positivo $x = 2$.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $L'(1) = \frac{\pi + 4}{2} - \frac{8 + 2\pi}{1} = -10,71 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $L'(3) = \frac{\pi + 4}{2} - \frac{8 + 2\pi}{9} = 1,98 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue es esquema siguiente.



La longitud a pintar tiene un mínimo en x = 2.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{4 + \pi}{x} - \dfrac{\pi x}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{4 + \pi}{2} - \frac{2\pi}{4} = \frac{8 + 2\pi - 2\pi}{4} = 2$$

El campo con longitud mínima a pintar es un cuadrado de lado 2 y dos semicírculos de radio 1.

7) Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$

a) (0,*25 puntos)* Calcule el dominio de *f(x)*

b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan o hacen negativo $x + 1$, pues no existe el logaritmo de un número negativo o cero.

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

Dominio = $(-1,+\infty)$

b) Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1) \Rightarrow f\,'(x)=\frac{-2x}{2}+2\frac{1}{x+1}=-x+\frac{2}{x+1}=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$$

$$f\,'(x)=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$$

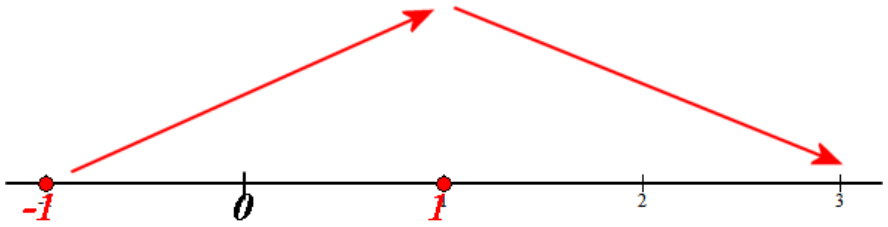
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-x+2}{x+1}=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}\frac{1+3}{-2}=-1=x\\ \frac{1-3}{-2}=1=x\end{cases}$$

Como el dominio es $(-1,+\infty)$ solo nos sirve el valor $x = 1$.

Vemos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\frac{2}{1}>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{-4-2+2}{2+1}=-\frac{4}{3}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-1,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

8) *(2 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\int x^3 e^{x^2} dx$

Calculamos la integral usando un cambio de variable y luego integración por partes.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int x^3 e^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 e^t dt = \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(te^t - e^t \right) = \{\text{Deshacemos el cambio}\} = \boxed{\frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + K}$$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Dispone de móvil	No dispone de móvil	TOTALES
Dispone de ordenador	**10**		**80**
No dispone de ordenador			
TOTALES	**15**		**100**

Completamos la tabla.

	Dispone de móvil	No dispone de móvil	TOTALES
Dispone de ordenador	**10**	**70**	**80**
No dispone de ordenador	**5**	**15**	**20**
TOTALES	**15**	**85**	**100**

Utilizamos la regla de Laplace para responder a las preguntas.

a) Usamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{Dispone de alguno o ambos dispositivos}\right)=\frac{10+70+5}{100}=\boxed{\frac{85}{100}=0,85}$$

b) Usamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{No dispone de ninguno de los dispositivos}\right)=\boxed{\frac{15}{100}=0,15}$$

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

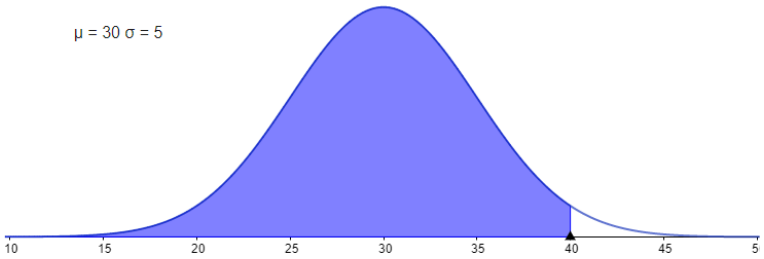
c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

X = Tiempo (minutos) que tarda en llegar a la universidad.

X es una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos. X = N(30, 5)

a) Nos piden calcular $P(X \leq 40)$.

$$P(X \leq 40) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{40-30}{5}\right) = P(Z \leq 2) = \boxed{0,9772}$$

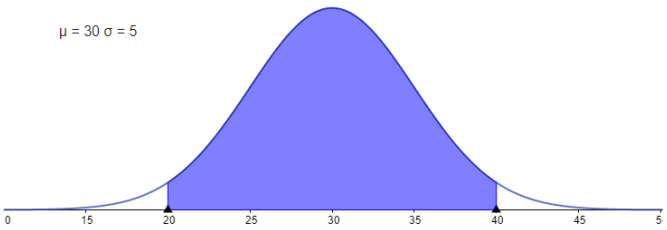


b) Nos piden calcular $P(20 \leq X \leq 40)$.

$$P(20 \leq X \leq 40) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{20-30}{5} \leq Z \leq \frac{40-30}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) =$$

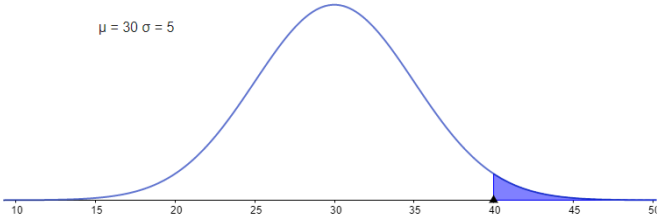
$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) =$$

$$= 0,9772 - 1 + 0,9772 = \boxed{0,9544}$$



c) Es la probabilidad de que tarde más de 40 minutos en llegar.

$$P(X \geq 40) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{40-30}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$



.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):
……
(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix} \end{cases}$

4) Se considera la recta $r\equiv\begin{cases}x+ & z=1\\ 2x+y & =3\end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

5) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-sen x)^{1/x^3}\right)$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

a) (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

a) (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIONES

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Consideramos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m-1+4+m^2+m-2m^2+2-1-2m=-m^2+4$

Igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow -m^2+4=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2$$

Distinguimos 3 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq -2$ *y* $m \neq 2$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y su rango es 3. El rango de *A/B* también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=-2$

El determinante de *A* es cero, por lo que el rango de *A* no es 3.

¿El rango de *A* es 2?

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila y 1ª columna

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3+4=1 \neq 0$

El rango de *A* es 2

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Con determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+2-6+8+3-1=4 \neq 0$

El rango de *A/B* es 3

Como Rango de $A = 2 \neq 3 =$ Rango de A/B **el sistema es incompatible**.

CASO 3. $m = 2$

El determinante de A es cero, por lo que el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Como las filas 1ª y 2ª son iguales, tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$

El rango de A es 2

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Como la columna 1ª y 2ª son iguales, tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 - 8 + 3 - 1 = 0$

El rango de A/B no es 3. Por lo que el rango de A/B es 2.

Rango de A = Rango de $A/B = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

a) Calculamos $A\cdot B^t$ y comprobamos si es invertible.

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+3 & 1+0+3\\ 0+0+1 & -1+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$ La matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. La calculamos.

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

b)

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Queda demostrado que $C^3=I$

Como $C^3=I$, descomponemos el exponente en potencias de exponente 3.

$$C^{16}=C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C=I\cdot I\cdot I\cdot I\cdot I\cdot C=C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=2Y+\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left[2Y+\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4Y+\begin{pmatrix}0 & 6 & 6\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 6 & 6\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=2\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+ \quad z=1 \\ 2x+y \quad =3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y que pasa por el punto (0,0,1).

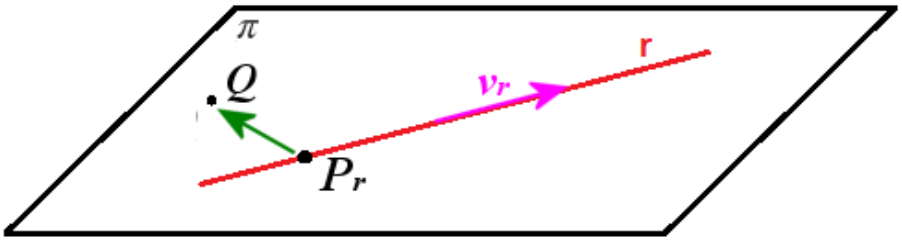
b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

a) Obtenemos un vector director y un punto de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+ \quad z=1 \\ 2x+y \quad =3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ 2(1-z)+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ 2-2z+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=1+2z \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=1-z \\ y=1+2z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,1,0) \\ \vec{v_r}=(-1,2,1) \end{cases}$$

Si llamamos al punto Q(0,0,1). El plano pedido tiene como vectores directores el de la recta $\vec{v_r}=(-1,2,1)$ y $\overrightarrow{P_rQ}=(0,0,1)-(1,1,0)=(-1,-1,1)$.



$$\left.\begin{array}{l} Q(0,0,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{P_rQ}=(-1,-1,1) \\ \vec{v}=\vec{v_r}=(-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-y-2z+2-z+1+y-2x=0$$

$$\pi \equiv -3x-3z+3=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi \equiv x+z-1=0}$$

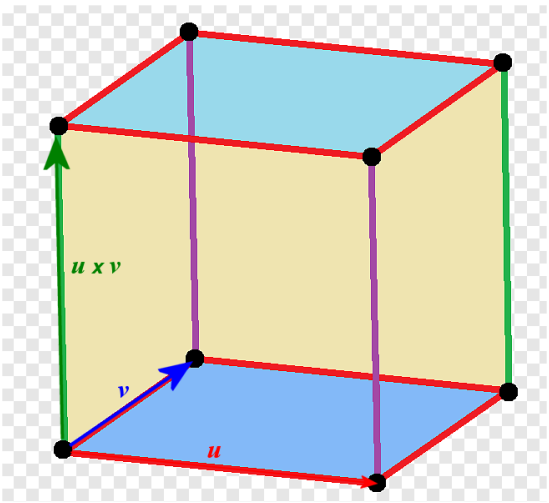
b) El volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores es el valor absoluto de su producto mixto.

$$Volumen = \left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\right]\right| = \left|\left[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \left|\vec{u}\times\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right| = \left|(-1,1,1)\cdot(-1,1,1)\right| = |1+1+1| = 3\,u^3$$

Otro enfoque posible es:

El volumen es el área de la base que es el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$ que vale $\sqrt{3}\,u^2$ por la altura que también es el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$.

Volumen = $\sqrt{3}\,\sqrt{3}=3\,u^3$



5) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)=\left((1+0-sen0)^{1/0^3}\right)=1^{\infty}=\text{Indeterminación}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\left[(1+x-senx)-1\right]}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\left[x-senx\right]}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{x^3}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L´Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L´Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\,x}{6x}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L´Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{6}}=e^{\frac{1}{6}}=\boxed{\sqrt[6]{e}}$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.
$1-e^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}=1\Rightarrow x=0$
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

Veamos si $x = 0$ es asíntota.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{0}{1}=0$$

No es asíntota. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

Analizamos el comportamiento en $\pm\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{+\infty}{1-e^{-\infty}}=\frac{+\infty}{1-0}=+\infty$$

No hay asíntota en $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{+\infty}{1-e^{+\infty}}=\frac{+\infty}{-\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota en $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No hay asíntota oblicua en $-\infty$, pues hay asíntota horizontal.
Comprobamos si la hay en $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

No hay asíntota oblicua.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

a) (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa $x=\frac{1}{2}$

a) El dominio de la función $f(x)=\ln(2x+1)$ son todos los valores *x* que hacen que $2x+1>0$.

$$2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>\frac{-1}{2}$$

El dominio es $\left(\frac{-1}{2},+\infty\right)$

Para el crecimiento obtenemos su derivada y la igualamos a cero para encontrar los puntos críticos.

$$f(x)=\ln(2x+1) \Rightarrow f\,'(x)=\frac{2}{2x+1}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{2x+1}=0 \Rightarrow 2=0 \text{ ¡Imposible!}$$

No tiene puntos críticos, por lo que no hay cambio de crecimiento a decrecimiento o viceversa.

Probamos en un punto cualquiera del dominio, por ejemplo $x=0 \Rightarrow f\,'(0)=\frac{2}{0+1}=2>0$.

La función crece en su dominio $\left(\frac{-1}{2},+\infty\right)$.

b) La recta tangente en a *f(x)* en el punto de abscisa $x=\frac{1}{2}$ tiene ecuación

$$y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)=\ln 2 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}=\frac{2}{2}=1 \\ y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\ln 2=1\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y=x-\frac{1}{2}+\ln 2}$$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$

Usamos el método de integración por partes.

$$\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln^2 x\rightarrow du=2\ln x\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\ dv=\sqrt{x}dx\rightarrow v=\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\int\frac{2\ln x}{x}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=...$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=x^{\frac{1}{2}}dx\rightarrow v=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\int\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{2}{3}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

$$...=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}\right)=\boxed{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\ln^2 x}{3}-\frac{8\ln x}{9}+\frac{16}{27}\right)+C}$$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

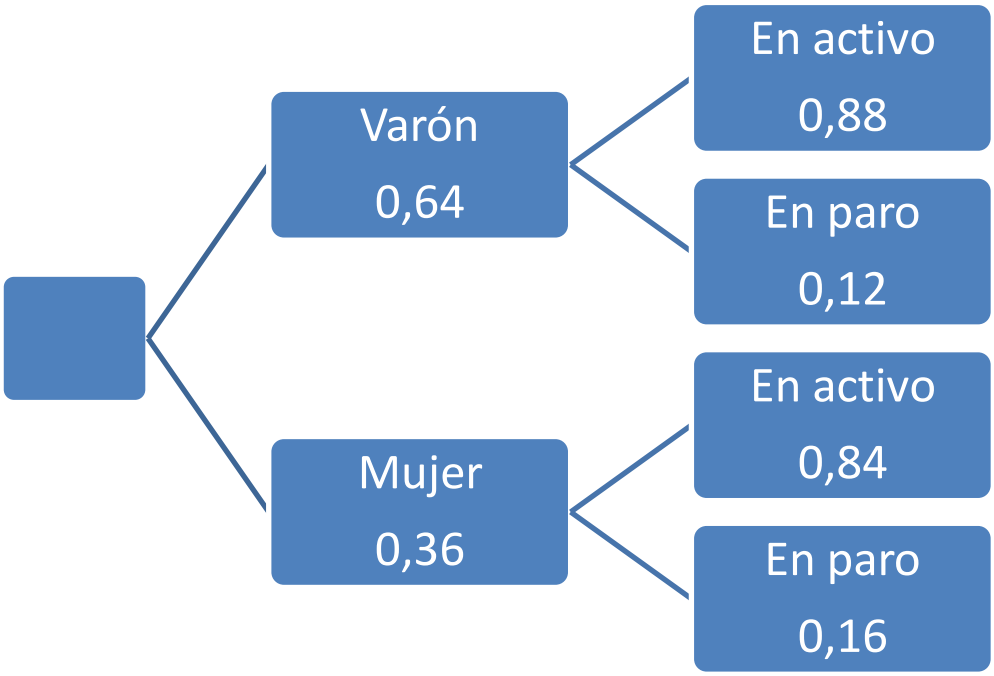
a) (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

Construyamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



a) P(Ser mujer y estar en el paro) = 0,36 · 0,16 = $\boxed{0,0576}$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

P(Estar en el paro) = 0,64 · 0,12 + 0,36 · 0,16 = $\boxed{0,1344}$

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea mujer/ Está en el paro}) = \frac{P(\text{Sea mujer } \cap \text{ Está en el paro})}{P(\text{Está en el paro})} = \frac{0,0576}{0,1344} = \boxed{0,429}$$

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

X = número de estudiantes que abandonan los estudios de 5 elegidos al azar.
P(un estudiante abandone los estudios) = 1/5 = 0,2 = p
Como las elecciones son independientes tenemos una distribución binomial.
X es una distribución binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0.2$. X = B(5, 0.2)

a) Nos piden calcular $P(X \leq 1)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 + \binom{5}{1} 0.2^1 \cdot 0.8^4 =$$

$$= 0.8^5 + 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8^4 = \boxed{0.7373}$$

b) Por lógica es más probable que ninguno abandone los estudios pues hay 1 de cada 5 que abandona y 4 de cada 5 que no abandona.

Calculamos la P(X = 0) que es la probabilidad de que ninguno abandone los estudios y la $P(X = 5)$ que es la probabilidad de que todos abandonen los estudios.

$$\left.\begin{array}{l} P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 0.8^5 = 0.32768 \\ P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.2^5 \cdot 0.8^0 = 0.2^5 = 0.00032 \end{array}\right\} \Rightarrow P(X = 0) = 0.32768 > 0.00032 = P(X = 5)$$

Es más probable que no abandone ninguno.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+kz=1 \\ -x+y-kz=0 \\ 2x-ky+2kz=-1 \end{array}\right\}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando k=1.

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2y+3z=3 \end{cases}$$

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1 \\ k-x, & si \quad x=1 \end{cases}$$

sea continua en x = 1.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m=-1$.

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}3x+y=-1\\ 4y+3z=5\end{cases}$$

y pasa por el punto A:(1,3,−1).

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de k para que la función (x) tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x\left(\ln\left(x\right)\right)^2\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.
a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+k\cdot z=1 \\ -x+y-k\cdot z=0 \\ 2x-k\cdot y+2k\cdot z=-1 \end{array}\right\}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando k=1.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix}=4k+2k+k^2-2k-2k-2k^2=-k^2+2k$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+2k=0\Rightarrow -k(k-2)=0\Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ 0 \\ k=2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $k\neq 0$ *y* $k\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A será 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $k=0$

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+y=0 \\ 2x=-1 \end{array}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+y=0 \\ 2x=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+y=0 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1-y=1 \\ \dfrac{1}{2}+y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-2 \\ y=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right\}$$ Esto es imposible

El sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $k=2$

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} 2x-y+2z=1 \\ -x+y-2z=0 \\ 2x-2y+4z=-1 \end{array}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+2z=1 \\ -x+y-2z=0 \\ 2x-2y+4z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -y & +2z & =1 \\ -2x & +2y & -4z & =0 \\ \hline & y & -2z & =1 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -2y & +4z & =-1 \\ -2x & +y & -2z & =-1 \\ \hline & -y & +2z & =-2 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ y-2z=1 \\ -y+2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} -y & +2z & = & -2 \\ y & -2z & = & 1 \\ \hline & 0 & = & -1 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ y-2z=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$$

Como este sistema tiene una ecuación imposible de cumplir también es incompatible.

b) Para k = 1 el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -y & +z & =1 \\ -2x & +2y & -2z & =0 \\ \hline & y & -z & =1 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -y & +2z & =-1 \\ -2x & +y & -z & =-1 \\ \hline & & z & =-2 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1 \\ y-z=1 \\ \boxed{z=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y-2=1 \\ y+2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=3 \\ \boxed{y=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución es $x=1, y=-1, z=-2$

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1), \vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto *P*:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases}3x-2y=-1\\ 2y+3z=3\end{cases}$$

a) Calculemos el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=2j+k-2k-i=-i+2j-k=(-1,2,-1)$$

El volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor de su producto mixto, que coincide con el valor absoluto del determinante de la matriz formada por las coordenadas de estos vectores.

$$\text{Volumen}=\left|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=|-1+4+1+2|=\boxed{6\,u^3}$$

b) Pasemos la ecuación de la recta a forma continua despejando de las dos ecuaciones de los planos que definen la recta r.

$$r:\begin{cases}3x-2y=-1\\ 2y+3z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y=-1-3x\\ 2y=3-3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-1-3x}{-2}=\dfrac{3x+1}{2}\\ y=\dfrac{3-3z}{2}=\dfrac{3z-3}{-2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3x+1}{2}=y=\frac{3z-3}{-2}\Rightarrow r:\frac{x+1/3}{2/3}=y=\frac{z-1}{-2/3}$$

El vector director de la recta nos sirve como vector normal del plano.

$$\vec{n}=\vec{v_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{-2}{3}\right)$$

Hallamos la ecuación del plano.

$$\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3}z+D=0\ .$$

El plano pasa por *P*:(1, 3, 2) luego se cumple:

$$\frac{2}{3}+3-\frac{4}{3}+D=0\Rightarrow 2+9-4+3D=0\Rightarrow 7+3D=0\Rightarrow D=\frac{-7}{3}$$

La ecuación del plano es $\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3}z-\frac{7}{3}=0$. Simplificando queda $\boxed{\pi:2x+3y-2z-7=0}$

También podíamos haber hallado el vector director de la recta haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6i + 6k - 9j = -6i - 9j + 6k = (-6, -9, 6)$$

Este vector es –6 veces el vector de la recta obtenido por el otro método, pero nos llevaría al mismo resultado. De hecho, podíamos haber multiplicado el primer vector por 3 para quitar denominadores o bien dividir este segundo por 3 para tener coordenadas más pequeñas.

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1\\ k-x, & si \quad x=1\end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

a) Antes de calcular el límite voy a simplificar la expresión aplicando propiedades de los logaritmos.

$$\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

Calculamos el límite usando este cambio de expresión.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\ln(1+0)}-\frac{1}{0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right)=\frac{0-\ln 1}{0\cdot\ln 1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1+x-1}{\cancel{1+x}}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\cancel{1+x}}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) La función es continua en x = 1 cuando se cumple:

- Existe $f(1)=k-1$
- Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$. Lo calculamos…

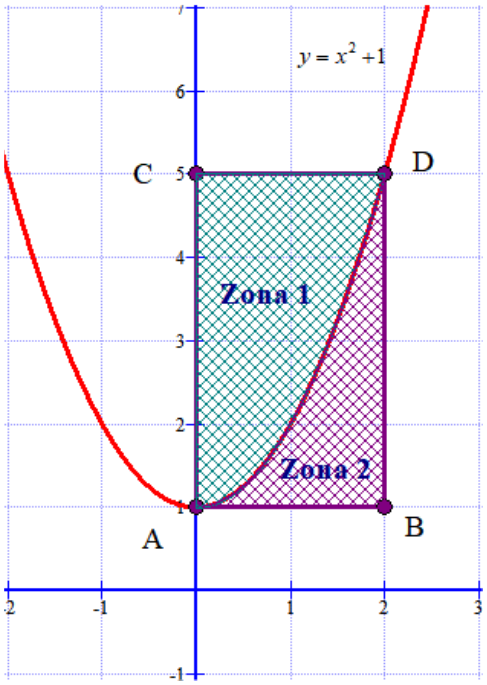
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\left\{\begin{array}{l}\text{Factorizamos el polinomio del numerador}\\ \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 & 1\\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{|0} \end{array}\\ x^4-1=(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)\end{array}\right\}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+x^2+x+1\right)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x^3+x^2+x+1 = \boxed{4}$$

- Los dos valores son iguales → $k-1=4 \Rightarrow \boxed{k=5}$

La función es continua para $k = 5$.

c) Dibujemos el rectángulo y la gráfica de la función.



El rectángulo tiene de área $2 \cdot 4 = 8$ u^2.

Calculemos el área de la zona 2 haciendo uso de la integral. Es la integral definida de la parábola menos la recta y = 1, entre 0 y 2.

$$\text{Área zona } 2 = \int_0^2 \left(x^2+1\right)-1dx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{0^3}{3}\right] = \boxed{\frac{8}{3}=2,66\,u^2}$$

El área de la zona 1 será la diferencia entre el área del rectángulo y el área de la zona 2.

$$\text{Área zona } 1 = 8-\frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}=5,33\,u^2}$$

El área de la zona 1 también se puede calcular como la integral definida de la recta y = 5 menos la parábola entre 0 y 2.

$$\text{Área zona } 1 = \int_0^2 5-\left(x^2+1\right)dx = \int_0^2 4-x^2 dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \left[8-\frac{2^3}{3}\right]-\left[0-\frac{0^3}{3}\right] = 8-\frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}=5,33\,u^2}$$

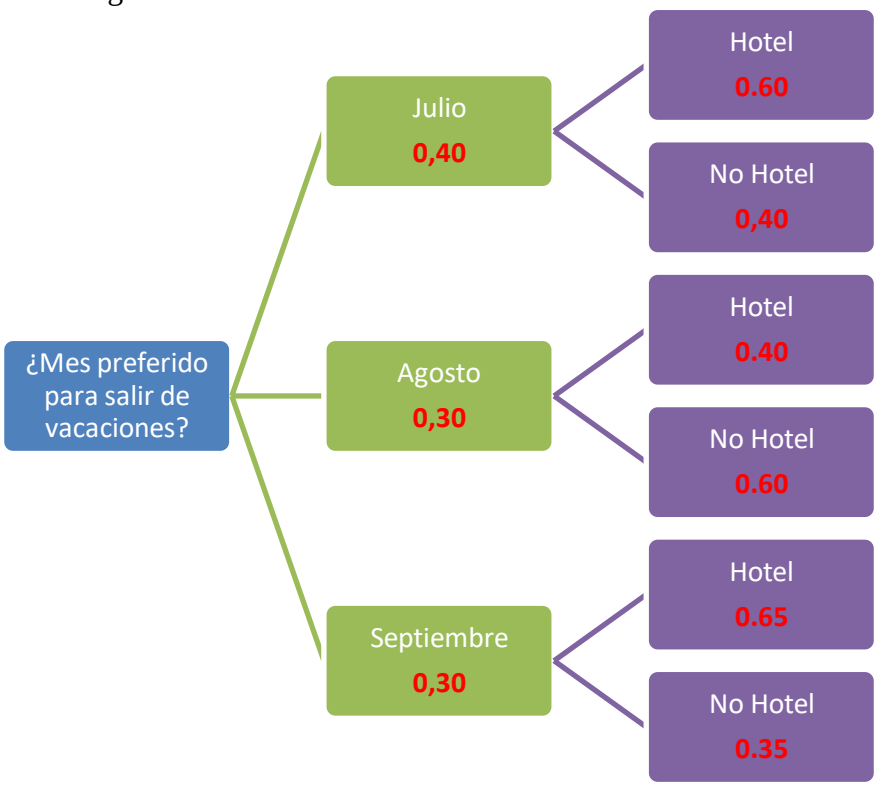
4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(\text{Vaya a hotel y le guste ir en agosto}) =$

$= P(\text{Le guste ir en agosto}) \cdot P(\text{Vaya a hotel /}Le\text{ gusta ir en agosto}) = 0,3 \cdot 0,4 = \boxed{0,12}$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Vaya a hotel}) = P(\text{Le guste ir en Julio y hotel}) + P(\text{Le guste ir en agosto y hotel}) +$$
$$+P(\text{Le guste ir en septiembre y vaya a hotel}) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,65 = \boxed{0,555}$$

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Prefiera ir en agosto / No elige hotel}) = \frac{P(\text{Prefiere ir en agosto y No elige hotel})}{P(\text{No elige hotel})} =$$
$$= \frac{P(\text{Prefiere ir en agosto}) \cdot P(\text{ No elige hotel / Prefiere ir en agosto})}{1 - P(\text{Elige hotel})} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{1 - 0,555} = \boxed{0,404}$$

OPCIÓN B

1.
a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m=-1$.

a) Calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{vmatrix}=m^2-3m+2$$

Averiguamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}=\frac{3+1}{2}=2\\ =\frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Existen tres casos distintos.

CASO 1. $m\neq1$ *y* $m\neq2$
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3 (el máximo posible)

CASO 2. $m=1$
La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$
Su determinante vale 0, por lo que su rango es menor de 3.

¿Rango de A es 2?
El menor de orden 2 que se obtiene quitando la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2\neq0$$

El rango de A es 2

CASO 3. $m=2$
La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, por lo que su rango es menor de 3.

¿Rango de A es 2?
El menor de orden 2 que se obtiene quitando la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

El rango de A es 2

Conclusión: Si $m \neq 1$ *y* $m \neq 2$ el rango de A es 3, si $m = 1$ *o* $m = 2$ el rango de A es 2.

b) Para m = –1 la matriz tiene determinante no nulo y tiene inversa.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ con $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 2 = 6 \neq 0$.

Al tener determinante no nulo existe la inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}}$$

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

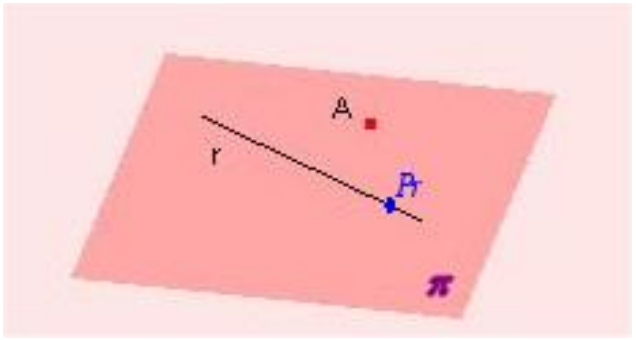
$$r:\begin{cases}3x+y=-1\\4y+3z=5\end{cases}$$

y pasa por el punto A:$(1,3,-1)$.

El punto A no pertenece a la recta

$$r:\left.\begin{cases}3x+y=-1\\4y+3z=5\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3+3=-1\\12-3=5\end{cases}$$ No se cumple ninguna de las igualdades

$\mathrm{A}:(1,3,-1).$



Hallemos un vector director y un punto de la recta.

$$r:\left.\begin{cases}3x+y=-1\\4y+3z=5\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=-1}\\4y+3z=5\end{cases}\Rightarrow -4+3z=5\Rightarrow 3z=9\Rightarrow\boxed{z=3}$$

$\boxed{x=0}$

Un punto de la recta es $P_r(0,-1,3)$

Hallemos un segundo punto de la recta.

$$r:\left.\begin{cases}3x+y=-1\\4y+3z=5\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=-4}\\4y+3z=5\end{cases}\Rightarrow -16+3z=5\Rightarrow 3z=21\Rightarrow\boxed{z=7}$$

$\boxed{x=1}$

Un segundo punto de la recta es $Q_r(1,-4,7)$

Un vector director de la recta es $\vec{v_r}=\overrightarrow{P_rQ_r}=(1,-4,7)-(0,-1,3)=(1,-3,4)$

Necesitamos dos vectores directores y un punto para definir el plano.
El plano que contiene a la recta tiene como primer vector director el de la recta $\vec{u}=\vec{v_r}=(1,-3,4)$, y como segundo vector director el vector que une el punto A:$(1,3,-1)$ con el punto $P_r(0,-1,3)$ de la recta.

$$\vec{v}=\overrightarrow{AP_r}=(0,-1,3)-(1,3,-1)=(-1,-4,4)$$

Podemos obtener las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pasa por el punto } A(1,3,-1)\\ \vec{u}=(1,-3,4)\\ \vec{v}=(-1,-4,4)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=1+\alpha-\lambda\\ \pi\equiv y=3-3\alpha-4\lambda\\ z=-1+4\alpha+4\lambda\end{array}\right\}$$

O bien podemos hallar la ecuación general:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pasa por el punto } A(1,3,-1)\\ \vec{u}=(1,-3,4)\\ \vec{v}=(-1,-4,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z+1\\ 1 & -3 & 4\\ -1 & -4 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12x+12-4y+12-4z-4-3z-3-4y+12+16x-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 4x-8y-7z+13=0}$$

La ecuación del plano es $\pi: 4x-8y-7z+13=0$

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de *k* para que la función (*x*) tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x\left(\ln\left(x\right)\right)^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

a) La asíntota oblicua tiene la expresión $y=mx+n$ donde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^3}+kx^2+x+3-\cancel{2x^3}-4x}{x^2+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^2-3x+3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=k$$

La asíntota oblicua es $y=2x+k$. Como debe ser $y=2x-1$, entonces $k=-1$.

b) Hacemos uso del método de integración por partes.

$$\int x\left(\ln\left(x\right)\right)^2 dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=\left(\ln\left(x\right)\right)^2\to du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\left(\ln\left(x\right)\right)^2\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\ln\left(x\right)\right)^2\frac{x^2}{2}-\int x\ln x dx=\boxed{\textit{Continua...}}$$

Hacemos uso del método de integración por partes.

$$\int x\ln x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Sustituimos en la expresión inicial y queda

$$\boxed{...Continua} = \left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = \boxed{\left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + K}$$

c) Calculemos su derivada

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{-1+x}{x^2}$$

Si igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{x^2} = 0 \Rightarrow -1+x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Calculamos la segunda derivada y comprobamos que tipo de punto crítico es.

$$f'(x) = \frac{-1+x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{x^2 - (-1+x)2x}{x^4} = \frac{x^2 + 2x - 2x^2}{x^4} = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{-x+2}{x^3}$$

Sustituimos x = 1

$$f''(1) = \frac{-1+2}{1^3} = \frac{1}{1} = 1 > 0$$

x = 1 es un mínimo

Buscamos los puntos de inflexión igualando a cero la derivada segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Calculamos la derivada tercera

$$f''(x) = \frac{-x+2}{x^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-x^3 - (-x+2)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 + 3x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(2x-6)}{\cancel{x^2}\cdot x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2x-6}{x^4}$$

Sustituimos x = 2 en la derivada tercera y comprobamos que no se anula.

$$f'''(2) = \frac{4-6}{2^4} = \frac{-2}{16} \neq 0$$

x = 2 es un punto de inflexión

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Del 1 al 25 hay 12 números pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.

La probabilidad de que un jugador gane es $p = \frac{12}{25} = 0,48$.

a) X = Número de veces que gana en 100 jugadas.
Se trata de una distribución binomial, donde p = 0,48 y n = 100.
X = B(100, 0,48).

Como el número de repeticiones es muy grande, lo podemos aproximar a una normal.
n = 100, $n \cdot p = 100 \cdot 0,48 = 48 > 5$, $n \cdot q = 100 \cdot 0,52 = 52 > 5$ esta aproximación es suficientemente fiable.

X se aproxima a una normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N\left(48, \sqrt{100 \cdot 0,48 \cdot 0,52}\right) = N\left(48, 5\right)$.

Calculamos $P\left(X = 10\right)$ usando esta aproximación a la normal.

$$P\left(X = 10\right) = P\left(9,5 \le X \le 10,5\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{9,5-48}{5} \le \frac{X-48}{5} \le \frac{10,5-48}{5}\right) =$$

$$= P\left(-7,7 \le Z \le -7,5\right) = P\left(7,5 \le Z \le 7,7\right) = P\left(Z \le 7,7\right) - P\left(Z \le 7,5\right) = 0$$

OTRA FORMA DE HACERLO
Hacemos el cálculo sin aproximaciones.
X = Número de veces que gana en 100 jugadas. X = B(100, 0,48).

$$P\left(X = 10\right) = \binom{100}{10} 0,48^{10} \cdot 0,52^{90} = \frac{100!}{90! \cdot 10!} \cdot 0,48^{10} \cdot 0,52^{90} = 3.09 \cdot 10^{-16}$$

$$P\left(X = 10\right) = 0,000000000000000309$$

Prácticamente es cero.

Es razonable ya que la media de aciertos es 48 de cada 100 tiradas y 10 es un valor muy bajo comparado con la media.

b) Se trata de una distribución binomial, donde p = 0,48 y n = 200.

X = Número de veces que gana en 200 jugadas. X = B(200, 0,48).

Como el número de repeticiones es muy grande, lo podemos aproximar a una normal.
n es 200, $n \cdot p = 200 \cdot 0,48 = 96 > 5$ y $n \cdot q = 200 \cdot 0,52 = 104 > 5$ esta aproximación es suficientemente fiable.

X se aproxima a una normal Y = $N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N\left(96, \sqrt{200 \cdot 0,48 \cdot 0,52}\right) = N\left(96, 7,06\right)$

Nos piden calcular $P(90 \le X \le 110)$. Calculamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(90 \le X \le 110) = P(90 - 0.5 \le Y \le 110 + 0.5) = P(89.5 \le Y \le 110.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{89.5 - 96}{7,06} \le \frac{X - 96}{7,06} \le \frac{110.5 - 96}{7,06} \right) =$$

$$= P(-0,9207 \le Z \le 2.0538) = P(Z \le 2.05) - P(Z \le -0,92) =$$

$$= P(Z \le 2.05) - P(Z \ge 0,92) = P(Z \le 2.05) - (1 - P(Z \le 0,92)) =$$

$$= 0,9798 - (1 - 0,8212) = 0,9798 - 0,1788 = \boxed{0,801}$$

Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1,1,2), B:(2,2,2) y C:$(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

Donde el símbolo "$\times$" representa el producto vectorial.

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), $(a,0)$,$(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y además el punto (a,b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

4. Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2,1,2) y la recta r:(1,0,0)+t(−1,1,1).

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.
A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

a) El determinante de la matriz es

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}=k(k+2)^2-k(k+2)=k(k+2)(k+2-1)=k(k+2)(k+1)$$

Si igualamos a cero este determinante

$$|A|=0\Rightarrow k(k+2)(k+1)=0\Rightarrow\begin{cases} k=0 \\ k+2=0\Rightarrow k=-2 \\ k+1=0\Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

Hay 4 casos distintos.

CASO 1. $k\neq 0; k\neq -2$ *y* $k\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $k=0$

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y columna 1ª nos queda un menor de orden 2 con determinante no nulo. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$

CASO 3. $k=-2$

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y la columna 2ª nos queda un menor de orden 2 con determinante no nulo. $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$

CASO 4. $k=-1$

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y columna 3ª nos queda un menor de orden 2 con determinante no nulo. $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

b) Cuando k =1 la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=9-3=6\neq 0$.

Como el determinante es no nulo existe la inversa. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}9 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1, 1, 2), B:(2, 2, 2) y C:(−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

Donde el símbolo "$\times$" representa el producto vectorial.

a) Para que los puntos estén alineados los vectores que los unen deben tener la misma dirección, es decir, deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-1,a,b)-(1,1,2)=(-2,a-1,b-2)\\ \overrightarrow{AB}=(2,2,2)-(1,1,2)=(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{1}=\frac{b-2}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2}{1}=\dfrac{a-1}{1}\Rightarrow -2=a-1\Rightarrow \boxed{a=-1}\\ \dfrac{-2}{1}=\dfrac{b-2}{0}\Rightarrow 0=b-2\Rightarrow \boxed{b=2}\end{cases}$$

Para $a = -1$ y $b = 2$ los puntos están alineados y la recta que definen tiene ecuación que podemos obtener a partir del vector director, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$ y un punto, por ejemplo, A(1,1,2).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)\\ \text{Pasa por A}(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=2\end{cases}$$

b) Si $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(x,y,z)$ entonces $\vec{u}-\vec{v}=(a,b,c)-(x,y,z)=(a-x,b-y,c-z)$.

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a-x & b-y & c-z\\ a-x & b-y & c-z\end{vmatrix}=0$, ya que hay dos filas iguales, la 2ª y la 3ª.

OTRA FORMA DE COMPROBARLO

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ es otro vector con módulo el producto del módulo de cada uno de los vectores que se multiplican y por el seno del ángulo que forman. Como el ángulo que forman es 0º, su seno es 0 y el producto vectorial es el vector nulo.

$$\left|\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right|=\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\cdot sen\left(\left(\vec{u}-\vec{v}\right),\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right)=\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\cdot sen\left(0^{o}\right)=0$$

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), (*a*,0), (0,b) y (*a*,b), donde *a*>0 y $b>0$ y además el punto (*a*,*b*), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

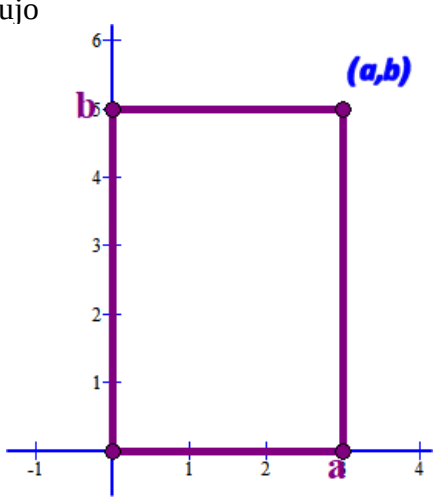
b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

a) El triángulo es como en el dibujo



Como el punto (a, b) está en la gráfica de la función $y=\frac{1}{x^2}+9$ la coordenada b vale $b=\frac{1}{a^2}+9$

El área del rectángulo es $Área=a\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{a^2}+9\right)=\frac{a}{a^2}+9a=\frac{1}{a}+9a$

Calculamos su derivada e igualamos a cero buscando el mínimo.

$$A(a)=\frac{1}{a}+9a\Rightarrow A'(a)=-\frac{1}{a^2}+9$$

$$A'(a)=0\Rightarrow -\frac{1}{a^2}+9=0\Rightarrow -\frac{1}{a^2}=-9\Rightarrow 1=9a^2\Rightarrow a^2=\frac{1}{9}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$$

Solo nos interesa el valor positivo. Veamos el signo de la derivada antes y después de $a=\frac{1}{3}$.

- Antes de $a=\frac{1}{3}$, por ejemplo $a=0{,}1$ la derivada vale $A'(0{,}1)=-\frac{1}{0{,}1^2}+9=-91<0$ la función decrece.
- Después de $a=\frac{1}{3}$, por ejemplo $a=1$ la derivada vale $A'(1)=-\frac{1}{1^2}+9=8>0$ la función crece.

En el punto $a=\frac{1}{3}$ hay un mínimo. El valor de b será $b=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+9=9+9=18$.

El rectángulo tiene vértices: $(0,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,18)$ y $\left(\frac{1}{3},18\right)$

El valor del área mínima es $A\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}+9\frac{1}{3}=3+3=6\,u^2$

b) Usamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int\frac{1}{9-x^2}dx=\int\frac{1}{(3-x)(3+x)}dx=$$

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}\Rightarrow 1=A(3+x)+B(3-x)\Rightarrow\begin{cases}x=-3\to 1=6B\Rightarrow B=\frac{1}{6}\\ x=3\to 1=6A\Rightarrow A=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{9-x^2}dx=\int\frac{\frac{1}{6}}{3-x}+\frac{\frac{1}{6}}{3+x}dx=\frac{1}{6}\int\frac{1}{3-x}dx+\frac{1}{6}\int\frac{1}{3+x}dx=$$

$$=\boxed{-\frac{1}{6}\ln(3-x)+\frac{1}{6}\ln(3+x)+C}$$

c)

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{5+k}{0}$, para que sea igual a 2 debe de producirse una indeterminación y en la resolución de la misma debe salir 2. Para que haya indeterminación debe de anularse el numerador, es decir, 5 + k = 0, luego k = –5.

Comprobémoslo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{0}{0}=\{\text{Indeterminación resolvemos por L´Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1}=\frac{0}{0}=\{\text{Indeterminación resolvemos por L´Hôpital}\}=$$

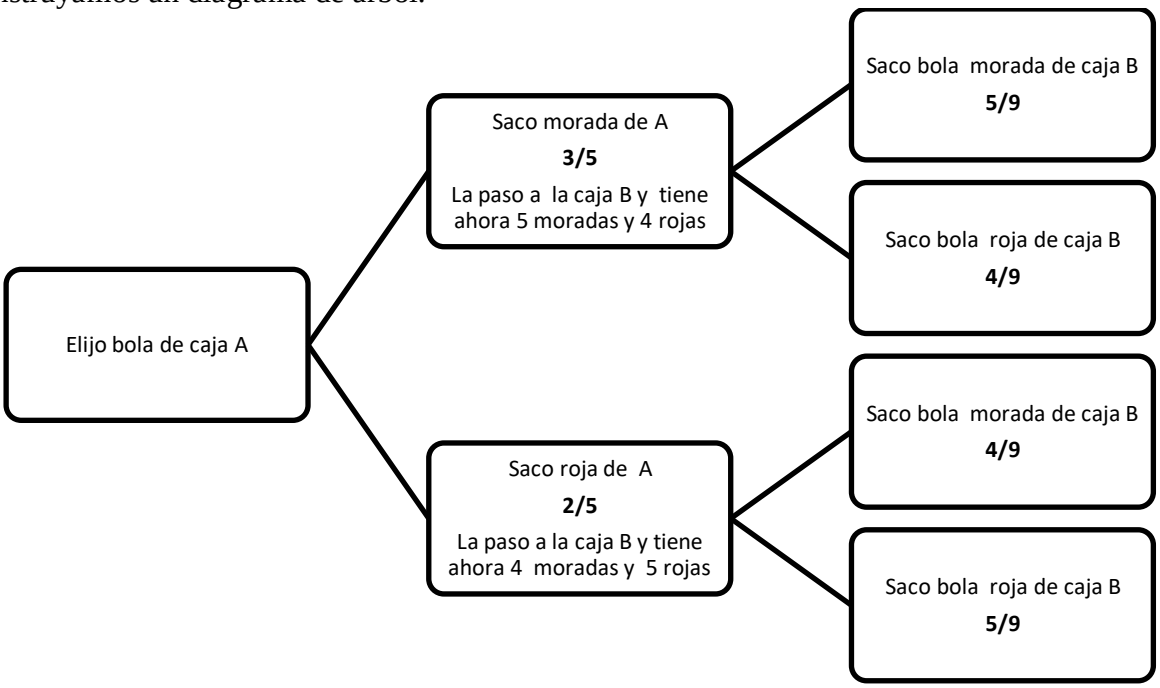
$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{6x-2}=\frac{8}{4}=2$$

4. Se dispone de dos cajas, la caja *A* contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja *B* contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja *A* y se pasa a la caja *B*. Posteriormente se saca una bola de la caja *B*. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja *B* sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la *A* contiene 3 moradas y 2 rojas y la *B* contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

a) Construyamos un diagrama de árbol.

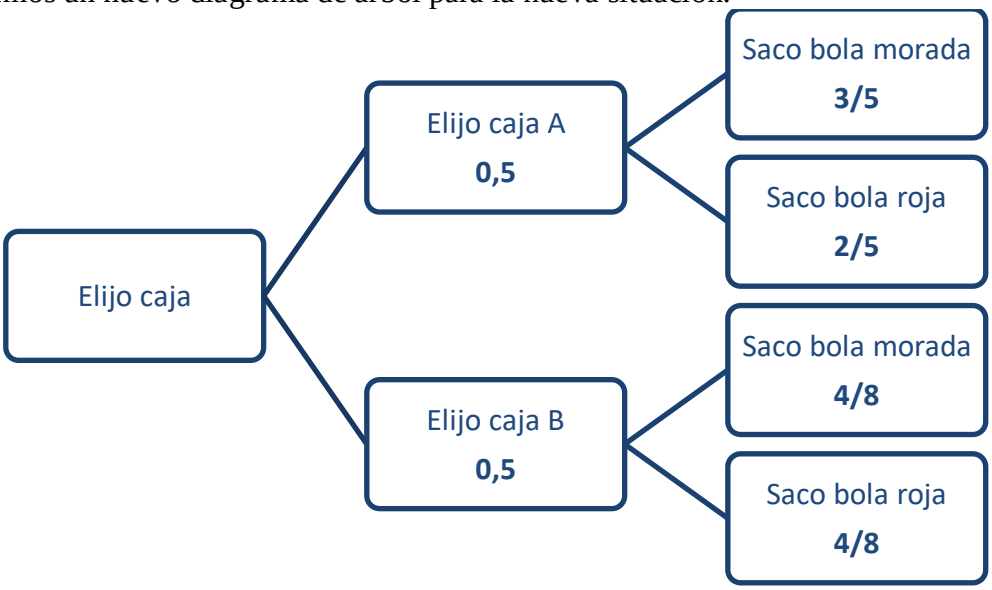


Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

P(Sacar bola morada de la caja B) = P(sacar morada de A) · P(Sacar morada de B /sacar morada de A) + P(sacar roja de A) · P(Sacar morada de B /sacar roja de A) =

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}=\boxed{0,51}$$

b) Construyamos un nuevo diagrama de árbol para la nueva situación.



La probabilidad pedida es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para su cálculo.

$$P(\text{La bola sea de la caja A / bola es roja}) = \frac{P(\text{La bola sea de la caja A} \cap \text{bola es roja})}{P(\text{Bola es roja})} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot \frac{2}{5}}{0,5 \cdot \frac{2}{5} + 0,5 \cdot \frac{4}{8}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} = \boxed{0,44}$$

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

a) x = deportistas de esquí alpino, y = deportistas de esquí nórdico, z = deportistas de escalada.

"Hay 60 deportistas en el club" → $x+y+z=60$

"Hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada" → $y+z=x+16$.

"El número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico" → $x+z=3y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=60 \\ y+z=x+16 \\ x+z=3y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=60 \\ -x+y+z=16 \\ x-3y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+3-1+1+3 = 8$$

Usamos el método de Cramer para resolver el sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{60-48-16+180}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ -1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16+60-16+60}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ -1 & 1 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16+180-60+48}{8} = \frac{184}{8} = 23$$

Hay 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada.

b)

$$\begin{vmatrix} -2 & -2+b & -2-c \\ -4 & -6+2b & -8-2c \\ -6 & -12+3b & -20-3c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Fila } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ -4 \quad -6+2b \quad -8-2c \\ 4 \quad 4-2b \quad 4+2c \\ \hline 0 \quad -2 \quad -4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{Fila } 3^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ -6 \quad -12+3b \quad -20-3c \\ 6 \quad 6-3b \quad 6+3c \\ \hline 0 \quad -6 \quad -14 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -2+b & -2-c \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix} = (-2)(-2)(-14) - (-2)(-4)(-6) = -56 + 48 = -8$$

Hemos comprobado que $\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} = -8$ para $a = -2$.

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2,1,2) y la recta r:(1,0,0)+t(−1,1,1).

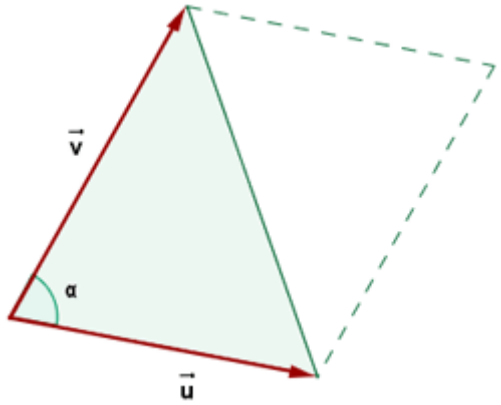
b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

a) Tenemos que hallar la ecuación del plano que pasa por P y con vectores directores el de la recta $\vec{u}=(-1,1,1)$ y el que va de un punto de la recta Q(1,0,0) a P(2,1,2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(-1,1,1)\\ \overrightarrow{QP}=(2,1,2)-(1,0,0)=(1,1,2)\\ \text{Pasa por } P(2,1,2)\end{array}\right\}\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z-2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi\equiv 2x-4+y-1-z+2-z+2+2y-2-x+2=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x+3y-2z-1=0}$$

b) El área de este triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de ambos vectores.



$$\vec{u}\times\vec{v}=(1,2,0)\times(2,1,-3)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-6i+k-4k+3j=-6i+3j-3k=(-6,3,-3)$$

$$Área=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}=\frac{|(-6,3,-3)|}{2}=\frac{\sqrt{36+9+9}}{2}=\frac{\sqrt{54}}{2}=\boxed{3,74\,u^2}$$

3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

a) **Asíntota vertical**. x = a

x = –1. Pues el dominio de la función es R–{–1}

Asíntota horizontal. y = b

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota es y = 0

Asíntota oblicua. y = mx + n

No hay, pues existe asíntota horizontal.

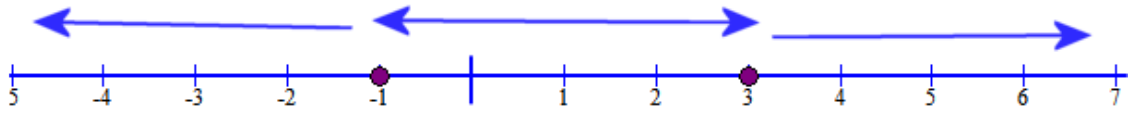
b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero, obtendremos los puntos críticos de la función y de ahí obtenemos la información pedida.

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{\cancel{(x+1)}\left[(x+1)-(x-1)2\right]}{\cancel{(x+1)}(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3}=\frac{-x+3}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x+3}{(x+1)^3}=0\Rightarrow x=3$$

Veamos que ocurre en las tres zonas en que se divide la recta real al marcar x = –1 y x = 3.



- En $(-\infty,-1)$ tomamos x = –2 y la derivada vale $f'(-2)=\frac{2+3}{(-2+1)^3}=-1<0$ La función decrece.
- En $(-1,3)$ tomamos x = 0 y la derivada vale $f'(0)=\frac{0+3}{(0+1)^3}=3>0$ La función crece.
- En $(3,+\infty)$ tomamos x = 4 y la derivada vale $f'(4)=\frac{-4+3}{(4+1)^3}=\frac{-1}{125}<0$ La función decrece.

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y crece en $(-1,3)$.

c)

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x-2}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2-4}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2}{(x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{-4}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2\right]_1^3 - \frac{4}{2}\int_1^3 (x+1)^{-2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2\right]_1^3 + \left[2(x+1)^{-1}\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1}\right]_1^3 = \left[\frac{1}{2}\ln(3+1)^2 + \frac{2}{3+1}\right] - \left[\frac{1}{2}\ln(1+1)^2 + \frac{2}{1+1}\right] =$$

$$= \ln 4 + \frac{1}{2} - \ln 2 - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{0{,}1931}$$

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

X = Número de mensajes sin faltas de ortografía. Se trata de una binomial de parámetros p = 0,75 y n = 20. X = B(20, 0.75).

a) Nos piden calcular $P(X=10)$.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}0,75^{10}\cdot 0,25^{10}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}0,75^{10}\cdot 0,25^{10}=$$

$$=184756\cdot 0,75^{10}\cdot 0,25^{10}=\boxed{0,0099}$$

b) Nos piden calcular $P(X=20)$.

$$P(X=20)=\binom{20}{20}0,75^{20}\cdot 0,25^{0}=0,75^{10}=\boxed{0,0032}$$

c) Que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía es lo mismo que 2 mensajes o menos no tengan faltas de ortografía.

Nos piden calcular $P(X\le 2)$.

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\binom{20}{0}\cdot 0,75^{0}\cdot 0,25^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,75^{1}\cdot 0,25^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0,75^{2}\cdot 0,25^{18}=$$

$$=0,25^{20}+20\cdot 0,75\cdot 0,25^{19}+\frac{20\cdot 19}{2}\cdot 0,75^{2}\cdot 0,25^{18}=\boxed{0,00000000161}$$

Prácticamente imposible.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(*1,5 *puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(*1,5 *puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

2. *(*1,5 *puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(2,1,1)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) *(*1 *punto*) Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\begin{cases} -x+y+2z-4=0 \\ x+2y+z-5=0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(*1.5 *puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) *(*1.5 *puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

encuentre la matriz X, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX+B=A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k:

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & k\\ k & k & 1\end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r:\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=3\end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx+y+nz=4$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1.5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(*1,5 *puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto*) Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

4. *(1,5 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) *(0,75 puntos*) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(*1,5 *puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(*1,5 *puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

a) Es un sistema de ecuaciones con la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos su rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8+8+18-6-16-12 = 0$$

Por lo que su rango no es 3. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-8 = -4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Como la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ el rango también es 2.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Nº de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado, determinamos la expresión de sus infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+4y+3z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+4y+3z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 1ª = Ecuación 2ª + Ecuación 3ª} \\ \text{Eliminamos ecuación 1ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-y-z \\ x+3y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -y-z+3y+2z=0 \Rightarrow 2y+z=0 \Rightarrow \boxed{z=-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-y+2y=y}$$

Las soluciones del sistema son: $x=t;\ y=t;\ z=-2t$, siendo $t\in\mathbb{R}$.

b) Sabemos que $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=4$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 2ª columna}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & k & x+5 \\ 2 & k & y+5 \\ 2 & k & z+5 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 2ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix}+0=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 3ª columna}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3a & 5 \\ 2 & 3b & 5 \\ 2 & 3c & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 3ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix}+0=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común} \\ \text{3 en 2ª columna}\end{matrix}\right\}=$$

$$=3\begin{vmatrix} 2 & a & x \\ 2 & b & y \\ 2 & c & z \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común} \\ \text{2 en 1ª columna}\end{matrix}\right\}=3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Determinante de A =} \\ \text{= Determinante de } A^T\end{matrix}\right\}=$$

$$=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=6\cdot|A|=6\cdot 4=\boxed{24}$$

2. *(1,5 puntos)*
a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(2,1,1)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.
b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s* siguientes:

$$r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\x+2y+z-5=0\end{cases}$$

a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=1+0+4-0-4-2=-1\Rightarrow \boxed{Volumen=1\,u^2}$$

b) Pasamos la ecuación de la recta *s* a paramétricas para obtener un punto y un vector de esta recta.

$$s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\x+2y+z-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+2z-4\\x+2y+z-5=0\end{cases}\Rightarrow y+2z-4+2y+z-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+3z-9=0\Rightarrow y+z-3=0\Rightarrow \boxed{y=3-z}\Rightarrow \boxed{x=3-z+2z-4=-1+z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=-1+t\\y=3-t\\z=t\end{cases}$$

La recta *s* tiene como vector director $\vec{v_s}=(1,-1,1)$ y pasa por el punto $P_s(-1,3,0)$

La recta $r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1}$ tiene como vector director $\vec{v_r}=(4,6,1)$ y pasa por el punto $Q_r(-1,0,-2)$.

Las rectas son paralelas o se cortan o se cruzan.
Las rectas no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_r}=(4,6,1)\\\vec{v_s}=(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{4}{1}\neq\frac{6}{-1}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow r \text{ y } s \text{ no son paralelas}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{v_r}=(4,6,1)$, $\vec{v_s}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{Q_rP_s}$.

$$\left.\begin{matrix}P_s(-1,3,0)\\Q_r(-1,0,-2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{Q_rP_s}=(-1,3,0)-(-1,0,-2)=(0,3,2)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{Q_rP_s}=(0,3,2)\\\vec{v_r}=(4,6,1)\\\vec{v_s}=(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{Q_rP_s},\vec{v_r},\vec{v_s}\right]=\begin{vmatrix}0&3&2\\4&6&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0+3-8-12-12-0=-29\neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas *r* y *s* se cruzan (tienen dirección distinta y no se coinciden en ningún punto)

3. *(4 puntos)*
a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.
a.2.) *(*1.5 *puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
b) *(*1.5 *puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

a.1.) Asíntota vertical. $x=a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$ **.**

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\frac{1^2-3+3}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-3x+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-3x+3-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

$y=x-2$ es asíntota oblicua de la función.

a.2.) Utilizamos la derivada primer para obtener la variación de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(x-1)-1\cdot(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-\cancel{3x}+3-x^2+\cancel{3x}-3}{(x-1)^2}$$

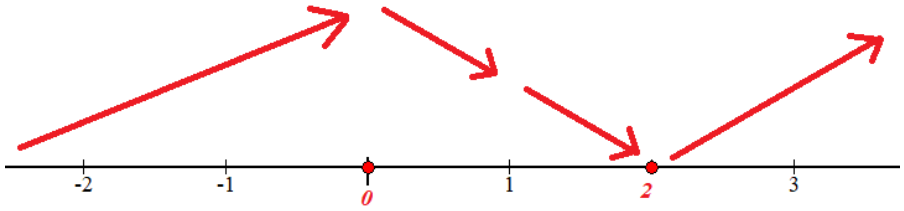
$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ o\\ x=2\end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x = 1$ excluido del dominio.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{(-1)^2-2(-1)}{(-1-1)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$
- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\dfrac{0.5^2-1}{(0.5-1)^2}=\dfrac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(0,1)$
- En $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=\dfrac{1.5^2-3}{(1.5-1)^2}=\dfrac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(1,2)$
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{3^2-6}{(3-1)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,2)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 0$. Como $f(0)=\dfrac{0^2-0+3}{0-1}=-3$ las coordenadas del máximo son (0, –3).

La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$. Como $f(2)=\dfrac{2^2-6+3}{2-1}=1$ las coordenadas del mínimo son (2, 1).

b) Descomponemos la fracción $\dfrac{9}{x^2+x-2}$ en fracciones simples.

$$x^2+x-2=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1\\ \dfrac{-1-3}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

$$\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 9=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 9=A(0)+B(1+2)\to 9=3B\to B=3\\ x=-2\to 9=A(-2-1)+B(0)\to 9=-3A\Rightarrow A=-3\end{cases}$$

Tenemos que $\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{-3}{x+2}+\frac{3}{x-1}$.

Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}dx=\int \frac{-3}{x+2}+\frac{3}{x-1}dx=$$

$$=-3\int \frac{1}{x+2}dx+3\int \frac{1}{x-1}dx=\boxed{-3\ln|x+2|+3\ln|x-1|+K}$$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).
a) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.
b) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Si llamamos X = Nº de veces que sale número par en 10 lanzamientos de un dado equilibrado.
Sea A el suceso "sale número par en el lanzamiento de un dado" y $\overline{A}$ su suceso contrario "sale impar al lanzar el dado".
Se tiene: $P(A) = p = 0.5; P(\overline{A}) = q = 0.5$
Se trata de una distribución binomial con parámetros n = 10 y p = 0.5. X = B(10, 0.5)

a) Debemos calcular el valor de $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.5^{10} \cdot 0.5^{0} = 0.5^{10} = \boxed{\frac{1}{1024}}$$

b) Debemos calcular el valor de $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.5^{3} \cdot 0.5^{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0.5^{10} = \frac{120}{1024} = \boxed{\frac{15}{128}}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*
a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

encuentre la matriz *X*, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX+B=A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz *C* siguiente según los diferentes valores del parámetro *k*:

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&k\\k&k&1\end{pmatrix}$$

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX+B=A^2\Rightarrow AX=A^2-B\Rightarrow X=A^{-1}A^2-A^{-1}B=A^{-1}AA-A^{-1}B\Rightarrow\left\{A^{-1}A=Id\right\}\Rightarrow$$
$$X=A-A^{-1}B$$

Comprobamos que existe la inversa de A y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0+0+0-0-1-0=-1\neq 0\rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A$$

Sustituimos el valor de las matrices en la ecuación matricial y obtenemos X.

$$X=A-A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}}$$

b) El rango de C es 3 o menor. Vemos cuando se anula su determinante.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 4 + k^2 + 12k - 6k - 4 - 2k^2 = -k^2 + 6k$$

$$|C| = 0 \Rightarrow -k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(-k+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ o \\ k = 6 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ *y* $k \neq 6$

En este caso el determinante de C es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 2ª son proporcionales.

Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de C es 2.

CASO 3. $k = 6$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 36 = -34 \neq 0$.

El rango de C es 2.

Resumiendo: El rango de C es 3 si $k \neq 0$ *y* $k \neq 6$ y el rango es 2 si $k = 0$ o $k = 6$.

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r:\begin{cases}x+y+z=2\\2x+3y+z=3\end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx+y+nz=4$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r:\begin{cases}x+y+z=2\\2x+3y+z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=2-x-y\\2x+3y+z=3\end{cases}\Rightarrow 2x+3y+2-x-y=3\Rightarrow x+2y=1\Rightarrow \boxed{x=1-2y}\Rightarrow$$

$$z=2-(1-2y)-y=2-1+2y-y\Rightarrow \boxed{z=1+y}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=1+t\end{cases}, \text{siendo } t\in\mathbb{R}}$$

Si la recta está contenida en el plano el punto P(1,0,1) que pertenece a la recta debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{array}{l}P(1,0,1)\in\pi\\ \pi: mx+y+nz=4\end{array}\right\}\Rightarrow m+0+n=4\Rightarrow \boxed{m+n=4}$$

Además, el vector director de la recta $\vec{v_r}=(-2,1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(m,1,n)$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(-2,1,1)(m,1,n)=0\Rightarrow -2m+1+n=0\Rightarrow \boxed{2m-n=1}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}2m-n=1\\ m+n=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\\ 3m=5\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{m=\frac{5}{3}}\Rightarrow \frac{5}{3}+n=4\Rightarrow \boxed{n=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}}$$

Los valores buscados son $m=\frac{5}{3};\ n=\frac{7}{3}$.

3. *(4 puntos)*
a) *(1.5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto)* Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

a) Calculamos el límite pedido.

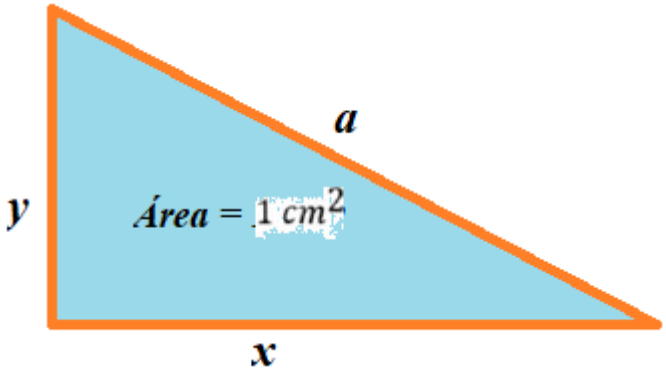
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3}+x^2+x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=1^{+\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación }(n^o\ e)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x-2-\cancel{x^2}}{x^2}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{2x-2}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-6+2x^3-2x^2}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}}=\boxed{e^2}$$

b) Consideramos un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y catetos "x" e "y".



Como el área es 1 entonces $área = 1 = \frac{x\cdot y}{2} \Rightarrow x\cdot y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$.

Además, por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 = x^2 + y^2$. Unimos las dos condiciones y tenemos la longitud de la hipotenusa en función del valor del cateto "x".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{x} \\ a^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}=\frac{x^4+4}{x^2} \Rightarrow a(x)=\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^4+4}}{x}$$

Buscamos el máximo de esta función *a(x)*.

$$a(x)=\frac{\sqrt{x^4+4}}{x} \Rightarrow a'(x)=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+4}}\cdot x-\sqrt{x^4+4}}{x^2}=\frac{\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+4}}-\sqrt{x^4+4}}{x^2}=\frac{\frac{2x^4-\left(\sqrt{x^4+4}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2}$$

$$a'(x)=\frac{2x^4-\left(x^4+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+4}}=\frac{2x^4-x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}=\frac{x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}$$

$$a'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}=0 \Rightarrow x^4-4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

De los dos puntos críticos obtenidos solo consideramos el valor positivo $x=\sqrt{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=\sqrt{2}$.

- En $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $a'(1)=\frac{1^4-4}{1^2\sqrt{1^4+4}}=-\frac{3}{\sqrt{5}}<0$. La función decrece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.
- En $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $a'(2)=\frac{2^4-4}{2^2\sqrt{2^4+4}}=\frac{12}{4\sqrt{20}}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

La función presenta un mínimo en $x=\sqrt{2}$.

El valor mínimo de la hipotenusa es $a\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^4+4}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$ y el del otro cateto es $y=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

El triángulo rectángulo de área 1 cm^2 con longitud de hipotenusa mínima tiene las medidas: Hipotenusa de 2 cm y los catetos son iguales y de longitud $\sqrt{2}$ cm.

c) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2+x=x+4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

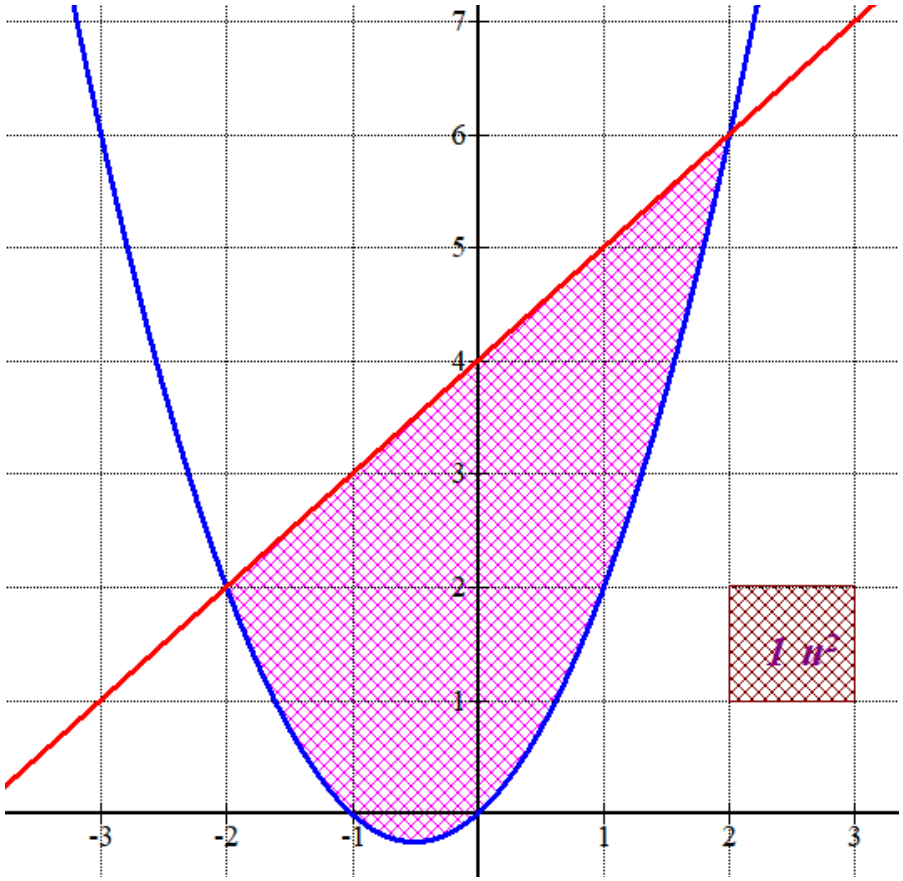
El área encerrada entre las gráficas de las funciones es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia entre las dos funciones de *x = –2* hasta *x = 2*:

$$\int_{-2}^{2} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-2}^{2} x^2+x-(x+4)\,dx=\int_{-2}^{2} x^2-4dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-8\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}+8\right]=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-16=-\frac{32}{3}$$

$$Área=\left|-\frac{32}{3}\right|=\boxed{\frac{32}{3}\approx 10.66\,u^2}$$

No pide dibujar el recinto, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución



4. *(1,5 puntos)*
a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?
b) *(0,75 puntos*) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

a) Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	**2**		**10**
No estudian ruso			
	12		**20**

Completamos la tabla

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	**2**	**8**	**10**
No estudian ruso	**10**	**0**	**10**
	12	**8**	**20**

Hay 10 alumnos que practican ruso y de ellos solo 2 practican deporte, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{2}{10}=0.2$ ¡¡¡¡No era necesaria la tabla de contingencia!!!

b) Se trata de una situación dicotómica (hace blanco / no hace blanco) que da lugar a una distribución binomial.
En nuestro caso, se repite la experiencia 12 veces ($n = 12$), la probabilidad de hacer blanco (éxito) es $p = 0.8$ y la del suceso contrario o fracaso es $q = 0.2$.

X es la variable que cuenta el número de blancos. X = B(12, 0.8)

Nos piden calcular $P(X \geq 10)$.

$$P(X \geq 10) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$$

$$= \binom{12}{10} 0.8^{10} \cdot 0.2^{2} + \binom{12}{11} 0.8^{11} \cdot 0.2^{1} + \binom{12}{12} 0.8^{12} \cdot 0.2^{0} =$$

$$= \frac{12 \cdot 11}{2} 0.8^{10} \cdot 0.2^{2} + \frac{12}{1} 0.8^{11} \cdot 0.2 + 0.8^{12} =$$

$$= 66 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^{2} + 12 \cdot 0.8^{11} \cdot 0.2 + 0.8^{12} = \boxed{0.5583}$$

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+mz &= m \\ mx+(m-1)y+z &= 2 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m = 1$.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto CD.

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 3y-2z+4=0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$$

4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) *(*1,5 *puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A-kI$$

tenga inversa, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.

b) *(*1,5 *puntos)* Encuentre la matriz *X* que verifica que:

$$(A-3I)X=2I$$

siendo *I* la matriz identidad de orden 3 y *A* la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi: 2ax+y+az=4$ y la recta:

$$r:\begin{cases}2x+y+z=2\\ -x+y+2z=3\end{cases}$$

a) *(0,75 puntos*) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) *(0,75 puntos*) Para *a* = 2, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto *P*(0,1, 0).

3. *(4 puntos)*

a) *(*2 *puntos)* Determine los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para que la función:

$$f(x)=a(x-1)^3+bx+c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto x = 2 tenga un máximo relativo.

b) *(*2 *puntos*) Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría *A*; el 25 % a la categoría *B* y el resto a la categoría *C*. Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría *A* un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

a) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

b) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=m \\ mx+(m-1)y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m* = 1.
c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ m & m-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de *m*.
En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m-1+1+m^2-m(m-1)-m-1=$$

$$=m-\cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{m^2}-\cancel{m^2}+\cancel{m}-\cancel{m}-1=m-1$$

El determinante se anula cuando $m-1=0\Rightarrow m=1$. Tenemos que estudiar por separado dos situaciones distintas.

CASO 1. $m\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. Rango(A) = Rango(A/B) = Nº incógnitas = 3.
El **sistema es compatible determinado** (Con una única solución).

CASO 2. $m=1$

La matriz queda: $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo.

.

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

$$m = 1 \Rightarrow A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como la columna 1ª y 3ª son iguales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por lo que el rango de A/B no es 3. Su rango es igual que el de la matriz A y es 2.

Como Rango de A = 2 = Rango de A/B $<$ 3 = Nº incógnitas entonces **el sistema es compatible indeterminado** (Con infinitas soluciones)

b) Para *m = 1* el sistema es compatible indeterminado y queda:

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, como la ecuación 1ª y la 3ª son iguales el sistema queda $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\}$.

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ \boxed{x=2-z} \end{array}\right\} \Rightarrow 2-z+y+z=1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

La solución es $x = 2-t;\ y=-1;\ z=t;\ siendo\ t \in \mathbb{R}$

c) Obtengamos la expresión de la matriz CD.

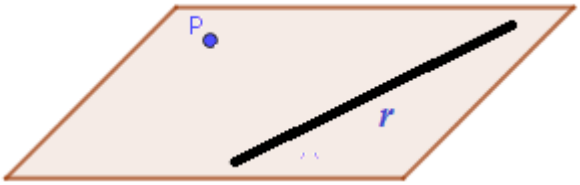
$$CD = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que esta matriz tiene la 3ª fila que es nula y la 2ª fila que es la 1ª multiplicada por –1, por lo que solo hay una fila linealmente independiente y el rango de CD es 1.

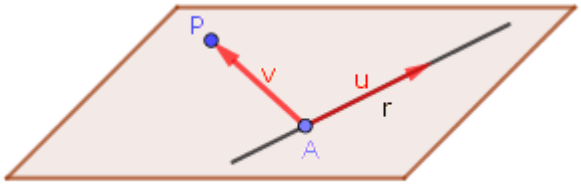
2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}$$

Nos piden hallar la ecuación del plano del dibujo.



Para ello determinamos un vector director y un punto A de la recta.
A partir de ello hallamos el vector $\vec{v}=\overrightarrow{AP}$ que une el punto A y el P(0, 0, 0).



$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=2x-2}\\3y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow 3(2x-2)-2z+4=0\Rightarrow 6x-6-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-2z-2=0\Rightarrow 3x-z-1=0\Rightarrow\boxed{z=3x-1}\Rightarrow r:\begin{cases}x=t\\y=-2+2t\\z=-1+3t\end{cases}$$

Por lo que un vector director de la recta es $\vec{u}=(1,2,3)$ y un punto A de la recta es $A(0,-2,-1)$.

El vector $\vec{v}=\overrightarrow{AP}$ tendrá coordenadas $\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,0,0)-(0,-2,-1)=(0,2,1)$

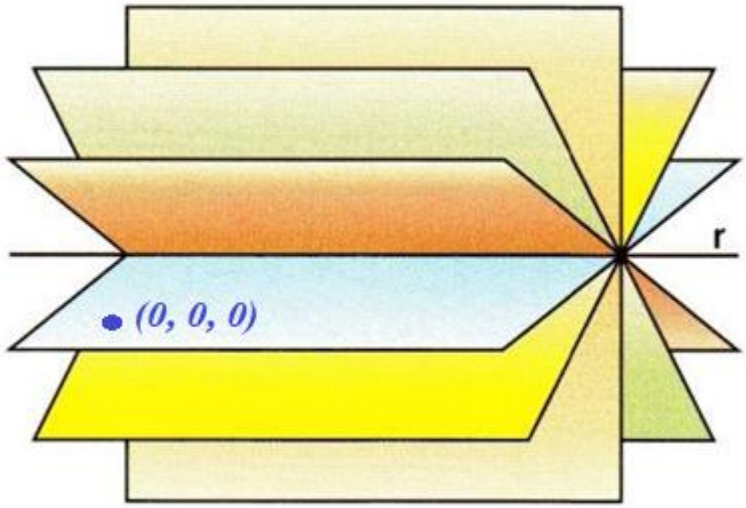
El plano pedido es el que pasa por P(0, 0, 0) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,2,1)$. Obtenemos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,2,3)\\\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,2,1)\\P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&1\\x-0&y-0&z-0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2z+2x-6x-y=0\Rightarrow\boxed{\pi:-4x-y+2z=0}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

La ecuación del haz de planos (conjunto de los planos que contienen a una recta) es:

$$2x-y-2+\lambda(3y-2z+4)=0$$



Seleccionemos de entre todos ellos el que pasa por el punto (0, 0, 0):

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y-2+\lambda\left(3y-2z+4\right)=0\\ \left(0,0,0\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 0-0-2+\lambda\left(3\cdot 0-2\cdot 0+4\right)=0\Rightarrow -2+4\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+2\lambda=0\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$$

Luego el plano buscado es:

$$\left.\begin{array}{r}\pi: 2x-y-2+\lambda\left(3y-2z+4\right)=0\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-y-2+\frac{1}{2}\left(3y-2z+4\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-2y-4+3y-2z+4=0\Rightarrow \boxed{\pi: 4x+y-2z=0}$$

3. *(4 puntos)*
a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.
a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$$

a.1.) Se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen al denominador. El denominador es una función irracional pero como $x^2+1>0$ para todo valor de x tenemos que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene, pues el dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

$y=-1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

a.2.) Utilizamos la derivada primera.

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x^2-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

Para comprobar si es máximo o mínimo estudiamos el cambio de signo de la derivada primera antes y después de *x = 1*.

- En $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{1-0}{\left(0^2+1\right)\sqrt{0^2+1}}=1>0$, La función crece en $(-\infty,1)$
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-2}{\left(2^2+1\right)\sqrt{2^2+1}}=-\frac{1}{5\sqrt{5}}<0$, La función decrece en $(1,+\infty)$

Por lo que la función presenta un máximo relativo en *x = 1*.

a.3.) La recta tangente a la función *f(x)* en el punto *x* = 2 tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

Calculamos el valor de la función y de la derivada en *x = 2* y lo reemplazamos en la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\frac{2+1}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\\ f'(2)=-\frac{1}{5\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{25}\\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}(x-2)\Rightarrow y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25}+\frac{3\sqrt{5}}{5}\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25}+\frac{15\sqrt{5}}{25}\Rightarrow\boxed{y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{17\sqrt{5}}{25}}$$

b) Realizamos la división del radicando y calculamos la integral.

$$\left.\begin{array}{rl} x^2-3x+3 & \big|\underline{x-1}\\ -x^2+x & x-2\\ \hline -2x+3 & \\ +2x-2 & \\ \hline 1 & \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x^2-3x+3}{x-1}=x-2+\frac{1}{x-1}$$

$$\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx=\int x-2+\frac{1}{x-1}dx=\int xdx-\int 2dx+\int\frac{1}{x-1}dx=\boxed{\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+K}$$

4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.
a) *(*0,75 *puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?
b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Le gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	
Le gusta el fútbol	**30**		**80**
No le gusta el fútbol			
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Le gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	
Le gusta el fútbol	**30**	**50**	**80**
No le gusta el fútbol	**10**	**10**	**20**
	40	**60**	**100**

Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P\left(\text{Le guste alguno de los dos deportes}\right)=\frac{30+50+10}{100}=\boxed{0.9}$$

OTRA FORMA DE HACERLO
Si llamamos *F* al suceso "Le gusta el fútbol" y *B* = "Le gusta el balonmano" tenemos que las probabilidades que nos proporcionan en el problema son: *P(F) = 0.80*; *P(B) = 0.40*; $P(B\cap F)=0.30$.

Nos piden calcular *P(B∪F)*. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(B\cup F)=P\left(B\right)+P\left(F\right)-P\left(B\cap F\right)=0.80+0.40-0.30=\boxed{0.90}$$

b) Si llamamos X a la variable que cuenta el número de personas a las que les gusta el fútbol tras la elección de 10 personas (con reemplazamiento) esta es una variable binomial de parámetros $n=10$ y *p = 0.8*. *X = B(10, 0.8)*

Nos piden calcular la probabilidad *P(X = 3)*.

$$P\left(X=3\right)=\binom{10}{3}0.8^3\cdot 0.2^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}0.8^3\cdot 0.2^7=120\cdot 0.8^3\cdot 0.2^7=0.0008$$

La probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol tiene un valor de 0.0008.

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) *(*1,5 *puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A-kI$$

tenga inversa, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.

b) *(*1,5 *puntos)* Encuentre la matriz *X* que verifica que:

$$(A-3I)\,X=2I$$

siendo *I* la matriz identidad de orden 3 y *A* la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

a) Hallamos la expresión de la matriz $A-kI$ **.**

$$A-kI=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k & 0 & 1\\ 0 & -k & 0\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$|A-kI|=\begin{vmatrix}3-k & 0 & 1\\ 0 & -k & 0\\ 1 & 0 & 3-k\end{vmatrix}=(3-k)(-k)(3-k)+k=-k(3-k)^2+k=-k\left(9+k^2-6k\right)+k=$$

$$=-9k-k^3+6k^2+k=-k^3+6k^2-8k=k\left(-k^2+6k-8\right)$$

$$|A-kI|=0\Rightarrow k\left(-k^2+6k-8\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ -k^2+6k-8=0\Rightarrow k=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)(-8)}}{2(-1)}=\dfrac{-6\pm\sqrt{4}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{-2}=2\\ \dfrac{-6-2}{-2}=4\end{cases}\end{cases}$$

El determinante se anula para *k = 0*, *k* = 2 y *k = 4*.

Existe la inversa para cualquier valor de *k* distinto de 0, 2 y 4.

b) La matriz $A-3I$ de la ecuación matricial $(A-3I)\,X=2I$ tiene inversa, pues *k = 3*.
Calculamos su inversa.

$$A-3I=\begin{pmatrix}3-3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left|A-3I\right|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$\left(A-3I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A-3I\right)^{T}}{\left|A-3I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A-3I\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$\left(A-3I\right)X=2I\Rightarrow X=\left(A-3I\right)^{-1}2I=2\left(A-3I\right)^{-1}$$

$$\boxed{X=2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & -2/3 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi : 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos*) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.

b) *(0,75 puntos*) Para $a = 2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0,1, 0)$.

a) La recta y el plano pueden ser secantes (se cortan en un punto), paralelos (no tienen puntos comunes) o la recta puede estar contenida en el plano (todos los puntos de la recta pertenecen al plano).

Si consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones que definen a la recta y la ecuación del plano, el sistema de tres ecuaciones así formado puede ser compatible determinado (recta y plano secantes), incompatible (recta y plano paralelos) o compatible indeterminado (recta contenida en el plano).

Por lo que el problema se reduce a discutir el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2ax + y + az = 4 \\ r : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2ax + y + az = 4 \\ 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4a - 1 + 2a + a - 4 - 2a = 5a - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Consideramos dos situaciones diferentes.

CASO 1. Si $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ también es 3 e igual que el número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución que será el punto de corte de recta y plano.

Si $a \neq 1$ la recta y el plano son secantes.

CASO 2. Si $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la columna y fila 1ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ estudiamos si su rango es 3, para ello consideramos el menor que resulta de quitar la columna 1ª →

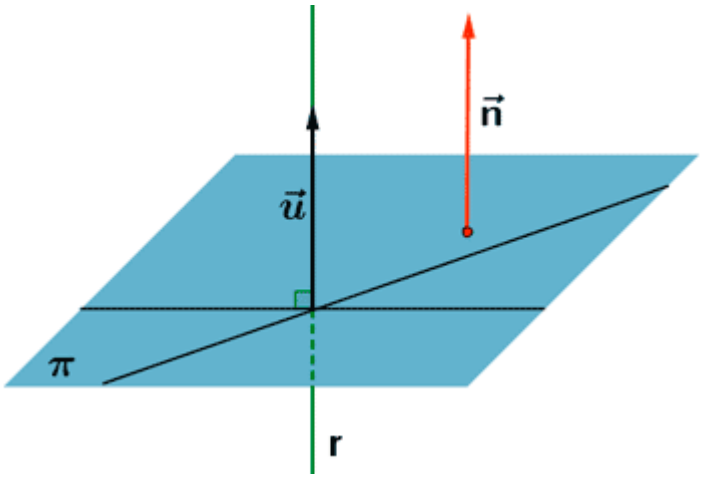
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2+8-4-3-4=13-11=2\neq 0$. El rango de A/B es 3.

El rango de la matriz ampliada y la de coeficientes son distintos y el sistema no tiene solución, por lo que recta y plano no se cortan en ningún punto y son paralelos.

Si $a=1$ la recta y el plano son paralelos.

Resumiendo: Si $a\neq 1$ la recta y el plano son secantes y Si $a=1$ la recta y el plano son paralelos.

b) Para a = 2 el plano tiene ecuación $\pi: 4x+y+2z=4$. Nos piden hallar una recta perpendicular al plano por lo que su vector director es el normal del plano $\vec{v_r}=\vec{n}=(4,1,2)$.



Además pasa por el punto $P(0,1,0)$ por lo que la ecuación de la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(4,1,2) \\ P(0,1,0)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}}$$

3. *(4 puntos)*
a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para que la función:

$$f(x)=a(x-1)^3+bx+c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)
a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.
a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.
b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

a) La función pasa por el punto (1, 1).

$$\left.\begin{array}{l}Pasa\ por\ (1,1)\to f(1)=1\\ f(x)=a(x-1)^3+bx+c\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=a(1-1)^3+b\cdot 1+c=1\Rightarrow \boxed{b+c=1}$$

En el punto (1, 1) su tangente tiene pendiente 2. Esto implica que la derivada de la función en $x=1$ vale 2.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=a(x-1)^3+bx+c\Rightarrow f'(x)=3a(x-1)^2+b\\ f'(1)=2\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1)=3a(1-1)^2+b=2\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenida tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}b+c=1\\ b=2\end{array}\right\}\Rightarrow 2+c=1\Rightarrow \boxed{c=-1}$$

La función queda $f(x)=a(x-1)^3+2x-1$

Si en el punto $x = 2$ tiene un máximo relativo significa que su derivada primera se anula para $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=3a(x-1)^2+2\\ f'(2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3a(2-1)^2+2=0\Rightarrow 3a+2=0\Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}}$$

Los valores buscados son $a=-\frac{2}{3}$, $b=2$ y $c=-1$

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}-1\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-3x+2-\cancel{x^2}+2x}{x^2-2x}\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x^2-2x}\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x+6x^2-2}{x^3-2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{x^3}}=\boxed{e^{-3}}$$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría *A*; el 25 % a la categoría *B* y el resto a la categoría *C*. Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría *A* un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

a) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

b) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

Primera forma de resolverlo

Pasamos los valores relativos a absolutos.
Supongamos que hay 100 trabajadores. En este supuesto habrían 30 de categoría A, 25 de categoría B y el resto (100 – 25 – 30 = 45) de la categoría C.
De los 30 de categoría A el 5 % habla inglés, es decir, 30 · 0.05 = 1.5 trabajadores de categoría A hablan inglés.
De los 25 de categoría B el 20 % habla inglés, es decir, 25 · 0.20 = 5 trabajadores de categoría B hablan inglés.
De los 45 de categoría A el 60 % habla inglés, es decir, 45 · 0.60 = 27 trabajadores de categoría C hablan inglés.

Aunque algún dato sea decimal nos sirve para el cálculo de probabilidades.
Si considerásemos 200 trabajadores se evitaría el valor de medio trabajador.
Seguimos con el razonamiento utilizando los valores decimales obtenidos hasta ahora.

Tenemos un total de 1.5 + 5 + 27 = 33.5 trabajadores de los 100 que hablan inglés.

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\textit{Hable inglés}) = \frac{33.5}{100} = \boxed{0.335}$$

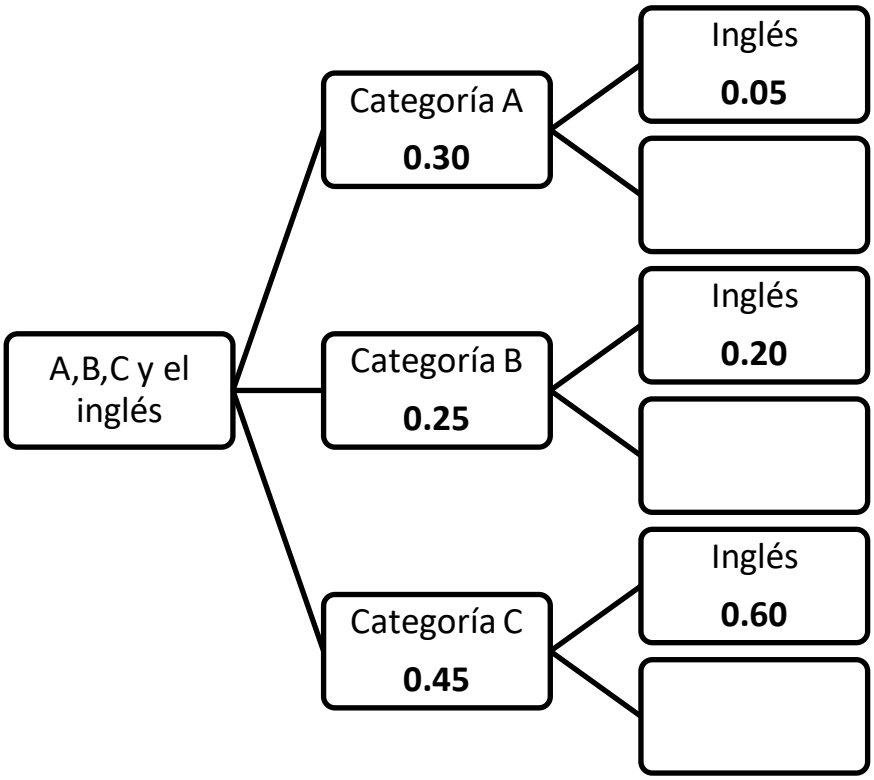
La probabilidad de que hable inglés es de 0.335.

b) Si se ha elegido un trabajador que habla inglés es uno de los 33.5 que lo hablan. De ellos 27 pertenecen a la categoría C, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P\left(\textit{Categoría C / Habla inglés}\right) = \frac{27}{33.5} \approx \boxed{0.806}$$

La probabilidad de que pertenezca a la categoría *C* sabiendo que habla inglés tiene un valor aproximado de 0.806.

Segunda forma de resolverlo
Llamamos *A* = "Ser trabajador de categoría A", *B* = "Ser trabajador de categoría B", *C* = "Ser trabajador de categoría C" y, por último, *I* = "Hablar inglés".
Atendiendo a los datos del diagrama tenemos: P(A) = 0.3; P(B) = 0.25; P(C) = 0.45; P(I/A) = 0.05; P(I/B) = 0.20; P(I/C) = 0.60.
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(I)=P(A)P(I/A)+P(B)P(I/B)+P(C)P(I/C)=$$

$$=0.30\cdot 0.05+0.25\cdot 0.20+0.45\cdot 0.60=0.335$$

La probabilidad de que hable inglés es de 0.335.

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I)=\frac{P(C\cap I)}{P(I)}=\frac{P(C)P(I/C)}{P(I)}=\frac{0.45\cdot 0.60}{0.335}\approx \boxed{0.806}$$

La probabilidad de que pertenezca a la categoría *C* sabiendo que habla inglés tiene un valor aproximado de 0.806.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x+4y+2z&=0\\ 2x+3y+z&=0\\ 4x-y+m^2z&=m-1 \end{aligned}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: x-2y+z=1 \qquad \pi': \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real **k**.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando **k** = 3.

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.
¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
b) *(1 punto*) Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.
c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto P:(2,1,−1).

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi: 2x-3y+z=4$$
$$\pi': \quad y+z=0$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}1/e^{x} & si\ \ x\le 0\\ a\cos(x)+b & si\ \ 0<x\le\pi\\ sen(x)-ax & si\ \ \pi<x\end{cases}$$

b) *(*1,5 *puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$5x+4y+2z=0$$
$$2x+3y+z=0$$
$$4x-y+m^2z=m-1$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & m^2\end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & m^2 & m-1\end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A. Para ello calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & m^2\end{vmatrix}=15m^2+16-4-24-8m^2+5=7m^2-7$$

$$|A|=0\Rightarrow 7m^2-7=0\Rightarrow m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m\neq\pm 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. También el rango de A/B es 3, así como el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=15-8=7\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$, por lo que su rango es 2, igual que el de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Igual que en el caso 2. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$. Comprobamos si su rango es 3 calculando el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª →

$\begin{vmatrix}4 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-8+12=4\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 < 3 = Rango de A/B. El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $m\neq\pm 1$ el sistema es compatible determinado, si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=-1$ el sistema es incompatible.

2. *(2 puntos)*
a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x-2y+z=1 \qquad \pi' : \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real **k**.
b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando **k** = 3.

a) El vector normal del plano $\pi : x-2y+z=1$ es $\vec{n}=(1,-2,1)$.

El vector normal del plano $\pi' : \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$ es el producto vectorial de sus vectores directores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(1,k,-1)$. Obtenemos sus coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{v}=(1,k,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n'}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2k\vec{k}-\vec{k}+2\vec{j}=-\vec{i}+2\vec{j}+(2k-1)\vec{k}=(-1,2,2k-1)$$

Si los vectores normales de los planos tienen coordenadas proporcionales los planos serán paralelos o coincidentes. En caso contrario serán secantes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,-2,1) \\ \vec{n'}=(-1,2,2k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow -1=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow 1-2k=1 \Rightarrow 2k=0 \Rightarrow k=0$$

Si $k \neq 0$ las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos son secantes.

Si $k = 0$ las coordenadas de los vectores normales son proporcionales y los planos son coincidentes o paralelos. Vemos cuál de estas situaciones se cumple comprobando si el punto P(0, 0, 1) perteneciente al plano π´ pertenece al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x-2y+z=1 \\ ¿P(0,\ 0,\ 1)\in\pi\,? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0-2\cdot 0+1=1?$$ ¡¡Se cumple!!

El punto P pertenece al plano π y por tanto los planos son coincidentes.

Resumiendo: Si $k \neq 0$ los planos son secantes y si $k = 0$ los planos son coincidentes.

b) Para $k = 3$ los planos son secantes. Averiguamos el ángulo que forman estudiando el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,-2,1) \\ \vec{n'}=(-1,2,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n'})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}=\frac{(1,-2,1)(-1,2,5)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+5^2}}$$

$$\cos(\pi,\pi')=\frac{-1-4+5}{\sqrt{6}\sqrt{30}}=\frac{0}{\sqrt{180}}=0 \Rightarrow \boxed{(\pi,\pi')=90^o}$$

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

a) $f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$ es una función racional. Su dominio está formado por todos los valores reales que no anulen el denominador. Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{-1\}$

b) **Asíntotas verticales**. $x=a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{(1+x)}=\frac{(-1)^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

No tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

$y=x-1$ es asíntota oblicua de la función.

c) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(1+x)-1\cdot x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

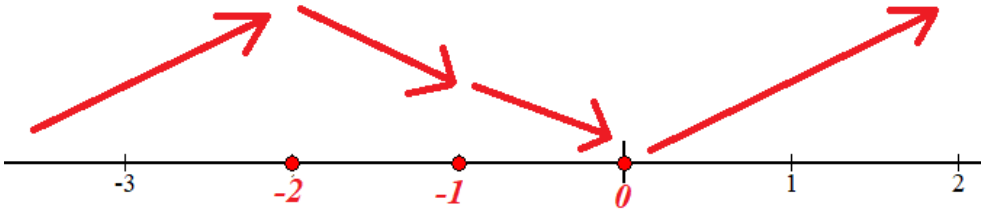
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}=0\Rightarrow 2x+x^2=0\Rightarrow x(2+x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ o\\ x=-2\end{cases}$$

Tenemos dos valores críticos de la función: $x = 0$ y $x = -2$.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores e incluimos $x=-1$ por estar excluido del dominio.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{-6+(-3)^2}{(1-3)^2}=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

- En $(-2,-1)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale $f'(-1.5)=\dfrac{-3+(-1.5)^2}{(1-1.5)^2}=\dfrac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(-2,-1)$.
- En $(-1,0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5)=\dfrac{-1+(-0.5)^2}{(1-0.5)^2}=\dfrac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(-1,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{2+1^2}{(1+1)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



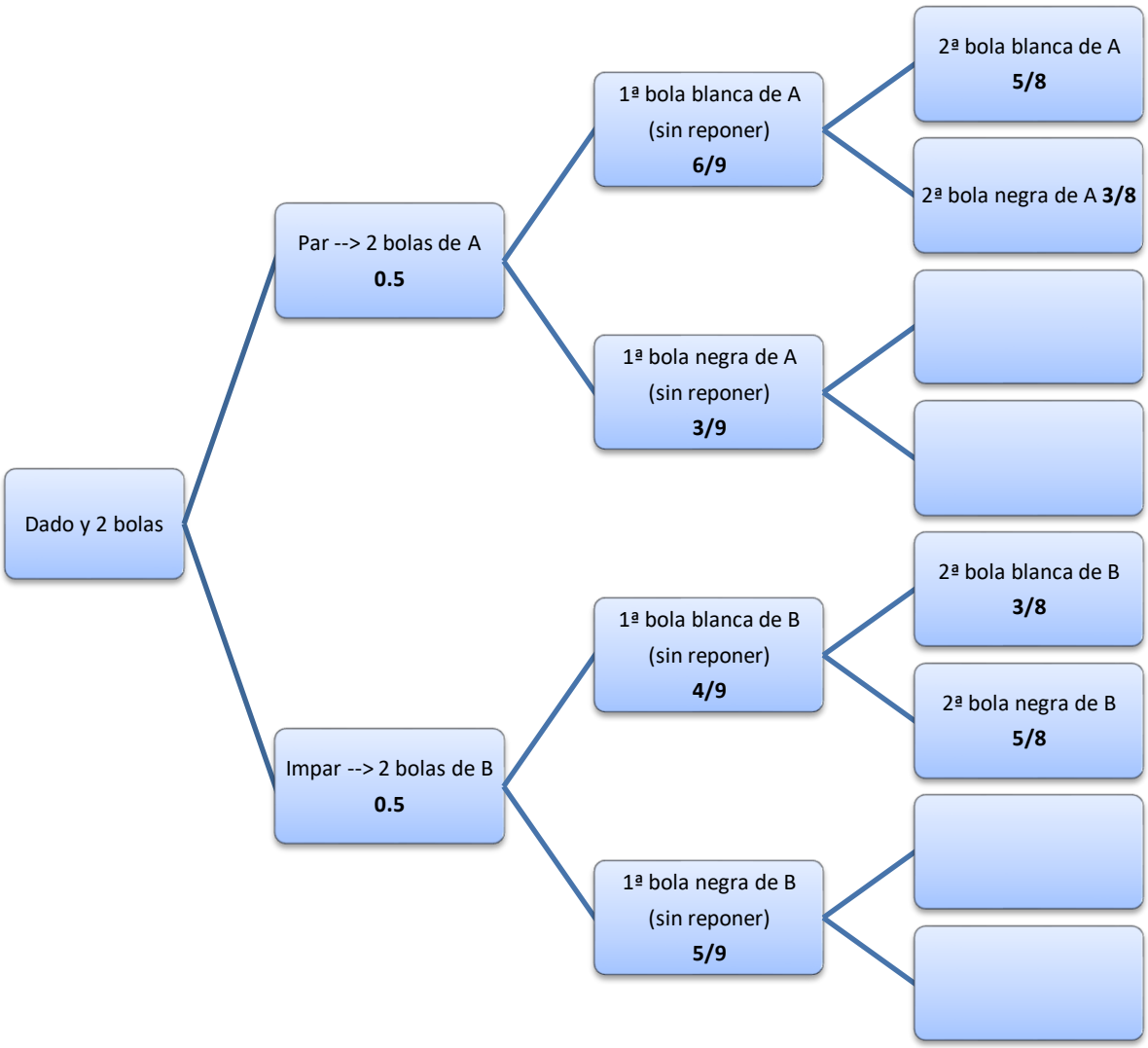
La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,-1)\cup(-1,0)$.

La función presenta un máximo en $x = -2$. Como $f(-2)=\dfrac{(-2)^2}{(1-2)}=\dfrac{4}{-1}=-4$, el máximo relativo tiene coordenadas (–2, –4).

La función presenta un mínimo en $x = 0$. Como $f(0)=\dfrac{0^2}{(1+0)}=0$, el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos P = "sale par al lanzar el dado", I = "sale impar al lanzar el dado", B_1 = "la primera bola extraída es blanca", N_1 = "la primera bola extraída es negra", B_2 = "la segunda bola es blanca y N_2 = "la segunda bola es negra".

El suceso del cual nos piden calcular su probabilidad solo ocurre en dos de las ramas del árbol.

$$P\left(\text{Sacar exactamente 2 bolas blancas}\right)=$$

$$=P(P)P(B_1/P)P(B_2/B_1)+P(I)P(B_1/I)P(B_2/B_1)=$$

$$=0.5\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+0.5\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{72}+\frac{6}{72}=\frac{21}{72}=\boxed{\frac{7}{24}\approx 0.2917}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
b) *(1 punto)* Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.
c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{vmatrix}=-k^2-4k$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2-4k=0\Rightarrow -k(k+4)=0\Rightarrow \begin{cases}k=0\\ o\\ k=-4\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando k es distinto de 0 y de –4.

b) Si $k = 2$ la matriz tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4-8=-12\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 8 & -2\end{pmatrix}}{-12}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 8 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 8\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}-4 & 0 & -8\\ 8 & -6 & -8\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}}$$

c) Hemos visto que cuando k es distinto de 0 y de –4 el determinante de A es no nulo, por lo que su rango es 3. Veamos que ocurre cuando k vale 0 o cuando vale –4.

Si $k = 0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Su determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2? Busco un menor de orden 2 con determinante no nulo. Como tiene la 2ª columna con todo ceros considero el menor de orden 2 que resulta de quitar esta 2ª columna y la fila 3ª → $\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$. Su rango es 2.

Si $k = -4$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & -4 & -10\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Su determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2? Busco un menor de orden 2 con determinante no nulo. Considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y la fila 3ª → $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-4\neq 0$. Su rango es 2.

Resumiendo: Si k es distinto de 0 y de –4 el rango de A es 3, si $k = 0$ o $k = -4$ su rango es 2.

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto P:(2,1,−1).

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi: 2x-3y+z=4$$
$$\pi': \quad y+z=0$$

a) Como la recta r está dada como la intersección de 2 planos otra recta s paralela a ella será la intersección de dos planos paralelos a los dados.

$$r:\left.\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}2x-3y+z+k=0\\ y+z+k'=0\end{cases}$$

Como la recta s pasa por el punto P:(2,1,−1) debe cumplir las ecuaciones de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}s:\begin{cases}2x-3y+z+k=0\\ y+z+k'=0\end{cases}\\ P(2,1,-1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}4-3-1+k=0\\ 1-1+k'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k'=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{s:\begin{cases}2x-3y+z=0\\ y+z=0\end{cases}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Necesitamos un punto y un vector director de la recta r. El punto es el dado, P(2, 2, –1) , y como vector director nos sirve cualquiera de los vectores directores de la recta r.

Para obtenerlo hacemos el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen la recta.

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{v_r}=(2,-3,1)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3i+2k-2j-i=-4i-2j+2k$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=\vec{v_r}=(-4,-2,2)\\ P(2,1,-1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-1}{-2}\rightarrow -2x+4=-4y+4\rightarrow -2x+4y=0\rightarrow x-2y=0\\ \dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}\rightarrow 2y-2=-2z-2\rightarrow 2y+2z=0\rightarrow y+z=0\end{cases}$$

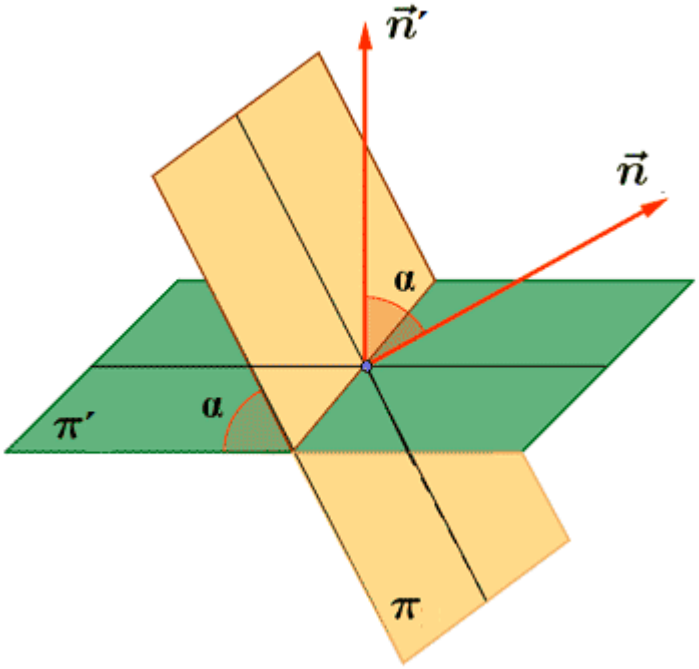
$$\boxed{s:\begin{cases}x-2y=0\\ y+z=0\end{cases}}$$

b) El ángulo que forman los planos es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-3y+z=4 \Rightarrow \vec{n}=(2,-3,1)\\ \pi': \quad y+z=0 \Rightarrow \vec{n'}=(0,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\pi,\pi') = \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}$$

$$\cos(\pi,\pi') = \frac{(2,-3,1)(0,1,1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{0-3+1}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{28}} \Rightarrow (\pi,\pi') = 112^o$$

Como el ángulo obtenido es obtuso considero que el ángulo que forman los planos es el ángulo agudo de 180º – 112º = 68º.



3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}1/e^x & si\ \ x\le 0\\ a\cos(x)+b & si\ \ 0<x\le\pi\\ sen(x)-ax & si\ \ \pi<x\end{cases}$$

b) *(*1,5 *puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

a) Las tres funciones que definen la función son continuas en los intervalos en que están definidas. Debemos exigir entonces que la función sea continua en $x = 0$ y en $x = \pi$, y para que esto ocurra debe cumplirse:

Continua en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1/e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1/e^x=1/e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a\cos(x)+b=a\cos(0)+b=a+b\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1$$

Continua en $x = \pi$.

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=a\cos(\pi)+b=-a+b\\ \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-} a\cos(x)+b=-a+b\\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} sen(x)-ax=sen(\pi)-a\cdot\pi=-\pi a\\ f(\pi)=\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=-\pi a$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1\\ -a+b=-\pi a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} b=1-a\\ -a+b=-\pi a\end{array}\right\}\Rightarrow -a+1-a=-\pi a\Rightarrow 1=-\pi a+2a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=a(-\pi+2)\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{-\pi+2}}\Rightarrow b=1-\frac{1}{-\pi+2}=\frac{-\pi+2-1}{-\pi+2}\Rightarrow \boxed{b=\frac{-\pi+1}{-\pi+2}}$$

Los valores buscados son $a=\dfrac{1}{-\pi+2}$ y $b=\dfrac{-\pi+1}{-\pi+2}$.

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x^2 (\ln x)^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = (\ln x)^2 \to du = 2 \ln x \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \to v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \int \frac{x^3}{3} 2 \ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \to v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \right] = \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2}{9} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2}{9} \frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} + K}$$

c) $\lim_{x \to 1} \left(e^{(x-1)} - 1 \right)^{(x-1)} = \left(e^{(1-1)} - 1 \right)^{(1-1)} = 0^0 = \text{Indeterminación}$

Utilizamos el logaritmo neperiano para transformar la expresión del límite en un producto.

$$L = \lim_{x \to 1} \left(e^{(x-1)} - 1 \right)^{(x-1)} \Rightarrow \ln L = \ln \left(\lim_{x \to 1} \left(e^{(x-1)} - 1 \right)^{(x-1)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\ln \left(e^{(x-1)} - 1 \right)^{(x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left((x-1) \ln \left(e^{(x-1)} - 1 \right) \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln \left(e^{(x-1)} - 1 \right)}{\dfrac{1}{x-1}} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\dfrac{e^{(x-1)}}{e^{(x-1)} - 1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)} (x-1)^2}{1 - e^{(x-1)}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)} (x-1)^2 + e^{(x-1)} 2(x-1)}{-e^{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)} \left(x^2 + 1 - 2x \right) + e^{(x-1)} (2x-2)}{-e^{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)} \left(x^2 + 1 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 2 \right)}{-e^{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)} \left(x^2 - 1 \right)}{-e^{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^2 - 1 \right)}{-1} = \lim_{x \to 1} \left(1 - x^2 \right) = 1 - 1^2 = \boxed{0}$$

Ahora despejamos en la expresión $\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$. Tenemos que $\lim_{x \to 1} \left(e^{(x-1)} - 1 \right)^{(x-1)} = 1$.

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener todos los datos relativos al problema.

	Aprueban inglés	No aprueban inglés	
Aprueban matemáticas	**30**		**60**
No aprueban matemáticas			
	50		**100**

Completamos la tabla.

	Aprueban inglés	No aprueban inglés	
Aprueban matemáticas	**30**	**30**	**60**
No aprueban matemáticas	**20**	**20**	**40**
	50	**50**	**100**

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{Apruebe alguna de las materias}\right)=\frac{\text{Nº alumnos que aprueban alguna de las materias}}{\text{Nº total de alumnos}}=$$

$$=\frac{30+30+20}{100}=\frac{80}{100}=\boxed{0.8}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\textit{Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés}\right)=$$

$$=\frac{\text{Nº de alumnos que aprobando inglés también aprueban matemáticas}}{\text{Nº de alumnos que aprueban inglés}}=\frac{30}{50}=\boxed{0.6}$$

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ \lambda x+ \quad & z = 0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto P(0, 0, 0) a cada una de las dos rectas anteriores.

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función de variable real *x* siguiente:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función *f(x)*.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función *f(x)* en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+kx-7} - \sqrt{x^2-2x+5} = \frac{5}{3}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

OPCIÓN B

1. *(2 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por |A| el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si |B| = 1, calcule el determinante de A, es decir: |A|.

a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de *x* para los que se cumple que |B| = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M´ representa la matriz traspuesta de M.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea "*m*" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "*m*":

$$\pi: mx-6y+2z=2 \qquad \pi': \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda \\ z=2-2\lambda+\mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*
a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ \lambda x+ \quad & z=0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda=1$

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$. La matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda & \lambda+1 \end{array}\right)$$

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de λ.
En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix}=0+1-\lambda^2-1-\lambda=-\lambda^2-\lambda$$

$$|A|=0 \Rightarrow -\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ o \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq -1$
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, así como el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\lambda=0$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que las fila 1ª y 3ª son iguales.
Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$. Como la columna 1ª y 2ª son iguales considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna → $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1-1=0$. El rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $\lambda=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son proporcionales. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\-1&0&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)$. Observamos que la columna 2ª y 4ª son iguales. Considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna → $\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&-1&0\end{vmatrix}=1-1=0$. El rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda=1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix};\quad A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&1&0\\1&2&1&2\end{array}\right)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{2-2}{1-1-2}=\frac{0}{-2}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{-2}{-2}=1\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-2}=0$$

La solución es *x = 0*; *y = 1*; *z = 0*

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=t\end{cases} \qquad s:\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto P(0, 0, 0) a cada una de las dos rectas anteriores.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s:\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=y\\-2z=-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}y\\z=\frac{3}{2}y\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=t\\z=\frac{3}{2}t\end{cases}$$

Un vector director de la recta *s* es $\overrightarrow{u_s}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$. Para evitar trabajar con fracciones tomamos como vector director el vector $\overrightarrow{v_s}=2\overrightarrow{u_s}=2\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)=(1,2,3)$.

Un vector director de la recta *r* es $\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)$.

¿Son paralelas o coincidentes? Comprobamos que las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)\\\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{3}{1}$$

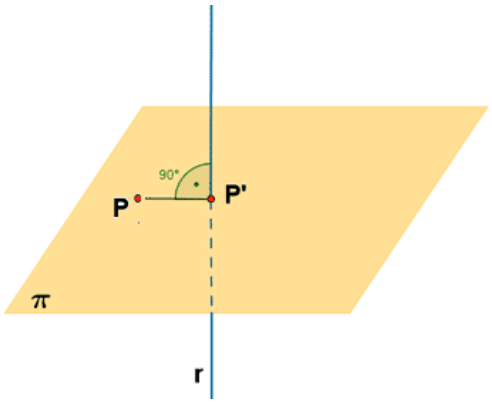
Las rectas no son paralelas ni coincidentes. Deben cortarse o cruzarse. Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$, siendo P_r un punto de la recta *r* y Q_s un punto de *s*.

$$\left.\begin{matrix}P_r(1,1,0)\\Q_s(0,0,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,0,0)-(1,1,0)=(-1,-1,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)\\\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,-1,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\-1&-1&0\end{vmatrix}=0-3-1+2-0+3=1\neq0$$

Al ser su producto mixto no nulo sabemos que las rectas se cruzan.

b) Para calcular la distancia desde el punto P a la recta *r* calcularemos el plano π perpendicular a *r* que pasa por P. Obtenemos el punto P´ de corte de plano y recta y la distancia de P a *r* será la distancia de P a P´.



Obtenemos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z+k=0\\ P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+0+0+k=0\Rightarrow k=0\Rightarrow \pi: x+y+z=0$$

Obtenemos las coordenadas del punto P´.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z=0\\ r:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+t+1+t+t=0\Rightarrow 3t=-2\Rightarrow t=\frac{-2}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ z=\frac{-2}{3}\end{cases}\Rightarrow P'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

Calculamos la distancia de P a *r*.

$$\left.\begin{array}{l}P'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)\\ P(0,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PP'}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}u}$$

La distancia del punto P a la recta *r* es $\frac{\sqrt{6}}{3}u$

El punto P(0, 0, 0) es el punto Q_s utilizado en el apartado a) y pertenece a la recta *s*.
Por ello la distancia de P a *s* es 0.

3. *(4 puntos)*
a) Considere la función de variable real *x* siguiente:

$$f(x)=x\left(\ln(x)\right)^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función *f(x)*.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función *f(x)* en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\frac{5}{3}$$

a.1) Se trata del producto de dos funciones continuas cuyo dominio es el dominio de la función logaritmo neperiano. Dominio de *f(x)* es $(0,+\infty)$

a.2) Utilizamos la derivada.

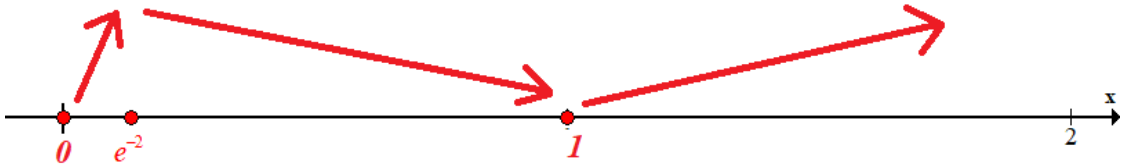
$$f(x)=x\left(\ln(x)\right)^2\Rightarrow f'(x)=\left(\ln(x)\right)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\left(\ln(x)\right)^2+2\ln x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\left(\ln(x)\right)^2+2\ln x=0\Rightarrow\ln x\left(\ln x+2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\ln x=0\to x=e^0=1\\ \ln x+2=0\to\ln x=-2\to x=e^{-2}\end{cases}$$

Existen dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(0,e^{-2})$ tomamos $x=e^{-3}$ y la derivada vale
  $f'(e^{-3})=\left(\ln(e^{-3})\right)^2+2\ln e^{-3}=9-6=3>0$. La función crece en $(0,e^{-2})$.
- En $(e^{-2},1)$ tomamos $x=e^{-1}$ y la derivada vale
  $f'(e^{-1})=\left(\ln(e^{-1})\right)^2+2\ln e^{-1}=1-2=-1<0$. La función decrece en $(e^{-2},1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x=e$ y la derivada vale $f'(x)=\left(\ln(e)\right)^2+2\ln e=1+2=3>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,e^{-2})\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(e^{-2},1)$.

a.3) Observando el esquema anterior la función presenta un máximo relativo en $x=e^{-2}$, como $f(e^{-2})=e^{-2}\left(\ln(e^{-2})\right)^2=e^{-2}(-2)^2=4e^{-2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $(e^{-2},4e^{-2})$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$, como $f(1)=1\cdot\left(\ln(1)\right)^2=(0)^2=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, 0).

b) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+5}\right)^2}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx-7-\left(x^2-2x+5\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+kx-7-\cancel{x^2}+2x-5}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(k+2)x}{x}-\frac{12}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{kx}{x^2}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k+2-\frac{12}{x}}{\sqrt{1+\frac{k}{x}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=$$

$$=\frac{k+2-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{k+2}{2}$$

Lo igualamos a $\frac{5}{3}$ y obtenemos el valor de *k*.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{k+2}{2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 3k+6=10\Rightarrow 3k=4\Rightarrow\boxed{k=\frac{4}{3}}$$

El valor buscado es $k=\frac{4}{3}$.

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:
a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.
b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Juegan al ajedrez	No juegan al ajedrez	
Chicos	4		8
Chicas	3		10
			18

Completamos la tabla.

	Juegan al ajedrez	No juegan al ajedrez	
Chicos	4	4	8
Chicas	3	7	10
	7	11	18

a) Llamamos C al suceso "Elegir chica", por lo que $\overline{C}$ es el suceso "Elegir chico". Llamamos A al suceso "juega al ajedrez".
Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P\left(C \cap \overline{A}\right) = \frac{\text{Nº de chicas que no juegan al ajedrez}}{\text{Nº total de alumnos}} = \boxed{\frac{7}{18} \approx 0.3889}$$

La probabilidad de que la persona elegida al azar sea chica y no juegue al ajedrez es de 0.3889.

b) Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{A}/\overline{C}\right) = \frac{\text{Nº de chicos que no juegan al ajedrez}}{\text{Nº de chicos}} = \frac{4}{8} = \boxed{0.5}$$

La probabilidad de que la persona elegida al azar o juegue al ajedrez sabiendo que es chico es de 0.5.

OPCIÓN B

1. *(2 puntos)*
a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por |A| el determinante de la matriz.
a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si |B| = 1, calcule el determinante de A, es decir: |A|.
a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de *x* para los que se cumple que |B| = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.
b) *(1 punto*) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M´ representa la matriz traspuesta de M.

a.1) $|B|=1\Rightarrow\left|\left(\frac{1}{2}\right)A\right|=1\Rightarrow\left\{\begin{matrix} A \text{ es una matriz 3x3} \\ \left|\frac{1}{2}A\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|A| \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3|A|=1\Rightarrow\frac{1}{8}|A|=1\Rightarrow\boxed{|A|=8}$

a.2)

$$B=\left(\frac{1}{2}\right)A\Rightarrow|B|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{8}\left(4x+0+(x-1)^2-4-2x+2\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(4x+x^2+1-2x-4-2x+2\right)=\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)$$

$$|B|=1\Rightarrow\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)=1\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{9}=\pm3}$$

b) Sea $M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$.

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 1+x^2=1 \\ xy=0 \\ y^2=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ xy=0 \\ y=\sqrt{4}=\pm2 \end{cases}\Rightarrow\boxed{x=0;\ y=\pm2}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ o\ M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Sea "*m*" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "*m*":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

a) Los dos planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.
Obtenemos los vectores normales de ambos planos.

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (m, -6, 2)$$

$$\pi' : \left.\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{u} = (1, -1, -2) \\ \vec{v} = (1, 0, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{n'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + k - j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n'} = -i - 3j + k = (-1, -3, 1)$$

Para que sean paralelos o coincidentes sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = (m, -6, 2) \\ \vec{n'} = (-1, -3, 1) \\ \pi \parallel \pi' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1} \Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2$$

Si $m = -2$ los planos son paralelos o coincidentes.
Tomamos un punto del plano π´. Por ejemplo P(0, 1, 2).
Comprobamos si pertenece o no al plano π.

$$\left.\begin{matrix} \pi : -2x - 6y + 2z = 2 \\ P(0, 1, 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿\, 0 - 6 + 4 = 0 \,?$$ ¡¡No se cumple!!

Como el punto P del plano π´ no pertenece al plano π los planos son paralelos.

Si $m \neq -2$ los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales y no tienen la misma dirección, por lo que los planos son secantes.

Resumiendo: Si $m = -2$ los planos son paralelos y si $m \neq -2$ los planos son secantes.

b) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.
Hallamos un vector director de cada recta.

$$r:\begin{cases} x \quad +z=1 \\ \quad y \quad =0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1-z \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)$$

$$s:\begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-2y-z=0 \\ y=-1-x-3z \end{cases}\Rightarrow x-2(-1-x-3z)-z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+2x+6z-z=0\Rightarrow 3x=-2-5z\Rightarrow x=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}z-3z=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}z\Rightarrow s:\begin{cases} x=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t \\ y=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\Rightarrow \overrightarrow{u_s}=\left(-\frac{5}{3},-\frac{4}{3},1\right) \\ z=t \end{cases}$$

Tomamos como vectores directores $\overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=3\overrightarrow{u_s}=(-5,-4,3)$. Hallamos el ángulo que forman estos vectores usando la fórmula del producto escalar.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_r}=(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-5,-4,3) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \cos(r,s)=\cos\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos(r,s)=\frac{(-1,0,1)(-5,-4,3)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{5+3}{\sqrt{2}\sqrt{50}}=0.8\Rightarrow \boxed{\text{ángulo}(r,s)\approx 36^o}$$

3. *(4 puntos)*
a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.
b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

a) Sean x e y los números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24.
Debe cumplirse: $2x+3y=24$.
Despejamos "y" en la ecuación.

$$2x+3y=24 \Rightarrow 3y=24-2x \Rightarrow y=\frac{24-2x}{3}$$

La función a maximizar es $f(x,y)=xy$. Sustituimos el valor de "y".

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=xy \\ y=\dfrac{24-2x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x\frac{24-2x}{3}=\frac{24x-2x^2}{3}=8x-\frac{2}{3}x^2$$

Utilizamos la derivada para obtener el máximo de la función.

$$f(x)=8x-\frac{2}{3}x^2 \Rightarrow f\,'(x)=8-\frac{4}{3}x$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 8-\frac{4}{3}x=0 \Rightarrow \frac{4}{3}x=8 \Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=\frac{24}{4}=6$$

En $x = 6$ hay un punto crítico, sustituimos en la segunda derivada para comprobar que es máximo.

$$f\,'(x)=8-\frac{4}{3}x \Rightarrow f\,''(x)=-\frac{4}{3} \Rightarrow f\,''(6)=-\frac{4}{3}<0$$

En $x = 6$ hay un máximo relativo. El otro número lo obtenemos sustituyendo en $y=\dfrac{24-12}{3}=4$.

Los números buscados son 6 y 4.

b) Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0+1}{1+sen(0)}\right)^{\frac{1}{0^2}}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación}(n^o\ e)=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}-1\right)}=\ldots$$ Calculamos el límite del exponente.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1-1-senx}{1+sen(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x-senx}{1+senx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^2+x^2 senx}=\frac{0}{0}=$$

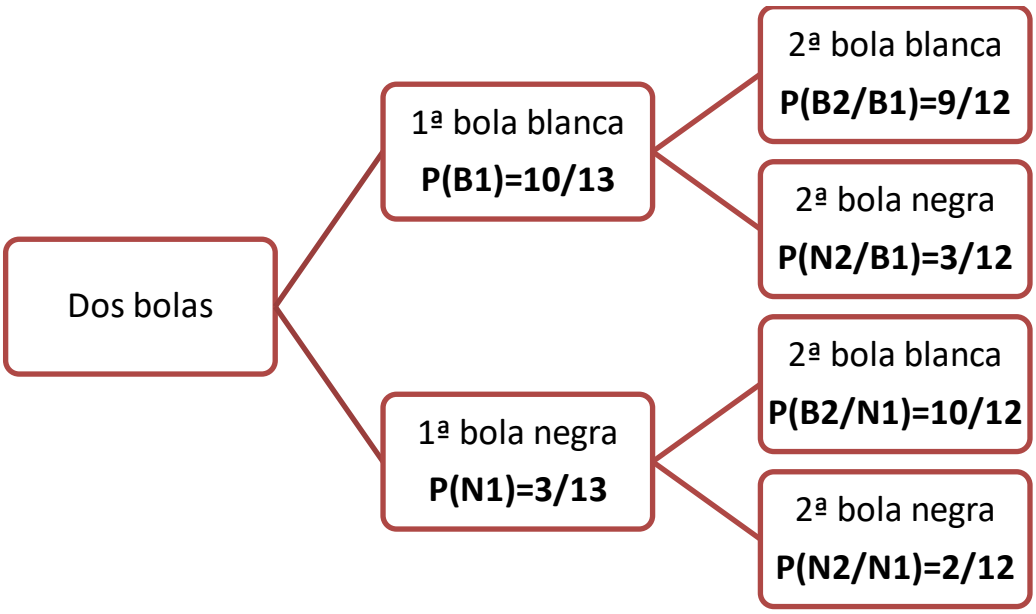
$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x+2xsenx+x^2\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2+2senx+2x\cos x+2x\cos x-x^2 senx}=\frac{0}{2}=0$$

Sustituimos en el límite inicial... $=e^0=\boxed{1}$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?
b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

Realizamos un diagrama de árbol.
Llamamos B_1 al suceso "la primera bola extraída es blanca", N_1 al suceso "la primera bola extraída es negra", B_2 "la segunda bola extraída es blanca" y N_2 "la segunda bola extraída es negra".



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(N_2)=P(B_1)P(N_2/B_1)+P(N_1)P(N_2/N_1)=$$

$$=\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}=\frac{36}{156}=\boxed{\frac{3}{13}\approx 0.23}$$

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra tiene un valor aproximado de 0.23.

b) Nos piden calcular $P(N_1/N_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N_1/N_2)=\frac{P(N_1\cap N_2)}{P(N_2)}=\frac{P(N_1)P(N_2/N_1)}{P(N_2)}=\frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}{\frac{3}{13}}=\boxed{\frac{1}{6}\approx 0.1667}$$

La probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra sabiendo que la segunda bola ha sido negra tiene un valor aproximado de 0.1667.