

Matemáticas II

PAU en Asturias
Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Asturias desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU julio 2026.....	3
PAU junio 2026.....	24
PAU julio 2025.....	45
PAU junio 2025.....	62
EBAU julio 2024.....	79
EBAU junio 2024.....	93
EBAU julio 2023.....	110
EBAU junio 2023.....	126
EBAU julio 2022.....	138
EBAU junio 2022.....	151
EBAU julio 2021.....	166
EBAU junio 2021.....	181
EBAU septiembre 2020.....	194
EBAU julio 2020.....	207
EBAU julio 2019.....	221
EBAU junio 2019.....	236
EBAU julio 2018.....	248
EBAU junio 2018.....	261
EBAU julio 2017.....	277
EBAU junio 2017.....	292



Universidad de
Oviedo

PAU julio 2026

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025-2026

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas.

La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.
- (b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.
- (c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

Pregunta 1. Opción B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1} .
- (b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

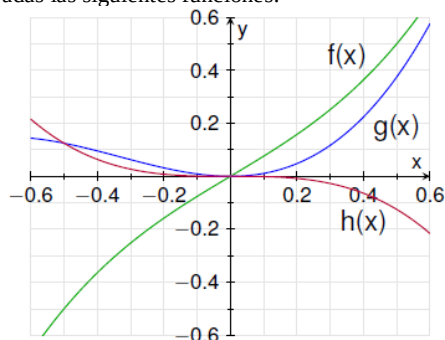
Pregunta 2. Opción A. Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.

(b) **(0.75 puntos)** Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.

(c) **(1 punto)** Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

Pregunta 2. Opción B. Dadas las siguientes funciones:



- (a) (1 punto) Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.
- (b) (1.5 punto) Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

Pregunta 3. Opción A. Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v_0 = 54\text{m/s}$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22\text{m/s}^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v_0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20,06m.

- (a) (1.25 puntos) Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.
- (b) (1.25 puntos) Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20,06m.

Comentado [U1]:

Pregunta 3. Opción B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$, se pide:

- (a) (1.5 puntos) Calcula todas las primitivas de la función $f(x)$. ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?
- (b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte.

Pregunta 4. Opción A. Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

- (a) (0.75 puntos) Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2. ¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?
- (b) (1 punto) Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.
- (c) (0.75 puntos) Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde $Q(3, 3, 3)$.

Pregunta 4. Opción B. Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

Pregunta 5. Opción A. Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Pregunta 5. Opción B. Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos de la población.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.015) = 0.5060$, $F(0.8413) = 0.7999$, $F(0.985) = 0.8377$, $F(1) = 0.8413$, $F(2.17) = 0.985$. Si los valores obtenidos no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas.

La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.
 (b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.
 (c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

(a) Llamamos “ x ”, “ y ” y “ z ” al número de camiones pequeños, medianos y grandes que se utilizan.

“Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones” $\rightarrow x + y + z = 10$.

“Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas. La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas $\rightarrow x + 2y + 3z = m + 9$.

“El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades” $\rightarrow 2x + 3y + (7 - m)z = 22$

$$\text{Reunimos las ecuaciones en un sistema: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = m + 9 \\ 2x + 3y + (7 - m)z = 22 \end{array} \right\}$$

(b) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 - m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & m + 9 \\ 2 & 3 & 7 - m & 22 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones los rangos de A y de A/B deben ser iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El determinante de A debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 - m \end{vmatrix} = 14 - 2m + 6 + 3 - 4 - 7 + m - 9 = -m + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Para $m=3$ el determinante de A es 0, por lo que su rango es menor de 3. Para este valor la

matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 22 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y A/B buscando un

sistema triangular equivalente al dado.

$$A/B = A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 12 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -10 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 22 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -20 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 10}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Para $m=3$ el rango de A y el de A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 10}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ y = 2 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 - 2z + z = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - z = 8 \Rightarrow x = 8 + z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Para $m=3$ el sistema tiene infinitas soluciones que tienen la expresión $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

(c) Para $m=1$ resolvemos el sistema $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\}$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 - y - z \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 - y - z + 2y + 3z = 10 \\ 20 - 2y - 2z + 3y + 6z = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -2z \\ y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2z + 4z = 2 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2 \cdot 1 = -2} \Rightarrow \boxed{x = 10 + 2 - 1 = 11}$$

La solución obtenida significa que son 11 los camiones pequeños, **-2** los medianos y 1 grande.
No tiene sentido la solución pues no puede ser negativo el número de camiones de ningún tipo.

Pregunta 1. Opción B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1} .

(b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

(a) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de A es distinto de cero la matriz es invertible. Hallamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B - C = 0 \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Terminamos de obtener la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(C - B) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+0 & 3-4 & -2-2 \\ -1-6 & 2+0 & -3+6 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &\quad 2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 4 \longrightarrow 2 \times 4 \end{aligned}$$

La matriz solución de la ecuación matricial $AX + B - C = 0$ es $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Pregunta 2. Opción A. Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

(a) (0.75 puntos) Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.

(b) (0.75 puntos) Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.

(c) (1 punto) Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

(a) Calculamos la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3 \Rightarrow h'(x) = -0.8x + 0.09x^2$$

La derivada es la pendiente del tobogán cada x metros en horizontal desde el inicio.

(b) Hallamos los puntos donde la derivada alcanza el valor -2 .

$$h'(x) = -2 \Rightarrow -0.8x + 0.09x^2 = -2 \Rightarrow 0.09x^2 - 0.8x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{0.8 \pm \sqrt{(-0.8)^2 - 4 \cdot 0.09 \cdot 2}}{2 \cdot 0.09} = \frac{0.8 \pm \sqrt{-0.08}}{0.18} = \text{No existe}$$

La pendiente del tobogán no alcanza nunca el valor -2 .

(c) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$h'(x) = 0 \Rightarrow -0.8x + 0.09x^2 = 0 \Rightarrow x(0.09x - 0.8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0.09x - 0.8 = 0 \Rightarrow 0.09x = 0.8 \Rightarrow x = \frac{0.8}{0.09} = \frac{80}{9} \approx 8.8889 \end{cases}$$

Sustituimos los valores de los dos puntos críticos obtenidos en la segunda derivada.

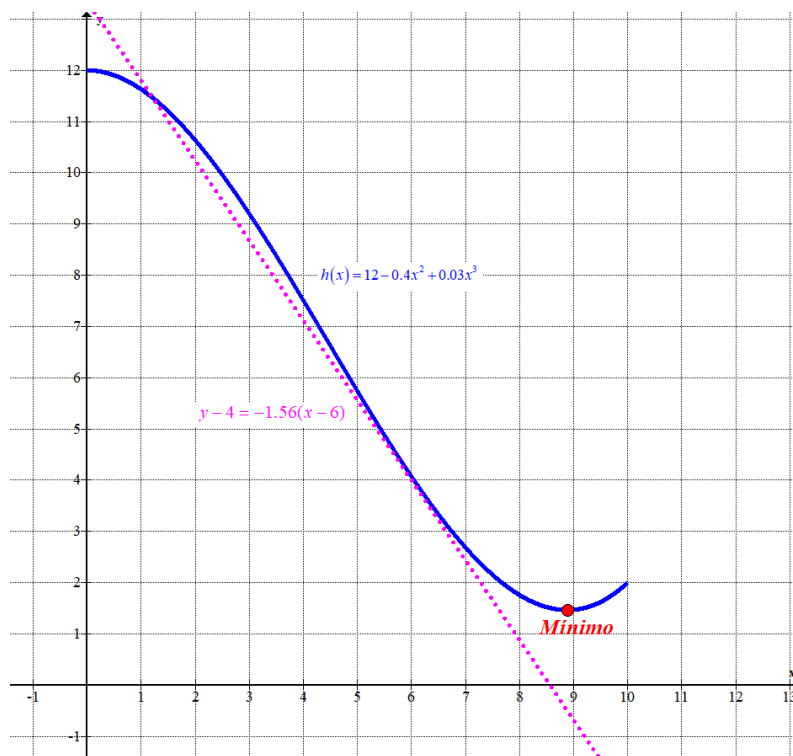
$$h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 \Rightarrow h''(x) = -0.8 + 0.18x \Rightarrow \begin{cases} h''(0) = -0.8 + 0.18 \cdot 0 = -0.8 < 0 \\ h''\left(\frac{80}{9}\right) = -0.8 + 0.18 \cdot \frac{80}{9} = 0.8 > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

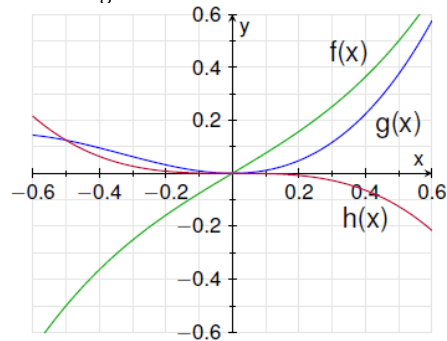
En $x = \frac{80}{9}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{80}{9}$.

Como $h\left(\frac{80}{9}\right) = 12 - 0.4\left(\frac{80}{9}\right)^2 + 0.03\left(\frac{80}{9}\right)^3 = \frac{356}{243} \approx 1.465$, la altura mínima del tobogán es de

1.465 metros y se alcanza a $\frac{80}{9} \approx 8.8889$ metros del inicio del tobogán.



Pregunta 2. Opción B. Dadas las siguientes funciones:



(a) (1 punto) Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.

(b) (1.5 punto) Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

(a) La función $p(x)$ podemos expresarla como $p(x) = x^2 + x^3 = x^2(x+1)$.

$$\left. \begin{array}{l} x > -0.6 \rightarrow x+1 > -0.6+1 = 0.4 > 0 \\ x > -0.6 \rightarrow x^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2(x+1) \geq 0$$

La función $p(x) = x^2 + x^3$ es mayor o igual que cero para valores de x mayores que -0.6 . Esta condición solo la cumple la función $g(x)$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Obtenemos la derivada de la función.

$$p(x) = x^2 + x^3 \Rightarrow p'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$$

Averiguamos cuando la derivada se anula.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow x(2 + 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 2 + 3x = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3} = -0.66} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $p'(-1) = (-1)(2-3) = 1 > 0$.

La función crece en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ tomamos $x = -0.1$ y la derivada vale

$p'(-0.1) = (-0.1)(2 + 3(-0.1)) = -0.17 < 0$. La función decrece en $(-0.66, 0)$.

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $p'(1)=1 \cdot (2+3)=5 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función p decrece en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función $h(x)$ decrece en $(0, +\infty)$. Esta no es la gráfica de la función p .

La función $f(x)$ crece en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Esta no es la gráfica de la función p .

Por eliminación la gráfica de la función p debe ser $g(x)$.

(b) Sabemos que $f(0)=h(0)=0$, pues ambas funciones pasan por el origen de coordenadas $(0, 0)$.

También si observamos cómo evolucionan las funciones en el origen de coordenadas tenemos que en $x=0$ la función $f(x)$ crece por lo que $f'(0) > 0$ y la función $h(x)$ en $x=0$ tiene una recta tangente horizontal, por lo que $h'(0)=0$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(0)}{f(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{f'(x)} = \frac{h'(0)}{f'(0)} = \frac{0}{f'(0)} = \boxed{0}$$

Pregunta 3. Opción A. Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v_0 = 54\text{m/s}$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22\text{m/s}^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v_0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20,06m.

(a) **(1.25 puntos)** Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.

(b) **(1.25 puntos)** Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20,06m.

Comentado [U2]:

(a) Calculamos la integral definida de 0 a 1 de la función velocidad.

$$\int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 54 - 22t dt = [54t - 11t^2]_0^1 = [54 \cdot 1 - 11 \cdot 1^2] - [54 \cdot 0 - 11 \cdot 0^2] = 43$$

La distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo es de 43 metros.

(b) La distancia que recorre la pelota en el primer segundo es de 43 metros, por lo que debe ser menos de 1 segundo el que tarda en recorrer los 20,06 metros.

Hallamos la expresión de la distancia recorrida por la pelota en x segundos.

$$\int_0^x v(t) dt = \int_0^x 54 - 22t dt = [54t - 11t^2]_0^x = [54x - 11x^2] - [54 \cdot 0 - 11 \cdot 0^2] = 54x - 11x^2$$

Averiguamos cuando esa distancia recorrida es de 20,06 metros.

$$54x - 11x^2 = 20.06 \Rightarrow 11x^2 - 54x + 20.06 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 20.06}}{2 \cdot 11} = \frac{135 \pm 4\sqrt{785}}{55} = \begin{cases} \frac{135 + 4\sqrt{785}}{55} \approx 4.49 \\ \frac{135 - 4\sqrt{785}}{55} \approx 0.42 \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos el valor correcto es 0.42 segundos, pues debe ser menos de 1 segundo.

Pregunta 3. Opción B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$, se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula todas las primitivas de la función $f(x)$. ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-3}{2x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{2x+1} dx - \int \frac{3}{2x+1} dx \right] = \frac{1}{2} \left[\int dx - \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{3}{2} \ln|2x+1| \right] = \left[\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1| + K \right] \end{aligned}$$

Una primitiva que pase por (0, 0) debe cumplir que $F(0) = 0$.

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1| + K \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 0 = \frac{0}{2} - \frac{3}{4} \ln|2 \cdot 0 + 1| + K \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4} \ln 1 + K \Rightarrow \boxed{K=0} \\ F(0) = 0 \end{array} \right.$$

La primitiva que pasa por el origen de coordenadas es $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln|2x+1|$.

(b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$.

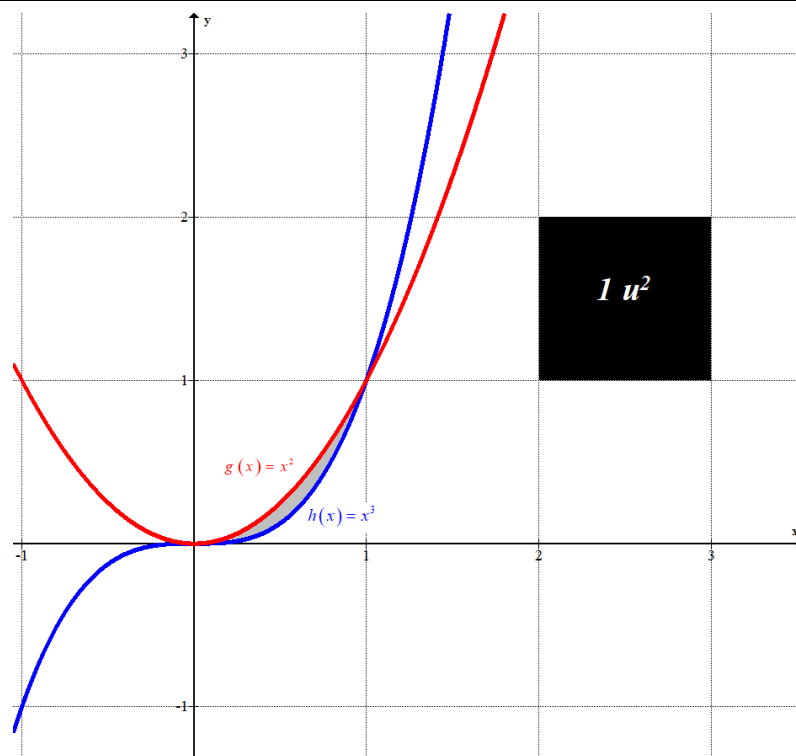
$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ h(x) = x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \end{array} \right.$$

El área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte es el valor absoluto de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

Como $g(0.5) = 0.5^2 = 0.25$ y $h(0.5) = 0.5^3 = 0.125$ tomamos la diferencia $g(x) - h(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 g(x) - h(x) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12} \approx 0.0833 \text{ unidades}} \end{aligned}$$

El área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte vale $\frac{1}{12} \approx 0.0833$ unidades de longitud.



Pregunta 4. Opción A. Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2.
¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?
- (b) **(1 punto)** Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.
- (c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde $Q(3, 3, 3)$.

- (a) El plano π' paralelo al plano π tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

Hallamos la expresión de la distancia del origen al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, \pi') = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{3}$$

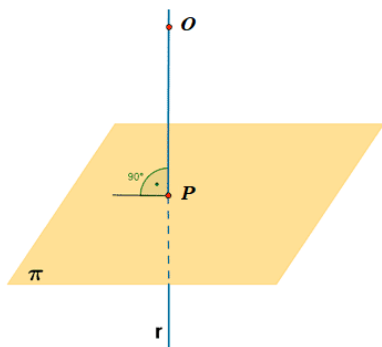
Averiguamos el valor de D para que esta distancia valga 2.

$$d(O, \pi') = 2 \Rightarrow \frac{|D|}{3} = 2 \Rightarrow |D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D = 6 \\ D = -6 \end{cases}$$

Existen dos planos paralelos a π cuya distancia al origen es 2: $\pi' \equiv 2x + 2y + z + 6 = 0$ y

$\pi'' \equiv 2x + 2y + z - 6 = 0$.

- (b) El punto P del plano π que está más próximo al origen O es la proyección ortogonal del punto O en el plano.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que pasa por el origen. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + 2y + z = 5 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, 1) \quad \left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{n} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 5 \Rightarrow 9\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

El punto P del plano π que está más próximo al origen O tiene coordenadas $P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

(c) El área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

$$\begin{matrix} O(0,0,0) \\ P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) \\ Q(3,3,3) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) - (0,0,0) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) \\ \overrightarrow{OQ} = (3,3,3) - (0,0,0) = (3,3,3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10/9 & 10/9 & 5/9 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\right)i - \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\right)j + \left(\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\right)k = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$$

$$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2.36 \text{ u}^2$$

El área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ tiene un valor de $\frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2.36$ unidades cuadradas.

Pregunta 4. Opción B. Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.
 (b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

(a) Hallamos la ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \in \pi \\ B(3, 0, 2) \in \pi \\ C(2, 3, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 0, 2) - (1, 2, 1) = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 3) - (1, 2, 1) = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) + (y-2) + 2(z-1) + 2(z-1) - 4(y-2) - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(x-1) - 3(y-2) + 4(z-1) = 0 \Rightarrow -5x + 5 - 3y + 6 + 4z - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 3y + 4z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x + 3y - 4z - 7 = 0}$$

El plano que pasa por los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: 5x + 3y - 4z - 7 = 0$.

(b) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta e intentamos resolverlo.

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}$$

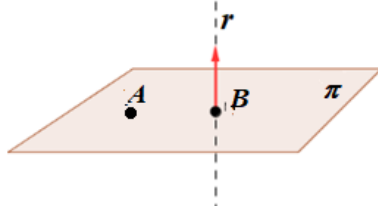
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x + 3y - 4z - 7 = 0 \\ r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5t + 3 + 3t - 16 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow 12t - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

Plano y recta se cortan en el punto $A\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

(c) Hallamos la distancia del punto A a la recta r.

Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que contiene el punto A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r: (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1) \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ A(1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + y - z + D = 0 \\ A(1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 2 = 0}$$

Hallamos el punto B de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y - z - 2 = 0 \\ r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow t + 1 + t - 4 + t - 2 = 0 \Rightarrow 3t - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \\ B\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (1, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$d(A, r) = |\overline{AB}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63u}$$

La distancia del punto A a la recta r tiene un valor de $\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63$ unidades de longitud.

Pregunta 5. Opción A. Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Llamamos R a “la jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando” y V a “vence el partido”.

“Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75% de las ocasiones” $\rightarrow$

$$P(R) = 0.75, P(\bar{R}) = 0.25$$

“Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80% de los partidos” $\rightarrow P(V/R) = 0.80$.

“Cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65% de victorias” $\rightarrow$

$$P(V/\bar{R}) = 0.65.$$

(a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(R)P(V/R) + P(\bar{R})P(V/\bar{R}) = 0.75 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.65 = \boxed{0.7625}$$

La probabilidad de que la jugadora gane un partido es de 0.7625.

(b) Debemos calcular $P(\bar{R}/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/V) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{P(R)P(V/R)}{P(V)} = \frac{0.75 \cdot 0.8}{0.7625} = \boxed{\frac{48}{61} \approx 0.7869}$$

La probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha

ganado es de $\frac{48}{61} \approx 0.7869$.

Pregunta 5. Opción B. Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos de la población.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.015) = 0.5060$, $F(0.8413) = 0.7999$, $F(0.985) = 0.8377$, **$F(1) = 0.8413$** , **$F(2.17) = 0.985$** . Si los valores obtenidos no están entre los expuestos, toma el más cercano.

Consideramos $X =$ “Los niveles de ácido úrico en sangre, en mg/dl, de una población de hombres adultos”. $X = N(5.5, 0.9)$

(a) Nos piden calcular $P(4.3 \leq X \leq 6.1)$.

$$P(4.3 \leq X \leq 6.1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.5}{0.9} \end{array} \right\} = P\left(\frac{4.3 - 5.5}{0.9} \leq Z \leq \frac{6.1 - 5.5}{0.9}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq 0.66) =$$

$$= P(Z \leq 0.66) - P(Z \leq -1.33) = P(Z \leq 0.66) - P(Z \geq 1.33) =$$

$$= P(Z \leq 0.66) - [1 - P(Z \leq 1.33)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Estos valores no están entre} \\ \text{los datos proporcionados.} \\ \text{En la solución oficial han cambiado} \\ \text{la media por 5.2. Supongo que hubo} \\ \text{un error en la redacción del examen} \end{array} \right\} = \text{Cambiamos la media por 5.2 mg/dl}$$

Volvemos a resolver este apartado considerando $X = N(5.2, 0.9)$

$$P(4.3 \leq X \leq 6.1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.2}{0.9} \end{array} \right\} = P\left(\frac{4.3 - 5.2}{0.9} \leq Z \leq \frac{6.1 - 5.2}{0.9}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \{F(1) = 0.8413\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826}$$

(b) Debemos hallar “n” tal que $P(X > n) = 0.015$.

$$P(X > n) = 0.015 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 5.2}{0.9} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{n - 5.2}{0.9}\right) = 0.015 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{n-5.2}{0.9}\right) = 1 - 0.015 = 0.985 \Rightarrow \{F(2.17) = 0.985\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n-5.2}{0.9} = 2.17 \Rightarrow n-5.2 = 1.953 \Rightarrow \boxed{n=7.153}$$

El nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5% de los hombres adultos es de 7.513 mg/dl.



Universidad de
Oviedo

PAU junio 2026

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025-2026

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros.

Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.
- (b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculado” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.
- (c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

Pregunta 1. Opción B. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- (b) **(0.5 puntos)** Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?
- (c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Pregunta 2. Opción A. Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}, t \in [0, 30].$$

- (a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.
- (c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

Pregunta 2. Opción B. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
 (b) **(1.25 puntos)** Si $A=6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
 (c) **(0.5 puntos)** Para $A=6$ ¿es $x=2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?.

Pregunta 3. Opción A. Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$ es una primitiva de f. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular la función f.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcular una función que sea una primitiva de f y tal que en $x=0$ tome el valor 6.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcular el área del recinto encerrado por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=1$.

Pregunta 3. Opción B. Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular una primitiva de la función f.
 (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$.

Pregunta 4. Opción A. Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?
 (b) **(1.25 puntos)** Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

Pregunta 4. Opción B. Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ hacia el punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcular las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcular la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcular el ángulo de giro del móvil.

Pregunta 5. Opción A. En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.
 (b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Pregunta 5. Opción B. Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40kgs el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?

(b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$,
 $F(1.6667) = 0.9520$, $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$..
Si los valores obtenidos no están entre los expuestos debe tomarse el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.
 (b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculado” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.
 (c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

(a) Llamamos “c” al precio de un café, “t” al precio de un té y “z” al precio de un zumo.

“Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros” $\rightarrow c + 2t + 2z = 11$.

“Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros” $\rightarrow c + 3t + 3z = 16$.

“El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta)” $\rightarrow 3c + 3t + pz = 21$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:
$$\left. \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ c + 3t + 3z = 16 \\ 3c + 3t + pz = 21 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & p \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 16 \\ -1 \quad -2 \quad -2 \quad -11 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3 \quad p \quad 21 \\ -3 \quad -6 \quad -6 \quad -33 \\ 0 \quad -3 \quad p-6 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad p-6 \quad -12 \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad 15 \\ 0 \quad 0 \quad p-3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{1 \quad 2 \quad 2}_{A/B} & 11 \\ 0 \quad 1 & 1 & 5 \\ 0 \quad 0 & \underbrace{p-3}_A & 3 \end{array} \right)$$

Tenemos dos situaciones diferentes.

Si $p \neq 3$ el rango de la matriz A es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

Si $p = 3$ la matriz ampliada queda $\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$. El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los

rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

(b) Para $p = 2$ hemos visto que el sistema tiene solución. Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ -z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ \textcolor{red}{z = -3?} \end{array} \right\}$$

El precio de un zumo no puede tener un valor negativo.

La situación planteada no es posible. El cliente tiene razón.

(c) Para $p = 4$ el sistema tiene solución. Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado (a).

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ \boxed{z = 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2 \cdot 3 = 11 \\ t + 3 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t = 5 \\ \boxed{t = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow c + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Le ha cobrado el café a 1 €, el té a 2 € y el zumo a 3 €.

Pregunta 1. Opción B. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(b) **(0.5 puntos)** Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?

(c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

(a) Resolvemos la igualdad $A^2 = I$.

$$\begin{aligned}
 A^2 = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+0-2a & -2+6-4 & 2-8+6 \\ 0+0-4a & 0+9-8 & 0-12+12 \\ -a+0-3a & 2a+6-6 & -2a-8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a & -2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-2a=1 \\ -3a=0 \\ 2a=0 \\ -2a+1=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}
 \end{aligned}$$

La igualdad $A^2 = I$ se cumple para $a=0$.

(b) Si $B^2 = 2I$ tomamos determinantes y tenemos:

$$\begin{aligned}
 B^2 = 2I &\Rightarrow B \cdot B = 2I \Rightarrow |B \cdot B| = |2I| \Rightarrow \begin{cases} I \text{ es } 3 \times 3 \\ |2I| = 2^3 \cdot |I| \end{cases} \Rightarrow |B| \cdot |B| = 8|I| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow |B|^2 = 8 \Rightarrow \boxed{|B| = \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz B debe ser $|B| = \pm 2\sqrt{2}$.

(c) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 8a + 0 + 6a - 0 - 8 = 1 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $a \neq \frac{1}{2}$ el determinante de A vale $1-2a$ que es distinto de cero y el rango de A es 3.

Si $a = \frac{1}{2}$ el determinante de A vale 0 y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1/2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la fila y columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{2}$ el rango de A es 3 y si $a = \frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

Pregunta 2. Opción A. Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}, t \in [0, 30].$$

- (a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.
- (c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

(a) Buscamos t tal que $f(t) = 6.5$.

$$f(t) = 6.5 \Rightarrow \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = 6.5 \Rightarrow 5t^2 + 2t + 5 = 6.5t^2 + 6.5 \Rightarrow 0 = 1.5t^2 - 2t + 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{6} = \text{No Existe}$$

En ningún momento se alcanza el valor de 6.5 euros.

(b) Hallamos los puntos críticos donde se anula la derivada de la función.

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{(10t + 2)(t^2 + 1) - 2t(5t^2 + 2t + 5)}{(t^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{10t^3 + 10t + 2t^2 + 2 - 10t^3 - 4t^2 - 10t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Solo consideramos el valor positivo. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{-2(0.5^2 - 1)}{(0.5^2 + 1)^2} = \frac{24}{25} > 0$.

La función crece en $[0, 1)$.

- En el intervalo $(1, 30]$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2(2^2 - 1)}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-6}{25} < 0$. La

función decrece en $(1, 30]$.

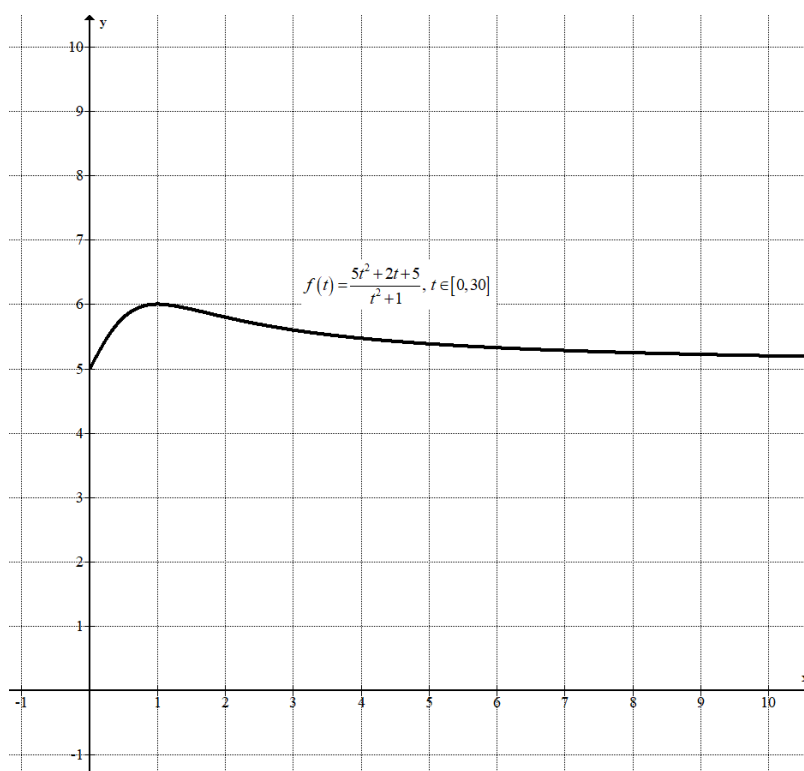
La función crece en $[0,1)$ y decrece en $(1,30]$.

El precio de cada acción sube el primer día y a partir de ese día baja.

(c) Calculamos el límite de la función cuando t crece hasta $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5t^2}{t^2} + \frac{2t}{t^2} + \frac{5}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{5 + \frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{5 + 0 + 0}{1 + 0} = 5$$

El precio de la acción tiende a estabilizarse en 5 euros.



Pregunta 2. Opción B. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide

- (a) (0.75 puntos) Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
 (b) (1.25 puntos) Si $A=6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
 (c) (0.5 puntos) Para $A=6$ ¿es $x=2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?.

(a) Para que la función sea continua debe serlo en $x=2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{5x-1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - Ax + 11 = 2^2 - A \cdot 2 + 11 = 15 - 2A \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 15 - 2A = 3 \Rightarrow 12 = 2A \Rightarrow \boxed{A=6}$$

Para $A=6$ la función es continua.

(b) Si $A=6$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Su derivada tiene la

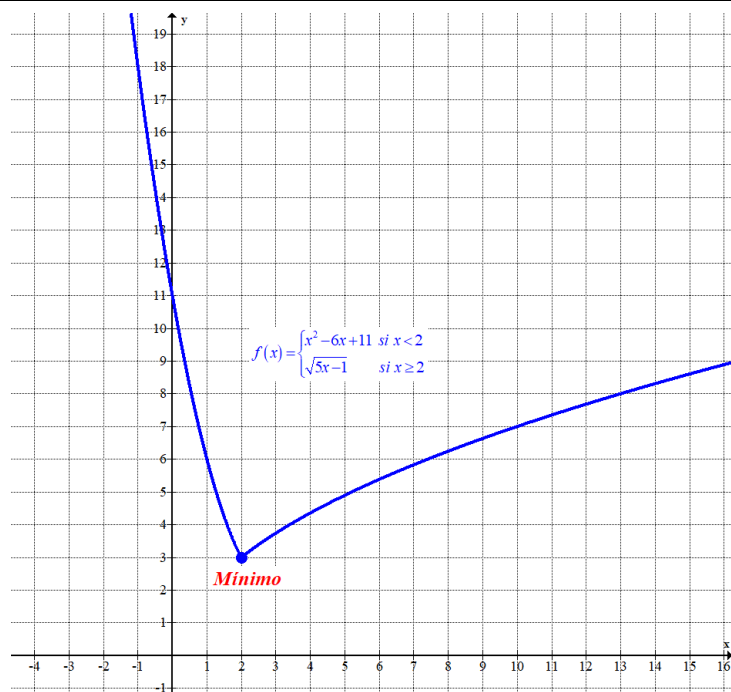
$$\text{expresión } f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 2)$ la derivada es $f'(x) = 2x-6$ que se anula para $x=3$ que no pertenece a este intervalo. Si tomamos $x=0$ la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$. La derivada es negativa en todo el intervalo y la función decrece en $(-\infty, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$ que es siempre positiva. La función crece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

(c) Para $A=6$ hemos visto que la función es continua y decrece antes de $x=2$ y crece después de $x=2$. La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(2, 3)$.



Pregunta 3. Opción A. Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$ es una primitiva de f . Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular la función f .
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula una función que sea una primitiva de f y tal que en $x=0$ tome el valor 6.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x=0$ y $x=1$.

(a) La función f es la derivada de la primitiva.

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$$

(b) Las primitivas de f son $G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + K$. Hallamos el valor de K para qué $G(0) = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + K \\ G(0) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0^2\right) + K = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + K = 6 \Rightarrow \boxed{K=6}$$

La primitiva buscada es $G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + 6$.

(c) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

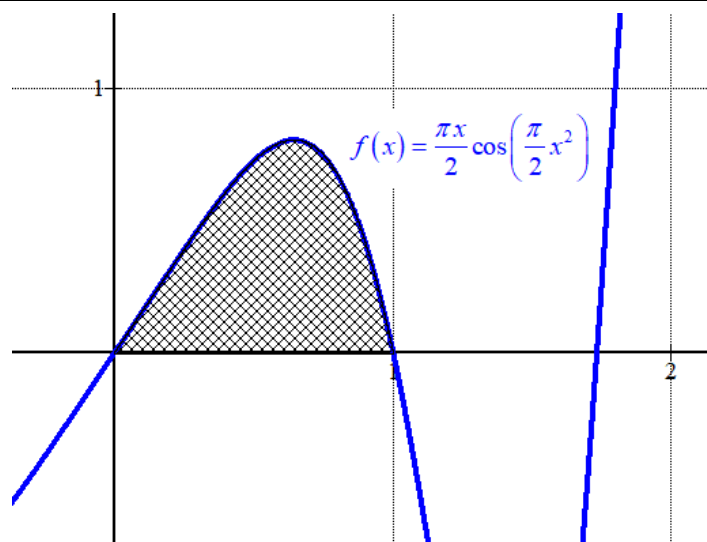
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \\ \text{Eje OX} \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} x^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{\pi}{2} x^2 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \sqrt{3} \\ \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En el intervalo $[0,1]$ la función corta el eje en los extremos.

El área será el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1^2\right) \right] - \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0^2\right) \right] = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

El área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x=0$ y $x=1$ vale 0.5 unidades cuadradas.



Pregunta 3. Opción B. Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular una primitiva de la función f .

(b) **(1.25 puntos)** Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-2}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{2}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \operatorname{arctg}(x) \right] + K \end{aligned}$$

Una primitiva de la función f la podemos obtener tomando $K = 0$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \operatorname{arctg}(x)$$

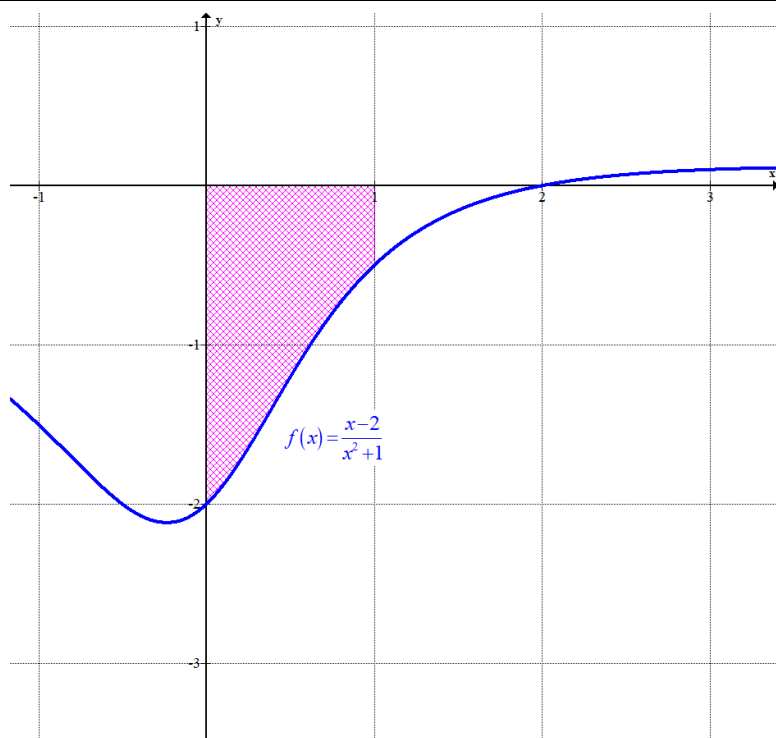
(b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función f con el eje X .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin (0,1)$$

El punto de corte no pertenece al intervalo $(0, 1)$. El área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$ es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \operatorname{arctg}(x) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1^2+1) - 2 \operatorname{arctg}(1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(0^2+1) - 2 \operatorname{arctg}(0) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - 2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 1 + 2 \cdot 0 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\ln 2 - \pi}{2} \approx -1.22 \end{aligned}$$

El área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$ tiene un valor de $\frac{\pi - \ln 2}{2} \approx 1.22$ unidades cuadradas.

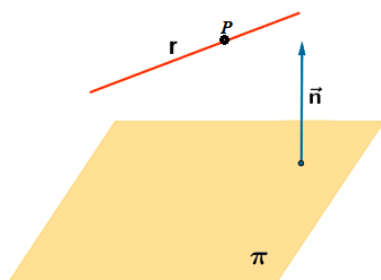


Pregunta 4. Opción A. Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?

(b) **(1.25 puntos)** Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

(a) El plano π' paralelo al plano π que contiene el punto P es único. Dicho plano contiene a las infinitas rectas paralelas al plano π que contienen el punto P.



Hallamos una de esas rectas paralelas al plano π que contiene el punto P. Esta recta debe tener un vector director perpendicular al vector normal del plano. Dicho vector no es único. Obtenemos uno de ellos.

$$\pi \equiv x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1, 2, 3)(a, b, c) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$$

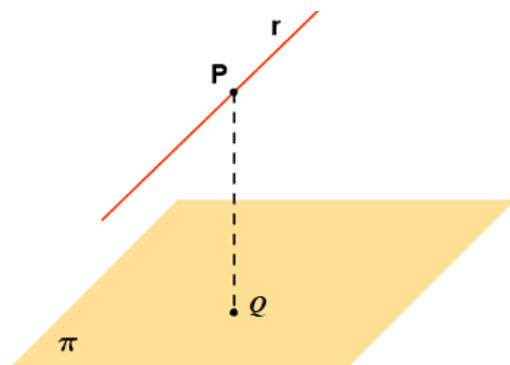
Si tomamos el vector $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ se cumple que $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, 3)(1, 1, -1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta que tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ y contiene el punto $P(0, -1, -2)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, -2) \in r \\ \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Una recta paralela al plano y que contiene el punto P es la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$.

(b) Buscamos el punto Q del dibujo.



Para determinar el punto Q hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto P. El punto Q es el punto de corte de la recta s y el plano π . Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta s . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$P(0, -1, -2) \in s \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{aligned} s: & \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi: & x + 2y + 3z = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda + 2(-1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda = 6 \Rightarrow 14\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = -2 + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 1, 1)}$$

El punto $Q \in \pi$ que menos dista de P tiene coordenadas $Q(1, 1, 1)$.

La distancia entre P y Q es la distancia del punto P al plano π .

$$\left. \begin{aligned} P(0, -1, -2) \\ \pi: x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(P, Q) = d(P, \pi) = \frac{|0 + 2(-1) + 3(-2) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

La distancia del punto P al punto Q es de $\sqrt{14} \approx 3.7$ unidades de distancia.

Pregunta 4. Opción B. Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ hacia el punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el ángulo de giro del móvil.

(a) Se realiza el giro en el punto medio del segmento PQ .

$$G = \frac{(2, 1, 3) + (0, -1, 1)}{2} = (1, 0, 2)$$

El punto donde hace el giro tiene coordenadas $G = (1, 0, 2)$.

(b) La recta r por la que se desplaza tras el giro es la recta que contiene los puntos G y H .

$$\left. \begin{array}{l} G(1, 0, 2) \in r \\ H(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{GH} = (1, 1, 1) - (1, 0, 2) = (0, 1, -1) \\ H(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

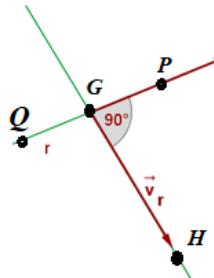
La recta por la que se desplaza el móvil tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

(c) El ángulo de giro del móvil es el ángulo entre el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\overrightarrow{GH}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1) - (2, 1, 3) = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{GH} = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{GH}) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{GH}|} \Rightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{GH}) = \frac{(-2, -2, -2)(0, 1, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 + 2}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{2}} = 0$$

Los vectores son perpendiculares. El ángulo de giro es de 90° .



Pregunta 5. Opción A. En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.
 (b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Llamamos DL a “el pantalón vaquero tiene defecto en longitud” y DC a “el pantalón vaquero tiene defecto en costuras”.

“Se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %” $\rightarrow P(DL) = 0.10$, $P(DC) = 0.05$

“Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test” $\rightarrow P(DL \cap DC) = 0.008$

- (a) Nos piden calcular $P(DL \cup DC)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(DL \cup DC) = P(DL) + P(DC) - P(DL \cap DC) = 0.1 + 0.05 - 0.008 = \boxed{0.142}$$

La probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test es 0.142.

- (b) Debemos calcular $P(DC / DL)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(DC / DL) = \frac{P(DL \cap DC)}{P(DL)} = \frac{0.008}{0.1} = \boxed{0.08}$$

Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud la probabilidad de que también suspenda el test de costuras es de 0.08.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a absolutos. Para ello suponemos que se producen 1000 pantalones.

Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud $\rightarrow 0.10 \cdot 1000 = 100$, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 % $\rightarrow 0.05 \cdot 1000 = 50$. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test $\rightarrow 0.008 \cdot 1000 = 8$.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Defecto en costuras	Sin defectos en costuras	
Defecto en longitud	8		100
Sin defecto en longitud			
	50		1000

Completamos la tabla.

	Defecto en costuras	Sin defectos en costuras	
Defecto en longitud	8	92	100
Sin defecto en longitud	42	858	900
	50	950	1000

- (a) Hay 1000 prendas y son $8 + 92 + 42$ las prendas que suspenden alguno de los test. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test vale $\frac{8+92+42}{1000} = \frac{142}{1000} = 0.142$.

- (b) Hay 100 prendas que suspenden el test de longitud y 8 de estas suspenden el de costuras.

Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una prenda que ha suspendido el tes de

longitud también suspenda el test de costuras vale $\frac{8}{100} = 0.08$.

Pregunta 5. Opción B. Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40kgs el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?
- (b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

Consideramos X = “El peso en kilogramos de las cajas”. $X = N(38, 1.2)$

- (a) Nos piden calcular $P(X > 40)$.

$$P(X > 40) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 38}{1.2} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{40 - 38}{1.2}\right) = P(Z > 1.6667) = 1 - P(Z \leq 1.6667) =$$

$$= \{F(1.6667) = 0.9520\} = 1 - 0.952 = \boxed{0.048}$$

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, **$F(1.6667) = 0.9520$** , $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$.

- (b) Consideramos el suceso contrario a “El sistema salta al menos una vez”, que es el suceso “el sistema no salta ninguna vez”. La probabilidad del suceso contrario es más sencilla de calcular. Como suponemos que lo que ocurre con cada caja es independiente entre sí la probabilidad de que no salte en sistema en las 10 cajas que se levantan es el producto de las probabilidades de no saltar cada una de las veces.

$$P(\text{El sistema no salta en las 10 cajas}) = P(\text{no salta}) \cdot \dots \cdot P(\text{no salta}) =$$

$$= P(\text{no salta})^{10} = (1 - 0.048)^{10}$$

La probabilidad de que el sistema salte al menos una vez vale $1 - (1 - 0.048)^{10} \approx 0.3885$.



Universidad de
Oviedo

PAU julio 2025

Prueba de acceso a la Universidad
(PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 puntos)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

- (a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.
- (b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

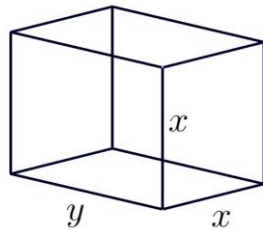
- (c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. Calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
- (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
- (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



dos
la

Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Se pide:

- (a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
- (b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) (1 punto) Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
- (b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
- (c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determinar la función g .

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:

- (a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
- (b) (1 punto) Calcule las distancias de A y B al plano π .
- (c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Pregunta 4. Opción B Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:

- (a) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
- (b) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
- (c) (1 punto) Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) (1.25 puntos) Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?

(c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$..

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 puntos)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

- (a) Al ser un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es siempre el mismo. El sistema siempre tiene solución.

Para que el sistema homogéneo tenga infinitas soluciones el rango de la matriz de coeficientes A debe tener rango menor de 3 (número de incógnitas). El determinante de A debe ser nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4 + 10 - 12a + 10a - 6 - 8 = 0 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para $a = 0$ el rango de A es menor de 3. El sistema tendrá infinitas soluciones.

El sistema siempre va a tener solución. Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $x = y = z = 0$. No existe un valor de a para que el sistema no tenga solución.

- (b) Si A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas la matriz de coeficientes

es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2, pues tiene un menor de orden 2 con determinante no

$$\text{nulo: } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0.$$

Para que tenga solución el sistema el determinante de A debe ser nulo para que el rango de la matriz ampliada pueda ser 2, igual al rango de la matriz de coeficientes. Debe ser $a = 0$.

- (c) Para $a = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema homogéneo sería $\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y + 2y + 2z = 0 \\ -5y + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2z} \Rightarrow \boxed{x = 2z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

(a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. Calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

(a) Tomamos determinantes en la igualdad $M^2 = (x-1)I$.

$$\begin{aligned} \det(M^2) &= \det((x-1)I) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I \text{ es } 2 \times 2 \\ \det(aI) = a^2 \det I \end{array} \right\} \Rightarrow (\det(M))^2 = (x-1)^2 \det(I) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(I) = 1 \\ \det(M) = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Para $x = \frac{1}{2}$ se cumple la igualdad.

(b) Calculamos el determinante de la matriz M .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x - 1 + 2x = x - 1$$

No se cumple la igualdad $\det(M) = x$. No existe ningún valor x para el que la matriz A cumpla que $\det(M) = x$.

(c) Aplicamos determinantes en la igualdad $M = xM^2$.

$$\det(M) = \det(xM^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M^2 \text{ es } 3 \times 3 \\ \det(xM^2) = x^3 \det(M^2) \end{array} \right\} \Rightarrow x = x^3 \det(M^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x^3 (\det(M))^2 \Rightarrow x = x^3 \cdot x^2 \Rightarrow x = x^5 \Rightarrow x^5 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{1} = \pm 1} \end{array} \right.$$

Como $x \neq 0$ entonces se cumple para $x = -1$ y para $x = 1$.

Para $x = -1$ tenemos que $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = \frac{1}{-1} = -1$.

Para $x = 1$ tenemos que $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = \frac{1}{1} = 1$

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
 (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
 (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

(a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10 \Rightarrow f'(t) = -2\sin(t + \pi/2)$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2\sin(t + \pi/2) = 0 \Rightarrow \sin(t + \pi/2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \notin [0, 4] \\ t + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \in [0, 4] \\ t + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71 \notin [0, 4] \end{cases}$$

La función tiene un punto crítico en $t = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \in [0, 4]$.

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(t) = -2\sin(t + \pi/2) \Rightarrow f''(t) = -2\cos(t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos(\pi) = 2 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $\frac{\pi}{2}$.

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo de definición y en el mínimo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2\cos(0 + \pi/2) + 10 = 10 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos(\pi/2 + \pi/2) + 10 = 2\cos(\pi) + 10 = 8 \text{ Mínimo} \\ f(4) &= 2\cos(4 + \pi/2) + 10 \approx 11.51 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

El mínimo de la función en el intervalo $[0, 4]$ es 8 y se obtiene en $t = \frac{\pi}{2}$.

El máximo de la función en el intervalo $[0, 4]$ es 11.51 y se obtiene en $t = 4$.

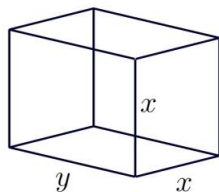
(b) El depósito no se vacía nunca pues su valor mínimo es 8 que es mayor que 0.

(c) La cantidad de agua en el depósito disminuye desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$ y crece desde $t = \frac{\pi}{2}$ hasta $t = 4$.

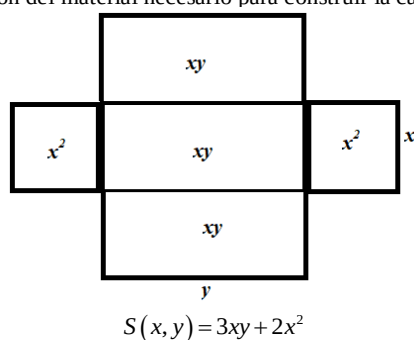
El depósito está aumentando el volumen de agua durante $4 - \frac{\pi}{2} \approx 2.43$ horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x y y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Determinamos la expresión del material necesario para construir la caja.



Este material vale 3. Despejamos y en la igualdad.

$$S(x, y) = 3 \Rightarrow 3xy + 2x^2 = 3 \Rightarrow 3xy = 3 - 2x^2 \Rightarrow y = \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

Obtenemos la expresión del volumen de la caja.

$$\left. \begin{array}{l} V(x, y) = xy \cdot x = x^2 y \\ y = \frac{3 - 2x^2}{3x} \end{array} \right\} \Rightarrow V(x) = x^2 \frac{3 - 2x^2}{3x} = x \frac{3 - 2x^2}{3} = \frac{3x - 2x^3}{3} = x - \frac{2}{3}x^3$$

Derivamos esta función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = x - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow V'(x) = 1 - \frac{2}{3}3x^2 = 1 - 2x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solo consideramos el valor positivo al tratarse de una longitud. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$V'(x) = 1 - 2x^2 \Rightarrow V''(x) = -2x \Rightarrow V''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función volumen tiene un máximo relativo para

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Para este valor calculamos } y = \frac{3 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3 - 2\frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428.$$

La caja de máxima capacidad que se puede montar tiene de dimensiones $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

metros e $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428$ metros.

Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.

(b) **(1.25 puntos)** Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(a) Hallamos la primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Aplicamos la condición $F(0) = 1$ para determinar el valor de C .

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ F(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \ln(1+0^2) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \ln(1) + C \Rightarrow \boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 1$.

(b) Averiguamos si la función corta el eje X entre -1 y 1 .

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \\ \text{Eje X} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \in (-1, 1)$$

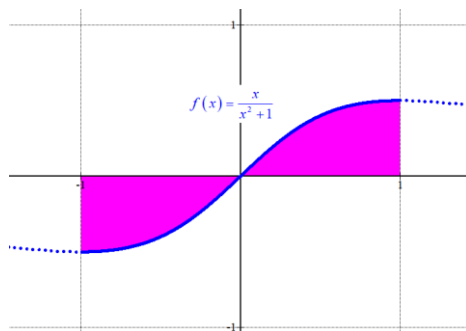
Calculamos el área pedida como la suma de los valores absolutos de la integral definida entre -1 y 0 de la función más la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(1+(-1)^2) \right] = -\frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} \ln(1+1^2) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right] = \frac{1}{2} \ln 2$$

El área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ vale

$$\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 \approx 0.6931 \text{ unidades cuadradas.}$$



Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
 (b) **(0.5 puntos)** ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
 (c) **(1 punto)** Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determinar la función g .

(a) La función $g(x)$ es la derivada de la función $G(x)$.

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow g(x) = G'(x) = \frac{3}{3}x^2 + 2ax + b = x^2 + 2ax + b$$

La función tiene la expresión $g(x) = x^2 + 2ax + b$.

(b) Como una de sus primitivas es $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ cualquier primitiva de la función $g(x)$

tiene la expresión $F(x) = G(x) + K = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K$

(c) Aplicamos las dos condiciones dadas para determinar los valores de a y b .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 + 2ax + b \\ g(1) = 2 \\ g(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1^2 + 2a + b = 2 \\ 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Los valores buscados son $a = 0$ y $b = 1$. La función queda $g(x) = x^2 + 1$.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:

- (a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
 (b) **(1 punto)** Calcule las distancias de A y B al plano π .
 (c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

(a) Hallamos el punto medio C del segmento AB.

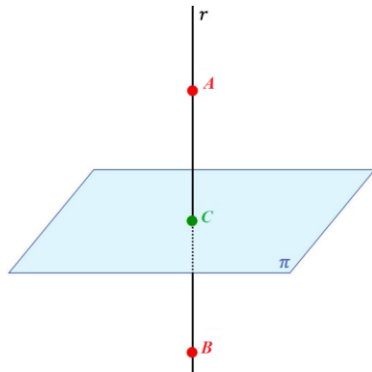
$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ B(-1,1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(1,1,1) + (-1,1,3)}{2} = (0,1,2)$$

El plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overline{AB} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2) \\ C(0,1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : -2x + 2z + D = 0 \\ C(0,1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \pi : -2x + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z + 2 = 0}$$

El plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene tiene ecuación $\pi : x - z + 2 = 0$.



(b) Hallamos las distancias pedidas. Estas distancias deben valer lo mismo pues el plano está en medio de los dos puntos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ A(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ B(-1,1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|-1 - 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(c) Hallamos un punto P del plano π distinto del punto C. Como la coordenada "y" no aparece en la ecuación del plano podemos tomar esta coordenada como 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - z + 2 = 0 \Rightarrow 4 = z \Rightarrow P(2, 0, 4)$$

Calculamos la distancia del punto P a los puntos A y B y comprobaremos que vale lo mismo. De hecho, el plano hallado en el apartado (b) contiene todos los puntos del espacio equidistantes de A y B. Esto es lo que vamos a demostrar.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ B(-1,1,3) \\ P(2,0,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (2,0,4) - (1,1,1) = (1,-1,3) \\ \overrightarrow{BP} = (2,0,4) - (-1,1,3) = (3,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \\ |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{11} = |\overrightarrow{BP}| = d(B, P)$$

Pregunta 4. Opción B Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+\beta z=3$. Se

pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
 (c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

(a) Para que la recta sea paralela al plano su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano. Además, ningún punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-y-x \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-y+2-y-x=0 \Rightarrow x-2y+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2y-2} \Rightarrow z=2-y-2y+2=-3y+4 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r=(2,1,-3) \\ Q_r(-2,0,4) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x+y+\beta z=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,\beta)$$

Hacemos que el producto escalar de $\vec{v}_r=(2,1,-3)$ y $\vec{n}=(2,1,\beta)$ sea nulo.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2,1,\beta)(2,1,-3) = 0 \Rightarrow 4+1-3\beta=0 \Rightarrow 5-3\beta=0 \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{5}{3}}$$

Para $\beta = \frac{5}{3}$ los vectores son perpendiculares. Comprobamos que el punto $Q_r(-2,0,4)$ de la recta no pertenece al plano $\pi \equiv 2x+y+\frac{5}{3}z=3$.

$$\pi \equiv 2x+y+\frac{5}{3}z=3 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 2(-2)+0+\frac{5}{3}4=0? \Rightarrow -4+\frac{20}{3}=0? \text{ ¡¡No!!} \\ \text{¿} Q_r(-2,0,4) \in \pi? \end{array} \right.$$

Para $\beta = \frac{5}{3}$ la recta es paralela al plano.

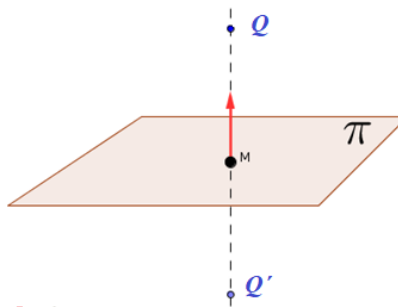
(b) Para que la recta sea perpendicular al plano el vector director de la recta debe tener coordenadas proporcionales a las del vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(2,1,-3) \\ \vec{n}=(2,1,\beta) \\ r \perp \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-3}{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta=-3}$$

Para $\beta = -3$ la recta es perpendicular al plano.

(c) Para $\beta = 0$ el plano queda $\pi \equiv 2x + y = 3$.

Para obtener el punto Q' simétrico de $Q(-1, 0, 1)$ respecto del plano determinamos la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto M de corte de recta y plano y por último hallamos Q' sumando a M el vector $\overrightarrow{QM}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + y = 3 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(-1, 0, 1) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta s y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y = 3 \\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 4\lambda + \lambda = 3 \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1, 1, 1)$$

Las coordenadas del punto simétrico Q' las hallamos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\left. \begin{array}{l} M(1, 1, 1) \\ Q(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QM} = (1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (2, 1, 0)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = (1, 1, 1) + (2, 1, 0) = (3, 2, 1)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'(3, 2, 1)$

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) **(1.25 puntos)** Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) **(1.25 puntos)** Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

- (a) Hallamos la probabilidad de que ninguna moneda de las 3 sea de 1 euro. Llamamos A1, A2 y A3 a sacar moneda de 1 euro en primera, segunda y tercera extracción (sin reemplazamiento).

$$P(0 \text{ monedas de } 1\text{€}) = P(\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}) = P(A1)P(\overline{A2} / \overline{A1})P(\overline{A3} / (\overline{A1} \cap \overline{A2})) =$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

La probabilidad de que al menos una de las 3 monedas sea de 1 euro vale $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$

- (b) Después de realizar la primera extracción, en la segunda extracción (sin reemplazamiento) nos quedan 9 monedas y caben dos posibilidades que la primera haya sido una moneda de 10 céntimos o no.

Llamamos C1 y C2 a sacar moneda de 10 céntimos en primera y segunda extracción respectivamente.

Nos piden calcular $P(C2)$.

$$P(C2) = P(C1 \cap C2) + P(\overline{C1} \cap C2) = P(C1)P(C2 / C1) + P(\overline{C1})P(C2 / \overline{C1}) =$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
 (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
 (c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, **$F(0.6) = 0.7257$** , **$F(2.06) = 0.98$** , $F(0.98) = 0.8365$.
 Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

- (a) X = La esperanza de vida de un elefante en años. $X = N(82, 30)$.

Calculamos $P(X \geq 100)$.

$$P(X \geq 100) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{100-82}{30}\right) = P(Z \geq 0.6) = \\ = 1 - P(Z \leq 0.6) = \{Miramos en la lista \rightarrow F(0.6) = 0.7257\} = 1 - 0.7257 = \boxed{0.2743}$$

El porcentaje de elefantes que viven más de 100 años es de 27.43%.

- (b) Consideramos la binomial Y = Número de elefantes que viven más de 100 años de un grupo de 4 elefantes. Los parámetros son $n = 4$ y $p = 0.2743$. $Y = B(4, 0.2743)$.

Nos piden calcular $P(Y \geq 1)$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2743^0 (1 - 0.2743)^4 = 1 - 0.7257^4 = \boxed{0.7226}$$

La probabilidad de que al menos uno de los 4 elefantes supere los 100 años de vida es de 0.7226.

- (c) Tenemos que hallar "a" tal que $P(X \leq 82 + a) = 0.98$.

$$P(X \leq 82 + a) = 0.98 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ F(2.06) = 0.98 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{30} = 2.06 \Rightarrow \boxed{a = 61.8}$$

El valor buscado es $a = 61.8$.



Universidad de
Oviedo

PAU junio 2025

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) **(1 punto)** Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .

(c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 3 - (x-5)^2 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}.$$

(a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.

(b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.

(c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1)=1$ y $f'(1)=2$, y $g(1)=-1$ y $g'(1)=2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x=3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1)$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Pregunta 3. Opción B

(a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\sin(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) **(1 punto)** Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g .

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t); \quad r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s)$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan

(b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6% de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95% mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4%.

(a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?

(b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?

(b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?

(c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$,

$F(1) = 0.8413$, $F(2) = 0.9772$, $F(0.7) = 0.758$, $F(0.525) = 0.7$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

- (a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.
- (c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Ponemos esta información en una tabla.

	Hospedaje	Alimentación	Varios	TOTAL
Oriente (x)	30x	25x	25x	80x
Centro (y)	40y	20y	25y	85y
Occidente (z)	30z	40z	25z	95z
TOTAL	30x + 40y + 30z	25x + 20y + 40z	25x + 25y + 25z	80x + 85y + 95z

- (a) En el hospedaje gasta 290 € $\rightarrow 30x + 40y + 30z = 290 \rightarrow 3x + 4y + 3z = 29$.
 En alimentación gasta 290 € $\rightarrow 25x + 20y + 40z = 290 \rightarrow 5x + 4y + 8z = 58$.
 En gastos varios gasta 225 € $\rightarrow 25x + 25y + 25z = 225 \rightarrow x + y + z = 9$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 58 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

(b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x = 9 - y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(9 - y - z) + 4y + 3z = 29 \\ 5(9 - y - z) + 4y + 8z = 58 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27 - 3y - 3z + 4y + 3z = 29 \\ 45 - 5y - 5z + 4y + 8z = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ -y + 3z = 13 \end{cases} \Rightarrow -2 + 3z = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z = 15 \Rightarrow z = 5 \Rightarrow x = 9 - 2 - 5 = 2$$

Puede estar 2 días en la zona oriental, otros 2 días en la zona centro y 5 días en occidente.

(c) Si los días que pasa en oriente son 0 tenemos que $x = 0$. Sustituimos este valor en el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 3z = 29 \\ 4y + 8z = 58 \\ y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 3z = 29 \\ 4y + 8z = 58 \\ y = 9 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(9 - z) + 3z = 29 \\ 4(9 - z) + 8z = 58 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 4z + 3z = 29 \\ 36 - 4z + 8z = 58 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -z = -7 \rightarrow z = 7 \\ 4z = 22 \rightarrow z = \frac{22}{4} = 5.5 \end{array} \right\}$$

La situación planteada no tiene solución, pues obtenemos dos valores distintos para “z” y además uno de ellos decimal. En el sistema que nos ha quedado tenemos más ecuaciones que incógnitas y las ecuaciones no son compatibles entre sí.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$

(a) (1 punto) Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) (1 punto) Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .

(c) (0.5 puntos) Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

(a) La matriz B tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = -x - 2 - 2 + 4 + x + 1 = 1 \neq 0$$

El determinante de B vale siempre 1. La matriz B tiene inversa para cualquier valor de x .

(b) Para $x = 0$ la matriz queda $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sabemos que tiene inversa. La calculamos.

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Sabemos que $\det(B) = 1$, por lo que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot 1 = \det(A)$.

Se cumple la igualdad para cualquier valor de x .

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 3 - (x-5)^2 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}.$$

- (a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.
 (b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
 (c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

(a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 3 - (4-5)^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 - (x-5)^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 2$$

La función es continua en $x = 4$.

La función es continua en todo su dominio $[0, +\infty)$.

(b) La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -2(x-5) & \text{si } 4 \leq x \end{cases}.$

En el intervalo $[0, 4)$ la derivada es $f'(x) = \frac{1}{2} > 0$. La función es creciente en $[0, 4)$.

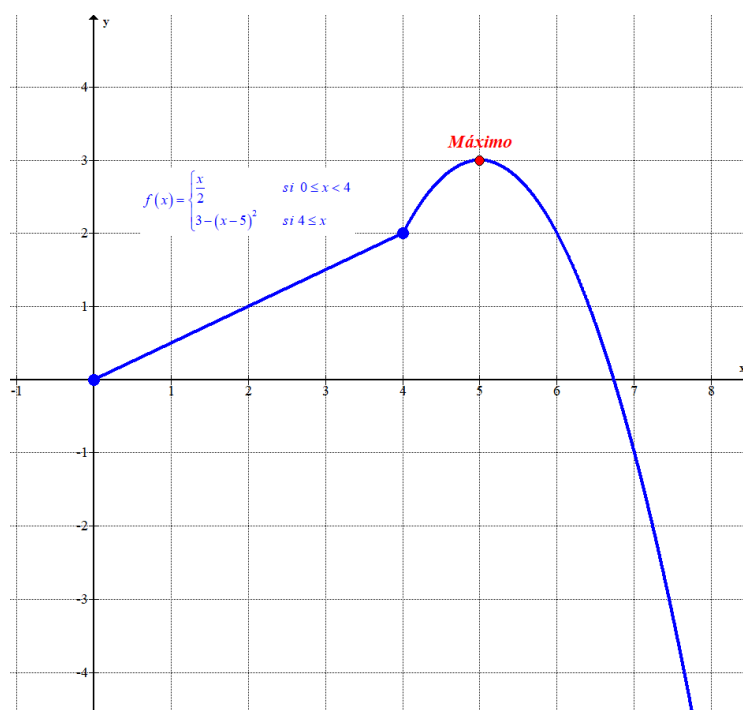
En el intervalo $(4, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = -2(x-5)$. La derivada se anula para $x = 5$. En el intervalo $(4, 5)$ la derivada es positiva y la función es creciente en $(4, 5)$. En el intervalo $(5, +\infty)$ la derivada es negativa y la función es decreciente en $(5, +\infty)$.

Resumiendo: La función es creciente en $[0, 5)$ y decreciente en $(5, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 5$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

$0 \leq x < 4$		$4 \leq x$	
x	$f(x) = \frac{x}{2}$	x	$f(x) = 3 - (x-5)^2$
0	0	4	2
1	0.5	5	3
2	1	6	2
3	1.5	7	-1



(c) Observando la gráfica comprobamos que el máximo absoluto de la función es 3 y nunca alcanza un valor superior a 3, por lo que nunca llegará a los 5 millones.

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1)=1$ y $f'(1)=2$, y $g(1)=-1$ y $g'(1)=2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x=3$ y que $k(x)=(x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

(a) Calculamos el valor de $h(1)$.

$$h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Calculamos el valor de $h'(1)$, calculando primero la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2(-1) - 2 \cdot 1}{(-1)^2} = \frac{-4}{1} = \boxed{-4}$$

(b) Si la función f tiene un máximo en $x=3$ entonces se anula la derivada para este valor:
 $f'(3)=0$.

Si $k(x)=(x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto la derivada se anula para $x=3$. Obtenemos la derivada y aplicamos la propiedad.

$$k(x) = (x-2)^2 f(x) \Rightarrow k'(x) = 2(x-2) f(x) + (x-2)^2 f'(x)$$

$$k'(3) = 0 \Rightarrow 2(3-2) f(3) + (3-2)^2 f'(3) = 0 \Rightarrow 2 f(3) + f'(3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{f'(3)=0\} \Rightarrow 2 f(3) = 0 \Rightarrow \boxed{f(3)=0}$$

Hemos obtenido que $f(3)=0$.

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1)$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

(a) Hallamos la primitiva de $f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int x \cos(4x^2 - 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 4x^2 - 1 = t \rightarrow 8x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{8x} \end{array} \right\} = \\ &= \int x \cos(t) \frac{dt}{8x} = \frac{1}{8} \int \cos(t) dt = \frac{1}{8} \operatorname{sen} t = \boxed{\frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + K} \end{aligned}$$

Aplicamos la condición $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ para determinar el valor de K .

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + K \\ F\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow 1 = \frac{1}{8} \operatorname{sen}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + K \Rightarrow 1 = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(0) + K \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow K = 1 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + 1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + 1$.

(b) Como la derivada de la función $F(x)$ es $f(x)$ estudiamos si la función $f(x)$ se anula para $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2} \neq 0$$

La derivada de $F(x)$ no se anula para $x = \frac{1}{2}$ y la función no tiene un extremo para ese valor.

Pregunta 3. Opción B

(a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) **(1 punto)** Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g .

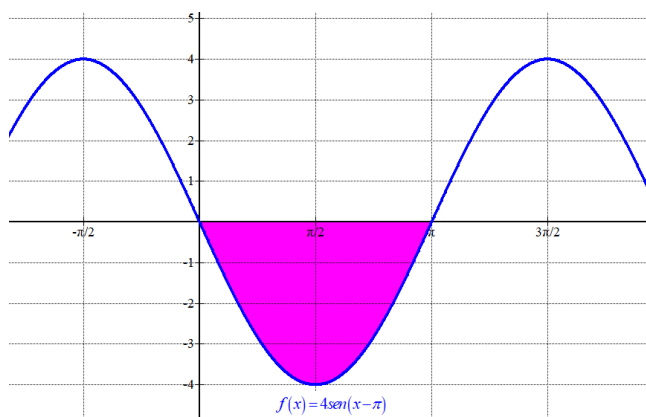
(a) Obtenemos los puntos de corte de $f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi)$ e $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4\operatorname{sen}(x - \pi) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x - \pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \notin [0, \pi] \\ \dots \end{cases}$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y π de la función.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi 4\operatorname{sen}(x - \pi) dx = \left[-4\cos(x - \pi) \right]_0^\pi = \\ &= \left[-4\cos(\pi - \pi) \right] - \left[-4\cos(0 - \pi) \right] = -4\cos(0) + 4\cos(-\pi) = -4 - 4 = -8 \end{aligned}$$

El área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$ tiene un valor de 8 unidades cuadradas.



(b) Si una primitiva de g es $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ entonces la derivada de $f(x)$ es la función g .

$$g(x) = f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x)) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t); \quad r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s)$$

Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan
 (b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

- (a) Estudiamos la posición relativa de las dos rectas. Obtenemos primero un punto y un vector de cada recta (puente).

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t) \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(2, -1, 3) \\ \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \end{cases}$$

$$r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s) \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = 1+2s \\ y = 4-s \\ z = 4-2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que los puentes no son paralelos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$$

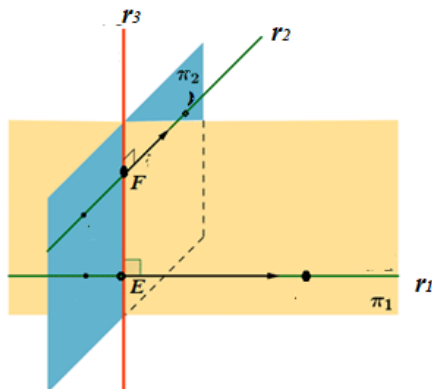
Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_2(1, 4, 4) \\ P_1(2, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 4, 4) - (2, -1, 3) = (-1, 5, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-1, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 20 - 2 + 10 = -13 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas (puentes) se cruzan.

- (b) El pasadizo que los une es la recta r_3 que corta ambas rectas perpendicularmente. Ese es el camino con menor distancia que une los dos puentes.



El vector director de la recta r_3 es el producto vectorial $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 4j - k + 4k + 2j + 2i = (6, 6, 3)$$

Tomamos como vector director de la recta r_3 el vector $\vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) = \frac{1}{3}(6, 6, 3) = (2, 2, 1)$.

Determinamos el plano π_1 que contiene la recta r_1 y que también tiene como otro vector director $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ P_1(2, -1, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-2) + (y+1) - 4(z-3) - 2(z-3) - 4(y+1) + 2(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-2) - 3(y+1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 2(x-2) - (y+1) - 2(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - y - 1 - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 2x - y - 2z + 1 = 0}$$

Determinamos el plano π_2 que contiene la recta r_2 y que también tiene como otro vector director $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (2, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \\ Q_2(1, 4, 4) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) + 2(y-4) - 2(z-4) - 4(z-4) + 4(y-4) + (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + 6(y-4) - 6(z-4) = 0 \Rightarrow (x-1) - 2(y-4) + 2(z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1-2y+8+2z-8=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2: x-2y+2z-1=0}$$

El punto E es el punto de corte de la recta r_1 con el plano π_2 .

$$r_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases} \Rightarrow 2+t-2(-1-2t)+2(3+2t)-1=0 \Rightarrow$$

$$\pi_2: x-2y+2z-1=0$$

$$\Rightarrow 2+t+2+4t+6+4t-1=0 \Rightarrow 9t+9=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=-1-2(-1)=1 \\ z=3+2(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(1,1,1)}$$

El punto F es el punto de corte de la recta r_2 con el plano π_1 .

$$r_2: \begin{cases} x=1+2s \\ y=4-s \\ z=4-2s \end{cases} \Rightarrow 2(1+2s)-4+s-2(4-2s)+1=0 \Rightarrow$$

$$\pi_1: 2x-y-2z+1=0$$

$$\Rightarrow 2+4s-4+s-8+4s+1=0 \Rightarrow 9s-9=0 \Rightarrow s=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+2=3 \\ y=4-1=3 \\ z=4-2=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(3,3,2)}$$

Los puntos de inicio y final del pasadizo son $E(1,1,1)$ y $F(3,3,2)$.

La longitud del pasadizo es el módulo del vector que une los puntos de inicio y final del mismo.

$$\begin{matrix} E(1,1,1) \\ F(3,3,2) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = (3,3,2) - (1,1,1) = (2,2,1)$$

$$Longitud = d(E, F) = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

La longitud del pasadizo es de 3 unidades.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: A(1, 2, 3), B(-2, 1, 4), C(3, 0, 5) y D(0, -1, 2). Se pide:

- (a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

(a) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ B(-2, 1, 4) \\ C(3, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (-3, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 0, 5) - (1, 2, 3) = (2, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 6y + 6z - 30 + 2z - 10 + 6y + 2x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y + 8z - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y + z - 5 = 0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: y + z - 5 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: y + z - 5 = 0 \\ \text{¿} D(0, -1, 2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -1 + 2 - 5 = 0?$$

El punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. Los puntos A, B, C y D no pertenecen al mismo plano.

(b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 6k + 2k + 6j + 2i = (0, 8, 8)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 8^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{2} = \boxed{4\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo de vértices A, B y C tiene un valor de $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

(c) El volumen del tetraedro formado por los 4 puntos es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (0, -1, 2) - (1, 2, 3) = (-1, -3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 + 2 - 6 - 2 - 2 - 18 = -32$$

El volumen del tetraedro formado por los 4 puntos tiene un valor de $32/6 = 16/3$ unidades cúbicas.

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6% de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95% mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

- (a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?
- (b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

- (a) La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0.06. La variable X que cuenta el número de piezas defectuosas de un grupo de 10 piezas elegidas al azar es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.06$. $X = B(10, 0.06)$. Debemos calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 10) = 1 - P(X = 0) =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} 0.06^0 \cdot 0.94^{10} = 1 - 0.94^{10} = \boxed{0.4614}$$

La probabilidad de que al elegir 10 piezas al azar al menos una de ellas sea defectuosa es de 0.4614.

- (b) Llamamos D a “la pieza es defectuosa” y F “el sistema prueba/fallo da fallo”. Calculamos la probabilidad de que una pieza elegida al azar no nos dé fallo: $P(\bar{F})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\bar{F}) = P(D)P(\bar{F} / D) + P(\bar{D})P(\bar{F} / \bar{D}) =$$

$$= 0.06 \cdot (1 - 0.95) + (1 - 0.06) \cdot (1 - 0.04) = \boxed{0.9054}$$

La probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo es de 0.9054.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?
- (b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?
- (c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$,

$F(1) = 0.8413$, $F(2) = 0.9772$, $F(0.7) = 0.758$, $F(0.525) = 0.7$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

- (a) X = el tiempo en minutos que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente. $X = N(30, 5)$.

Debemos calcular $P(25 \leq X \leq 30)$.

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 30) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{25-30}{5} \leq Z \leq \frac{30-30}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= \{\text{Miramos en la lista} \rightarrow F(1) = 0.8413\} = 0.5 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.3413} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un cliente tarde en resolver su problema entre 25 y 30 minutos es de 0.3413.

- (b) Calculamos $P(X > 20)$.

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{20-30}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = \\ &= \{F(2) = 0.9772\} = \boxed{0.9772} \end{aligned}$$

La probabilidad de que cambie de empresa es de 0.9772.

- (c) Tenemos que tras los cambios $P(X \leq 20) = 0.7$.

La ley que sigue la distribución es $X = N(\mu, 5)$. Determinamos el valor de la media.

$$\begin{aligned} P(X \leq 20) = 0.7 &\Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{20-\mu}{5}\right) = 0.7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ F(0.525) = 0.7 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{20-\mu}{5} &= 0.525 \Rightarrow 20 - \mu = 2.625 \Rightarrow \boxed{\mu = 20 - 2.625 = 17.375} \end{aligned}$$

Tras los cambios el tiempo medio de espera es de 17.375 minutos, menor que el tiempo medio anterior (30 minutos). La situación ha mejorado.



Universidad de
Oviedo

EBAU julio 2024
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.
(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?
(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A . Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \sin(\pi - 2x)$.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

Pregunta 5. Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
- (b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.
- (c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

- (a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?
- (b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?
- (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?
- (c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.5596$, $F(0.3333) = 0.6294$, $F(0.385) = 0.65$, $F(0.5596) = 0.7112$, $F(0.6294) = 0.7356$, $F(0.8159) = 0.7939$, $F(0.9) = 0.8159$, $F(1.28) = 0.9$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
 (b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.
 (c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

- a) Llamamos “x” al número de tazas, “y” al número de platos y “z” al número de teteras de cerámica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Tiempo (minutos)	Coste material
Nº tazas (x)	5x	3x
Nº platos (y)	4y	4y
Nº teteras (z)	8z	3z
TOTALES	5x + 4y + 8z	3x + 4y + 3z

Establecemos las ecuaciones del problema.

“Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.” $\rightarrow$
 $5x + 4y + 8z = 50$, $3x + 4y + 3z = 26$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\begin{cases} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

- b) Añadimos una tercera ecuación.

En estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas $\rightarrow x + y + z = 8$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x + y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x = 8 - y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(8 - y - z) + 4y + 8z = 50 \\ 3(8 - y - z) + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 40 - 5y - 5z + 4y + 8z = 50 \\ 24 - 3y - 3z + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 3z = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -2 + 3z = 10 \Rightarrow 3z = 12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{12}{3} = 4 \\ x = 8 - 2 - 4 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Se fabricaron 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

- c) Cambiamos la primera y la tercera ecuación que ahora serían: $5x + 4y + 5z = 50$ e $x + y + z = 10$.
Intentamos resolver el nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x = 10 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(10 - y - z) + 4y + 5z = 50 \\ 3(10 - y - z) + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 - 5y - 5z + 4y + 5z = 50 \\ 30 - 3y - 3z + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y = 0 \\ y = -4 \end{array} \right\} \text{¡Imposible!}$$

La situación planteada no es posible pues el sistema no tiene solución.

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?
- (b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A . Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

a) Vemos si es posible el producto CAB.

$$C \cdot A \cdot B$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 3} \times \boxed{3 \cdot 1} \times 3$$

No es posible el producto CA pues la matriz C tiene 1 columna y la matriz A tiene 3 filas (no coinciden $\rightarrow$ no es posible el producto). Tampoco es posible el producto AB pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 1 fila (no coinciden $\rightarrow$ no es posible el producto). No es posible realizar el producto CAB.

Vemos si es posible el producto BAC.

$$B \cdot A \cdot C$$

$$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

Es posible el producto BA pues la matriz B tiene 3 columnas y la matriz A tiene 3 filas (coinciden $\rightarrow$ es posible el producto). También es posible el producto AC pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz C tiene 3 filas (coinciden $\rightarrow$ es posible el producto). Es posible realizar el producto BAC, siendo la matriz resultante de dimensiones 1×1 .

- b) El rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 + 2x - 0 = 12 + 2x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{2} = -6$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq -6$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $x = -6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Como la fila segunda y la tercera son proporcionales

consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Conclusión: Si $x \neq -6$ el rango de A es 3 y si $x = -6$ el rango de A es 2.

Para $x = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $12 + 0 = 12 \neq 0$.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa tiene la expresión $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
 (b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 (c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \frac{1^2 - 4}{1 - 1} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{0 - 0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{1 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 + x - x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

La recta $y = -x - 1$ es asíntota oblicua de la función.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(1 - x) - (-1)(x^2 - 4)}{(1 - x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 4}{(1 - x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1 - x)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \text{¡Imposible!}$$

La derivada nunca se anula, por lo que la derivada siempre es positiva o negativa.

Probamos con $x = 0$ antes del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-0^2 + 2 \cdot 0 - 4}{(1-0)^2} = -4 < 0, \text{ la función es decreciente en } (-\infty, 1).$$

Si tomamos $x = 2$ después del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-2^2 + 2 \cdot 2 - 4}{(1-2)^2} = -4 < 0, \text{ la función es decreciente en } (1, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos locales.

Buscamos los puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

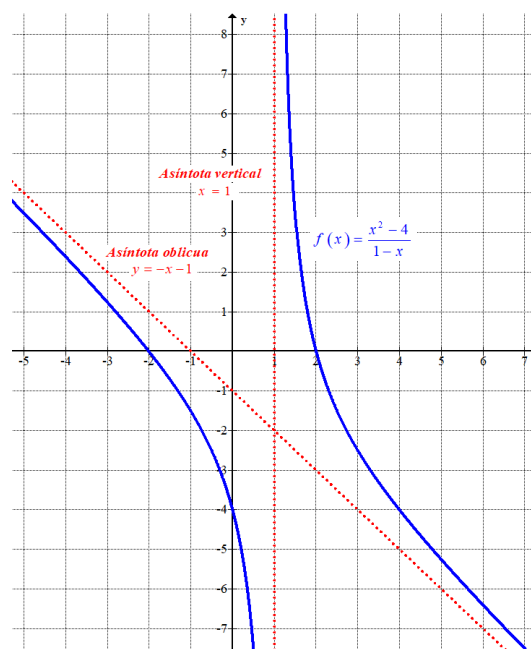
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x+2)(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+2)(1-x) - 2(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^3} = \frac{-2x + 2x^2 + 2 - 2x - 2x^2 + 4x - 8}{(1-x)^3} = \frac{-6}{(1-x)^3}$$

Esta segunda derivada nunca se anula, pero cambia de signo en $x = 1$ valor excluido del dominio. No existen puntos de inflexión.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{1-x}$
-1	-1.5
0	-4
2	0
3	-2.5



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \sin(\pi - 2x)$.

(a) (1.25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) (1.25 puntos) Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin(\pi - 2x) dx = \frac{1}{2} \int (-2)(-\sin(\pi - 2x)) dx = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ debe cumplirse que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + C \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos(0) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(\pi - 2x) \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi - 2x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \pi - 2x = -\pi \rightarrow 2x = 2\pi \rightarrow x = \pi \\ \pi - 2x = 0 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2x = \pi \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \pi - 2x = 2\pi \rightarrow -2x = \pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \\ \dots \end{array} \right.$$

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ la función corta el eje X en $x = 0$. El área la calculamos como la suma

del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre $-\frac{\pi}{4}$ y 0, la otra entre 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_{-\pi/4}^0 f(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 \sin(\pi - 2x) dx = \left[\frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) \right]_{-\pi/4}^0 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cos(\pi - 2 \cdot 0) \right] - \left[\frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \right] = \frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

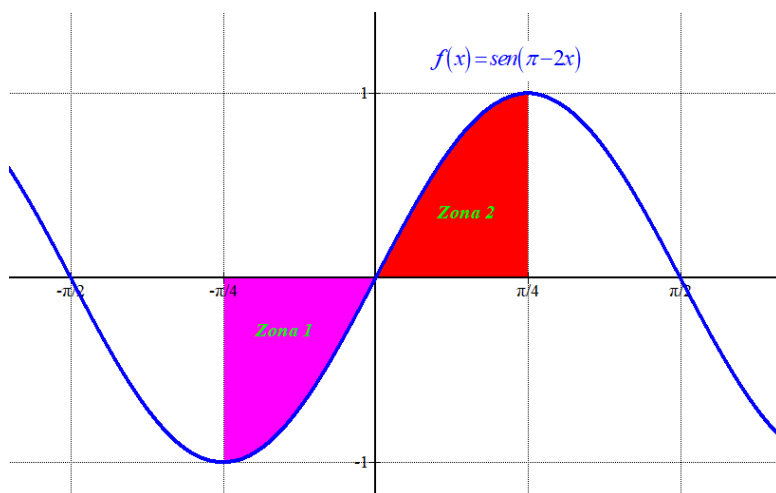
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} \sin(\pi - 2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] - \left[-\frac{1}{2} \cos(\pi - 2 \cdot 0) \right] = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos \pi\right) = 0 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

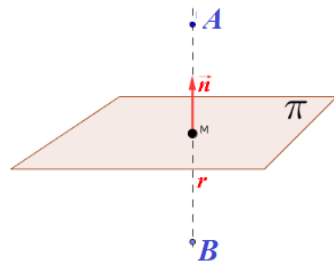
El área limitada por f , el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, $0.5 + 0.5 = 1$ unidad cuadrada.



Pregunta 5. Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
 (b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

- a) El plano respecto del cual los dos puntos son simétricos contienen el punto medio M del segmento AB . Además, el plano buscado tiene como vector normal el vector $\overline{AB}$.



Hallamos la ecuación del plano que pasa por M y tiene como vector normal $\overline{AB}$.

$$M = \text{Punto medio } \overline{AB} = \frac{(0, -1, 1) + (2, 1, 3)}{2} = (1, 0, 2)$$

$$\overline{AB} = (2, 1, 3) - (0, -1, 1) = (2, 2, 2) \Rightarrow \vec{n} = \frac{\overline{AB}}{2} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} M = (1, 0, 2) \in \pi \\ \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = (1, 0, 2) \in \pi \\ \pi : x + y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + z - 3 = 0}$$

El plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él tiene ecuación $\pi : x + y + z - 3 = 0$.

- b) La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$ que pasa por el punto $Q = (1, 0, 1)$ tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = (1, 0, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$ que pasa por el punto

$$Q = (1, 0, 1) \text{ es } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,2)$, $C = (-1,1,3)$ y $D = (-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

a) Hallamos el plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= (1,0,2) - (1,1,1) = (0,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} &= (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2) \\ B(1,0,2) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - 2y + 0 - 2(z-2) - 0 - 0 = 0 \Rightarrow -2x + 2 - 2y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + z - 3 = 0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \pi: x + y + z - 3 = 0 \\ \text{¿} D(-1,0,1) \in \pi? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¿} -1 + 0 + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} -3 = 0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1) \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} = (1,1,1) \left\{ \begin{aligned} x &= -1 + \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{aligned} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$D(-1,0,1) \in r$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene ecuación $r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta.

$$\left. \begin{aligned} r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi: x + y + z - 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P(0,1,2)$$

El punto P intersección de la recta r y el plano π tiene coordenadas $P(0,1,2)$.

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’ y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’, ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Llamamos C = “el estudiante cursa el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología” e I = “el estudiante cursa como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’”.

Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C) = 0.55$, $P(I/C) = 0.30$, $P(I/\bar{C}) = 0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C) = 0.30 \Rightarrow \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = 0.3 \Rightarrow \boxed{P(I \cap C) = 0.3 \cdot 0.55 = 0.165}$$

$$P(I/\bar{C}) = 0.40 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = 0.4 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - P(C)} = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - 0.55} = 0.4 \Rightarrow \boxed{P(I \cap \bar{C}) = 0.4 \cdot 0.45 = 0.18}$$

a) Como $P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un estudiante curse como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’.

$$P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C}) = 0.165 + 0.18 = \boxed{0.345}$$

La probabilidad de que haya cursado ‘Proyecto de Investigación Integrado’ es de 0.345.

b) Nos piden calcular $P(C/\bar{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{I}) = \frac{P(C \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(C) - P(C \cap I)}{P(\bar{I})} = \frac{0.55 - 0.165}{1 - 0.345} = \boxed{\frac{77}{141} \approx 0.5878}$$

La probabilidad de que un estudiante que no cursa como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’ esté cursando el bachillerato de Ciencias y Tecnología es de

$$\frac{77}{141} \approx 0.5878.$$

Esta pregunta 7 es igual que la pregunta 7 de la convocatoria ordinaria.

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?
 (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?
 (c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

Llamamos X = la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses.

X es una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y $\sigma = 15$ kg. $X = N(85, 15)$

- a) Calculamos la probabilidad $P(X > 90)$.

$$P(X > 90) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{90-85}{15}\right) = P(Z > 0.3333) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.3333) = 1 - F(0.3333) = 1 - 0.6294 = \boxed{0.3706}$$

El porcentaje de población que genera más de 90 kg en dos meses es de 37.06 %.

- b) Como $P(X > 90) = 0.3706$ entonces $P(X < 90) = 1 - 0.3706 = 0.6294$. Multiplicamos esta probabilidad por los 10 000 habitantes de la muestra y obtenemos que $10000 \cdot 0.6294 = 6294$ habitantes generan menos de 90 kg de basura en dos meses.

- c) Tenemos que $P(X < 70) = \frac{5596}{10000} = 0.5596$.

$$P(X < 70) = 0.5596 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{70-\mu}{15}\right) = 0.5596 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ F(0.15) = 0.5596 \rightarrow P(Z \leq 0.15) = 0.5596 \right\} \Rightarrow \frac{70-\mu}{15} = 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70 - \mu = 15 \cdot 0.15 \Rightarrow 70 - 15 \cdot 0.15 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 67.75}$$

La nueva media tiene un valor de 67.75 kg. La campaña ha funcionado.



Universidad de
Oviedo

EBAU junio 2024
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen.
Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.
(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?
(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

- (a) **(1.5 puntos)** Da el $\text{rg}(A)$ según los valores de x . Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.
(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3×3 con $\det(B) = 5$. Calcula $\det(AB)$.
. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $(0, 1)$.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Pregunta 5. Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$,

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π .
(b) **(1 punto)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = $(-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = $(1, 1, 1)$, B = $(1, 0, 2)$, C = $(-1, 1, 3)$ y D = $(-1, 0, 1)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.
(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$ del apartado anterior.

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

- (a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?
(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

- (a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?
(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.
(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$,
 $F(0.15) = 0.5596$, $F(2.0412) = 0.9793$, $F(0.9793) = 0.8340$, $F(0.5596) = 0.7112$,
 $F(0.6294) = 0.7356$, $F(0.8159) = 0.7939$, $F(0.9) = 0.8159$, $F(1.28) = 0.9$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

a) Llamamos “x” al número de perros de la raza 1, “y” al número de perros de la raza 2 y “z” al número de perros de la raza 3. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y		y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	2x + y + 3z	z	x + y + 3z

Establecemos las ecuaciones del problema.

“Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C” $\rightarrow 2x + y + 3z = 410$, $z = 30$, $x + y + 3z = 310$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 410 \\ z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz de coeficientes A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos la solución del sistema.

$$X = A^{-1}B = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -410+310 \\ 410+90-620 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Hay 100 ejemplares de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

c) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B la segunda ecuación es distinta.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y	y	y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	2x + y + 3z	y + z	x + y + 3z

Establecemos las ecuaciones del problema.

“Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C” $\rightarrow 2x + y + 3z = 410$, $y + z = 30$, $x + y + 3z = 310$.

Resolvemos el nuevo sistema.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ y + z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 0 - 3 - 0 - 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 820 - 620 \\ 410 + 90 - 620 \\ -410 - 30 + 620 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 220 \\ -120 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ -60 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Obtenemos como solución que debería haber 110 perros de la raza 1, -60 de la raza 2 y 90 de la raza 3. Esto es imposible pues el número de perros de la raza 2 sale negativo.

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el $\text{rg}(A)$ según los valores de x . Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3×3 con $\det(B) = 5$. Calcula $\det(AB)$

. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

a) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 3x + 0 + 8 - 6 - 4x - 0 = -x + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $x = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Como la fila primera y tercera son proporcionales

consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Para $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1 \neq 0$.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A . La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 5 = 5$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$\det\left(\frac{1}{5}AB\right) = \det\left(\frac{1}{5}A\right) \cdot \det(B) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(A) \cdot \det(B) = \frac{1}{125} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{1}{25}.$$

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$.

(a)(1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b)(1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c)(0.5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{1-x} = \frac{1-4}{1-1} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x-4}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(1-x) - (-1)(x-4)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x-4}{(1-x)^2} = \frac{-3}{(1-x)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa (numerador negativo y denominador positivo).

La función siempre decrece.

La función no tiene máximos ni mínimos locales.

Averiguamos cuando se anula la derivada segunda en busca de los posibles puntos de inflexión.

$$f'(x) = \frac{-3}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (1-x)^2 - 3(2(1-x)(-1))}{(1-x)^4} = \frac{6(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^3}$$

La derivada segunda nunca se anula y la función no tiene puntos de inflexión.

Estudiamos la curvatura de la función antes y después de $x = 1$ (excluido del dominio).

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = \frac{6}{(1-0)^3} = 6 > 0$. La

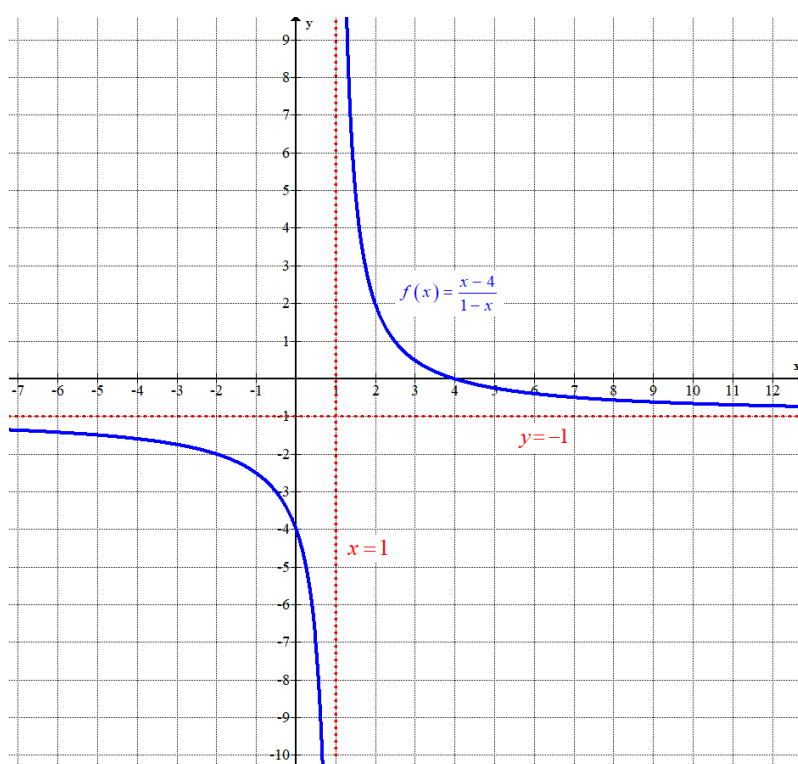
función es convexa (U) en $(-\infty, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = \frac{6}{(1-2)^3} = -6 < 0$. La

función es cóncava (n) en $(1, +\infty)$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x-4}{1-x}$
-1	2.5
0	-4
2	2
3	-0.5



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) (1.25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) (1.25 puntos) Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \frac{1}{2} \int (-2) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) dx = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto (0, 1) debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -\pi \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi \rightarrow -2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ \dots \end{array} \right.$$

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función corta el eje X en $x = \frac{\pi}{4}$. El área la calculamos como la suma del

valor absoluto de dos integrales definidas: una entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, la otra entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] - \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0\right) \right] = \frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

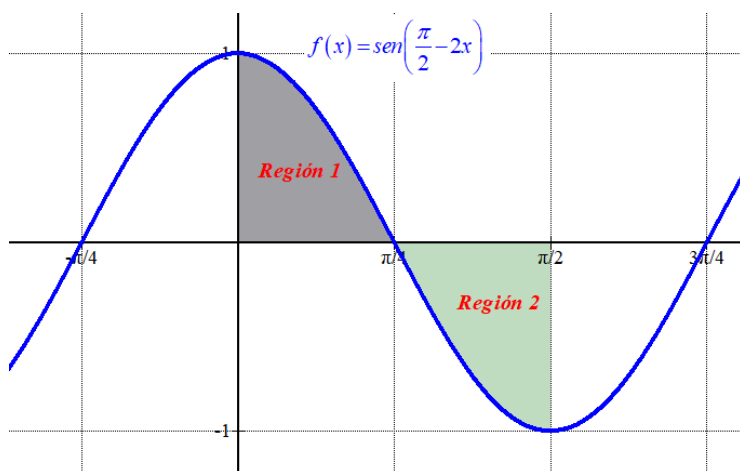
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.

Calculamos el área de la segunda región.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] = -\frac{1}{2} \cos(-\pi) + \frac{1}{2} \cos(0) = -\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

El área limitada por f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, $0.5 + 0.5 = 1$ unidad cuadrada.

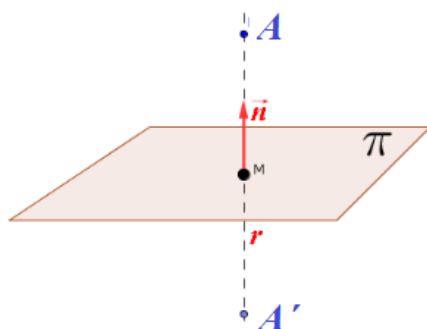


Pregunta 5. Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π .

(b) **(1 punto)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (-2, -3, 1) y el origen de coordenadas.

a) Seguimos el proceso indicado en el dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$ que pasa por el punto $A(0, -1, 1)$.

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(0, -1, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \\ \pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha - 1 + \alpha + 1 + \alpha + 3 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1, -2, 0)$$

El punto simétrico A' es un punto que obtenemos al sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = (-1, -2, 0) - (0, -1, 1) = (-1, -1, -1)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (-1, -2, 0) + (-1, -1, -1) = (-2, -3, -1)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es el punto $A'(-2, -3, -1)$.

b) El área del triángulo de vértices A, C y O es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (0, -1, 1) - (0, 0, 0) = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{OC} = (-2, -3, 1) - (0, 0, 0) = (-2, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - 2j + 0 - 2k - 0 + 3i = 2i - 2j - 2k = (2, -2, -2)$$

$$\text{Área ACO} = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \sqrt{3} \text{ u}^2$$

El área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (-2, -3, 1) y el origen de coordenadas tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C .

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi \equiv x-y-z=1$ del apartado anterior.

a) Hallamos el plano que contiene a los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (0, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 3) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 2) \\ B(1, 0, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - 2y + 0 - 2(z-2) - 0 - 0 = 0 \Rightarrow -2x + 2 - 2y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \pi: x + y + z - 3 = 0$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + z - 3 = 0 \\ \text{¿} D(-1, 0, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -1 + 0 + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} -3 = 0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A , B y C .
No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A , B y C tiene ecuación $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ D(-1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C tiene ecuación

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv x+1=-y=z-1$.

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto P de corte de recta y plano.

$$r: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow -1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3 = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow P(2, -3, 4)$$

$\pi \equiv x - y - z = 1$

El punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$ tiene coordenadas $P(2, -3, 4)$

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso ‘ChatGPT’. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso ‘IA’, el 40% de los que no han hecho el curso ‘ChatGPT’ han realizado el curso ‘IA’.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso ‘IA’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso ‘IA’ ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de ‘ChatGPT’?

Llamamos C = “el trabajador ha hecho el curso ChatGPT” e I = “el trabajador ha hecho el curso IA”.

Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C) = 0.55$, $P(I/C) = 0.30$, $P(I/\bar{C}) = 0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C) = 0.30 \Rightarrow \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = 0.3 \Rightarrow \boxed{P(I \cap C) = 0.3 \cdot 0.55 = 0.165}$$

$$P(I/\bar{C}) = 0.40 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = 0.4 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - P(C)} = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - 0.55} = 0.4 \Rightarrow \boxed{P(I \cap \bar{C}) = 0.4 \cdot 0.45 = 0.18}$$

a) Como $P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un trabajador haya hecho el curso de IA.

$$P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C}) = 0.165 + 0.18 = 0.345$$

La probabilidad de que haya realizado el curso ‘IA’ es de 0.345.

b) Nos piden calcular $P(C/\bar{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{I}) = \frac{P(C \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(C) - P(C \cap I)}{P(\bar{I})} = \frac{0.55 - 0.165}{1 - 0.345} = \boxed{\frac{77}{141} \approx 0.5878}$$

La probabilidad de que un trabajador que no haya hecho el curso de IA sí tenga el curso de ‘ChatGPT’ es de $\frac{77}{141} \approx 0.5878$.

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

- (a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?
- (b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.
- (c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

Llamamos T a “comprar café torrefacto” y N a “comprar café natural”.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000		8000
No compra café torrefacto			
	4000		10000

Completamos la tabla.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000	5000	8000
No compra café torrefacto	1000	1000	2000
	4000	6000	10000

- a) Hay 3000 individuos que compran ambos cafés, 1000 que solo compran café natural y 5000 que solo compran café torrefacto. Hay $3000 + 1000 + 5000 = 9000$ que compran alguno de los dos tipos de café.

$$P(N \cup T) = \frac{9000}{10000} = 0.9$$

La probabilidad de que un individuo elegido al azar compre alguno de los dos tipos de café es de 0.9.

- b) Llamamos X = Número de individuos que compran café natural de una muestra de 100.

X es una distribución binomial con parámetros $n = 100$ y $p = \frac{4000}{10000} = 0.4$. $X = B(100, 0.4)$

El número de repeticiones es muy grande y aproximamos esta binomial a una normal de media $np = 100 \cdot 0.4 = 40$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2\sqrt{6} \approx 4.899$.

$X = B(100, 0.4)$ la aproximamos con una normal $Y = N(40, 4.899)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 40 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.6 = 60 > 5$.

Nos piden calcular $P(X \leq 50)$.

$$P(X \leq 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 50.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{50.5 - 40}{4.899}\right) = P(Z \leq 2.1433) = F(2.1433)$$

$$= \{\text{No está entre los datos proporcionados}\} = ?$$

c) Tomamos $X = B(10, 0.4)$. Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^5 = 0.2007$$

La probabilidad de que de un grupo de 10 individuos 5 compren café natural es de 0.2007.



Universidad de Oviedo

EBAU julio 2023
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indique en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderá**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
(c) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcula $\det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

Problema 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

Problema 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
(c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Problema 4. (2.5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)
(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

Problema 5. Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y-2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos

$A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

- (a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s .
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .
- (c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

Problema 6. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A=(2,1,6)$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
- (b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
- (c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

Problema 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B . Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

- (a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
- (b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A .

Problema 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
- (c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

SOLUCIONES

Problema 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(a) (0.75 puntos) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.

(c) (0.75 puntos) Para $a = 1$, calcula $\det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

(a) Calculamos el determinante de la matriz P.

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 2a - 0 - 2 - 0 = 2a - 4$$

El rango de P es 3 si su determinante es no nulo.

$$|P| = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de P es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 2$ el determinante de P es nulo y su rango no es 3. Averiguemos su rango.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Si $a = 2$ el rango de P es 2.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ el rango de P es 3 y si $a = 2$ el rango de P es 2.

(b) Para $a = 1$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0$, por lo

que existe la inversa de P. La calculamos.

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^T)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$|PM| = |M^2| \Rightarrow |P| \cdot |M| = |M|^2 \Rightarrow |P| \cdot |M| = |M| \cdot |M| \Rightarrow \begin{cases} |M| \neq 0 \rightarrow |P| = |M| \rightarrow |M| = -2 \\ 0 \\ |M| = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz M vale 0 o -2.

Problema 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a .
 (b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
 (c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2a - 0 + 4 + 0 = 2a + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. Si $a \neq -3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = -3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 1 \quad -1 \quad -3 \quad -1 \\ 0 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -3 \quad -6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & A/B & & \\ \hline 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B , pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $a = -3$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3z = -1 \\ 3y + 6z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3z = -1 \\ y + 2z = 1 \rightarrow y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 2z - 3z = -1 \Rightarrow x = z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

- c) Si $a = -3$ en la expresión de las soluciones obtenida en el apartado anterior tomamos $\lambda = 1$ y la

solución del sistema queda $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

Problema 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
 (b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
 (c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

(a) Si la gráfica de la función pasa por el punto $(0, -3)$ entonces $f(0) = -3$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + A}{Bx - 1} \\ f(0) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 = \frac{0^2 + A}{B \cdot 0 - 1} \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{Bx - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(Bx - 1) - (x^2 + 3)B}{(Bx - 1)^2} = \frac{2Bx^2 - 2x - Bx^2 - 3B}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx - 1)^2}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{B(-1)^2 - 2(-1) - 3B}{(B(-1) - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{B + 2 - 3B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2B = 0 \Rightarrow -2B = -2 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

Los valores buscados son $A = 3$ y $B = 1$.

(b) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

Ya tiene un punto crítico en $x = -1$, visto en el apartado anterior. Averiguamos si tiene alguno más.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

Comprobamos si son máximos o mínimos sustituyendo en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{(-2-2)(-1-1) - 2((-1)^2 - 2(-1) - 3)}{(-1-1)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$f''(3) = \frac{(6-2)(3-1) - 2(3^2 - 6 - 3)}{(3-1)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

La función presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

Hallamos sus asíntotas.

El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

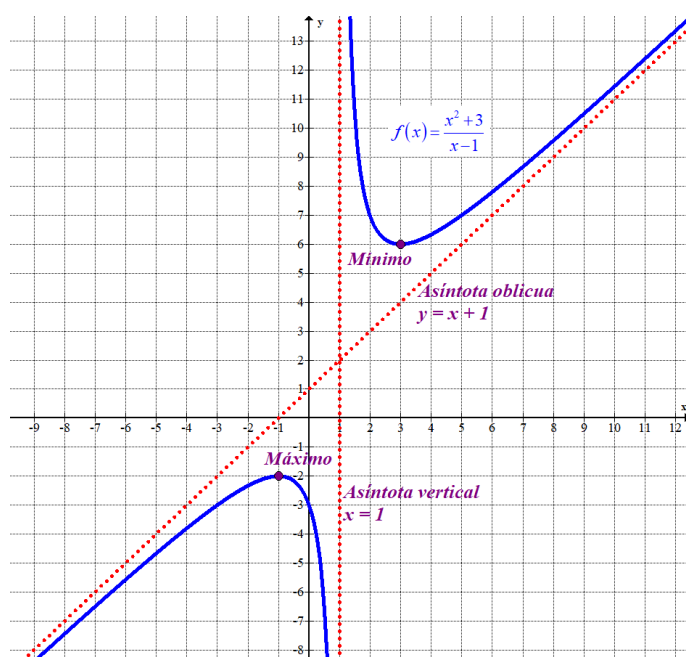
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$y = x+1$ es asíntota oblicua.

(c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$
-2	$-7/3$
-1	-2 Máximo
0	-3
2	7
3	6 Mínimo
4	$19/3$



Problema 4. (2.5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f , las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(a) Calculamos la primitiva haciendo un cambio de variable.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int xe^{2x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2x^2 = t \rightarrow 4x dx = dt \\ dx = \frac{1}{4x} dt \end{array} \right\} = \int xe^t \frac{1}{4x} dt = \frac{1}{4} \int e^t dt = \frac{1}{4} e^t = \boxed{\frac{1}{4} e^{2x^2} + K}$$

Como la primitiva pasa por $(0, -1)$ se debe cumplir $F(0) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + K \\ F(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} e^{2 \cdot 0^2} + K = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} + K = -1 \Rightarrow K = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} - \frac{5}{4}$.

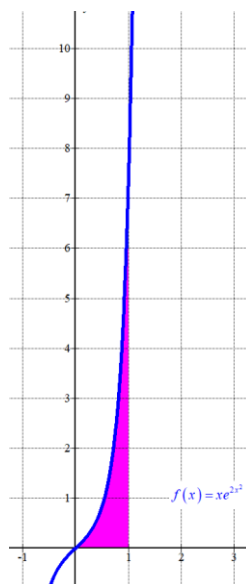
(b) Averiguamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = xe^{2x^2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow xe^{2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{2x^2} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Como el punto de corte está en una de las rectas el área se calcula como la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\text{Área} = \int_0^1 xe^{2x^2} dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x^2} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{4} e^{2 \cdot 1^2} \right] - \left[\frac{1}{4} e^{2 \cdot 0^2} \right] = \boxed{\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \approx 1.597 \text{ u}^2}$$



Problema 5. Sea s la recta de ecuación $x-2 = \frac{y-2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos

$A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s .

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

(a) Hallamos la ecuación, el vector director y un punto de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in r \\ B(2,1,2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2,1,2) - (1,0,1) = (1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector director de la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ es $\vec{u}_s = (1, -1, 1)$.

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos su posición relativa calculando el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{AC}]$, siendo C un punto de la recta s .

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow C(2, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 - 1 - 1 - 2 = -4 \neq 0$$

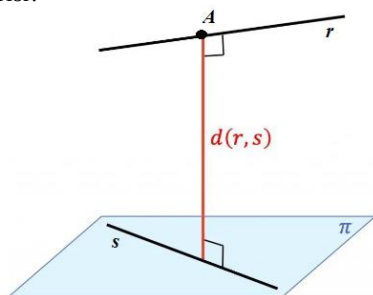
Al ser este producto mixto no nulo las rectas se cruzan (rectas no paralelas sin punto en común).

(b) El plano paralelo a r y que contiene a s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $C(2,2,0)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ C(2, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2+y-2+z+z-y+2-x+2=0 \Rightarrow -2x+2z+4=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-z-2=0}$$

(c) La distancia entre las rectas r y s que se cruzan es la distancia de un punto de la recta r al plano π hallado en el apartado anterior.



$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z - 2 = 0 \\ A(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

Problema 6. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

- (a) (0.75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
 (b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
 (c) (0.75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

(a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos π y π' .

$$r \equiv \begin{cases} \pi \equiv x + y + z = 3 \\ \pi' \equiv x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow x + 3 - x + z = 3 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 3, 0) \end{cases}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{u}_r = (1, -1, 0)$ y un punto es $P_r(0, 3, 0)$.

(b) Si el segmento AP es perpendicular al plano π el vector $\overrightarrow{AP}$ debe tener coordenadas proporcionales al vector normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} \pi \equiv x + y + z = 3 &\Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AP} = (a, b, c) - (2, 1, 6) &= (a - 2, b - 1, c - 6) \\ \overrightarrow{AP} \parallel \vec{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{1} = \frac{c-6}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{1} \\ \frac{b-1}{1} = \frac{c-6}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2 = b-1 \\ b-1 = c-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ c = b+5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(b+1, b, b+5)}$$

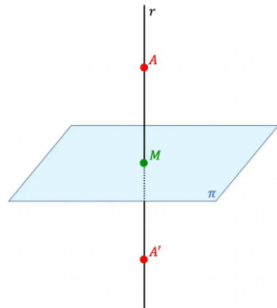
El punto P pertenece al plano π por lo que cumple su ecuación.

$$\left. \begin{aligned} P(b+1, b, b+5) \in \pi \\ \pi \equiv x + y + z = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b+1 + b + b+5 = 3 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \boxed{P(0, -1, 4)}$$

(c) Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A . Después, determinamos el punto M de corte de recta y plano. Dicho punto será el punto medio del segmento AA' . El punto A' buscado lo obtendremos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

La recta perpendicular al plano que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(2, 1, 6) \in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$



Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \Rightarrow 3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y + z = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0, -1, 4)$$

Hallamos el punto A'.

$$\overrightarrow{AM} = (0, -1, 4) - (2, 1, 6) = (-2, -2, -2)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (0, -1, 4) + (-2, -2, -2) = (-2, -3, 2)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es $A'(-2, -3, 2)$.

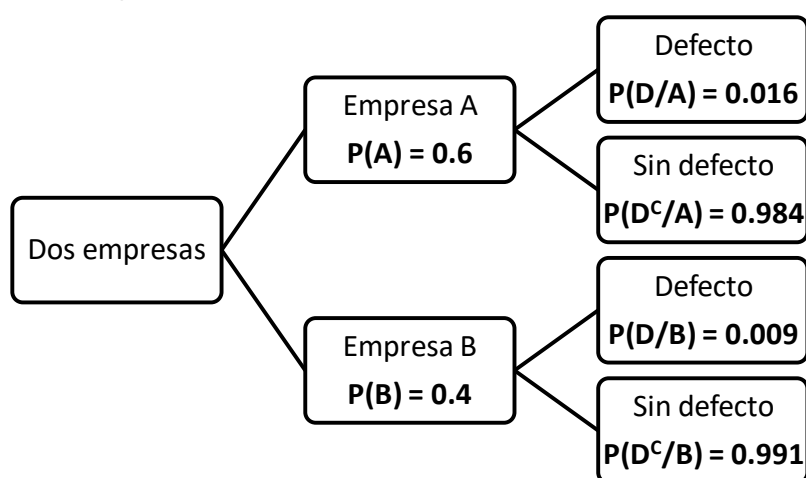
Problema 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) (1.25 punto) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) (1.25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Llamamos A = “la tinta procede de la empresa A”, B = “la tinta procede de la empresa B”, D = “Las cajas de tinta llegan con defecto”,

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.016 + 0.4 \cdot 0.009 = \boxed{0.0132}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.984}{1 - 0.0132} = \frac{1476}{2467} \approx 0.5983$$

Problema 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.

(b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

Sea X = Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I. $X = N(5, 2)$.

(a) Nos piden $P(X \geq 7.5)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 7.5) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{7.5 - 5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(1.25) = 0.8944 \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 3) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{5-5}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{3-5}{2}\right) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \\ F(1) = 0.8413 \end{array} \right\} = 0.5 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.3413} \end{aligned}$$

(c) Tenemos $X = N(\mu, 1.5)$. Sabemos que $P(X \leq 6) = 0.52$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{6 - \mu}{1.5}\right) = 0.52 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.05) = 0.52 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{6 - \mu}{1.5} &= 0.05 \Rightarrow 6 - \mu = 0.075 \Rightarrow 6 - 0.075 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 5.925} \end{aligned}$$

La nueva media es de 5.925.

El nuevo sistema ha funcionado pues ha subido la nota media (de 5 a 5.925) y la dispersión de los datos ha disminuido (2 a 1.5).



Universidad de Oviedo

EBAU junio 2023
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indique en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderá**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B+I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2×2)

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.

(b) **(0.5 puntos)** Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.

(c) **(1.25 puntos)** Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

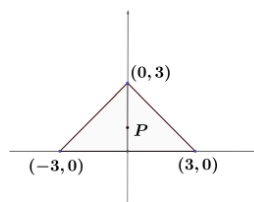
Problema 3. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área de dicho recinto.

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.





Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de
Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2022-2023

Problema 5. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a - 3)z = 4$,

(a) **(1.25 puntos)** Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π .

(b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

Problema 6. Dados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 4, -4)$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) **(0.5 puntos)** Calcula la distancia de A a π

(c) **(0.5 puntos)** Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Problema 7. Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60% de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25% en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1% de los fabricados en España, el 0.5% de los fabricados en Francia y el 2% de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) **(1.25 puntos)** Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Problema 8. En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) **(1.25 puntos)** La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo $[75, 85]$.

(b) **(1.25 puntos)** Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

SOLUCIONES

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B+I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2×2)

a) Despejamos X de la ecuación matricial: $A \cdot X = 2X \Rightarrow A \cdot X - 2X = 0 \Rightarrow (A - 2I)X = 0$

Convertimos la ecuación matricial en un sistema de ecuaciones.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = x \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + z + y - z = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0 + z = z} \\ x + 0 - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

b) Despejamos M de la ecuación matricial.

$$M(B+I) = 2I \Rightarrow M = 2I(B+I)^{-1} = 2(B+I)^{-1}$$

Comprobamos que la matriz $B + I$ tiene inversa y la calculamos.

$$B + I = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |B + I| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 18 = -2 \neq 0$$

Al ser distinto de cero el determinante existe la inversa. La calculamos

$$(B + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B + I)^T)}{|B + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y determinamos la expresión de la matriz M .

$$M = 2(B + I)^{-1} = 2 \cdot \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = M$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.

(b) **(0.5 puntos)** Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.

(c) **(1.25 puntos)** Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

a) La matriz D es de dimensiones $m \times n$.

$$A \cdot D \cdot B =$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot m} \times \boxed{n \cdot 2} \times 3 \rightarrow 3 \times 3$$

Para que sea posible el producto $A \cdot D$ debe ser $m = 2$. Número de columnas de A (2) debe ser igual al número de filas de D (m).

Para que sea posible el producto $D \cdot B$ debe ser $n = 2$. Número de columnas de D (n) debe ser igual al número de filas de B (2).

La matriz M debe ser de dimensiones 2×2

b) La matriz M tiene dimensiones $m \times n$.

$$M \cdot A = B$$

$$m \times \boxed{n \cdot 3} \times 2 \rightarrow m \times 2$$

Para que sea posible el producto $M \cdot A$ debe ser $n = 3$. El resultado del producto tiene dimensiones $m \times 2$. Como la matriz B es de dimensiones 2×3 no es posible la igualdad al tener la matriz B 3 columnas y el resultado del producto tiene 2 columnas.

c) Para que exista la inversa su determinante debe ser no nulo.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 & 1+1+2 \\ -2+0+0 & -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero existe la inversa de la matriz $B \cdot A$. La calculamos.

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B \cdot A)^T)}{|B \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ g(x) = x^2 + x - 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 = x^2 + x - 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

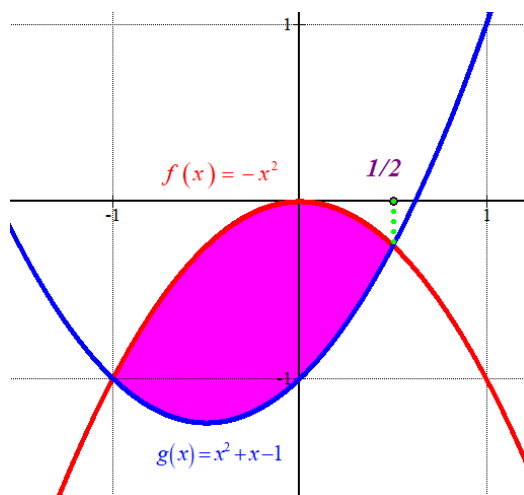
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} = x \\ \frac{-1-3}{4} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de cada parábola y dibujamos el recinto limitado por ellas.

x	$f(x) = -x^2$
-1	-1
0	0
1/2	-0.25
1	-1

x	$g(x) = x^2 + x - 1$
-1	-1
0	-1
1/2	-0.25
1	1

$$x \in (-1, 0.5) \rightarrow f(x) > g(x)$$



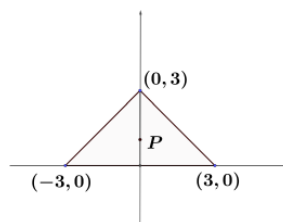
b) Hallamos el área del recinto como el valor de la integral definida entre -1 y 0.5 de la diferencia de las dos funciones ($f(x) - g(x)$).

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^{0.5} -x^2 - (x^2 + x - 1) dx = \int_{-1}^{0.5} -x^2 - x^2 - x + 1 dx = \int_{-1}^{0.5} -2x^2 - x + 1 dx = \left[-2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{0.5} = \\ &= \left[-2\frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^2}{2} + 0.5 \right] - \left[-2\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 1 \right] = -\frac{0.25}{3} - \frac{0.25}{2} + 0.5 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{9}{8} = 1.125 u^2} \end{aligned}$$

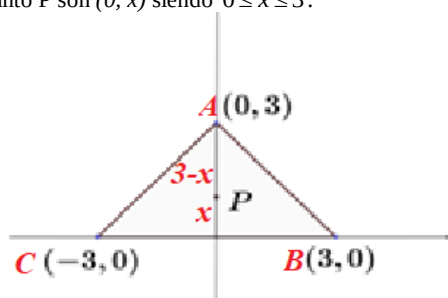
El área del recinto es 1.125 unidades cuadradas.

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Las coordenadas del punto P son $(0, x)$ siendo $0 \leq x \leq 3$.



Distancia de P al punto A(0, 3) $\rightarrow d(P, A) = 3 - x$

Distancia de P al punto B(3, 0):

$$\left. \begin{array}{l} P(0, x) \\ B(3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = (3, 0) - (0, x) = (3, -x)$$

$$d(P, B) = |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{3^2 + (-x)^2} = \sqrt{9 + x^2}$$

Distancia de P al punto C(-3, 0):

$$\left. \begin{array}{l} P(0, x) \\ C(-3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = (-3, 0) - (0, x) = (-3, -x)$$

$$d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-x)^2} = \sqrt{9 + x^2}$$

La suma de las tres distancias es $d(x) = 3 - x + \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{9 + x^2} = 3 - x + 2\sqrt{9 + x^2}$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$d(x) = 3 - x + 2\sqrt{9 + x^2} \Rightarrow d'(x) = -1 + 2 \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} = -1 + \frac{2x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} d'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} \\ d'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} = 1 \Rightarrow 2x = \sqrt{9+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x)^2 = (\sqrt{9+x^2})^2 \Rightarrow 4x^2 = 9+x^2 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \{x \in [0,3]\} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, \sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $d'(1) = -1 + \frac{2}{\sqrt{9+1^2}} = -0.36 < 0$.

La función decrece en $(0, \sqrt{3})$

- En el intervalo $(\sqrt{3}, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $d'(2) = -1 + \frac{4}{\sqrt{9+2^2}} = 0.11 > 0$.

La función crece en $(\sqrt{3}, 3)$

Como la función decrece antes del valor y crece después podemos afirmar que la función presenta un mínimo en $x = \sqrt{3}$.

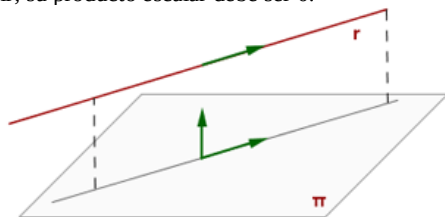
El punto P tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima es $P(0, \sqrt{3})$

Problema 5. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a - 3)z = 4$,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π .

(b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

a) Para que r y π sean paralelos el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.



$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 0)$$

$$\pi \equiv ax + 2y + (a - 3)z = 4 \Rightarrow \vec{n} = (a, 2, a - 3)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, -1, 0) \cdot (a, 2, a - 3) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Recta y plano son paralelos o secantes cuando $a = 2$.

Comprobamos que la recta no está contenida en el plano viendo que el punto $P(2, -1, 1)$ perteneciente a la recta no está en el plano.

$$a = 2 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z = 4$$

$$¿P(2, -1, 1) \in \pi? \Rightarrow ¿2 \cdot 2 + 2(-1) - 1 = 4? \Rightarrow ¿1 = 4? \quad \text{¡No se cumple!}$$

Recta y plano son paralelos para $a = 2$.

Para $a = 2$ hallamos la distancia de la recta al plano como la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P_r(2, -1, 1) \\ \pi &\equiv 2x + 2y - z - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2(-1) - 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{3} = \boxed{1}$$

La distancia de la recta al plano es 1 unidad.

b) Para $a = 1$ la recta r y el plano no son paralelos son secantes.

El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π pasa por el punto $P_r(2, -1, 1)$ de la recta r y tiene como vectores directores el vector director de la recta (la contiene) y el vector normal del plano π (es perpendicular a π).

$$\pi \equiv x + 2y - 2z = 4 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (1, 2, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(2, -1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(y+1) - (z-1) - 2(z-1) - 2(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y - 2 - z + 1 - 2z + 2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -2x - 2y - 3z + 5 = 0}$$

Problema 6. Dados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 4, -4)$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) **(0.5 puntos)** Calcula la distancia de A a π

(c) **(0.5 puntos)** Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

a) Este plano debe pasar por el punto medio del segmento AB y su vector normal es el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) - (1, 0, 0) = (-2, 4, -4)$$

$$PM_{AB} = \frac{(-1, 4, -4) + (1, 0, 0)}{2} = (0, 2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) \\ PM_{AB}(0, 2, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : -2x + 4y - 4z + D = 0 \\ PM_{AB}(0, 2, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 4(-2) + D = 0 \Rightarrow D = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : -2x + 4y - 4z - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + 2z + 8 = 0}$$

b) La distancia del punto A al plano hallado es la mitad de la distancia entre los puntos A y B.

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\boxed{d(A, \pi) = \frac{d(A, B)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ unidades}}$$

c) La recta s que pasa por A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$ y contiene el punto A(1, 0, 0).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) \\ A(1, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-4}}$$

Problema 7. Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60% de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25% en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1% de los fabricados en España, el 0.5% de los fabricados en Francia y el 2% de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

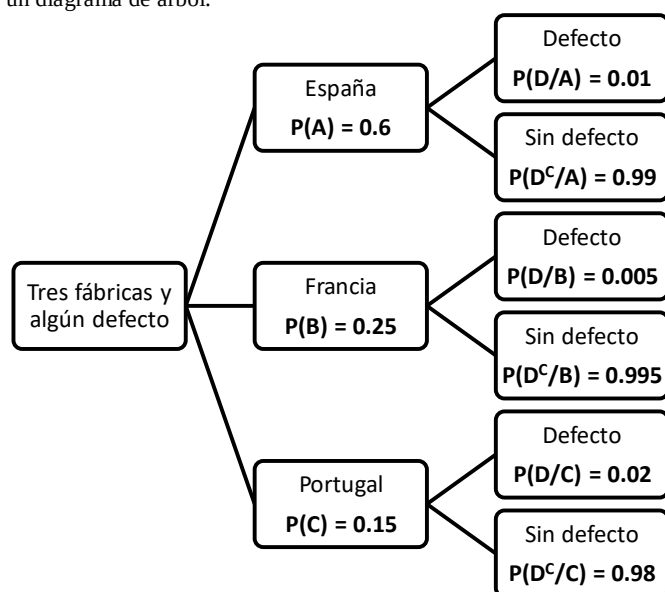
(b) **(1.25 puntos)** Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Llamamos A = “el producto procede de España”, B = “el producto procede de Francia”, C = “el producto procede de Portugal”, D = “El producto tiene algún defecto”,

Las probabilidades son $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.15$.

$P(D/A) = 0.01$, $P(D/B) = 0.005$, $P(D/C) = 0.02$

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.01 + 0.25 \cdot 0.005 + 0.15 \cdot 0.02 = \boxed{0.01025}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.15 \cdot 0.02}{0.01025} = \boxed{\frac{12}{41} \approx 0.2927}$$

Problema 8. En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

- (a) **(1.25 puntos)** La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].
 (b) **(1.25 puntos)** Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene, pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

Sea $X =$ Puntuación de los candidatos. $X = N(70, 10)$.

- a) Nos piden calcular $P(75 \leq X \leq 85)$.

$$\begin{aligned} P(75 \leq X \leq 85) &= P(X \leq 85) - P(X \leq 75) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{85 - 70}{10}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{75 - 70}{10}\right) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0.5) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.5) = 0.6915 \\ F(1.5) = 0.9332 \end{array} \right\} = 0.9332 - 0.6915 = \boxed{0.2417} \end{aligned}$$

- b) Tenemos $X = N(\mu, 10)$.

Sabemos que $P(X \geq 90) = 0.05$, por lo que $P(X \leq 90) = 1 - 0.05 = 0.95$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 90) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{90 - \mu}{10}\right) = 0.95 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(1.645) = 0.95 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{90 - \mu}{10} &= 1.645 \Rightarrow 90 - \mu = 16.45 \Rightarrow 90 - 16.45 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 73.55} \end{aligned}$$

El nuevo valor de la media es 73.55 que es mayor que la media inicial de 70 puntos. La media ha aumentado.



Universidad de Oviedo

EBAU julio 2022
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A. Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x .
- (c) **(0.75 puntos)** Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

BLOQUE 1.B. Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{array} \right\}$$

- (a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

BLOQUE 2.A. Considera la función $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula el dominio de f y sus asíntotas.
- (b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

BLOQUE 2.B. Dada la función $f(x) = -\sin(2x) + 1$.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.
- (b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de
Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

BLOQUE 3.A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula $\vec{v}_r$ un vector director de r .

(b) (1 punto) Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v}_r$ es proporcional a $\vec{v}$.

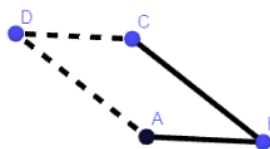
(c) (1 punto) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s' , siendo $s' \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z$

BLOQUE 3.B. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C .

(b) (1 punto) Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo y el área de $ABCD$.

(c) (1 punto) Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E .



BLOQUE 4.A. En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres. El 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.

(a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

(b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

(c) (1.25 puntos) Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

BLOQUE 4.B. Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.

(a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.

(b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1,85m?

(c) (1 punto) Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90 m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.1538) = 0.5596$, $F(0.65) = 0.7422$, $F(0.385) = 0.65$.)

SOLUCIONES

BLOQUE 1.A. Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x .
 (c) **(0.75 puntos)** Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

- (a) La matriz A no tiene inversa si su determinante es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 + 3 + 4 + 2x - 2 - 1 - 6 = x - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La matriz A no tiene inversa para $x = 1$.

- (b) Hemos visto que el determinante de A se anula para $x = 1$. Por lo tanto, el rango de A es 3 si $x \neq 1$. Averiguamos el rango de A para $x = 1$.

Si $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la fila y columna terceras y comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto el rango

de A es 2 $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Resumiendo: Si $x \neq 1$ el rango de A es 3 y si $x = 1$ el rango de A es 2.

- (c) Si $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A \cdot B$ es posible pues coinciden el número de columnas de A con el número de filas de B .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1-2 \\ -1+0-3 \\ 1-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

$A \cdot C$ no es posible pues no coinciden el número de columnas de A con el número de filas de C .

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{¡Imposible!}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow \text{¡Imposible!}$

BLOQUE 1.B. Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{cases}$$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

(a) Usando el método de Gauss obtenemos un sistema equivalente al dado pero más fácil de estudiar.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 3x + 3y + 2z = m \\ -3x - 6y - 3z = 3 \\ \hline -3y - z = 3 + m \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 4y + 2z = -2 \\ -2x - y - z = -1 \\ \hline 3y + z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \\ -3y - z = 3 + m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -3y - z = 3 + m \\ 3y + z = -3 \\ \hline 0 = m \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \\ 0 = m \end{cases}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Si $m = 0$ tenemos que el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Este sistema es compatible

indeterminado (infinitas soluciones). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = -3 - 3y \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 3 - 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2y = 4 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2 + y} \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Si $m \neq 0$ el sistema queda
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ 3y + z = -3 \\ 0 = m \end{array} \right\} \text{¡Imposible!}. \text{ El sistema es incompatible (sin solución).}$$

(b) Como para $m = 0$ las soluciones son $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ buscamos en estas infinitas soluciones si es posible que $z = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 = -3 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}}$$

Si es posible. La solución es: $x = 0, y = -2, z = 3$.

BLOQUE 2.A. Considera la función $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula el dominio de f y sus asíntotas.
 (b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 (c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

- (a) El dominio de f son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{1-x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{2}{0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{2}{0-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1-x} + 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 2x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{2}{0-1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = -2x - 2$.

- (b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{2x^2}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(1-x) - 2x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{4x - 4x^2 + 2x^2}{(1-x)^2} = \frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 4x - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos $x = 1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-4 - 2(-1)^2}{(1 - (-1))^2} = \frac{-2}{4} < 0$

. La función decrece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2 - 2 \cdot 0.5^2}{(1 - 0.5)^2} = \frac{1.5}{0.25} > 0$.

La función crece en $(0, 1)$.

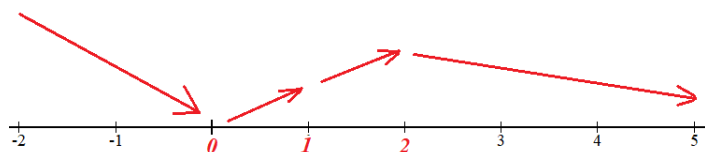
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{6 - 2 \cdot 1.5^2}{(1 - 1.5)^2} = \frac{1.5}{0.25} > 0$.

La función crece en $(1, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{12 - 2 \cdot 3^2}{(1 - 3)^2} = \frac{-6}{4} < 0$. La

función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = \frac{0}{1-0} = 0$ y $f(2) = \frac{2 \cdot 2^2}{1-2} = -8$ las coordenadas del mínimo relativo son $(0, 0)$ y del máximo relativo son $(2, -8)$.

Para buscar los puntos de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(4-4x)(1-x)^2 - (4x-2x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} \Rightarrow$$

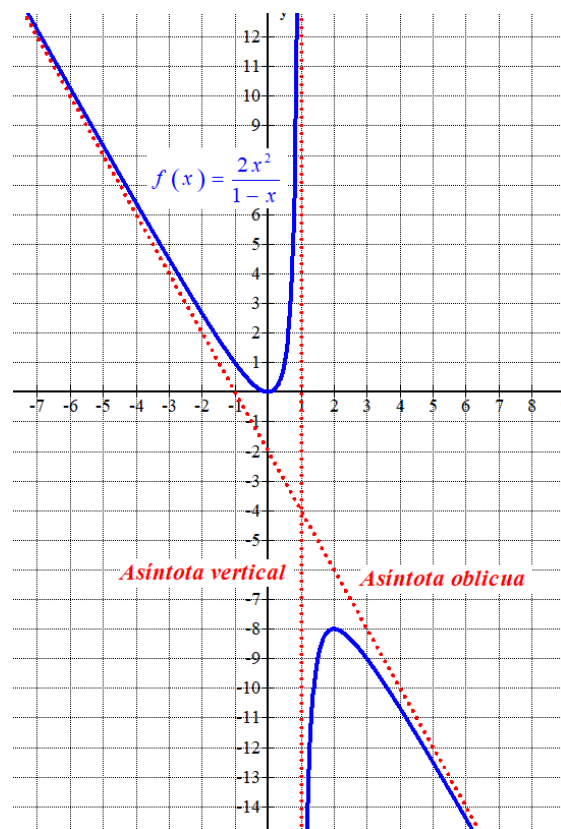
$$f''(x) = \frac{(1-x)[(4-4x)(1-x) + 2(4x-2x^2)]}{(1-x)^4} = \frac{[4-4x-4x+4x^2+8x-4x^2]}{(1-x)^3} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow 4 = 0 \text{ ¡Imposible!}$$

La función no tiene puntos de inflexión. La función cambia de curvatura en $x = 1$ que no pertenece al dominio de definición de la función.

(c) Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$y = \frac{2x^2}{1-x}$
-2	$8/3$
0	0
0.5	1
1.5	-9
2	-8
3	-9



BLOQUE 2.B. Dada la función $f(x) = -\sin(2x) + 1$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) = \int -\sin(2x) + 1 dx = \frac{\cos(2x)}{2} + x + K$$

Como debe pasar por el punto $(0, 0)$ tenemos que debe cumplirse que $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{\cos(2x)}{2} + x + K \\ F(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{\cos(0)}{2} + 0 + K \Rightarrow \boxed{K = -\frac{1}{2}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}$

(b) Comprobamos si la función corta el eje X.

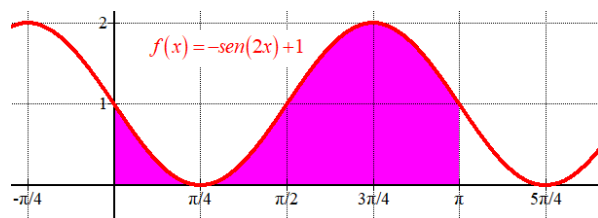
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -\sin(2x) + 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\sin(2x) + 1 = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0, \pi) \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin (0, \pi) \end{cases}$$

A pesar de tener este punto de corte con el eje X la función $f(x) = -\sin(2x) + 1$ es siempre positiva pues el seno de un ángulo siempre es menor que 1.

El área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ se calcula como la integral definida entre 0 y π de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} -\sin(2x) + 1 dx = \left[\frac{\cos(2x)}{2} + x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left[\frac{\cos(2\pi)}{2} + \pi \right] - \left[\frac{\cos(0)}{2} + 0 \right] = \frac{1}{2} + \pi - \frac{1}{2} = \boxed{\pi u^2} \end{aligned}$$

No pide representarla, pero lo hacemos como comprobación de la solución.



BLOQUE 3.A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=-\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1,1,1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula $\vec{v}_r$ un vector director de r.

(b) (1 punto) Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v}_r$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) (1 punto) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s', siendo $s' \equiv x-1 = \frac{y-1}{-2} = z$

$$(a) \ r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=-\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1,0,-1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases}$$

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1,0,-1)$

(b) Como la recta s es perpendicular a r y al vector $\vec{v} = (1,1,1)$ un vector director de s es el producto vectorial del vector director de r y $\vec{v} = (1,1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1,1,1) \\ \vec{v}_r = (1,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = \vec{v} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i + j - k + j = -i + 2j - k = (-1, 2, -1)$$

El vector buscado es $\vec{u}_s = (-1, 2, -1)$

(c) Las rectas r y s' deben cortarse o ser paralelas para definir un plano.

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=-\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1,0,-1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases}$$

$$s' \equiv x-1 = \frac{y-1}{-2} = z \Rightarrow s' \equiv \begin{cases} \vec{w}_{s'} = (1,-2,1) \\ Q_{s'}(1,1,0) \end{cases}$$

Como comprobamos se cortan en el punto $P_r = Q_{s'}$.

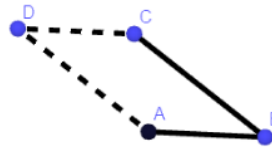
Calculamos la ecuación del plano que las contiene considerando que el punto P_r pertenece al plano y que sus vectores directores son los vectores directores de las rectas.

$$\pi \equiv \begin{cases} P_r(1,1,0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,0,-1) \\ \vec{v} = \vec{w}_{s'} = (1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y+1-2z-y+1-2x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -2x-2y-2z+4=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-2=0}$$

BLOQUE 3.B. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.
 (b) **(1 punto)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.
 (c) **(1 punto)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E.



- (a) El plano π que contiene a los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 6, 1) - (1, 0, 1) = (0, 6, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 5) - (1, 0, 1) = (-3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x - 24 + 18z - 18 = 0 \Rightarrow 24x + 18z - 42 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x + 3z - 7 = 0}$$

- (b) El punto $D(x, y, z)$ debe cumplir que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (1, 0, 1) - (1, 6, 1) = (0, -6, 0) \\ \overrightarrow{CD} = (x, y, z) - (-2, -1, 5) = (x+2, y+1, z-5) \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow (0, -6, 0) = (x+2, y+1, z-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ y+1=-6 \rightarrow y=-7 \\ z-5=0 \rightarrow z=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-2, -7, 5)}$$

El área del paralelogramo ABCD es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (0, -6, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (-2, -1, 5) - (1, 6, 1) = (-3, -7, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -24i - 18k = (-24, 0, -18)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-24)^2 + 0^2 + (-18)^2} = 30u^2$$

El área es $30 u^2$.

- (c) La recta r perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 4x + 3z - 7 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4, 0, 3)$$

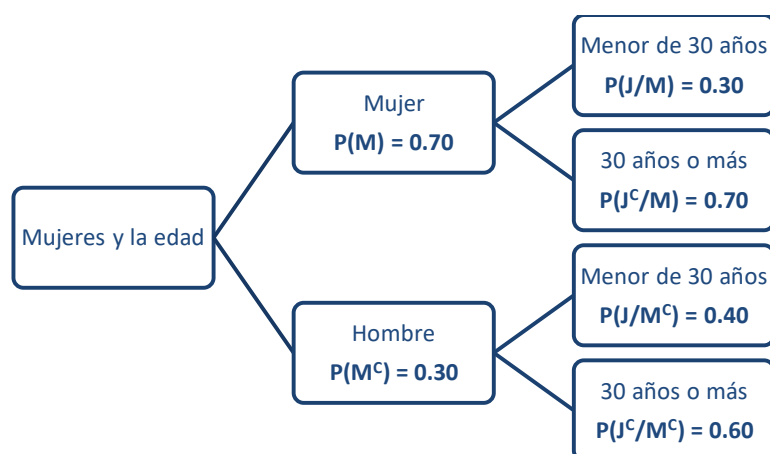
$$\left. \begin{array}{l} E(-1, 1, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

BLOQUE 4.A. En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres. El 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.
 (b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?
 (c) **(1.25 puntos)** Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Llamamos M = “Ser mujer” y J = “Ser menor de 30 años”

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(J) = P(M)P(J/M) + P(M^c)P(J/M^c) = 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.33}$$

(b) $P(M^c \cap J^c) = P(M^c)P(J^c/M^c) = 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.18}$

(c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M^c/J^c) = \frac{P(M^c \cap J^c)}{P(J^c)} = \frac{P(M^c)P(J^c/M^c)}{1 - P(J)} = \frac{0.18}{1 - 0.33} = \frac{18}{67} \approx 0.2687$$

BLOQUE 4.B. Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.
 (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1.85m?
 (c) **(1 punto)** Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

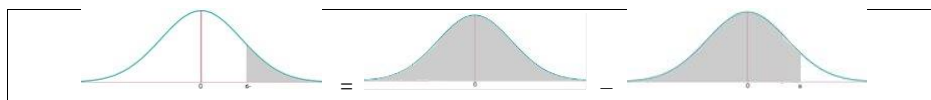
(Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.1538) = 0.5596$, $F(0.65) = 0.7422$, $F(0.385) = 0.65$.)

Sea X = La altura de la población adulta de una cierta ciudad. $X = N(1.75, 0.65)$.

a) Nos piden $P(X \geq 1.85)$.

$$P(X \geq 1.85) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{1.85 - 1.75}{0.65}\right) = P(Z \geq 0.1538) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.1538) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos proporcionados} \\ F(0.1538) = 0.5596 \end{array} \right\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$



b) Sabemos que $P(X \geq 1.85) = 0.4404$ por lo que en 10000 repeticiones debemos obtener $10000 \cdot 0.4404 = \boxed{4404}$ personas que midan más de 1.85 metros.

c) Sea X = La altura de la población adulta de una cierta ciudad. $X = N(1.75, \sigma)$.

$$\text{Sabemos que } P(X < 1.90) = \frac{6500}{10000} = 0.65$$

Calculamos esta probabilidad usando la distribución normal.

$$P(X < 1.90) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{1.90 - 1.75}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{0.15}{\sigma}\right) = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en los datos proporcionados} \\ F(0.385) = 0.65 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0.15}{\sigma} = 0.385 \Rightarrow \sigma = \frac{0.15}{0.385} = 0.3896$$



Universidad de Oviedo

EBAU junio 2022
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a .
- (b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
- (c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

BLOQUE 1.B. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ ax - 2y + z = 2 \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a .
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.
- (c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

BLOQUE 2.A. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.
- (b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.
- (c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

BLOQUE 2.B. Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

- (a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x) dx$



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de
Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

BLOQUE 3.A. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$ y s la recta

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

- (a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s .
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s .
 (c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

BLOQUE 3.B. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
 (b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

BLOQUE 4.A. Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.
 (b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas. ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

BLOQUE 4.B. El peso en kilos de la población de un cierto país sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.
 (b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6. ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

SOLUCIONES

BLOQUE 1.A. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

a)

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a + 2 + 0 + 2 - 0 - 2 = -a + 2$$

$$|P| = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de P es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 2$ el determinante de P es nulo y su rango es menor que 3.

Si $a = 2$ la matriz queda $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

¿El rango de P es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de suprimir la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo si $a = 2$ el rango de P es 2.

b) Para $a = 1$ el determinante de P es no nulo y existe su inversa.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 2 - 2 = 1 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^T)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$P \cdot P^{-1} = I \Rightarrow \begin{cases} |P \cdot P^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |P| \cdot |P^{-1}| = 1 \\ |P| = |P^{-1}| \end{cases} \Rightarrow |P| \cdot |P| = 1 \Rightarrow (|P|)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |P| = 1 \\ |P| = -1 \end{cases}$$

Existen dos posibilidades:

$$\begin{cases} |P| = -a + 2 \\ |P| = 1 \end{cases} \Rightarrow -a + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\begin{cases} |P| = -a + 2 \\ |P| = -1 \end{cases} \Rightarrow -a + 2 = -1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Se cumple lo pedido cuando $a = 1$ o $a = 3$.

BLOQUE 1.B. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ ax - 2y + z = 2 \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a .

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4a + 2 - 4 = 4a - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Distinguimos dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el rango de la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ a & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible

determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - 2y = 1 \\ \hline 2z = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y = -1 \\ \hline z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x = -1-2y \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $x = 0$ el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} -0+2y = -1 \\ -0+2y+2z=1 \\ a \cdot 0 - 2y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = -1 \\ 2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{-1}{2} \\ 2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1+2z=1 \\ 1+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z=2 \\ z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

La solución existe. Es $x = 0$, $y = \frac{-1}{2}$, $z = 1$. Para cualquier valor de a .

c) Si $a = 0$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+2z=1 \\ z=2+2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+2(2+2y)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+4+4y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+6y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y+1 = x \\ -x+6y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -2y-1+6y = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-2}{4} = -0.5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = -1+1 = 0} \\ \boxed{z = 2-1 = 1} \end{array} \right.$$

La solución es $x = 0$; $y = -0.5$; $z = 1$.

BLOQUE 2.A. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.
 (b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.
 (c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

- a) La función $f(x)$ es un cociente de polinomios, por lo tanto, el dominio es toda la recta real salvo los valores de x para los que se anule el denominador, es decir, $x = 1$.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{1^2 + 3}{1 - 1} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua.

- b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x - 1) - 1(x^2 + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Estudio el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores y el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

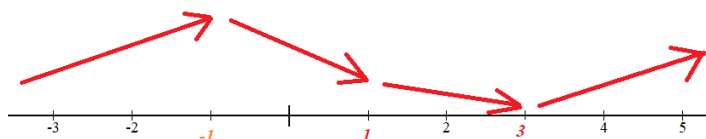
$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2(-2) - 3}{(-2-1)^2} = \frac{5}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1)$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0^2 - 0 - 3}{(0-1)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 - 4 - 3}{(2-1)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2 - 8 - 3}{(4-1)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$

La función sigue el esquema:



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Utilizamos la derivada segunda para estudiar la concavidad y convexidad.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 3)]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x + 6}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

La derivada segunda nunca se anula. Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 1$ (excluido del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{8}{(0-1)^3} = -8 < 0. \text{ La función es cóncava (n) en } (-\infty, 1).$$

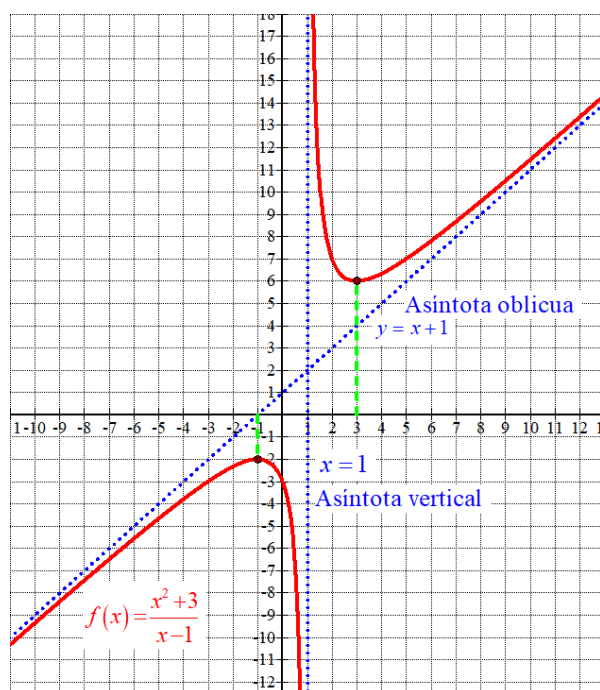
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = \frac{8}{(2-1)^3} = 8 > 0$.

La función es convexa (U) en $(1, +\infty)$.

La función es cóncava (n) en $(-\infty, 1)$ y convexa (U) en $(1, +\infty)$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$
-3	-3
-1	-2 Máximo relativo
0	-3
3	6 Mínimo relativo
5	7



BLOQUE 2.B. Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia:

Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x) dx$

a) Calculamos la integral indefinida de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x\sqrt{1-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right\} = \int x\sqrt{t} \frac{dt}{-2x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} = -\frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3} t^{3/2} = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + K$$

Como la primitiva debe pasar por el punto $(-1, 0)$ se debe cumplir que $F(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + K \\ F(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(-1) = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-(-1)^2)^3} + K = 0 \Rightarrow 0 + K = 0 \Rightarrow K = 0$$

La primitiva buscada es $F(x) = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3}$

b) Utilizamos la integral indefinida calculada en el apartado a).

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(1-1^2)^3} \right] - \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(1-0^2)^3} \right] = 0 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

BLOQUE 3.A. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$ y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

- (a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s .
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s .
 (c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

a) Hallamos el vector director de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

$$\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 2) - (1, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

El vector director de la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ es $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$

Como los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales las rectas no son coincidentes ni paralelas.

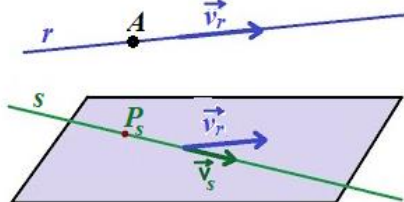
Para decidir si se cortan o cruzan calculamos el producto mixto $[\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{P_s A}]$ y vemos si es nulo o no. El punto P_s es un punto de la recta s y A es un punto de la recta r .

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow P_s(2, 2, 0) \left. \vphantom{\begin{matrix} s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \\ A(1, 0, 1) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_s A} = (1, 0, 1) - (2, 2, 0) = (-1, -2, 1)$$

$$\left. \begin{matrix} \overrightarrow{P_s A} = (-1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{P_s A}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 + 1 + 1 + 2 = 4 \neq 0$$

Como es distinto de cero las rectas se cruzan.

b) El plano paralelo a r y que contiene a s tiene como vectores directores el vector director de r y el vector director de s y contiene el punto P_s de la recta s .



$$\left. \begin{matrix} \vec{u} = \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P_s(2, 2, 0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+2+y-2+z+z-y+2-x+2=0 \Rightarrow -2x+2z+4=0 \Rightarrow \pi \equiv x-z-2=0$$

c) La distancia entre las rectas es igual que la distancia de la recta r al plano π obtenido en el apartado b). Y a su vez, es igual que la distancia del punto A al plano π .

$$d(r, s) = d(r, \pi) = d(A, \pi) = \left\{ \begin{matrix} \pi \equiv x - z - 2 = 0 \\ A(1, 0, 1) \end{matrix} \right\} = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u$$

BLOQUE 3.B. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .

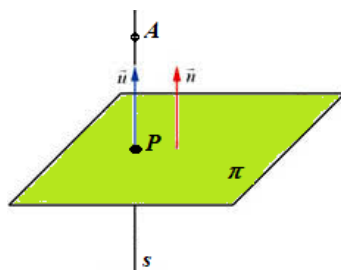
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 3 \rightarrow x = 3 - y \end{cases} \Rightarrow 3 - y + y + z = 3 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(3, 0, 0) \\ \vec{v}_r(-1, 1, 0) \end{cases}$$

b) Hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por A . El punto de intersección de esta recta y el plano π es el punto P buscado.



El vector normal del plano es el director de la recta s .

$$\pi \equiv x + y + z = 3 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

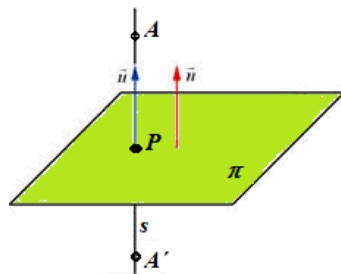
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(2, 1, 6) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P de intersección de la recta s y el plano π

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 3 \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \Rightarrow 3\lambda = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow P(0, -1, 4)$$

c) El punto A' simétrico de A respecto del plano es el resultado de sumarle al punto P el vector $\overrightarrow{AP}$.



$$\overrightarrow{AP} = (0, -1, 4) - (2, 1, 6) = (-2, -2, -2)$$

$$A' = P + \overrightarrow{AP} = (0, -1, 4) + (-2, -2, -2) = (-2, -3, 2)$$

El punto A' simétrico de A respecto del plano tiene coordenadas $A' = (-2, -3, 2)$.

BLOQUE 4.A. Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

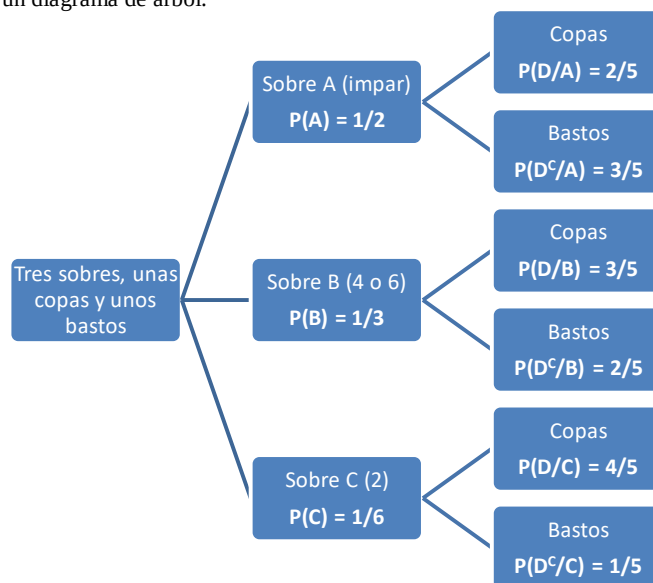
(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas. ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Llamamos A = “sacar impar con el dado”, B = “sacar 4 o 6”, C = “sacar 2”, D = “Sacar copas”, D^C = “sacar bastos”.

Las probabilidades son $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/6 = 1/3$, $P(C) = 1/6$, $P(D/A) = 2/5$, $P(D/B) = 3/5$, $P(D/C) = 4/5$

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D^C) = P(A)P(D^C/A) + P(B)P(D^C/B) + P(C)P(D^C/C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{7}{15} \approx 0.47}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1 - P(D^C)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{7}{15}} = \boxed{\frac{3}{8} = 0.375}$$

BLOQUE 4.B. El peso en kilos de la población de un cierto país sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

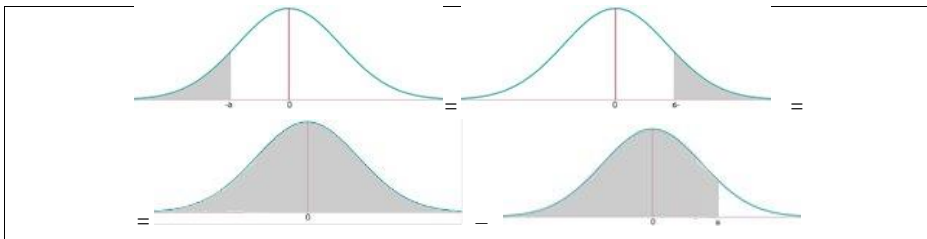
(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6. ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

Sea X = El peso en kilos de la población de un cierto país. $X = N(70, 10)$.

a) Nos piden $P(65 \leq X \leq 75)$.

$$\begin{aligned}
 P(65 \leq X \leq 75) &= P(X \leq 75) - P(X \leq 65) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{75 - 70}{10}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{65 - 70}{10}\right) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.5) = \\
 &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \geq 0.5) = P(Z \leq 0.5) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.5) = 0.6915 \end{array} \right\} = \\
 &= 0.6915 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.3830}
 \end{aligned}$$



b) Tenemos $X = N(\mu, 10)$

Y sabemos que $P(X \leq 75) = 0.6$ por lo que:

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 75) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{75 - \mu}{10}\right) = 0.6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.15) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \frac{75 - \mu}{10} &= 0.15 \Rightarrow 75 - \mu = 1.5 \Rightarrow 75 - 1.5 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 73.5}
 \end{aligned}$$



Universidad de Oviedo

EBAU julio 2021
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

$$\left. \begin{array}{rcl} ax & + & z = a \\ 2x - y - z & = & -1 \\ x & + & az = a \end{array} \right\} a \in \mathbb{R}.$$

- Bloque 1.A** Dado el sistema de ecuaciones
- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a . (1.5 puntos)
- b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

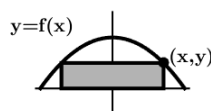
Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

- a) Si existe, su inversa. (1 punto)
- b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
 $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

- a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)
- b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$; la recta $y=1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



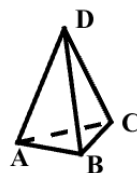


Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$. Calcula:

- El área del triángulo limitado por los puntos A , B y C . (0.5 puntos)
- La ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C . (0.75 puntos)
- El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)
- Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π . (0.5 puntos)



Bloque 3.B. Sean el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r . (0.75 puntos)
- La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)
- La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r . (0.75 puntos)

Bloque 4.A. Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

- La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)
- La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)
- La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

- La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)
- Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50% se alcanza en el valor $X \leq 35$, y la probabilidad del 75% se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(0) = 0.5$; $F(0.6745) = 0.75$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(1) = 0.8413$; $F(1.375) = 0.9154$; $F(1.5) = 0.9332$; $F(2) = 0.9772$)

SOLUCIONES

$$\text{Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones } \left. \begin{array}{rcl} ax & + & z = a \\ 2x - y - z & = & -1 \\ x & + & az = a \end{array} \right\} a \in \mathbb{R}.$$

- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a . (1.5 puntos)
 b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{array} \right)$

Hallamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz ampliada en otra matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -3 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Observando la matriz vemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como son distintos el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz ampliada en otra matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -3 & -3 \\ \hline \text{Nueva Fila } 2^a & & & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a & & & \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Observando la matriz transformada vemos que el rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero distintos del número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ El sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Es compatible indeterminado para $a=1$.

Lo resolvemos a partir de la matriz triangular equivalente a A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \\ x + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ -y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ -y = -3 + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 3 - 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa.

(1 punto)

b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:

$$(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \quad (I_3 \text{ matriz identidad de orden 3}).$$

(1.5 puntos)

a) Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 2 - 4 = -1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \Rightarrow (X + A)(X + A) - X^2 - XA = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{X^2} + \cancel{XA} + AX + A^2 - \cancel{X^2} - \cancel{XA} = I_3 \Rightarrow AX + A^2 = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = I_3 - A^2 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}I_3 - A^{-1}AA \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} - A}$$

Sustituimos los valores de las matrices.

$$X = A^{-1} - A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

- a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)
- b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$; la recta $y=1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{0^2} = 1 - \infty = -\infty$$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 0 + 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La función no presenta puntos críticos.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (discontinuidad de la función).

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función no presenta máximos ni mínimos relativos.

Intervalos de concavidad y convexidad.

Hallamos la segunda derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^4} = 0 \Rightarrow 6 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 0$ (discontinuidad de la función).

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = \frac{6}{(-1)^4} = 6 > 0$. La

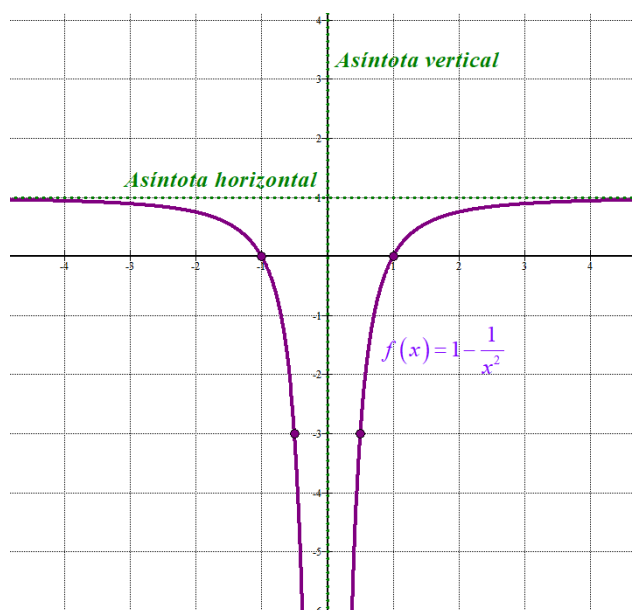
función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.

- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6 > 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava en todo su dominio.

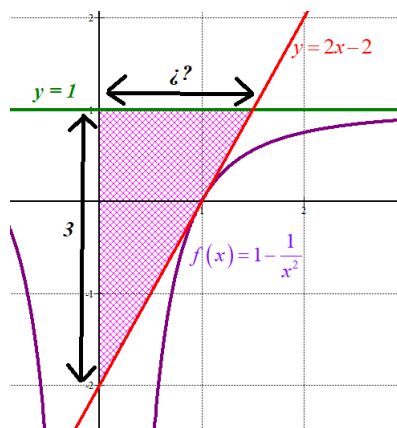
Añadimos una tabla de valores y esbozamos su gráfica.

x	$y = 1 - \frac{1}{x^2}$
-2	0.75
-1	0
-0.5	-3
0.5	-3
1	0
2	0.75



b) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 - \frac{1}{1^2} = 0 \\ f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 2}$$

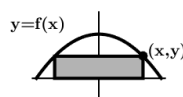


La región es un triángulo de altura 3 y nos falta determinar la base como el punto de corte de las rectas $y=1$, $y=2x-2$.

$$\left. \begin{array}{l} y=2x-2 \\ y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1=2x-2 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}=1.5$$

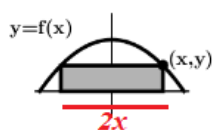
El área de la región pintada de rosa es $\frac{3 \cdot 1.5}{2} = 2.25 u^2$

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Si la función es $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$ veamos cual es el dominio de definición.

$$\frac{36 - x^2}{3} \geq 0 \Rightarrow 36 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (6 - x)(6 + x) \geq 0 \Rightarrow x \in (-6, 6)$$



El área de la pantalla es base por altura $\rightarrow A(x, y) = 2xy$

Como los puntos (x, y) son los de la gráfica de $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3}$ entonces tenemos que el área depende solo del valor de x .

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = 2xy \\ y = 12 - \frac{x^2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2x \left(12 - \frac{x^2}{3} \right) = 24x - \frac{2x^3}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$A(x) = 24x - \frac{2x^3}{3} \Rightarrow A'(x) = 24 - 2x^2 = 24 - 2x^2$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 24 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Tomamos el valor positivo $x = +\sqrt{12} \approx 3.46$, que es un punto crítico de la función y está en el intervalo $(-6, 6)$.

Calculamos la segunda derivada y sustituimos $x = +\sqrt{12}$ para comprobar si es máximo.

$$A'(x) = 24 - 2x^2 \Rightarrow A''(x) = -4x \Rightarrow A''(\sqrt{12}) = -4\sqrt{12} < 0$$

La función $A(x)$ presenta un máximo relativo en $x = +\sqrt{12}$.

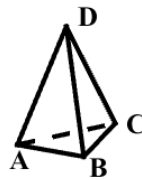
También es absoluto en el intervalo $(-6, 6)$ pues $f(6) = 12 - \frac{6^2}{3} = 0$.

Como $f(\sqrt{12}) = 12 - \frac{(\sqrt{12})^2}{3} = 12 - 4 = 8$ el punto buscado es $(\sqrt{12}, 8)$.

Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$,

$B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$. Calcula:

- a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)
 b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)
 c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)
 d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π . (0.5 puntos)



- a) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12, 18, 6)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \approx 11.225 \text{ u}^2$$

- b) El plano pedido tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y pasa por el punto A.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12x - 36 + 6z + 18y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$$

- c) Para que sea $\overrightarrow{AD}$ perpendicular al plano deben ser el vector normal del plano y $\overrightarrow{AD}$ vectores con coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (\alpha, 3, 1) - (3, 0, 0) = (\alpha - 3, 3, 1) \\ \pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha - 3}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{\alpha - 3}{2} = 1 \Rightarrow \alpha - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$$

$\vec{n}$ y $\overrightarrow{AD}$ con coordenadas proporcionales

- d) Hallamos la ecuación de la recta t perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$ que pasa por el punto $D(5, 3, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} D(5, 3, 1) \in t \\ \vec{v}_t = \vec{n} = (2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta t y el plano π .

$$t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

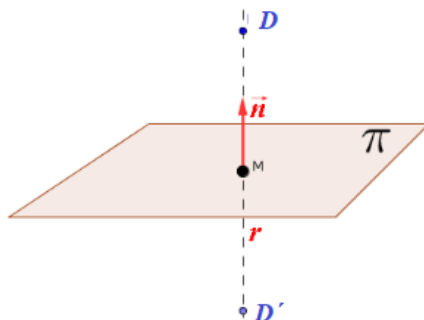
$$\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2(5 + 2\alpha) + 3(3 + 3\alpha) + 1 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 4\alpha + 9 + 9\alpha + 1 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\alpha + 14 = 0 \Rightarrow 14\alpha = -14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 = 3 \\ y = 3 - 3 = 0 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3, 0, 0)$$



El punto simétrico $D'(a, b, c)$ es un punto tal que el vector $\overrightarrow{D'M} = \overrightarrow{MD}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{D'M} &= (3, 0, 0) - (a, b, c) = (3 - a, -b, -c) \\ \overrightarrow{MD} &= (5, 3, 1) - (3, 0, 0) = (2, 3, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3 - a, -b, -c) = (2, 3, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 2 \rightarrow a = 1 \\ -b = 3 \rightarrow b = -3 \\ -c = 1 \rightarrow c = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D'(1, -3, -1) \text{ Simétrico de D respecto del plano } \pi}$$

OTRA FORMA MÁS FÁCIL Y MÁS RÁPIDA

Como el vector $\overrightarrow{AD}$ para $\alpha = 5$ es perpendicular al plano π el punto M del dibujo superior es el punto A (de hecho nos ha salido ese punto), por lo que el punto D' es el resultado de la suma del punto A y el vector $\overrightarrow{DA}$.

$$\overrightarrow{DA} = (3, 0, 0) - (5, 3, 1) = (-2, -3, -1) \Rightarrow D' = A + \overrightarrow{DA} = (3, 0, 0) + (-2, -3, -1) \Rightarrow \boxed{D' = (1, -3, -1)}$$

Bloque 3.B. Sean el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r . (0.75 puntos)
 b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)
 c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r . (0.75 puntos)

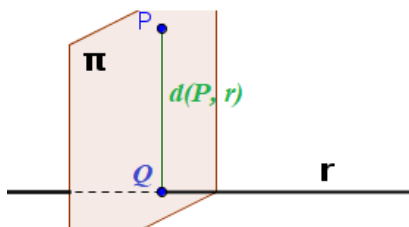
a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-y \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P .

Determinamos el punto Q de corte de recta y plano.

La distancia entre P y r es el módulo del vector que une los puntos P y Q .



Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{u}_r = (-1, 0, 1) \left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv -x + z + D = 0 \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + z + D = 0 \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x + z = 0}$$

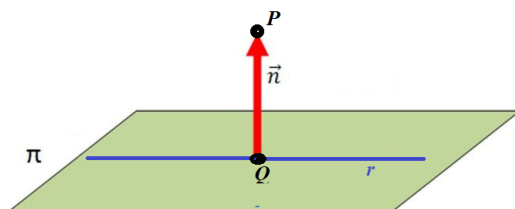
Determinamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + z = 0 \\ r: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(0, 0, 0)}$$

La distancia entre P y r es el módulo del vector que une los puntos P y Q .

$$\overrightarrow{QP} = (1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (1, 0, 1) \Rightarrow d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

- c) Tenemos que hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta r y que es perpendicular al vector $\overrightarrow{QP}$.



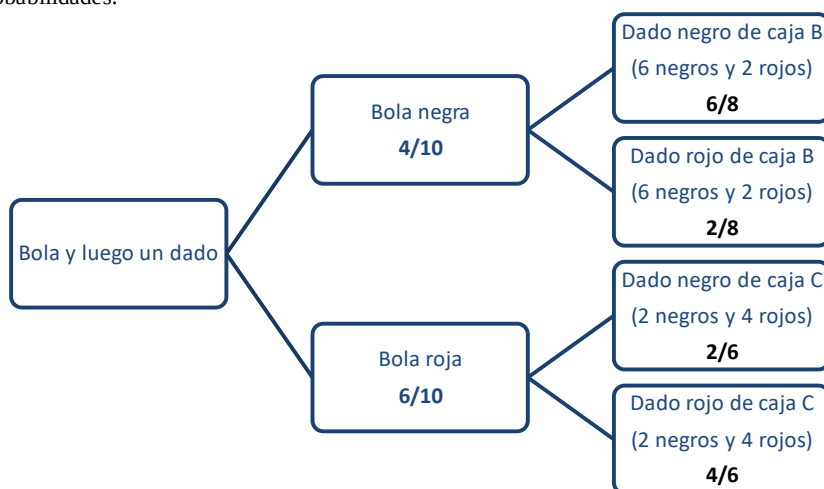
Este plano tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{QP}$ y pasa por el punto Q.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{QP} = (1, 0, 1) \\ Q(0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + z + D = 0 \\ Q(0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + z = 0}$$

Bloque 4.A. Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos. En la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

- a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)
 b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)
 c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Hacemos un diagrama de árbol para establecer las distintas opciones que pueden ocurrir y sus probabilidades.



Llamamos BN a “Sacar bola negra” BR a “Sacar bola roja” y DN a “Sacar dado negro” y DR a “Sacar dado rojo”.

a)

$$P(BR \cap DR) = P(BR)P(DR / BR) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{5} = 0.4$$

b) Para que sean del mismo color debe ser bola y dado rojo o bola y dado negro.

$$P((BR \cap DR) \cup (BN \cap DN)) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DN) =$$

$$= 0.4 + P(BN)P(DN / BN) = 0.4 + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{8} = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

c) Que salga el dado rojo puede ocurrir de dos formas: bola roja y dado rojo o bola negra y dado rojo.

$$P(\text{Dado rojo}) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DR) = 0.4 + P(BN)P(DR / BN) =$$

$$= 0.4 + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{8} = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

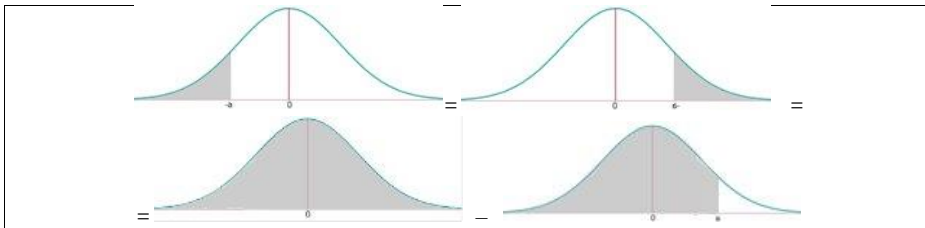
Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50% se alcanza en el valor $X \leq 35$, y la probabilidad del 75% se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

a) Sea $X = N(30, 10)$.

$$P(X \leq 20) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{20 - 30}{10}\right) = P(Z \leq -1) = \dots$$



$$\dots = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

b) Tenemos $X = N(\mu, \sigma)$

Y sabemos que $P(X \leq 35) = 0.5$ y que $P(X \leq 40) = 0.75$, por lo que:

$$P(X \leq 35) = P\left(Z \leq \frac{35 - \mu}{\sigma}\right) = 0.5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{35 - \mu}{\sigma} = 0}$$

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40 - \mu}{\sigma}\right) = 0.75 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.6745) = 0.75 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{40 - \mu}{\sigma} = 0.6745}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{35 - \mu}{\sigma} = 0 \\ \frac{40 - \mu}{\sigma} = 0.6745 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 35 - \mu = 0 \\ 40 - \mu = 0.6745\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 35 \\ 40 - \mu = 0.6745\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 40 - 35 = 0.6745\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{5}{0.6745} = 7.413}$$

La nueva media es $\mu = 35$ y la desviación típica es $\sigma = 7.413$.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(0) = 0.5$; $F(0.6745) = 0.75$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(1) = 0.8413$; $F(1.375) = 0.9154$; $F(1.5) = 0.9332$; $F(2) = 0.9772$)



Universidad de Oviedo

EBAU junio 2021
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

- Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)
- Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)
- ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Bloque 1.B. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)
- Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)
- Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A . (1 punto)

Bloque 2.A. Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

- Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)
- Para $a = 1$, $b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Bloque 2.B. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A. Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z$ y $s: \begin{cases} x+2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

- Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)
- Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r . Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)
- Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Bloque 3.B. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ Halla:

- Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B . (1.25 puntos)
- El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r . (1.25 puntos)

Bloque 4.A. En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60% de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3% y del segundo es del 8 %.

- Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)
- Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

- La probabilidad de que $X \in [6, 10]$. (1.5 puntos)
- Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80% se alcanza en el valor $X \leq 12$: ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(0) = 0.5$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(1) = 0.8413$; $F(1.25) = 0.8944$; $F(1.375) = 0.9154$; $F(1.5) = 0.9332$; $F(2) = 0.9772$)

SOLUCIONES

Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)
- b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

- a) Considerando, en euros, “x” el precio de un viaje al Caribe, “y” el precio de un viaje a las Maldivas y “z” el precio de un viaje a Tailandia, tenemos que:

“A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros” $\rightarrow 10x + 10y + 10z = 12000$

“A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros” $\rightarrow 10x + 20z = 13000$

“A una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros” $\rightarrow 10x + 10y = 7000$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x + y = 700 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x + y = 700 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x = 700 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 700 - y + y + z = 1200 \\ 700 - y + 2z = 1300 \\ -y + 2z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = 500}$$

$$\Rightarrow -y + 1000 = 600 \Rightarrow \boxed{y = 400} \Rightarrow \boxed{x = 700 - 400 = 300}$$

La solución es 300 € cada viaje al Caribe, 400 el viaje a Maldivas y 500 el viaje a Tailandia

- b) Los viajes al Caribe cuestan 300 €. Si le descontamos el 20 % que es $0.2 \cdot 300 = 60$ € por viaje. Esa es la pérdida por viaje al Caribe, como se venden un total (en las 3 agencias) de 30 viajes la pérdida sería de $30 \cdot 60 = 1800$ €.
- c) Como se venden 20 viajes a las Maldivas y se deben compensar los 1800 €, tenemos que a cada viaje hay que sumarle $\frac{1800}{20} = 90$ €, esto significa que pasaría a costar 490 €.

Bloque 1.B. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)
 b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)
 c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A . (1 punto)

a) Si $AX = X \Rightarrow AX - X = 0 \Rightarrow (A - I)X = 0$

La matriz B sería $B = A - I = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

El sistema quedaría
$$\begin{cases} (a-1)x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + (a-1)z = 0 \end{cases}$$

b) La matriz de coeficientes es $B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y lo igualamos a cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 + 1$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -(a-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 1 \Rightarrow a-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \rightarrow a=2 \\ a-1=-1 \rightarrow a=0 \end{cases}$$

Cuando $a \neq 2$ o $a \neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Vemos que ocurre cuando $a = 2$ o cuando $a = 0$.

Si $a = 2$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

Si $a = 0$ el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} -x \quad -z = 0 \\ -x \quad -y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x \quad -z = 0 \\ -x \quad -y = 0 \\ \boxed{y = z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -z$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

Resumiendo: El sistema tiene infinitas soluciones cuando $a = 2$ o $a = 0$.

- c) Para $a = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculamos su determinante, comprobamos que no es nulo y de ser así calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{1}{1} = Adj \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2.A. Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

- a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)
- b) Para $a = 1$, $b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

- a) Al ser sus tangentes en $x = 2$ iguales deben tomar el mismo valor la función y su derivada en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y_1(2) = 2^2 - 4 + 3 = 3 \\ y_2(2) = a \cdot 2^2 + b = 4a + b \\ y_1(2) = y_2(2) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{3 = 4a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1' = 2x - 2 \Rightarrow y_1'(2) = 2(2) - 2 = 2 \\ y_2' = 2ax \rightarrow y_2'(2) = 2a(2) = 4a \\ y_1'(2) = y_2'(2) \end{array} \right\} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo el valor de $a = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 4a + b \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = \frac{4}{2} + b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$.

La recta tangente en $x = 2$ tiene ecuación $y - y_1(2) = y_1'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - y_1(2) = y_1'(2)(x - 2) \\ y_1(2) = 3 \\ y_1'(2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

- b) Para $a = 1$, $b = 1$ las funciones son $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = x^2 + 1$.

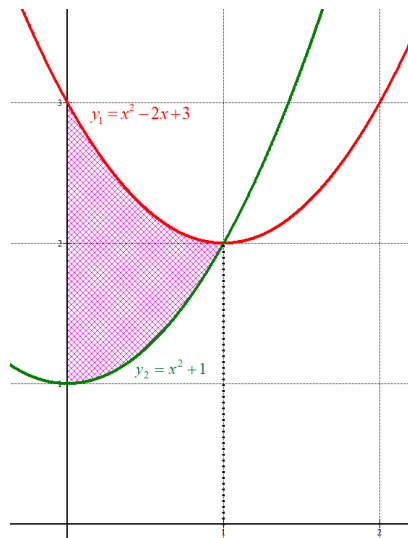
Buscamos los puntos de corte de estas dos parábolas.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Entonces el recinto del cual nos piden calcular su área comienza en $x = 0$ y acaba en $x = 1$.

Hacemos una pequeña tabla y dibujamos las parábolas.

x	$y_1 = x^2 - 2x + 3$	x	$y_2 = x^2 + 1$
-1	6	-1	2
0	3	0	1
1	2	1	2
2	3	2	5



El recinto del cual debemos calcular su área es lo coloreado de rosa.

El valor del área del recinto coloreado de rosa es aproximadamente 1 unidad cuadrada.

Precisamos su valor calculando la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $y_1 - y_2$.

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 - 2x + 3 - (x^2 + 1) dx = \int_0^1 -2x + 2 dx = \left[-x^2 + 2x \right]_0^1 = \left[-1^2 + 2 \right] - \left[-0^2 + 0 \right] = \boxed{1 u^2}$$

Bloque 2.B. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Llamamos x, y, z a esos tres números.

$$\text{“La suma de los tres números es 90”} \rightarrow x + y + z = 90$$

$$\text{“Uno de ellos es la media de los otros dos”} \rightarrow \frac{x+z}{2} = y$$

Nos piden maximizar $f(x, y, z) = xyz$.

De las ecuaciones iniciales podemos expresar los números en función de una sola variable.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ \frac{x+z}{2} = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 90 - y - z \\ x + z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 90 - y - z + z = 2y \Rightarrow 90 = 3y \Rightarrow \boxed{y = 30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 90 - 30 - z \Rightarrow \boxed{z = 60 - x}$$

Sustituimos en la función que deseamos maximizar:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = xyz \\ y = 30 \\ z = 60 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x, y, z) = x \cdot 30 \cdot (60 - x) = 1800x - 30x^2 = f(x)$$

Nuestro objetivo es hallar el máximo de la función $f(x) = 1800x - 30x^2$.

Derivamos e igualamos a cero.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 1800 - 60x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1800 - 60x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1800}{60} = 30}$$

Como la derivada segunda es $f''(x) = -60$ entonces $f''(30) = -60 < 0$, por lo que en $x = 30$ hay un máximo de la función.

Determinamos los otros números: $z = 60 - 30 = 30, y = 30, x = 30$.

El producto se maximiza cuando los tres números son iguales a 30.

Bloque 3.A. Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z$ y $s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

- a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)
- b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r . Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)
- c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \Rightarrow r: \begin{cases} P_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (3, -2, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s = (-1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \end{cases}$$

Vemos que las rectas no son paralelas ni coincidentes porque sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (3, -2, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$$

Para ver si se cortan o cruzan calculamos el valor del producto mixto de los vectores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 0, 1) - (-1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s \right] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 3 - 4 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

- b) Si el plano π contiene a s entonces uno de los vectores directores del plano es $\vec{v}_s = (-2, 1, 0)$ y pasa por el punto $Q_s = (-1, 0, 1)$. Además, es paralelo a la recta r , por lo que otro de los vectores directores del plano es $\vec{u}_r = (3, -2, 1)$.

$$\left. \begin{matrix} \vec{u} = \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (3, -2, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+1+4z-4-3z+3+2y=0 \Rightarrow$$

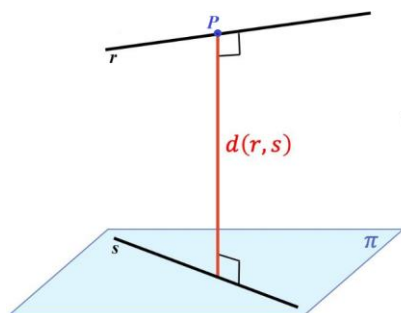
$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+2y+z=0}$$

Calculamos la distancia del punto $P = (-1, 1, 0)$ al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + z = 0 \\ P = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|-1 + 2 + 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408 u}$$

- c) La distancia entre las rectas es la de un punto cualquiera de r al plano paralelo π que contiene a s . El punto P es el que hemos llamado P_r y pertenece a r . El plano π es el calculado en el apartado anterior. Entonces tenemos que:

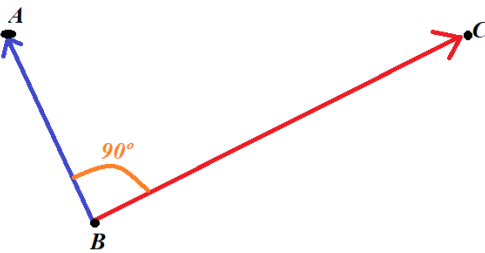
$$d(r, s) = d(P_r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{1}{\sqrt{6}} u$$



Bloque 3.B. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ Halla:

- a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)
- b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r. (1.25 puntos)

a) Para que sea rectángulo en el punto B deben ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$$C \in r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow C = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (1, 1, 0) - (0, 0, 2) = (1, 1, -2) \\ \overrightarrow{BC} &= (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda) - (0, 0, 2) = (1, 1 + \lambda, -1 + \lambda) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1, 1, -2)(1, 1 + \lambda, -1 + \lambda) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + \lambda + 2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \boxed{C = (1, 5, 5)}$$

b) Si el plano contiene a los puntos A y B entonces uno de sus vectores directores es $\overrightarrow{BA}$. Además, es paralelo a r, por lo que otro vector director del plano es el vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BA} = (1, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z - 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y - z + 2 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -3x + y - z + 2 = 0}$$

Bloque 4.A. En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60% de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3% y del segundo es del 8 %.

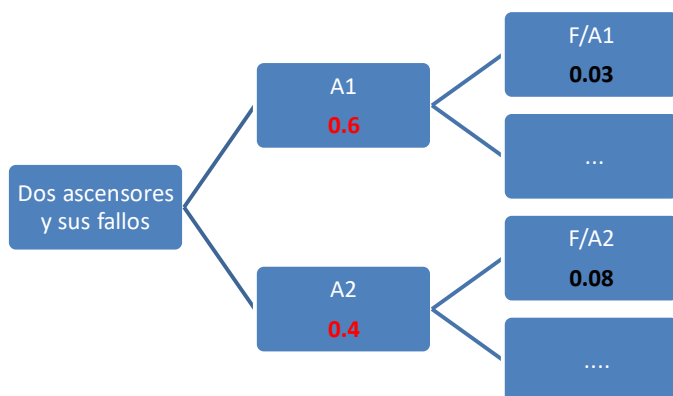
- a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)
 b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

a) Llamamos $A1 = \text{Usar el ascensor 1}$, $A2 = \text{Usar el ascensor 2}$.

Asimismo, llamamos $F = \text{Fallo del ascensor}$.

Con esta terminología tenemos que $P(A1) = 0.6$, $P(A2) = 0.4$, $P(F/A1) = 0.03$, $P(F/A2) = 0.08$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Usamos el teorema de la probabilidad total y tenemos que:

$$P(F) = P(A1)P(F/A1) + P(A2)P(F/A2) = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.08 = \boxed{0.05}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A2/F) = \frac{P(A2 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A2)P(F/A2)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.08}{0.05} = \boxed{\frac{16}{25} = 0.64}$$

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$: Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6, 10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide, pero la probabilidad del 80% se alcanza en el valor $X \leq 12$: ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

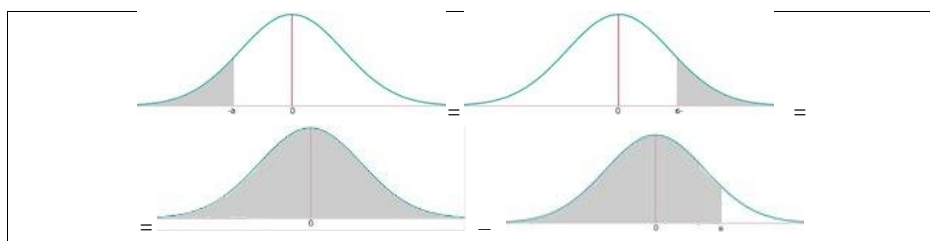
a) Sea $X = N(10, 2)$. Nos piden $P(6 \leq X \leq 10)$.

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{10 - 10}{2}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{6 - 10}{2}\right) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) =$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 2)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \\ F(2) = 0.9772 \end{array} \right\} =$$

$$= 0.5 - [1 - 0.9772] = \boxed{0.4772}$$



b) Tenemos $X = N(10, \sigma)$

Y sabemos que $P(X \leq 12) = 0.8$ por lo que:

$$P(X \leq 12) = P\left(Z \leq \frac{12 - 10}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.8416) = 0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sigma} = 0.8416 \Rightarrow \sigma = \frac{2}{0.8416} = 2.3764$$

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(0) = 0.5$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(1) = 0.8413$; $F(1.25) = 0.8944$; $F(1.375) = 0.9154$; $F(1.5) = 0.9332$; $F(2) = 0.9772$)



Universidad de Oviedo
 Universidá d'Uviéu
 University of Oviedo

EBAU septiembre 2020

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
 acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema
$$\begin{cases} x + y = a \\ (2 - a)x + 2y = 1 \\ ax = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Estudia la compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
 b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

- a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)
 b) Para $x=1$, calcula su inversa (1 punto)

Bloque 2.A. Dada la función $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.

- a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)
 b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Bloque 2.B. Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - xe^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)
 b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$. (1.25 puntos)

Bloque 3.A. Sean $A(2, 1, 0)$, $B(5, 5, 0)$ y $C(2, 1, 5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2, 4, 0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

- a) El cuarto vértice D de la cara S . (1 punto)
 b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S . (1 punto)
 c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E ? (0.5 puntos)



Bloque 3.B. Dados dos planos $\begin{cases} \pi : x + y - 2z = 3 \\ \pi' : x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal

sobre π' es el punto $A(5, 1, 0)$

- a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A . (1.5 puntos)
 b) Calcula el punto P . (1 punto)

Bloque 4.A. En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

- a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)
 b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Bloque 4.B. En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

- a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)
 b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(2) = 0.9772$; $F(1) = 0.8413$; $F(1.5) = 0.9332$; $F(0.5) = 0.6915$; $F(0.2533) = 0.6$; $F(0.5244) = 0.7$; $F(0.8416) = 0.8$)

SOLUCIONES

Bloque 1.A Dado el sistema $\begin{cases} x + y = a \\ (2-a)x + 2y = 1 \\ ax = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$ a) Estudia la compatibilidad según los valores de a. b) Resuélvelo cuando sea posible.	(1.5 puntos) (1 punto)
---	-----------------------------------

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-a & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix}$

El rango de A puede ser 2 cuando algún menor de orden 2 tiene determinante no nulo.
Tenemos los menores de orden 2 siguientes:

Fila 1ª y 2ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-a & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + a = a$

Fila 2ª y 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2-a & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix} = -2a$

Fila 1ª y 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = a$

Todos son nulos cuando $a = 0$

Distinguimos dos casos distintos: $a \neq 0$ y $a = 0$.

CASO 1. $a \neq 0$

En este caso el menor que resulta de quitar la fila 2ª tiene determinante no nulo y el rango de A es 2.

Veamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ que puede ser 3.

Su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = 2a + a - 2a^2 - 2a + a^2 = -a^2 + a$

Este determinante es nulo cuando $-a^2 + a = 0 \Rightarrow a(-a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Se distinguen 2 subcasos diferentes:

CASO 1.a. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante anterior es no nulo y el rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es **incompatible**.

CASO 1.b. $a = 1$

En este caso el determinante anterior es nulo y el rango de A/B es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B = Número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a = 0$

En este caso veamos cómo queda el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Este sistema es **incompatible**, pues las dos ecuaciones no se pueden verificar de forma simultánea.

Resumiendo: Para $a \neq 1$ es incompatible y para $a = 1$ es compatible determinado.

b) Lo resolvemos para $a = 1$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + y = 1 \\ 1 + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\boxed{x = 1}$$

La solución es $x = 1$; $y = 0$.

Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

(1.5 puntos)

b) Para $x=1$, calcula su inversa

(1 punto)

a) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{vmatrix} = \{\text{Columna } 1^a - \text{Columna } 2^a\} = \begin{vmatrix} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a\} = \begin{vmatrix} 0 & 2x+1 & 0 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = (2x+1)(2-x) = -2x^2 + 3x + 2$$

Averiguamos cuando el determinante sea anula.

$$(2x+1)(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 2-x=0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Es invertible cuando el determinante es no nulo, es decir, cuando $x \neq 2$ y $x \neq -\frac{1}{2}$.

b) Para $x=1$ es invertible. Calculamos su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } (2+1)(2-1) = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A. Dada la función $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$.

- a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)
 b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

- a) El dominio de definición son todos los valores reales salvo los que anulan el denominador, es decir, el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 2x$ es la asíntota oblicua.

- b) Utilizamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3+1)}{x^4} = \frac{6x^4 - 4x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$$

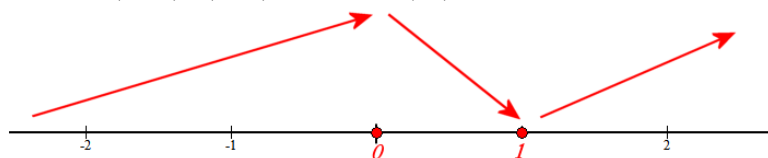
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^3-1)}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Como el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, vemos cómo evoluciona la función antes de 0, entre 0 y 1 y después de 1.

- En $(-\infty, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{2((-1)^3-1)}{(-1)^3} = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.

- En $(0,1)$ tomo $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2(0.5^3 - 1)}{0.5^3} < 0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2(2^3 - 1)}{2^3} = \frac{7}{4} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(0,1)$

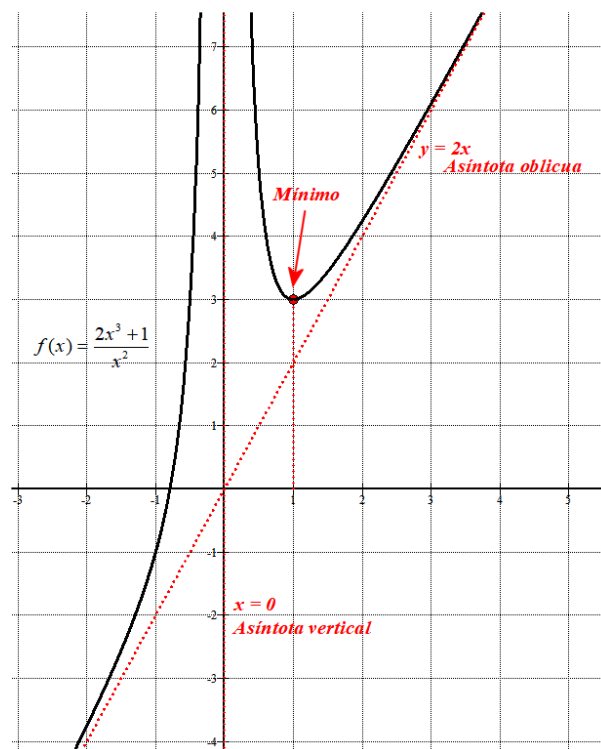


Como $x = 0$ está excluido del dominio, la función presenta un mínimo en $x = 1$.

Como $f(1) = \frac{2+1}{1} = 3$ el punto mínimo tiene coordenadas $(1,3)$.

c) Completamos la información obtenida con una tabla de valores y podremos esbozar la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$
-2	$-15/4 = -3.75$
-1	1
0.5	5
1	3 Mínimo
2	$17/4 = 4.25$
3	6.1



Bloque 2.B. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - xe^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$. (1.25 puntos)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - xe^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2} = \frac{0-0}{0-2+2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x - xe^x}{2x + 2\operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0+0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x - e^x - xe^x}{2 + 2\cos x} = \frac{0-1-1-0}{2+2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos la integral de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x\cos(x) - e^{-x} dx = \int x\cos(x) dx - \int e^{-x} dx =$$

Calculamos la 1ª integral por partes

$$\int x\cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + e^{-x} + C$$

Como debe pasar por el punto $(0, 3)$ debe ser $F(0) = 3$ lo que nos permite hallar el valor concreto del parámetro C de la primitiva.

$$F(0) = 3 \left\{ \begin{array}{l} F(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x + e^{-x} + C \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = 0\operatorname{sen} 0 + \cos 0 + e^{-0} + C \Rightarrow 3 = 1 + 1 + C \Rightarrow C = 1$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x + e^{-x} + 1}$

Bloque 3.A. Sean $A(2, 1, 0)$, $B(5, 5, 0)$ y $C(2, 1, 5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2, 4, 0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

- a) El cuarto vértice D de la cara S . (1 punto)
 b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S . (1 punto)
 c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E ? (0.5 puntos)



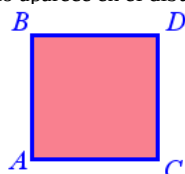
- a) Las coordenadas de los vectores que unen los tres puntos dados son:

$$\overrightarrow{AB} = (5, 5, 0) - (2, 1, 0) = (3, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 1, 5) - (2, 1, 0) = (0, 0, 5)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, 1, 5) - (5, 5, 0) = (-3, -4, 5)$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3, 4, 0) \cdot (0, 0, 5) = 0$. Por lo que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al $\overrightarrow{AC}$ y los vértices de la cara S del cubo están dispuestos como aparece en el dibujo.



Para hallar el cuarto vértice $D(a, b, c)$ basta utilizar que el vector $\overrightarrow{AC}$ y el $\overrightarrow{BD}$ tienen las mismas coordenadas.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (a, b, c) - (5, 5, 0) = (a-5, b-5, c) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 5) \end{cases} \Rightarrow (a-5, b-5, c) = (0, 0, 5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-5=0 \rightarrow a=5 \\ b-5=0 \rightarrow b=5 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow D(5, 5, 5) \end{aligned}$$

- b) La cara opuesta a S es la paralela a S que contiene al punto $E(-2, 4, 0)$. Por lo que tiene como vectores directores, por ejemplo, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{aligned} E(-2, 4, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-4 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x + 40 - 15y + 60 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x - 3y + 20 = 0}$$

- c) Nos piden hallar el punto X del dibujo.



Si llamamos X al vértice adyacente a E en la cara S , como tenemos el vector normal del plano de la cara del cubo que contiene a E que es el del plano obtenido anteriormente:

$\vec{n} = (4, -3, 0)$ el vector que une X con E tiene la misma dirección que ese vector normal, es decir, tiene coordenadas proporcionales. Veamos cuál de los vértices A, B, C o D cumple esta condición.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 1, 0) \\ B(5, 5, 0) \\ C(2, 1, 5) \\ D(5, 5, 5) \\ E(-2, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-2, 4, 0) - (2, 1, 0) = (-4, 3, 0) \\ \overrightarrow{BE} = (-2, 4, 0) - (5, 5, 0) = (-7, -1, 0) \\ \overrightarrow{CE} = (-2, 4, 0) - (2, 1, 5) = (-4, 3, -5) \\ \overrightarrow{DE} = (-2, 4, 0) - (5, 5, 5) = (-7, -1, -5) \end{array} \right\}$$

El único vector que tiene coordenadas proporcionales a $\vec{n} = (4, -3, 0)$ es $\overrightarrow{AE} = (-4, 3, 0)$.

El vértice adyacente a E es el A.

Bloque 3.B. Dados dos planos $\begin{cases} \pi: x+y-2z=3 \\ \pi': x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal

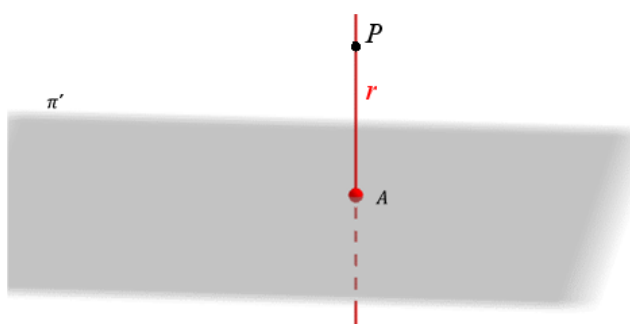
sobre π' es el punto A(5, 1, 0)

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

a) La recta r que une P con A es la recta perpendicular al plano $\pi': x-z=5$ que contiene al punto A. Por lo que tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi': x-z=5 \Rightarrow \vec{n} = (1, 0, -1)$$



$$r \equiv \left. \begin{matrix} A(5,1,0) \in r \\ \vec{v} = \vec{n} = (1,0,-1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{matrix} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

$$\left. \begin{matrix} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x - 5 = \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y - 1 = 0 \\ z = -x + 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{matrix}} \text{Ecuaciones implícitas}$$

b) El punto de corte de esta recta con el plano $\pi: x+y-2z=3$ es el punto P buscado.

El punto de corte se obtiene del sistema:

$$\left. \begin{matrix} \pi: x+y-2z=3 \\ x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 5 + \lambda + 1 + 2\lambda = 3 \\ 3\lambda = -3 \\ \lambda = -1 \\ y = 1 \\ z = -(-1) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 5 - 1 = 4 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix} \right\}$$

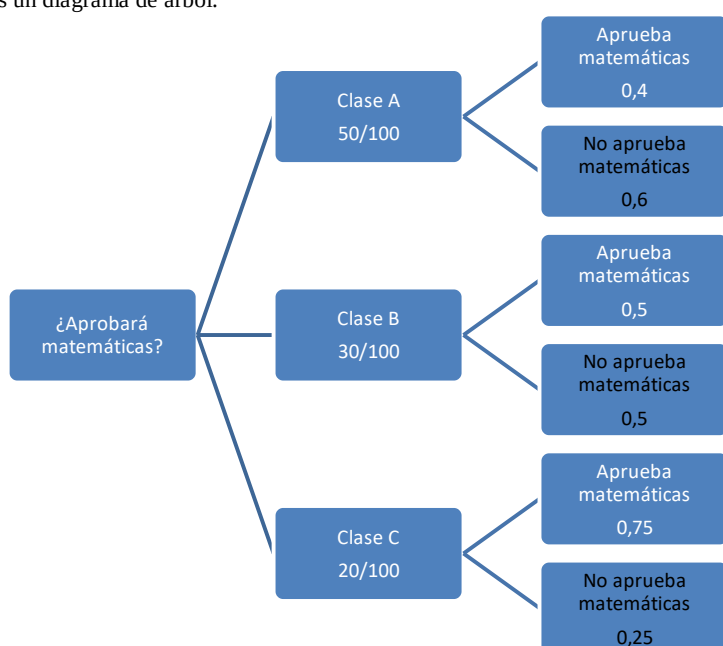
El punto P tiene coordenadas $P(4,1,1)$.

Bloque 4.A. En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

- a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)
 b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Son en total $50 + 30 + 20 = 100$ alumnos. La probabilidad de elegir un alumno de la clase A, B o C es de $\frac{50}{100}$; $\frac{30}{100}$; $\frac{20}{100}$ respectivamente.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(\text{Aprueba matemáticas}) = \frac{50}{100} \cdot 0,4 + \frac{30}{100} \cdot 0,5 + \frac{20}{100} \cdot 0,75 = \boxed{0,5}$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de clase B} / \text{Ha aprobado matemáticas}) =$$

$$= \frac{P(\text{Sea de clase B} \cap \text{Ha aprobado matemáticas})}{P(\text{Ha aprobado matemáticas})} = \frac{\frac{30}{100} \cdot 0,5}{0,5} = \boxed{0,3}$$

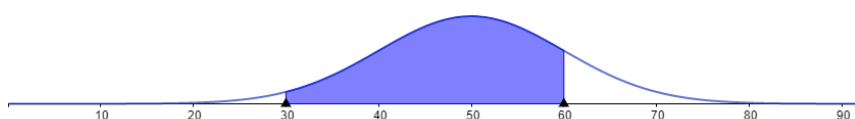
Bloque 4.B. En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

- a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)
 b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

a) X = Producción en kilogramos de manzanas. $X = N(50, 10)$

Nos piden calcular $P(30 \leq X \leq 60)$

$$\mu = 50 \quad \sigma = 10$$



Como apreciamos en el dibujo esta probabilidad o proporción es alta. La calculamos haciendo uso de tablas y transformaciones.

$$\begin{aligned} P(30 \leq X \leq 60) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{30-50}{10} \leq Z \leq \frac{60-50}{10}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z < 2)) = \\ &= F(1) - 1 + F(2) = 0.8413 - 1 + 0.9772 = \boxed{0.8185} \end{aligned}$$

La proporción es del 81.85 %

b) Nos piden averiguar el número de kilogramos “a” para los que $P(X \leq a) = 0.6$.

$$P(X \leq a) = 0.6 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-50}{10}\right) = 0.6$$

Buscamos en los datos dados en el enunciado del examen.

$$\frac{a-50}{10} = 0.2533 \Rightarrow a - 50 = 2.533 \Rightarrow \boxed{a = 52.533}$$

52.533 kilogramos es el número de kilos que no superan el 60% de los manzanos.



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU julio 2020
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

- ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)
- Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Bloque 1.B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)
- ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)
- Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$. (1 punto)

Bloque 2.A. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)
- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)
- Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

Bloque 2.B. Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

- Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D . Calcula su área. (1 punto)
- La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1 , D_2 y D_3 . Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)
- Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

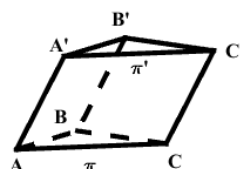
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

Bloque 3.A. Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

- Calcula un vector director de la recta r . (0.75 puntos)
- La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r . (0.75 puntos)
- La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r . (1 punto)

Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$; $B'(-1,2,2)$; $C(0,3,0)$; $C'(0,4,2)$. Y los planos π , al que pertenecen los puntos A, B, C y π' , al que pertenecen los puntos A', B', C' . Calcula:

- Las coordenadas de los puntos restantes: A', B . (0.75 puntos)
- La distancia entre los planos π y π' . (0.75 puntos)
- El volumen del prisma triangular. (1 punto)



Bloque 4.A. En un espacio muestral se tienen dos sucesos A y B . Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\bar{A}) = 0.2$ ($\bar{A}$ suceso contrario). Calcula:

- $P(B/A)$. (1 punto)
- $P(B)$. (1 punto)
- ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

Bloque 4.B. Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las $2/3$ partes de las veces y los delanteros las $3/4$ partes de las veces.

- Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)
- Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60%. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25) = 0.9994$, $F(3.2917) = 0.9995$, $F(3.3333) = 0.9996$, $F(3.375) = 0.9996$, $F(3.4167) = 0.9997$)

SOLUCIONES

Bloque 1.A. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

- a)** ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)
b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

- a) Planteamos el sistema de ecuaciones relativo a la situación planteada.

Llamamos x = precio del libro, y = precio de la calculadora, z = precio del estuche.

“Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche” $\rightarrow x + y + z = 57$

“El libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos” $\rightarrow x = 2(y + z)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema: $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\}$ e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2z + y + z = 57 \Rightarrow 3y + 3z = 57 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + z = \frac{57}{3} = 19 \Rightarrow x = 2(y + z) = 2 \cdot 19 = 38$$

La solución es $x = 38$ € el precio del libro, pero el precio de la calculadora y del estuche queda uno en función del otro $y + z = 19$. La calculadora vale 19 € menos el precio del estuche. No es posible determinar el valor exacto de la calculadora.

- b) Añadimos la nueva información que supone una nueva ecuación:

“Si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros” $\rightarrow 0,5x + 0,8y + 0,75z = 34$

El nuevo sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \\ 0,5x + 0,8y + 0,75z = 34 \end{array} \right\}$

Como hemos resuelto el sistema con las dos primeras ecuaciones y hemos obtenido $\left. \begin{array}{l} x = 38 \\ y + z = 19 \end{array} \right\}$

Lo sustituimos en el sistema anterior y vemos que solución obtenemos de la nueva situación.

$$\left. \begin{array}{l} x = 38 \\ y + z = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 19 - z \\ 0,5 \cdot 38 + 0,8y + 0,75z = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$19 + 0,8(19 - z) + 0,75z = 34 \Rightarrow 19 + 15,2 - 0,8z + 0,75z = 34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,05z = 34 - 34,2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-0,2}{-0,05} = 4 \text{ €}} \Rightarrow \boxed{y = 19 - z = 19 - 4 = 15 \text{ €}}$$

Los precios son 38 € el libro, 15 la calculadora y 4 el estuche.

Bloque 1.B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)
 b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)
 c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$. (1 punto)

- a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3. El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1.
 Para comprobar si es 3 calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 2 + 3m - (3m + 3 + 2m^2) = 3m^2 + 2 + 3m - 3m - 3 - 2m^2 = m^2 - 1$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm 1$.

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y el rango es 3.

CASO 2. $m = 1$.

En este caso el determinante de la matriz A es 0 y su rango no es 3, por lo que puede ser 2.

Para $m = 1$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta al quitar la fila y columna } 1^a.$$

$$\text{Calculamos su determinante: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $m = -1$.

En este caso el determinante de la matriz A es 0 y su rango no es 3, por lo que puede ser 2.

Para $m = -1$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta al quitar la fila y columna } 1^a.$$

$$\text{Calculamos su determinante: } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: El rango de la matriz A es 3 si $m \neq \pm 1$ y vale 2 si $m = -1$ o $m = 1$.

- b) Supongamos la matriz X de dimensión $m \times n$. Sabemos que A es de dimensión 3×3 y B es de dimensión 3×2 .
 Debe cumplirse:

$$A \cdot X = B$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \longrightarrow 3 \times n$$

Para que sea posible el producto el valor de m debe ser 3.

Para que el resultado del producto sea 3×2 debe ser n igual a 2.

La matriz X debe ser de dimensión 3×2 .

c) Para $m=0$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y tiene determinante no nulo, pues estaríamos en el caso 1 anterior.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1. \text{ Existe la inversa y la calculamos para poder resolver la ecuación.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación y determinamos la expresión de la matriz X .

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3+2 & 0+0-4 \\ 2+3+3 & 2+0-6 \\ 0-1-1 & 0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \quad \cdot \quad 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

Bloque 2. A. Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)
 b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)
 c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$ (0.5 puntos)

a) Igualamos a cero la función para obtener los puntos de corte con el eje de abscisas (OX).

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \end{cases}$$

Los puntos de corte son P(3,0) y Q(0,0).

Para determinar los máximos y mínimos igualo a cero la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Estos son los puntos críticos de la función, obtenemos la derivada segunda y vemos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$x = 3 \rightarrow f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \text{ Es un punto mínimo}$$

$$x = 1 \rightarrow f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \text{ Es un punto máximo}$$

Para obtener los puntos de inflexión igualamos la derivada segunda a cero.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

El posible punto de inflexión es $x = 2$, pero falta ver que la derivada tercera no se anula en dicho punto.

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

$$x = 2 \rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$$

Luego $x = 2$ es punto de inflexión de la función.

Resumiendo: En $x = 1$ hay un punto máximo relativo, en $x = 2$ hay un punto de inflexión y en $x = 3$ hay un mínimo relativo.

b) Los puntos críticos $x=1$ y $x=3$ dividen la recta real en tres partes veamos que signo toma la derivada en cada una de ellas y, por tanto, si es creciente o decreciente en cada trozo.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada toma el valor $f'(0) = 0 - 0 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, 3)$ tomamos $x=2$ y la derivada toma el valor $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada toma el valor $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

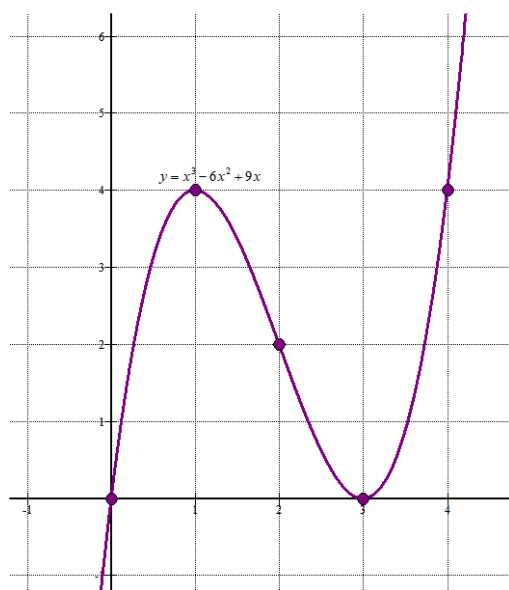
La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

Para estudiar la concavidad y convexidad, vemos el signo de la derivada segunda antes de 2 y después de 2.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda toma el valor $f''(0) = 0 - 12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada segunda toma el valor $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

Para esbozar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^3 - 6x^2 + 9x$
0	0
1	$1 - 6 + 9 = 4$
2	$8 - 24 + 18 = 2$
3	$27 - 54 + 27 = 0$
4	$64 - 96 + 36 = 4$



c) La recta tangente en $x=2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

Calculamos $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2$ y $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

La recta tangente queda $y - 2 = -3(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 8}$

Bloque 2.B. Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

- a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)
 b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1 , D_2 y D_3 . Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)
 c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

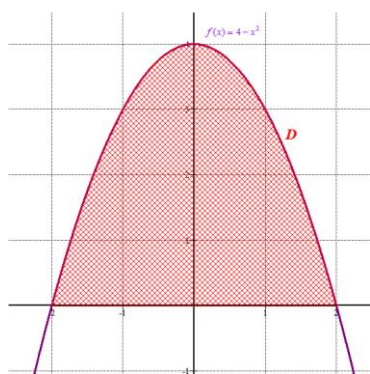
a) Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de la función $f(x) = 4 - x^2$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^2 4 - x^2 dx \right| = \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \right| = \left| \left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] \right| = \left| 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \right| = \boxed{10,66 \text{ u}^2}$$

Si la dibujamos.

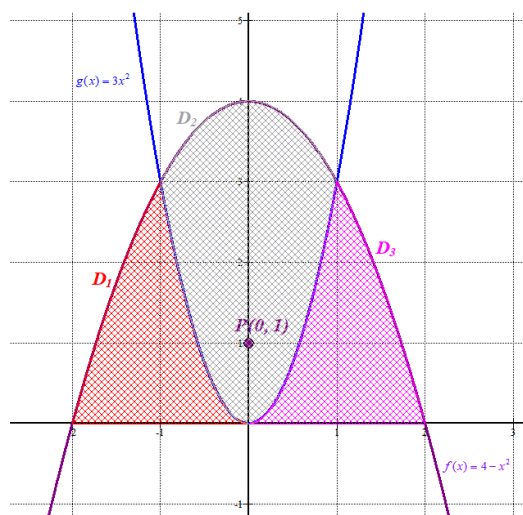


b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow 4 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hacemos una tabla de valores para cada parábola y las dibujamos.

$f(x) = 4 - x^2$		$g(x) = 3x^2$	
x	$y = 4 - x^2$	x	$y = 3x^2$
-2	0	-2	12
-1	3	-1	3
0	4	0	0
1	3	1	3
2	0	2	12



- c) El área del recinto D_2 se obtiene como la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia entre la función $f(x) = 4 - x^2$ y la función $g(x) = 3x^2$.

En el dibujo se observa que debe valer entre 5 y 6 cuadraditos.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^1 4 - x^2 - 3x^2 dx = \int_{-1}^1 4 - 4x^2 dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[4 - \frac{4 \cdot 1^3}{3} \right] - \left[4(-1) - \frac{4(-1)^3}{3} \right] = 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} = \boxed{5,33 u^2} \end{aligned}$$

Bloque 3.A. Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

- a) Calcula un vector director de la recta r . (0.75 puntos)
 b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r . (0.75 puntos)
 c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r . (1 punto)

a) Pasamos las ecuaciones de r a paramétricas.

$$r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=0-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Un vector director de la recta es $\vec{v}_r = (-1, 1, -1)$

- b) El plano pedido contiene al punto $A(2,1,1)$ y al punto de la recta r que se puede obtener de la ecuación de la recta en paramétricas $P_r(2,0,0)$, por lo que nos sirve como vectores directores del plano los vectores $\overrightarrow{AP_r} = (2,0,0) - (2,1,1) = (0, -1, -1)$ y el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(2,1,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AP_r} = (0, -1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2+y-1-z+1+x-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x+y-z-4=0}$$

- c) La recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r tiene como vector director el producto vectorial del normal del plano y el director de r , pues es perpendicular a ambos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 1, -1) \\ n = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i - 2j - k - 2k - j + i = -3j - 3k = (0, -3, -3)$$

Tomamos como vector director el vector simplificado $\vec{v}_s = (0, 1, 1)$

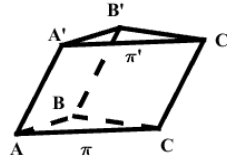
La recta s tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} A(2,1,1) \in s \\ \vec{v}_s = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ s: y=1+t \\ z=1+t \end{array}}$$

Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$; $B(-1,2,2)$; $C(0,3,0)$; $C'(0,4,2)$.

Y los planos π , al que pertenecen los puntos A, B, C y π' , al que pertenecen los puntos A', B', C' . Calcula:

- Las coordenadas de los puntos restantes: A', B . (0.75 puntos)
- La distancia entre los planos π y π' . (0.75 puntos)
- El volumen del prisma triangular. (1 punto)



- a) Las aristas AA' , BB' y CC' deben ser paralelas y por tanto los vectores que las definen deben tener las mismas coordenadas.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= A' - (1,0,0) \\ \overrightarrow{BB'} &= (-1,2,2) - B \\ \overrightarrow{CC'} &= (0,4,2) - (0,3,0) = (0,1,2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (0,1,2) &= A' - (1,0,0) \\ (0,1,2) &= (-1,2,2) - B \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} A' &= (0,1,2) + (1,0,0) = (1,1,2) \\ B &= (-1,2,2) - (0,1,2) = (-1,1,0) \end{aligned} \right\}$$

Los puntos A' y B tienen coordenadas $A'(1,1,2)$; $B(-1,1,0)$

- b) La distancia entre los planos es la distancia de un punto del plano π' , por ejemplo $C'(0,4,2)$ al plano π . Hallemos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{aligned} A(1,0,0) &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,0,0) = (-2,1,0) \\ B(-1,1,0) &\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (0,3,0) - (1,0,0) = (-1,3,0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6z + z = 0 \Rightarrow -5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: z = 0}$$

$$d(\pi, \pi') = d(C', \pi) = \left| \frac{C'(0,4,2)}{\pi: z=0} \right| = \frac{|2|}{\sqrt{1+0+0}} = \boxed{2u}$$

- c) El volumen del prisma es la mitad del producto mixto de los tres vectores $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AA'}$, pues el producto mixto es el volumen del paralelepípedo.

Calculamos las coordenadas de estos vectores.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,0,0) = (-2,1,0) \quad \overrightarrow{AC} = (0,3,0) - (1,0,0) = (-1,3,0)$$

$$\overrightarrow{AA'} = (1,1,2) - (1,0,0) = (0,1,2)$$

$$\text{Volumen} = \frac{[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AA'}]}{2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|-12+2|}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5u^3}$$

Bloque 4.A. En un espacio muestral se tienen dos sucesos A y B . Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\bar{A}) = 0.2$ ($\bar{A}$ suceso contrario). Calcula:

- a) $P(B/A)$. (1 punto)
 b) $P(B)$. (1 punto)
 c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

a) Como $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.2 \Rightarrow P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8} = \boxed{0.375}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{P(B)} \\ P(B/A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A/B) = P(B/A) \Rightarrow \frac{0.3}{P(B)} = \frac{0.3}{0.8} \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.8}$$

Este resultado es incoherente, aunque está bien resuelto.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.8 - 0.3 = 1.3$$

¡IMPOSIBLE!

Los datos del ejercicio son incoherentes.

c) Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= 0.3 \\ P(A) \cdot P(B) &= 0.8 \cdot 0.8 = 0.64 \end{aligned} \right\} \text{ No son iguales y por tanto } \mathbf{no \text{ son independientes.}}$$

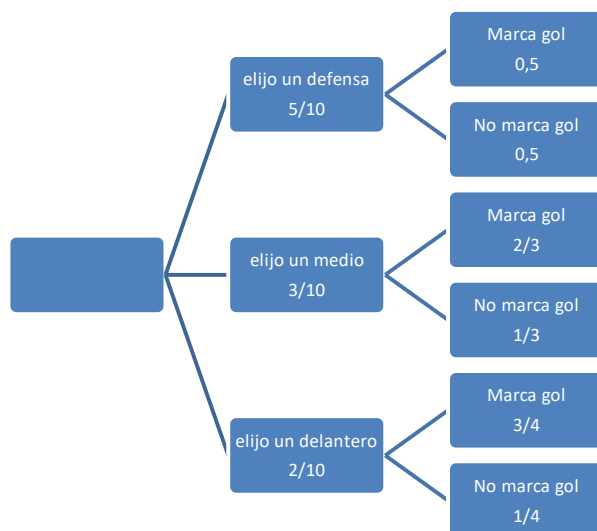
Bloque 4.B. Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las $\frac{2}{3}$ partes de las veces y los delanteros las $\frac{3}{4}$ partes de las veces.

- a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)
 b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60%. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(3.25)=0.9994$, $F(3.2917) = 0.9995$, $F(3,3333) = 0.9996$, $F(3.375) = 0.9996$, $F(3.4167) = 0.9997$)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada en el problema.



$$a) P(\text{Marca gol}) = \frac{5}{10} \cdot 0,5 + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{20} + \frac{2}{10} + \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \boxed{0,6}$$

- b) Sea X = Número de goles marcados en 600 lanzamientos.

Como cada lanzamiento es independiente de lo que haya ocurrido en el anterior pues nos dicen que al lanzar un penalti la persona que lo lanzó se incorpora de nuevo al grupo para elegir al siguiente lanzador.

Tenemos que es una distribución binomial con parámetros $n = 600$ y $p = 0,6$. $X = B(600, 0.6)$.

Como son muchas repeticiones se debe aproximar a una normal de media $n \cdot p = 600 \cdot 0,6 = 360$

y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 12$

Nuestra distribución binomial se aproxima con una normal $N(360, 12)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 400) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección de Yates} \\ \text{por continuidad} \end{array} \right\} = P(X < 400,5) = \{ \text{Tipificamos} \} = \\ &= P\left(Z < \frac{400,5 - 360}{12}\right) = P(Z < 3,375) = F(3,375) = \boxed{0.9996} \end{aligned}$$



Universidad de Oviedo
Universidá d'Oviéu
University of Oviedo

EBAU julio 2019

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema
$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

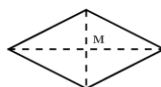
- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

2. Dada la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Sean $A(3, 1, 0)$ y $B(1, 3, 0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi : z = 0$.

- a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D . (1.5 puntos)
b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M . (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

- Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)
- Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)
- Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A . (0.75 puntos)

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$; $y = 4/x$.

- Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)
- Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)
- Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

- El punto P intersección del plano π y de la recta r . (1.25 puntos)
- El punto A' simétrico de A respecto al plano π . (1.25 puntos)

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$: Calcula:

- La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)
- La calificación que sólo superan o igualan el 20% de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(-0.8416) = 0.2$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(0.4) = 0.6554$; $F(0.5) = 0.6915$; $F(0.6) = 0.7257$

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dado el sistema $\begin{cases} x & + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x & + z = 2 \end{cases}$	a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos) b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)
--	--

UNA FORMA DE HACERLO.

a) Simplificando el sistema con el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & -1 & -a & -a \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - (a-2)\text{Fila } 2^a \\ \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-2) & -(a+2)(a-2)+2-a \end{array} \right)$$

Se distinguen tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1; a \neq 2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema equivalente queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(1)(-3)+2+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

El sistema $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = 1 \\ 0 = 6 \end{cases}$ es INCOMPATIBLE. No tiene solución.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el sistema equivalente queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

El sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$ es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

- b) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2z + 2 \\ y = 4 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 - 3z = -2z + 2 \\ y = 3z - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$$

La solución es $x = z - 2$; $y = 3z - 4$; $z = z$

OTRA FORMA DE HACERLO.

a) Consideramos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot a + a(a-1) - 1 = -1 + a^2 - a - 1 = a^2 - a - 2$$

Lo igualamos a cero: $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$

Se distinguen tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$; $a \neq 2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ \hline x \quad -2y \quad -z = 2 \\ -x \quad -y \quad +z = 1 \\ \hline -3y \quad 0 \quad = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ \hline -x \quad \quad +z = 2 \\ x \quad +y \quad -z = -1 \\ \hline y \quad \quad = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

El sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = \text{Ecuación 1}^a \\ \text{Eliminamos ecuación 2}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - 2z \\ x = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 2 + y = 2 - 2z \\ x = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3z + 4 \\ x = z - 2 \end{cases}$$

La solución es $x = z - 2$; $y = -3z + 4$; $z = z$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
 b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

a) Veamos cuando se anula el denominador: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

Dado el dominio la asíntota vertical es $x = -1$

Asíntotas horizontales. $y = b$

Calculamos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{+\infty}{-\infty} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntotas oblicuas. $y = mx + n$

Solo es necesario comprobar en $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \infty$$

No hay asíntotas oblicuas.

b) Calculemos la derivada

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2}$$

Igualemos a cero

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -2$$

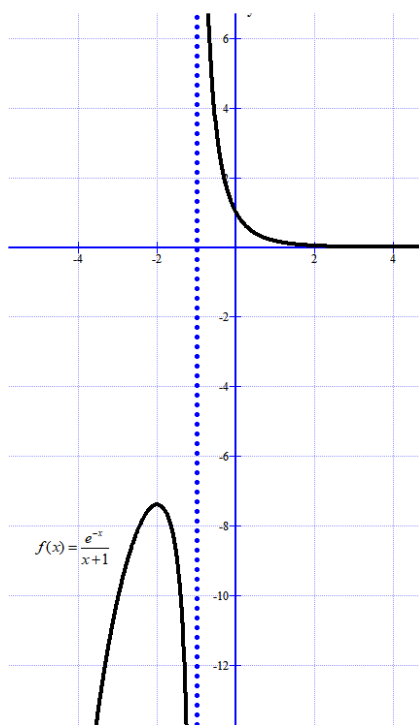
La recta real se divide en 2 partes, antes de -2 y después de -2 .

- En $(-\infty, -2)$ tomamos el valor $x = -3 \Rightarrow f'(-3) = \frac{e^3(3-2)}{(-3+1)^2} > 0 \Rightarrow$ La función crece.
- En $(-2, +\infty)$ tomamos el valor $x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0+1)^2} < 0 \Rightarrow$ La función decrece.

La función crece en $(-\infty, -2)$ y decrece en $(-2, +\infty)$. Por lo que tiene un máximo en $x = -2$.

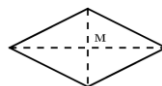
c) Para hacer el esbozo de la gráfica solo nos falta hacer una tabla de valores.

x	$y = \frac{e^{-x}}{x+1}$
-3	$\frac{e^3}{-2} = -10$
-2	$-e^2 = -7,38$
0	1
1	$\frac{e^{-1}}{2} = 0,18$



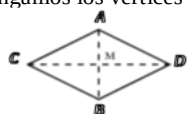
3. Sean $A(3, 1, 0)$ y $B(1, 3, 0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z = 0$.

- a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
 b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

a) Supongamos los vértices



La recta que pasa por A y B tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 0) - (3, 1, 0) = (-2, 2, 0)$ y el punto M es el punto medio del segmento AB, por lo que

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3, 1, 0) + (1, 3, 0)}{2} = (2, 2, 0).$$

El vector $\vec{v}_r$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ y puede ser $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ ya que la recta está en el plano $\pi: z = 0$.

La ecuación de la recta que une C y D es la que pasa por M y tiene vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \text{Pasa por el punto } M(2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Los puntos C y D son de la recta y tienen coordenadas $C(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0)$ y $D(2 + \lambda, 2 + \lambda, 0)$.

Cumplen dos condiciones:

Primera: M es el punto medio del segmento CD.

$$M = \frac{C+D}{2} \Rightarrow (2, 2, 0) = \frac{(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0) + (2 + \lambda, 2 + \lambda, 0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4, 4, 0) = (4 + \alpha + \lambda, 4 + \alpha + \lambda, 0) \Rightarrow 4 = 4 + \alpha + \lambda \Rightarrow 0 = \alpha + \lambda \Rightarrow \boxed{\alpha = -\lambda}$$

Segunda: distancia de C a M es $\sqrt{2}$

$$d(C, M) = \sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{2} \Rightarrow |(2, 2, 0) - (2 + \alpha, 2 + \alpha, 0)| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(-\alpha, -\alpha, 0)| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\alpha^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm 1}$$

Tomamos $\alpha = -\lambda$ y $\alpha = 1$. Si tomamos $\alpha = -1$ solo se intercambian las letras C por D.

Los puntos C y D tienen coordenadas $C(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0) = (3, 3, 0)$ y $D(1, 1, 0)$.

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
 b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
 c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

a)

$$P(\text{Camiseta de rayas y falda de rayas}) = P(\text{Camiseta de rayas}) \cdot P(\text{Falda de rayas}) =$$

$$= \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{50}{625} = \boxed{0,08}$$

$$b) P(\text{Las dos del mismo tipo}) = P(\text{Las dos lisas}) + P(\text{Las dos dibujos}) + P(\text{Las dos rayas}) =$$

$$= P(\text{camiseta lisa}) \cdot P(\text{falda lisa}) + P(\text{camiseta dibujo}) \cdot P(\text{falda dibujo}) +$$

$$+ P(\text{camiseta rayas}) \cdot P(\text{falda rayas}) =$$

$$= \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{50 + 75 + 50}{625} = \frac{175}{625} = \frac{7}{25} = \boxed{0,28}$$

$$c) P(\text{Al menos una no es de rayas}) = 1 - P(\text{Las dos son de rayas}) = 1 - 0,08 = \boxed{0,92}$$

Aunque también se puede hacer directamente.

$$P(\text{Al menos una no es de rayas}) =$$

$$= P(\text{Solo la camiseta es de rayas o Solo la falda es de rayas o ninguna es de rayas}) =$$

$$= P(\text{camiseta de rayas y falda no de rayas}) + P(\text{camiseta no de rayas y falda de rayas}) +$$

$$+ P(\text{camiseta no es de rayas y falda no es de rayas}) =$$

$$= P(\text{camiseta de rayas}) \cdot P(\text{falda no de rayas}) + P(\text{camiseta no de rayas}) \cdot P(\text{falda de rayas}) +$$

$$+ P(\text{camiseta no es de rayas}) \cdot P(\text{falda no es de rayas}) =$$

$$= \frac{10}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{15}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{15}{25} \cdot \frac{20}{25} = \frac{200 + 75 + 300}{625} = \frac{575}{625} = \boxed{0,92}$$

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

- a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)
 b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)
 c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A . (0.75 puntos)

a) Calculemos primero el valor de A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -x-x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -x^2-2x^2 \\ -x^2 & 1 & x+x \\ -x-x & x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $A^3 - I = O$.

$$A^3 - I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^3 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 0 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ -2x = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ -x^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x = 0 \\ -2x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

b) Para $x = 0$ utilizando lo realizado en el apartado anterior tenemos las primeras potencias.

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} x^3 + 1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora seguimos calculando la potencia pedida

$$A^{12} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 = I \cdot I \cdot I \cdot I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Al ser $A^3 = I \Rightarrow A \cdot A^2 = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Con la fórmula $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las curvas $y = \frac{x^2}{2}$; $y = \frac{4}{x}$.

- a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)
 b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)
 c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

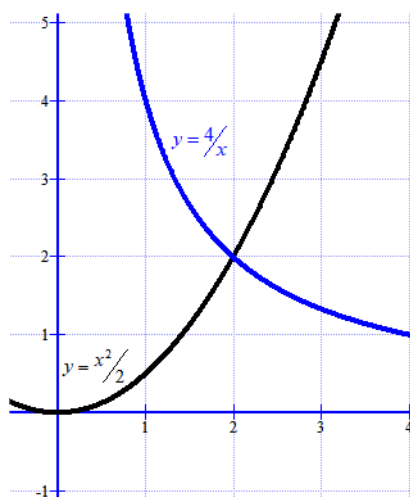
a) Resolvamos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{4}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

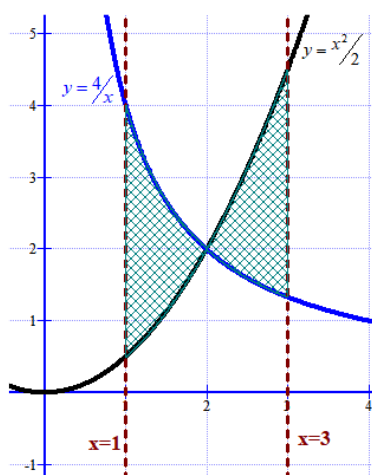
El punto de corte entre las curvas es $P(2,2)$.

b) Haciendo una tabla de valores.

x	$y = \frac{x^2}{2}$	x	$y = \frac{4}{x}$
0	0	0	No existe
1	0,5	1	4
2	2	2	2
3	4,5	3	1,33



c) Si añadimos las rectas $x = 1$ y $x = 3$ el recinto queda



El área de este recinto se calcula con la integral definida siguiente

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} dx + \int_2^3 \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} dx = \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{6} - 4 \ln x \right]_2^3 = \\ &= \left(4 \ln 2 - \frac{2^3}{6} \right) - \left(4 \ln 1 - \frac{1^3}{6} \right) + \left(\frac{3^3}{6} - 4 \ln 3 \right) - \left(\frac{2^3}{6} - 4 \ln 2 \right) = \\ &= 4 \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} + \frac{27}{6} - 4 \ln 3 - \frac{8}{6} + 4 \ln 2 = \frac{12}{6} - 4 \ln 3 + 8 \ln 2 = \boxed{3,1507 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

- a) El punto P intersección del plano π y de la recta r . (1.25 puntos)
 b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π . (1.25 puntos)

a) Hallemos la ecuación de la recta r .

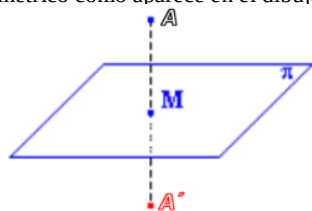
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \text{Pasa por } A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\}$$

Resolvamos el sistema formado por la ecuación del plano y de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 1 \\ x = 1 \\ r \equiv y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 1 + t = 1 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

El punto de intersección es $P(1, 0, 0)$

b) Nos piden obtener el punto simétrico como aparece en el dibujo.



Hallo primero la ecuación de la recta s que pasa por A , A' y M . Para ello tengo su vector director que es el vector normal del plano $\vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, 0)$ y un punto $A(1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \\ \text{Pasa por } A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

Determinemos las coordenadas del punto M intersección del plano $\pi : x + y = 1$ y la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 1 \\ s \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + t + 1 + t = 1 \Rightarrow 2t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Como M es el punto medio del segmento AA' se cumple

$$M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow 2M = A + A' \Rightarrow A' = 2M - A = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) - (1, 1, 1) = (1, 1, 2) - (1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

El simétrico de $A(1, 1, 1)$ respecto del plano $\pi : x + y = 1$ es el punto A' **(0, 0, 1)**.

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

- a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)
 b) La calificación que sólo superan o igualan el 20% de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(x) = P(Z \leq x)$; $F(-0.8416) = 0.2$; $F(0.8416) = 0.8$; $F(0.4) = 0.6554$; $F(0.5) = 0.6915$; $F(0.6) = 0.7257$

X = Calificación de un examen. $X = N(20, 10)$.

a)

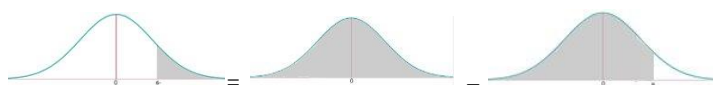
$$P(15 < X < 25) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{15-20}{10} < \frac{X-20}{10} < \frac{25-20}{10}\right) =$$

$$= P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z < 0.5) - (1 - P(Z < 0.5)) = 0.6915 - (1 - 0.6915) = \boxed{0.3829}$$

b)

$$P(X > x) = 0.20 \Rightarrow P\left(\frac{X-20}{10} > \frac{x-20}{10}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-20}{10}\right) = 0.2 \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Buscando en los datos proporcionados en el ejercicio:

$$F(x) = P(Z \leq x); F(-0.8416) = 0.2; F(0.8416) = 0.8 \rightarrow P(Z \leq 0.8416) = 0.8$$

$$P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) = 0.8 \Rightarrow \frac{x-20}{10} = 0.8416 \Rightarrow x - 20 = 8.416 \Rightarrow x = 28.416$$

La puntuación pedida es de 28,416 puntos.



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU junio 2019

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} mx + y - z & = & 0 \\ 2x + my & = & m \\ x + mz & = & m \end{array} \right\} m \in \mathbb{R}.$$

- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m . (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{2}{2+e^x}$:

- a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)
b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$; calcula $\int \frac{2}{2+e^x} dx$ (1.5 puntos)

3. Sean los planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ y π_2 : Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Calcula:

- a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r . (1.25 puntos)

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10% de las veces.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

**OPCIÓN B**

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$

- b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

2. Dada la curva $y = \frac{1}{3+x^2}$.

- a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x . (1 punto)
- b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1;-1;-1)$. Calcula:

- a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
- b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10% de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20% de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

- a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
- b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
- c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ 2x + my = m \\ x + mz = m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}.$$

- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m . (1.25 puntos)
 b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
 c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$. (0.5 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$Am = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 + 0 + 0 - (-m + 2m + 0) = m^3 - m$$

Si lo igualamos a cero:

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Por lo que vamos a distinguir 4 casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 0$; $m \neq -1$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no sería cero y el rango de $A =$ rango de $Am = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema sería compatible determinado (solución única).

CASO 2. $m = 0$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{cases} \quad \text{El sistema es compatible indeterminado.}$$

CASO 3. $m = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sumo a la 2ª ecuación el doble de la 1ª} \\ \text{Sumo a la 3ª ecuación la 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{2ª y 3ª ecuación son iguales} \\ \text{puedo quitar una de ellas} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 2z - 1 \Rightarrow -x + 2z - 1 - z = 0 \Rightarrow -x + z - 1 = 0 \Rightarrow z - 1 = x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2z - 1 \\ z = z \end{array} \right\}.$$

El sistema es compatible indeterminado

CASO 4. $m = 1$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{Sumo a la 2ª ecuación -2 veces la 1ª} \\ \text{Sumo a la 3ª ecuación -1 vez la 1ª} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Este sistema equivalente al inicial tiene dos ecuaciones iguales y por tanto es compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$ el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z - 1 = y \Rightarrow x + 2z - 1 - z = 0 \Rightarrow x = 1 - z$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 2z - 1 \\ z = z \end{array} \right\}$$

c) Si sustituimos $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$ como solución del sistema se debería cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ m = m \\ m = m \end{array} \right\}$$

Se cumplen para cualquier valor de m

2. Dada la función $f(x) = \frac{2}{2+e^x}$:

- a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)
 b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$; calcula $\int \frac{2}{2+e^x} dx$ (1.5 puntos)

a) El dominio de definición de la función $f(x) = \frac{2}{2+e^x}$ son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.

$2+e^x = 0 \Rightarrow 2 = -e^x \Rightarrow -2 = e^x$ Esta igualdad no tiene solución ya que la exponencial siempre es positiva.

El dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. No tiene, el dominio son todos los números reales

Asíntotas horizontales.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+e^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$ una asíntota horizontal es $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+e^{-\infty}} = \frac{2}{2+0} = 1$ otra asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntotas oblicuas. No tiene, ya que tiene horizontales.

b) Realizamos un cambio de variable.

$$\int \frac{2}{2+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{e^x} = dx \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{2}{2+t} \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{(2+t)t} dt$$

Esta integral la hacemos por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{2}{(2+t)t} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{t} \Rightarrow \frac{2}{(2+t)t} = \frac{At+B(2+t)}{(2+t)t} \Rightarrow 2 = At+B(2+t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t=0 \Rightarrow 2=2B \Rightarrow B=1 \\ t=-2 \Rightarrow 2=-2A \Rightarrow A=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{(2+t)t} = \frac{-1}{2+t} + \frac{1}{t}$$

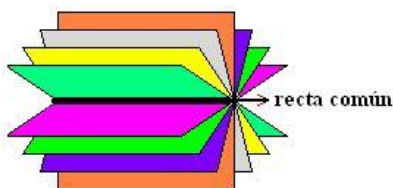
Siguiendo con el cálculo de la integral.

$$\int \frac{2}{(2+t)t} dt = \int \left(\frac{-1}{2+t} + \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{-1}{2+t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\ln|2+t| + \ln t = \ln \frac{t}{2+t} = \ln \left(\frac{e^x}{2+e^x} \right) + K$$

3. Sean los planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ y π_2 . Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Calcula:

- a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
 b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r . (1.25 puntos)

a) **Una forma de resolverlo:**



El plano pedido está en el haz de planos que contienen a la recta $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ y por tanto el plano π_2 tiene ecuación $x + y + z + b(x + z) = 0$. Como pasa por $A(1,1,1)$ entonces:

$$1 + 1 + 1 + b(1 + 1) = 0 \Rightarrow 3 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

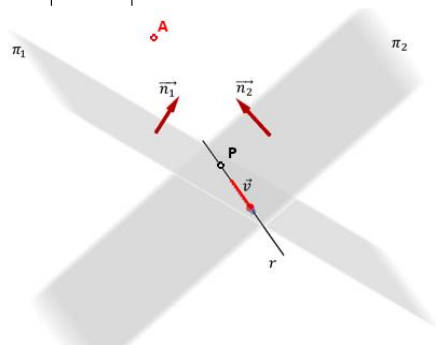
La ecuación queda $x + y + z - \frac{3}{2}(x + z) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z - 3x - 3z = 0 \Rightarrow -x + 2y - z = 0$

El plano tiene ecuación $\pi_2 \equiv -x + 2y - z = 0$.

Otra forma de resolverlo:

La recta de ecuación $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ pasa por el punto $P(0,0,0)$ y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - (k + j) = i - k = (1, 0, -1)$$



El plano π_2 al contener a la recta debe pasar por $P(0,0,0)$ y tener como vectores directores

$\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 0) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

Hallamos la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - z - (-y + x) = 0$$

$$-x + 2y - z = 0$$

El plano tiene ecuación $\pi_2 \equiv -x + 2y - z = 0$

b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a $\pi_1 : x + y + z = 0$ tiene ecuación $\pi'_1 : x + y + z + D = 0$.

Además $P(0,0,0)$ es un punto del plano π_1 .

$$distancia(\pi_1, \pi'_1) = \sqrt{3} \Rightarrow distancia(P, \pi'_1) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$$

$$|0+0+0+D| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow |D| = 3 \Rightarrow \begin{cases} D = 3 \\ \text{o} \\ D = -3 \end{cases}$$

El plano puede ser $\pi'_1 : x + y + z + 3 = 0$ o $\pi'_1 : x + y + z - 3 = 0$

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de las veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Dado que son 20 lanzamientos es un problema de distribución binomial.

Consideremos la distribución X = Número de fallos de un cañón en 20 lanzamientos.

$n = 20$ y p = Probabilidad de fallo en un lanzamiento = 0,10. $X = B(20, 0,1)$

$$a) P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^{15} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^{15} = 0,03$$

b)

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{20}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} =$$

$$= 1 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{20} + 20 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{19} + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} =$$

$$= 0,1215 + 0,27 + 0,2851 = 0,6766$$

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

a) Un producto de matrices es posible si el número de columnas de la primera matriz del producto es igual al número de filas de la segunda matriz del producto:

$A \cdot B$ es posible si A es de dimensiones $m \times n$ y B es $n \times p$. Siendo el producto resultante una matriz $m \times p$.

Apliquemos esta regla a nuestros productos:

$$A \text{ es de dimensiones } 3 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot A \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3 \times 3 \\ 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A \text{ es de dimensiones } 3 \times 3 \\ B \text{ es de dimensiones } 3 \times 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3 \times 2 \\ 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A \cdot B \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3 \times 2 \\ C \text{ es de dimensiones } 3 \times 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B \cdot C \text{ no es posible} \\ 3 \times \boxed{2 \cdot 3} \times 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} C \text{ es de dimensiones } 3 \times 1 \\ D \text{ es de dimensiones } 1 \times 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C \cdot D \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3 \times 3 \\ 3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \end{cases}$$

b) Debemos hallar la inversa de $A \cdot A$ y $C \cdot D$. Las otras no son cuadradas.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A \cdot A)^T}{|A \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C \cdot D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ Esta matriz no tiene inversa}$$

2. Dada la curva $y = \frac{1}{3+x^2}$.

- a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x . (1 punto)
- b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

$$a) m(x) = f'(x) = \frac{0 \cdot (3+x^2) - 2x \cdot 1}{(3+x^2)^2} = \frac{-2x}{(3+x^2)^2}$$

b) Debemos maximizar $m(x) = \frac{-2x}{(3+x^2)^2}$, por lo que calculamos su derivada.

$$m'(x) = \frac{-2 \cdot (3+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(3+x^2) \cdot 2x}{(3+x^2)^4} = \frac{-2 \cdot (3+x^2)^2 + 8x^2 \cdot (3+x^2)}{(3+x^2)^4}$$

$$m'(x) = \frac{(3+x^2)(-2 \cdot (3+x^2) + 8x^2)}{(3+x^2)^4} = \frac{(3+x^2)(-6-2x^2+8x^2)}{(3+x^2)^4} = \frac{(3+x^2)(-6+6x^2)}{(3+x^2)^4} = \frac{-6+6x^2}{(3+x^2)^3}$$

Si igualamos a cero

$$m'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6+6x^2}{(3+x^2)^3} = 0 \Rightarrow -6+6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Comprobemos si 1 o -1 es un máximo.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos un valor, por ejemplo $x = -2 \Rightarrow m'(-2) = \frac{-6+6(-2)^2}{(3+(-2)^2)^3} = \frac{18}{7^3} > 0$ la

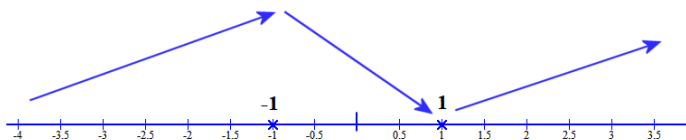
función crece.

- En $(-1, 1)$ tomamos un valor, por ejemplo $x = 0 \Rightarrow m'(0) = \frac{-6+6(0)^2}{(3+(0)^2)^3} = \frac{-6}{3^3} < 0$ la

función decrece.

- En $(1, +\infty)$ tomamos un valor, por ejemplo $x = 2 \Rightarrow m'(2) = \frac{-6+6(2)^2}{(3+(2)^2)^3} = \frac{18}{7^3} > 0$ la

función crece.



En $x = -1$ hay un máximo. La pendiente es máxima en dicho punto.

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

a) Hallamos el punto medio del segmento AB que debe pertenecer al plano pedido:

$$PM = \frac{(1,1,1) + (1,-1,-1)}{2} = \frac{(2,0,0)}{2} = (1,0,0)$$

Además, el vector normal a dicho plano debe ser el vector $\overrightarrow{AB} = (1,-1,-1) - (1,1,1) = (0,-2,-2)$

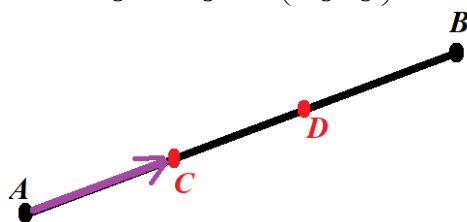
El plano π tiene la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0, -2, -2) \\ PM(1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2y - 2z + D = 0 \\ PM(1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

El plano es el de ecuación $\pi \equiv -2y - 2z = 0$, que simplificado es $\pi \equiv y + z = 0$.

b) El vector que une los puntos A y B lo dividimos entre 3:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{(0, -2, -2)}{3} = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$



Le sumamos al punto $A(1,1,1)$ dicho vector y obtenemos C.

$$C = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (1,1,1) + \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Le sumamos a C el mismo vector y obtenemos D.

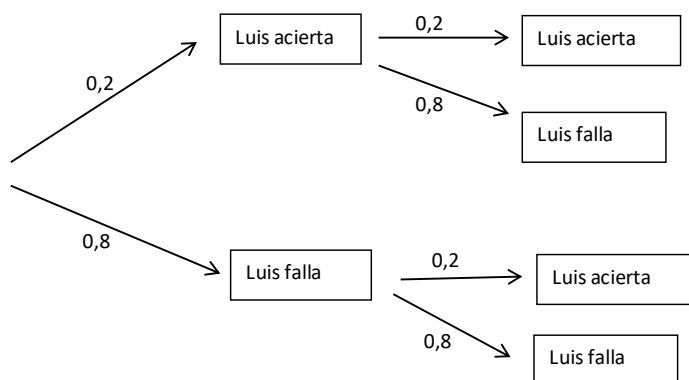
$$D = C + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Los puntos pedidos son $C\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $D\left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10% de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20% de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

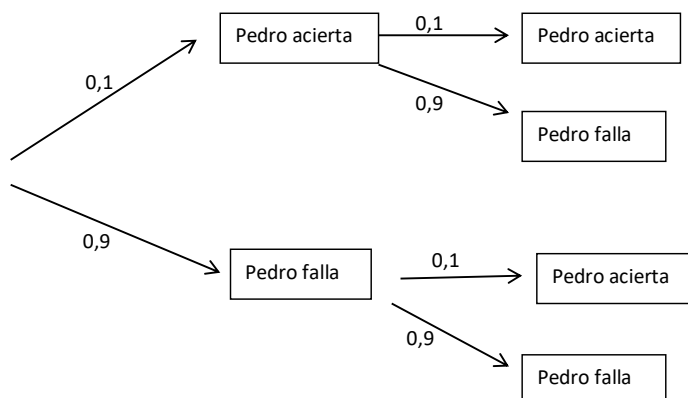
- a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
 b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
 c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

a) Hagamos el diagrama de árbol:



$$P(\text{Luis acierta las dos veces}) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

b) Hagamos el diagrama de árbol:



$$P(\text{Luis acierta una sola vez}) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,09 + 0,09 = 0,18$$

c) Para ganar entre los dos 600 € Pedro debe acertar solo una vez y Luis las dos veces. Como son independientes las tiradas de uno con respecto a las del otro, la probabilidad de que ocurra esto es:

$$\begin{aligned} P(\text{ganar 600€}) &= P(\text{Luis acierta una sola vez y Pedro acierta las dos veces}) = \\ &= P(\text{Luis acierta una sola vez}) \cdot P(\text{Luis acierta las dos veces}) = 0,18 \cdot 0,04 = 0,0072 \end{aligned}$$



Universidad de Oviedo
Universidá d'Oviéu
University of Oviedo

EBAU julio 2018

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

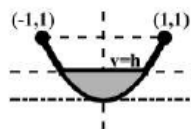
El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

2. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



- a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en

función de h se puede expresar como $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

- b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero.

(Nota: Volumen = $S \times$ longitud). (1 punto)

3. Los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la

recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r .

- a) Determina el punto C. (1.5 puntos)

- b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

- a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)

- b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Oviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

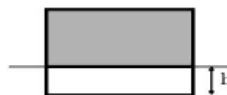
OPCIÓN B

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

2. Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



3. Dados los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, -1) y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida

$$\text{por } s: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)
b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

- a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)
b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)
c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

SOLUCIONES

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Dada la apariencia del sistema utilizamos el método de Gauss para discutir su compatibilidad.

El sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Triangulamos la matriz ampliada utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2a \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad a \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3-a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3-a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3-3a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El determinante de la matriz A es nulo $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Su rango no es 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 1ª su

determinante es no nulo $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2, independientemente del valor de a .

Como en la matriz ampliada A/B la columna 1ª y 2ª son proporcionales consideramos el menor de

orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3-3a \end{vmatrix} = 3-3a$. Este determinante se anula

para $a = 1$.

Consideramos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante del menor no es nulo y el rango de A/B es 3. El rango de A es 2 y el de la matriz ampliada A/B es 3. Como los rangos son distintos el sistema es incompatible.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante del menor es nulo y el rango de A/B no es 3 y por tanto es 2, como el rango de A. Rango A = Rango A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema para $a = 1$, a partir del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + y + 1 = 1 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Para $a = 1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado

siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$.

2. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m.

Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$.

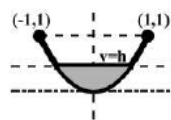
Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

a) Comprueba que el área de la región S , sombreada en la figura,

en función de h se puede expresar como $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

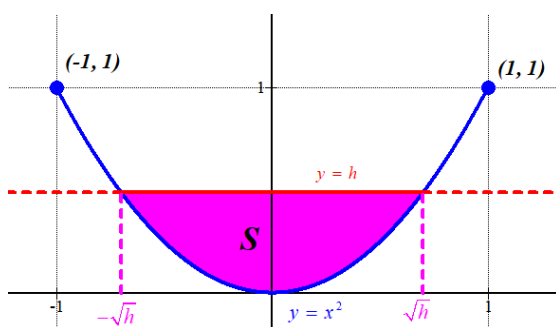
b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero.

(Nota: Volumen = $S \times$ longitud). (1 punto)



a) Completamos el dibujo indicando las coordenadas de los puntos de corte de las gráficas de las funciones que delimitan la región S .

$$\begin{cases} y = h \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = h \Rightarrow x = \pm\sqrt{h}$$



El área de la región S es el valor de la integral definida entre $-\sqrt{h}$ y $\sqrt{h}$ de la diferencia entre la función $y = h$ y la función $y = x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Área } S &= \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2) dx = \left[hx - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \left[h\sqrt{h} - \frac{(\sqrt{h})^3}{3} \right] - \left[h(-\sqrt{h}) - \frac{(-\sqrt{h})^3}{3} \right] = \\ &= h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} = \frac{3h\sqrt{h}}{3} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + \frac{3h\sqrt{h}}{3} - \frac{h\sqrt{h}}{3} = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que $\text{Área } S = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$ metros cuadrados, siendo $0 \leq h \leq 1$.

b) La expresión del volumen de agua del abrevadero en función de la altura del agua es el producto del área de S por 6 metros de profundidad.

$$V(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \cdot 6 = 8h\sqrt{h} \text{ metros cúbicos}$$

El volumen total del abrevadero se consigue cuando $h = 1$.

$$V(1) = 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = 8$$

El volumen máximo del abrevadero es de 8 metros cúbicos.

El abrevadero está en la mitad cuando tiene 4 metros cúbicos. Averiguamos el valor de h para que tenga ese volumen.

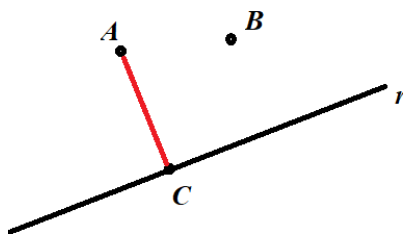
$$V(h) = 4 \Rightarrow 8h\sqrt{h} = 4 \Rightarrow h\sqrt{h} = \frac{4}{8} \Rightarrow \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

El abrevadero está a la mitad de su capacidad cuando la altura del agua es $h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.63$ metros.

3. Los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r .
- a) Determina el punto C . (1.5 puntos)
- b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

- a) El punto C al pertenecer a la recta $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$ tiene coordenadas $C(4, y, 1)$.

La situación planteada es la del dibujo, siendo el segmento AC perpendicular a la recta r .



Si hallamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A , el punto C será el punto de corte de recta y plano.

Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A . Tendrá

como vector normal el vector director de la recta $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=4 \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(4, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (0, 1, 0) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, 0) \Bigg\} &\Rightarrow \pi: y + D = 0 \\ A(0, 1, 0) \in \pi \Bigg\} &\Rightarrow A(0, 1, 0) \in \pi \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: y - 1 = 0} \end{aligned}$$

Hallamos el punto de corte C de recta y plano.

$$\begin{aligned} \pi: y - 1 = 0 \Bigg\} &\Rightarrow y = 1 \\ r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases} \Bigg\} &\Rightarrow x = 4 \\ &\Rightarrow \boxed{C(4, 1, 1)} \end{aligned}$$

- b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$.

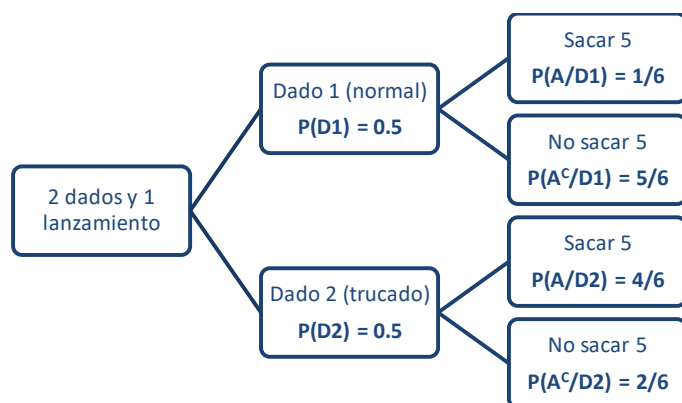
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (4, 1, 1) - (0, 1, 0) = (4, 0, 1) \\ \overrightarrow{AB} &= (-1, 1, 1) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 1) \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j - 4j = -5j = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 0^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ u}^2$$

El área del triángulo ABC es de 2.5 unidades cuadradas.

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.
- a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
- b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar los posibles resultados del experimento y sus probabilidades. Llamamos D1 a elegir el dado normal y D2 a elegir el dado trucado. Estos dos sucesos son igual de probables y la probabilidad de cualquiera de ellos es $1/2 = 0.5$. Llamamos A al suceso “sacar 5 al lanzar el dado elegido” y A^c al suceso “no sacar 5 al lanzar el dado elegido”.



A partir de los datos del diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(D1)P(A/D1) + P(D2)P(A/D2) = 0.5 \cdot \frac{1}{6} + 0.5 \cdot \frac{4}{6} = \frac{2.5}{6} \approx 0.2166$$

La probabilidad de sacar 5 tiene un valor aproximado de 0.2166.

- b) Nos piden calcular $P(D2/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D2/A) = \frac{P(D2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D2)P(A/D2)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot \frac{4}{6}}{\frac{2.5}{6}} = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

La probabilidad de haber elegido el dado trucado, sabiendo que hemos sacado 5 es de 0.8.

OPCIÓN B

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es de dimensiones 3×4 y su rango puede ser 3, 2 o 1.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª (3 veces la columna 3ª) $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 1 - 8 = -1 \neq 0. \text{ Al ser no nulo la matriz A tiene rango 3.}$$

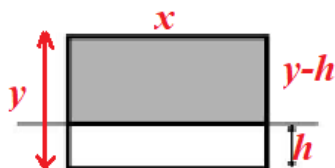
b) Como hay 4 columnas y el rango es 3 debe existir una columna que sea combinación lineal de las restantes. Se observa que la columna 2ª es 3 veces la columna 3ª.

c) Como el rango es 3 las tres filas son independientes entre sí y ninguna es combinación lineal de las restantes.

2. Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



Llamamos “ y ” a la altura de la valla y “ x ” a la anchura.
La situación planteada es la del dibujo.



Como h es la quinta parte de la anchura (x) se cumple que $h = \frac{x}{5} \Rightarrow y - h = y - \frac{x}{5}$.

Tenemos 20 metros de marco metálico, por lo que $2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Utilizamos las dos expresiones obtenidas y el área de la zona sombreada es:

$$\text{Área} = A(x) = x(y - h) = x\left(y - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - \frac{6x}{5}\right) = 10x - \frac{6}{5}x^2$$

Debemos buscar el máximo de la función $A(x) = 10x - \frac{6}{5}x^2$.

Derivamos e igualamos a cero en busca del punto crítico de la función.

$$A(x) = 10x - \frac{6}{5}x^2 \Rightarrow A'(x) = 10 - \frac{12}{5}x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 10 - \frac{12}{5}x = 0 \Rightarrow 50 - 12x = 0 \Rightarrow 12x = 50 \Rightarrow \boxed{x = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}}$$

Comprobamos si $x = \frac{25}{6}$ es un máximo de la función área usando la derivada segunda.

$$A'(x) = 10 - \frac{12}{5}x \Rightarrow A''(x) = -\frac{12}{5} \Rightarrow A''\left(\frac{25}{6}\right) = -\frac{12}{5} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo para $x = \frac{25}{6}$.

Para $x = \frac{25}{6}$ tenemos que $y = 10 - \frac{25}{6} = \frac{35}{6}$.

Las medidas de la valla que hacen máxima el área de la zona sombreada son $\frac{25}{6} \approx 4.166$ metros de anchura y $\frac{35}{6} \approx 5.833$ metros de altura.

3. Dados los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, -1) y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida

$$\text{por } s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta r.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{BA} &= (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1) \\ A(2, 1, 0) &\in r \end{aligned} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Obtenemos un vector director de la recta s.

$$s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -1) \\ Q_s(2, 0, 0) \end{cases}$$

Observamos que las rectas no son paralelas ni coincidentes, pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_s} &= (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_r} &= (1, 1, 1) \end{aligned} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$$

Al no ser ni paralelas ni coincidentes las rectas las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si el producto mixto $[\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AQ_s}]$ es nulo o no.

$$\overrightarrow{AQ_s} = (2, 0, 0) - (2, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_s} &= (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_r} &= (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AQ_s} &= (0, -1, 0) \end{aligned} \Rightarrow [\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AQ_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 1 = 0$$

Al ser el producto mixto nulo las rectas se cortan en un punto (pertenecen al mismo plano).

b) Si el punto C pertenece a la recta s: $\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ tiene coordenadas $C(2-\lambda, \lambda, -\lambda)$.

Obtenemos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{CA} = (2, 1, 0) - (2-\lambda, \lambda, -\lambda) = (\lambda, 1-\lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, -1) - (2 - \lambda, \lambda, -\lambda) = (-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda)$$

Como estos vectores deben ser perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (\lambda, 1 - \lambda, \lambda) \\ \overrightarrow{CB} = (-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda) \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda, 1 - \lambda, \lambda)(-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(-1 + \lambda) + (1 - \lambda)(-\lambda) + \lambda(-1 + \lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{cases}$$

Existen dos soluciones:

Si $\lambda = 0$ el punto es $C(2 - 0, 0, -0) \rightarrow C_1(2, 0, 0)$.

Si $\lambda = 1$ el punto es $C(2 - 1, 1, -1) \rightarrow C_2(1, 1, -1)$.

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:
- La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)
 - La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)
 - Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

Si todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos significa que hay 0 habitantes que no son seguidores de ninguno de los dos equipos.

Construimos una tabla de contingencia para obtener la información que viene implícita en los datos proporcionados en el ejercicio.

	Baloncesto	No baloncesto	
Fútbol			60
No fútbol		0	
	60		100

Completamos la tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	
Fútbol	20	40	60
No fútbol	40	0	40
	60	40	100

Respondemos a las preguntas planteadas.

- En la tabla se observa que el 20 % de los habitantes son seguidores de ambos equipos. La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez es de 0.2.
- Se observa en la tabla que hay un 40 % de los habitantes que son seguidores del equipo de fútbol y no del de baloncesto. La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol es de 0.4.
- Hay un 60 % de los habitantes que son seguidores del equipo de baloncesto y de estos el 20 % son seguidores del equipo de fútbol. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un seguidor del equipo de baloncesto sea también seguidor del equipo de fútbol es $\frac{20}{60} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$.



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU junio 2018

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)

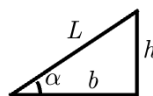
b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A' \text{ matriz traspuesta})$$

2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m , el valor de b y comprueba que la longitud de la

rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente

m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Demuestra que el tiempo t , en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como

$$t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)
(Se recuerda que $\tan = \text{tángente}$ y $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$).

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2. \text{ Calcula:}$$

a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r . (0.75 puntos)

b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)

c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B . Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B . (0.5 puntos)



OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

3. Dado la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto $Q(1, 1, 1)$ y un plano π .

- a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P, Q) = 1u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

- a) Sea fumador. (0.5 puntos)
b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)
c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)

b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

a) La matriz A es de dimensiones 3×4 . Su rango puede ser 3, 2 o 1.

Aplicamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente a la matriz A , pero en la que sea más fácil el estudio del rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -m+1 \\ 0 \quad m-2 \quad m-2 \quad -m+2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ m-1 \quad 1 \quad m \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -m+1 \\ m-2 \quad 0 \quad m-2 \quad -m+2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & -m+2 \\ m-2 & 0 & m-2 & -m+2 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor que resulta de quitar la cuarta columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & m-2 \\ m-2 & 0 & m-2 \end{vmatrix} = (m-2)(m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)^2 (1+1+0-2-0-0) = 0$$

Como es nulo su determinante considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera y compruebo el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & m-2 & -m+2 \\ m-2 & 0 & -m+2 \end{vmatrix} = (m-2)(m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-2)^2 (-1-1+0-(m-1)-0-0) = (m-2)^2 (-m-1)$$

Este determinante se anula cuando $m = 2$ y cuando $m = -1$. Establecemos tres casos distintos que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq -1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es **no** nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $m = 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es nulo y el rango de la matriz A es menor que 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo queda una fila con elementos no nulos, y por tanto, el rango de A es 1.

CASO 3. $m = -1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es nulo y el rango de la matriz A es menor que 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar las columnas 3ª y 4ª y la fila 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. El determinante del menor de orden 2 es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$ el rango de la matriz A es 3, si $m = 2$ el rango de A es 1 y si $m = -1$ el rango de A es 2.

b) Para $m = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz traspuesta sería

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{El sistema queda } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operamos con la matriz ampliada para convertir el sistema en otro triangular equivalente.

$$A^t / B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 4^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 4^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema equivalente que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

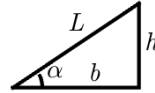
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x + x - 2z = 0 \Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow 2x = 2z \Rightarrow \boxed{z = x}$$

Para $m = -1$ las soluciones son: $x = y = z = \lambda$; siendo λ cualquier número real.

2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m , el valor de b y comprueba que la longitud de

la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m

y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t , en

segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$

(0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)

(Se recuerda que $\tan = \text{tangente}$ y $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$).

a) Tenemos un triángulo rectángulo del que conocemos uno de sus catetos. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$L^2 = b^2 + h^2 = b^2 + 20^2 \Rightarrow L^2 - 400 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{L^2 - 400}$$

Como $m = \tan(\alpha)$ tenemos que $m = \tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{h}{b} = \frac{20}{b}$. Despejamos b en la

expresión obtenida: $b = \frac{20}{m}$.

Utilizamos las dos igualdades obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{20}{m} \\ b = \sqrt{L^2 - 400} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{20}{m} = \sqrt{L^2 - 400} \Rightarrow \left(\frac{20}{m}\right)^2 = L^2 - 400 \Rightarrow \frac{400}{m^2} = L^2 - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{400}{m^2} + 400 \Rightarrow L^2 = 400 \left(\frac{1}{m^2} + 1 \right) = 400 \frac{1+m^2}{m^2} \Rightarrow L = \sqrt{400 \frac{1+m^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}$$

b) Como $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$ y además $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$ reunimos estas dos expresiones y despejamos el tiempo.

$$\left. \begin{array}{l} v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}} \\ v(m) = \frac{L(m)}{t(m)} \rightarrow t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} \\ L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow t(m) = \frac{20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 20\sqrt{m} \sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m(m^2+1)}{m^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

c) Debemos buscar el mínimo de la función $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$. Utilizamos la función derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}} = 20\sqrt{m+m^{-1}} \Rightarrow t'(m) = 20 \frac{1-m^{-2}}{2\sqrt{m+m^{-1}}} = 10 \frac{1-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{m+m^{-1}}}$$

$$t'(m) = 0 \Rightarrow 10 \frac{1-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{m+m^{-1}}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{m^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m^2} = 1 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = 1}$$

Estudiamos la evolución de la derivada antes y después de $m=1$.

- Antes de $m=1$ consideramos $m=0.9$ y $t'(0.9) = 10 \frac{1-\frac{1}{0.9^2}}{\sqrt{0.9+0.9^{-1}}} = -1.65 < 0$. La función decrece antes de $m=1$.
- Después de $m=1$ consideramos $m=1.1$ y $t'(1.1) = 10 \frac{1-\frac{1}{1.1^2}}{\sqrt{1.1+1.1^{-1}}} = 1.22 > 0$. La función crece después de $m=1$.

Como el tiempo decrece antes y crece después tenemos un mínimo en $m=1$.

La pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión es $m=1$. Una pendiente de 45° .

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2. \text{ Calcula:}$$

- a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r . (0.75 puntos)
 b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)
 c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases}$$

b) Las rectas r y s son perpendiculares por lo que el producto escalar de sus vectores directores es nulo $\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 1, -1)(a, b, c) = 0 \Rightarrow 2a + b - c = 0 \Rightarrow b = c - 2a \Rightarrow \vec{v}_2 = (a, c - 2a, c)$$

Determinamos la expresión del producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (a, c - 2a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ a & c - 2a & c \end{vmatrix} = ci - aj + 2(c - 2a)k - ak - 2cj + (c - 2a)i$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (c + c - 2a)i + (-a - 2c)j + (2c - 4a - a)k = (2c - 2a)i + (-a - 2c)j + (2c - 5a)k$$

El producto vectorial es $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2c - 2a, -a - 2c, 2c - 5a)$. Además, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2c - 2a, -a - 2c, 2c - 5a) = k(1, 0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2c - 2a = k \\ -a - 2c = 0 \Rightarrow -a - 2c = 0 \Rightarrow \\ 2c - 5a = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -2c \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2c, c - 2(-2c), c) = (-2c, 5c, c)$$

Si tomamos $c = 1$ tendremos las coordenadas de un vector director de la recta s que cumple lo pedido: $\vec{v}_2 = (-2, 5, 1)$.

c) El plano π que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto $P_r(1, -1, 2)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_2 = (-2, 5, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+2(y+1)+10(z-2)+2(z-2)-2(y+1)+5(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-1)+12(z-2)=0 \Rightarrow x-1+2(z-2)=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2z-5=0}$$

La ecuación del plano π que contiene las rectas r y s es $\pi: x+2z-5=0$.

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

- a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)
 b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)
 c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0.5 puntos)

a)

$$p(A/B) = 0.5 \Rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0.5 \Rightarrow \{p(A \cap B) = 0.3\} \Rightarrow \frac{0.3}{p(B)} = 0.5 \Rightarrow p(B) = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

Como los sucesos A y B son independientes se cumple $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap B) = p(A)p(B) \\ p(A \cap B) = 0.3 \\ p(B) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.3 = p(A) \cdot 0.6 \Rightarrow p(A) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

b) Hallamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A) = 0.5 \\ p(B) = 0.6 \\ p(A \cap B) = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

Determinamos el valor de $p(B/A)$.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

c) Nos piden calcular $p(\overline{A \cap B})$. Utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$p(\overline{A \cap B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
 b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

a) Comprobamos que existe la inversa de B viendo que su determinante es no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 + 1 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Existe la inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial: $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 & 0-6 \\ 0-1 & 0+0 & 0+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2-6 & 4+0-6 & -4+2+6 \\ -2+0+2 & -1+0+2 & 1+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$

La matriz X solución de la ecuación matricial $AXB=C$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
 b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
 c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

a) Es una función racional y su dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(-3)^2 - 3 - 6} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{2^2 + 2 - 6} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + x - 6) - 1 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^2} = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2} = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2} - 6\right)^2} = \frac{-1 - 1}{\left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4}\right)^2} = \frac{-2}{\left(-\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{625}{16}} = -\frac{32}{625}$$

$$= \frac{-2(x^2 + x - 6) - (-2x - 1)2(2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{-2x^2 - 2x + 12 - 2(-4x^2 - 1 - 2x - 2x)}{(x^2 + x - 6)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x + 12 + 8x^2 + 2 + 4x + 4x}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{6x^2 + 6x + 14}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\left(3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 7\right)}{\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6\right)^3} = -0.0512 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = \frac{-1}{2}$.

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6} = \frac{-4}{25}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-4}{25}\right)$.

Para encontrar los posibles puntos de inflexión buscamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 84}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-75}}{2} = \text{No existe}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

c) Hallamos la integral de la función usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \dots$$

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1=5B \rightarrow B=\frac{1}{5} \\ x=-3 \rightarrow 1=-5A \rightarrow A=-\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{-1/5}{x+3} + \frac{1/5}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1/5}{x+3} dx + \int \frac{1/5}{x-2} dx = \frac{-1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx = \left[\frac{-1}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + K \right]$$

3. Dado la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto $Q(1, 1, 1)$ y un plano π .

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P, Q) = 1$. (1.25 puntos)

b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

a) Un punto P de la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ tiene coordenadas $P(a, 1, 0)$.

La distancia de P a Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) - (a, 1, 0) = (1-a, 0, 1)$$

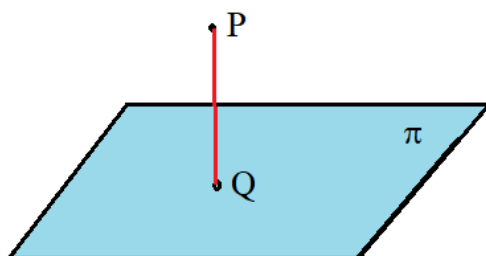
$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-a)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(1-a)^2 + 1}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale 1 unidad.

$$d(P, Q) = 1 \Rightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 1} = 1 \Rightarrow (1-a)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El punto P buscado tiene coordenadas $P(1, 1, 0)$.

b) Nos dicen que $d(P, Q) = d(P, \pi)$, por lo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Hallamos la ecuación del plano π que contiene el punto Q y con vector normal $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) \\ Q(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: z + D = 0 \\ Q(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: z - 1 = 0$.

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

- a) Sea fumador. (0.5 puntos)
 b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)
 c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

Completamos la tabla.

	Fumador	No fumador	
Hombres	10	30	40
Mujeres	20	40	60
TOTALES	30	70	100

- a) Hay 100 personas y de ellas 30 son fumadores. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir una persona esta sea fumadora es $\frac{30}{100} = 0.3$.
- b) Hay 30 fumadores y de ellos 20 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir un fumador este sea mujer es $\frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0.666$.
- c) La probabilidad de que la primera persona sea fumadora es de $\frac{30}{100}$. Una vez elegida esa persona quedan 99 personas en el grupo siendo 70 los no fumadores, la probabilidad de que la segunda persona no sea fumadora vale $\frac{70}{99}$. La probabilidad de que la primera persona elegida sea fumadora y la segunda no lo sea es el producto de las probabilidades: $\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{99} = \frac{7}{33}$.
- La probabilidad de que la primera persona no sea fumadora es de $\frac{70}{100}$. Una vez elegida esa persona quedan 99 personas en el grupo siendo 30 los fumadores, la probabilidad de que la segunda persona sea fumadora vale $\frac{30}{99}$. La probabilidad de que la primera persona no sea fumadora y la segunda si lo sea es el producto de las probabilidades: $\frac{70}{100} \cdot \frac{30}{99} = \frac{7}{33}$.
- La probabilidad de que una de las personas sea fumadora y la otra no es la suma de las dos probabilidades obtenidas: $\frac{7}{33} + \frac{7}{33} = \frac{14}{33} \approx 0.4242$.



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU julio 2017

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

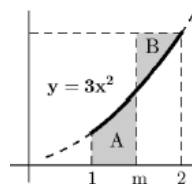
OPCIÓN A

1. Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases}$$

2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y m un valor de dicho intervalo.

- a) Halla, en función de m , el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)
b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π . Calcula:

- a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)
b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$) (0.5 puntos)

4. En una cierta enfermedad el 60% de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)
b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)



OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
- b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
- c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
- b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)
- c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + z + 1 = 0$

- a) Halla el valor de a para que sean paralelos. (1.5 puntos)
- b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

- a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)
- b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)
- c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases}$$

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + ay = 2 \\ -2x - 2y = -2 \\ \hline (a-2)y = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \\ -5x - 5y = -5 \\ \hline (3a-6)y = 1-a \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso podemos despejar en las ecuaciones 2^a y 3^a .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases} \Rightarrow \{a-2 \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{0}{a-2} = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \end{cases}$$

Vuelven a surgir dos situaciones distintas, en función del valor de a .

CASO 1.1. $a \neq 2$ y $a \neq 1$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \neq 0 \end{cases}$$

El sistema es incompatible pues obtenemos dos soluciones distintas para la incógnita “ y ”.

CASO 1.2. $a \neq 2$ y $a = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1-a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ \boxed{y=0}$$

El sistema es compatible determinado, siendo su solución: $x=1$ e $y=0$.

CASO 2. $a=2$

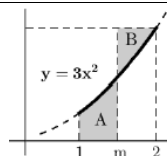
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Tenemos una igualdad imposible. El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a=1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución: $x=1$ e $y=0$. Y si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

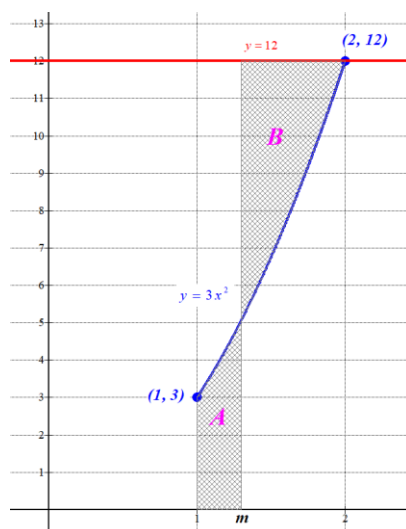
2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y m un valor de dicho intervalo.

- a) Halla, en función de m , el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)
 b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



a) Añadimos un poco de información a la imagen proporcionada.

x	$y = 3x^2$
1	3
2	12



El área de la zona A es el valor de la integral definida entre 1 y m de la función $y = 3x^2$.

$$\text{Área A} = \int_1^m 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_1^m = m^3 - 1^3 = m^3 - 1$$

El área de la zona B es el valor de la integral definida entre m y 2 de la diferencia entre las funciones $y = 12$ e $y = 3x^2$.

$$\text{Área B} = \int_m^2 (12 - 3x^2) dx = \left[12x - x^3 \right]_m^2 = [12 \cdot 2 - 2^3] - [12 \cdot m - m^3] = 16 - 12m + m^3$$

- b) La suma de las áreas tiene la expresión: $f(m) = m^3 - 1 + 16 - 12m + m^3 = 2m^3 - 12m + 15$.
 Buscamos los puntos críticos de esta función.

$$f(m) = 2m^3 - 12m + 15 \Rightarrow f'(m) = 6m^2 - 12$$

$$f'(m) = 0 \Rightarrow 6m^2 - 12 = 0 \Rightarrow m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

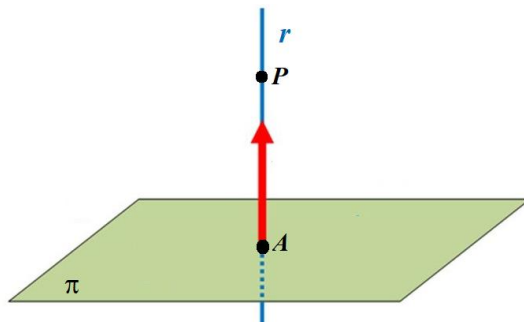
$$f'(m) = 6m^2 - 12 \Rightarrow f''(m) = 12m \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} > 0$$

Para $m = +\sqrt{2}$ la segunda derivada es positiva y la suma de las áreas es mínima para dicho valor $m = +\sqrt{2} \approx 1.4142$.

3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π . Calcula:

- a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A . (1 punto)
 b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
 c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A . (0.5 puntos)
 (Observación: $A \in \pi'$)

a) La situación planteada es la del dibujo.



Por tanto, un vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AP}$.

Hallamos la ecuación del plano π que pasa por el punto A y tiene como vector normal $\overrightarrow{PA}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PA} = (1, 2, 0) - (0, 0, -2) = (1, 2, 2) \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$.

- b) Un plano π' paralelo a $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$ tiene ecuación $\pi': x + 2y + 2z + D = 0$.

Como debe estar a distancia 3 unidades del plano π debe estar a distancia 3 unidades del punto A perteneciente al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 0) \\ d(A, \pi') = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|1 + 4 + 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|5 + D|}{3} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |5 + D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 5 + D = 9 \rightarrow D = 4 \rightarrow \boxed{\pi': x + 2y + 2z + 4 = 0} \\ 5 + D = -9 \rightarrow D = -14 \rightarrow \boxed{\pi'': x + 2y + 2z - 14 = 0} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen lo pedido: $\pi': x + 2y + 2z + 4 = 0$ y $\pi'': x + 2y + 2z - 14 = 0$.

- c) Un punto $B(a, b, c)$ perteneciente a $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$ debe cumplir su ecuación.

$$a + 2b + 2c - 5 = 0$$

El punto B también pertenece al plano $\pi': 2x - y = 0 \rightarrow 2a - b = 0 \rightarrow b = 2a$.

Reunimos las dos condiciones obtenidas y obtenemos la expresión del punto B.

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 2c - 5 = 0 \\ b = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a + 4a + 2c - 5 = 0 \Rightarrow 2c = 5 - 5a \Rightarrow c = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a$$

El punto B tiene coordenadas $B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)$.

Este punto B está a distancia $\sqrt{45}$ de A, por lo que el módulo del vector $\overline{AB}$ debe ser $\sqrt{45}$.

$$\overline{AB} = \left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) - (1, 2, 0) = \left(a - 1, 2a - 2, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{45} \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (2a-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)^2} = \sqrt{45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (2a-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)^2 = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 1^2 - 2a + 4a^2 + 4 - 8a + \frac{25}{4} + \frac{25}{4}a^2 - \frac{25}{2}a = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4 - 8a + 16a^2 + 16 - 32a + 25 + 25a^2 - 50a = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45a^2 - 90a + 45 = 180 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=a} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases}$$

Existen dos puntos que cumplen lo pedido:

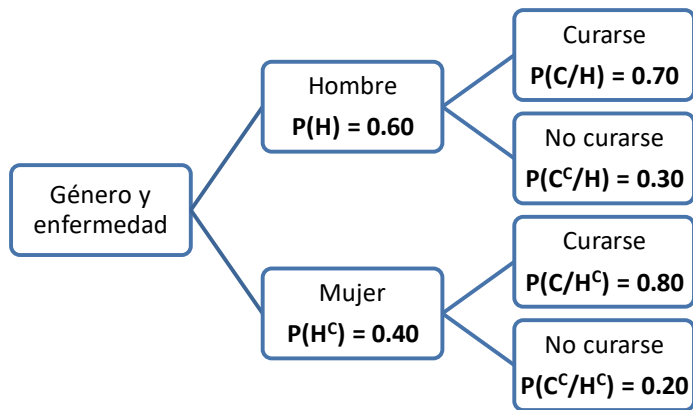
$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{B_1(-1, -2, 5)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{B_2(3, 6, -5)}$$

4. En una cierta enfermedad el 60% de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)
 b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema. Llamamos H al suceso “ser hombre”, H^c a “ser mujer”, C a “curarse de la enfermedad” y C^c a “no curarse de la enfermedad”.



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(H)P(C/H) + P(H^c)P(C/H^c) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.8 = \boxed{0.74}$$

La probabilidad de que se cure de la enfermedad es de 0.74.

- b) Nos piden calcular $P(H^c/C^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H^c/C^c) = \frac{P(H^c \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(H^c)P(C^c/H^c)}{1 - P(C)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.74} = \frac{4}{13} \approx 0.3077$$

La probabilidad de que sea mujer una persona que se ha curado tiene un valor aproximado de 0.3077.

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
 b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
 c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 0 + 0 + 4x - 0 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de " x " distinto de 1 y de 3.

b) Para $x = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}{-2^2 + 4 \cdot 2 - 3} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $x = 5$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -8$.

Al ser la matriz A de orden 3 el determinante de la matriz $b \cdot A$ vale $b^3 \cdot |A| = -8b^3$. Si queremos que este determinante valga 1 planteamos y resolvemos la igualdad $-8b^3 = 1$.

$$-8b^3 = 1 \Rightarrow b^3 = \frac{-1}{8} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} = \frac{-1}{2}$$

Para $b = \frac{-1}{2}$ la matriz $b \cdot A$ tiene determinante 1.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
 b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los valores reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{4\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x-4} = \frac{4^2}{4-4} = \frac{16}{0} = \infty$$

$x = 4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{4}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{4}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

La función tiene la asíntota oblicua de ecuación $y = x + 4$.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-4) - 1 \cdot x^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-8=0 \rightarrow x=8 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=0$ y $x=8$. Usamos la segunda derivada para averiguar de qué tipo son.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2 - 8x)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{(2x-8)(x-4) - 2(x^2 - 8x)}{(x-4)^3} = \frac{\cancel{2x^2} - 8x - 8x + 32 - \cancel{2x^2} + 16x}{(x-4)^3} = \frac{32}{(x-4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = \frac{32}{(0-4)^3} = -0.5 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ f''(8) = \frac{32}{(8-4)^3} = 0.5 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=8$.

Estudiamos la evolución de la función antes, entre y después de estos valores añadiendo el valor excluido del dominio: $x=4$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 8(-1)}{(-1-4)^2} = \frac{7}{25} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 4)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 8(1)}{(1-4)^2} = \frac{-7}{9} < 0$. La función decrece en $(0, 4)$.
- En $(4, 8)$ tomamos $x=6$ y la derivada vale $f'(6) = \frac{6^2 - 8(6)}{(6-4)^2} = \frac{-12}{4} < 0$. La función decrece en $(4, 8)$.
- En $(8, +\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale $f'(10) = \frac{10^2 - 8(10)}{(10-4)^2} = \frac{20}{36} > 0$. La función crece en $(8, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y decrece en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}$, por lo que nunca se anula y por tanto la función no

presenta puntos de inflexión.

Estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad analizando el signo de la segunda derivada antes y después de $x=4$.

- En el intervalo $(-\infty, 4)$ tomamos $x=0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{32}{(0-4)^3} = -0.5 < 0. \text{ La función es cóncava (}\cap\text{) en } (-\infty, 4).$$

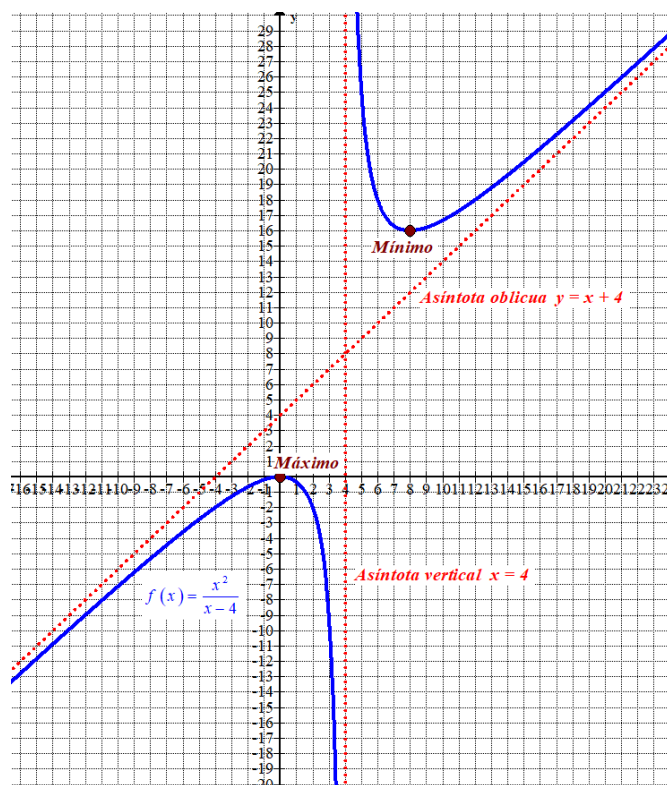
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x=5$ y la segunda derivada vale

$$f''(5) = \frac{32}{(5-4)^3} = 32 > 0. \text{ La función es convexa (}\cup\text{) en } (4, +\infty).$$

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 4)$ y convexa ($\cup$) en $(4, +\infty)$.

- c) Obtenemos algunos puntos de la función y esbozamos su gráfica utilizando todo lo obtenido hasta el momento.

x	$f(x) = \frac{x^2}{x-4}$
-1	-0.2
0	0 <i>Máximo</i>
1	-0.33
5	25
8	16 <i>Mínimo</i>
9	16.2



3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + z + 1 = 0$

- a) Halla el valor de a para que sean paralelos. (1.5 puntos)
 b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

a) Para que recta y plano sean paralelos el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares y la recta no debe estar contenida en el plano.

Hallamos un vector normal del plano: $\pi: ax - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (a, -1, 1)$

Hallamos un vector director de la recta y un punto de la misma.

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z - 1 = y \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + x + 2z - 1 - 5z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3z = 3 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z \Rightarrow y = 1 + z + 2z - 1 = 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases}$$

Vector normal del plano y director de la recta son perpendiculares por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, -1, 1)(1, 3, 1) = 0 \Rightarrow a - 3 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para $a = 2$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, 0)$ de la recta pertenece al plano $\pi: 2x - y + z + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + 1 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 0 + 0 + 1 = 0? \text{ ¡No se cumple!}$$

El punto P_r no pertenece al plano y por tanto, recta y plano son paralelos para $a = 2$.

b) El plano π' que es perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano π . Al contener a la recta r otro vector director del plano π' es el vector director de la recta: $\vec{v}_r = (1, 3, 1)$.

También debe contener al punto $P_r(1, 0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 1 + y + 6z + z - 2y - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

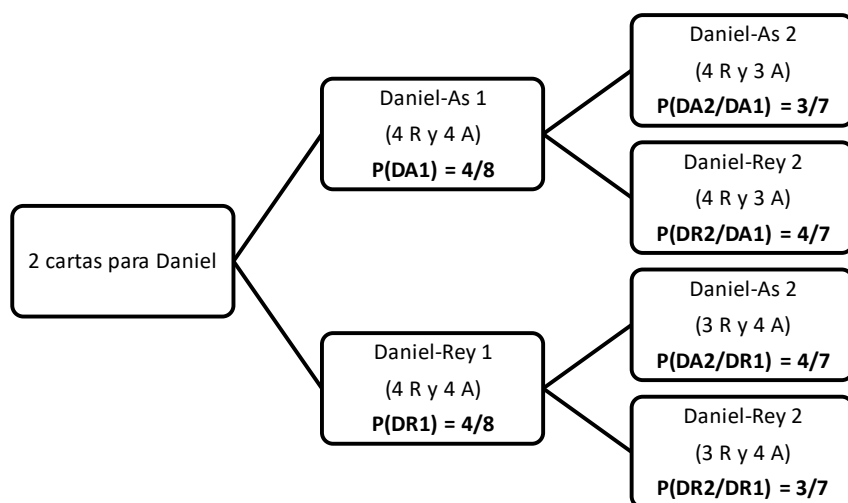
$$\Rightarrow -4x - y + 7z + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + y - 7z - 4 = 0}$$

La ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es $\pi': 4x + y - 7z - 4 = 0$.

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

- a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)
 b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)
 c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol del experimento aleatorio.



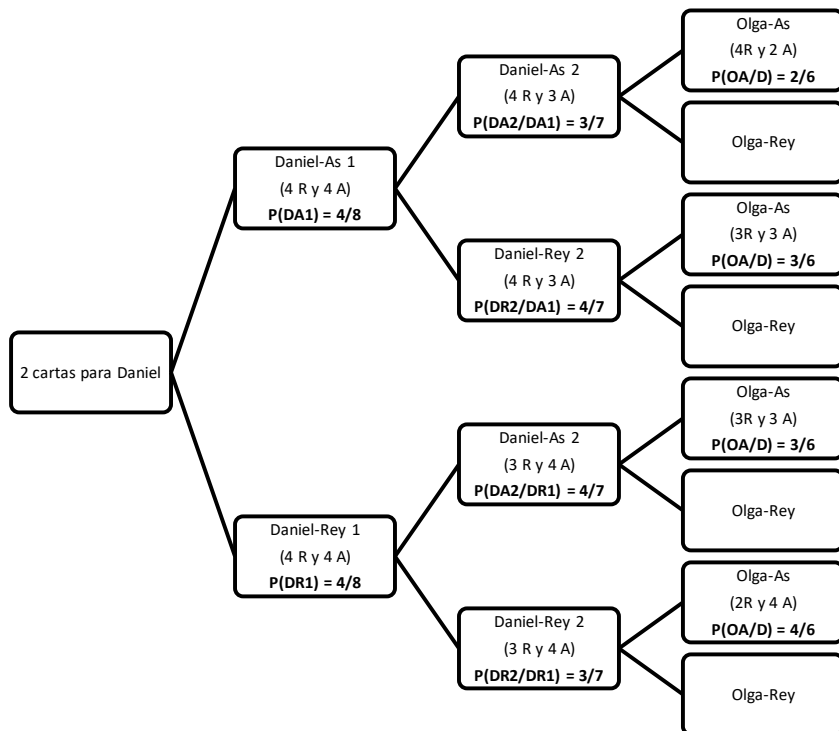
- a) Nos piden calcular la probabilidad de $P(DA1 \cap DA2)$.

$$P(DA1 \cap DA2) = P(DA1)P(DA2 / DA1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \approx 0.2143$$

- b) Este suceso puede ocurrir de dos formas: primero un as y segundo un rey o viceversa.

$$\begin{aligned}
 P((DA1 \cap DR2) \cup (DR1 \cap DA2)) &= P(DA1 \cap DR2) + P(DR1 \cap DA2) = \\
 &= P(DA1)P(DR2 / DA1) + P(DR1)P(DA2 / DR1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \approx 0.5714
 \end{aligned}$$

- c) Construimos un diagrama de árbol nuevo añadiendo la extracción de la tercera carta para Olga.



El suceso del cual tenemos que hallar su probabilidad ocurre en las 3 ramas superiores.

$$P\left(\overline{(DR1 \cap DR2)} \cap OA\right) = P(DA1 \cap DA2 \cap OA) + P(DA1 \cap DR2 \cap OA) +$$

$$+ P(DR1 \cap DA2 \cap OA) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{14} \approx 0.3571$$



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU junio 2017

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

- a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)
- b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

2. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

- a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . (1 punto)
- b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1 = \frac{y-1}{2} = z$. Calcula:

- a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
- b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
- c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1,2,1)$. (1 punto)

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)
- b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)



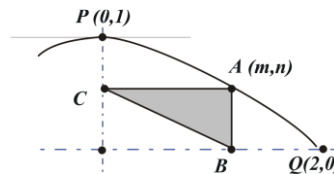
OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a , b y c . (1 punto)
b) Con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m, n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



3. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$, $D(4, 1, 3)$. Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A , B , C . (1 punto)
c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

4. En una asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70% de las personas que entran cogen harina y el 40% los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

a) Llamamos “ x ” al número de combates ganados, “ y ” al número de nulos y “ z ” al de perdidos.

Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016 $\rightarrow x + y + z = 20$.

Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros $\rightarrow 3x + 2y + z = 40$.

Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros $\rightarrow 6x + 4y + z = 72$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ 6x + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20 - x - y \\ 3x + 2y + z = 40 \\ 6x + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 20 - x - y = 40 \\ 6x + 4y + 20 - x - y = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ 5x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 - 2x \\ 5x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 3(20 - 2x) = 52 \Rightarrow 5x + 60 - 6x = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = -8 \Rightarrow \boxed{x = 8} \Rightarrow \boxed{y = 20 - 16 = 4} \Rightarrow \boxed{z = 20 - 8 - 4 = 8}$$

El boxeador ha ganado 8 combates, 4 han sido nulos y ha perdido 8.

b) Planteamos el nuevo sistema con k miles de euros por combate ganado y repetimos la resolución.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ kx + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20 - x - y \\ 3x + 2y + z = 40 \\ kx + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 20 - x - y = 40 \\ kx + 4y + 20 - x - y = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ (k-1)x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 - 2x \\ (k-1)x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow (k-1)x + 3(20 - 2x) = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)x + 60 - 6x = 52 \Rightarrow (k-7)x = -8$$

Si tomamos $k = 7$ se nos queda la ecuación $\left. \begin{array}{l} (k-7)x = -8 \\ k = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -8$. Esta es una igualdad

imposible. El problema no tiene solución si obtiene 7 mil euros por combate ganado.

2. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

a) Determinamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2/4 \\ g(x) = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 8\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = 64(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^4 = 64x \Rightarrow$$

$$f(x) = g(x)$$

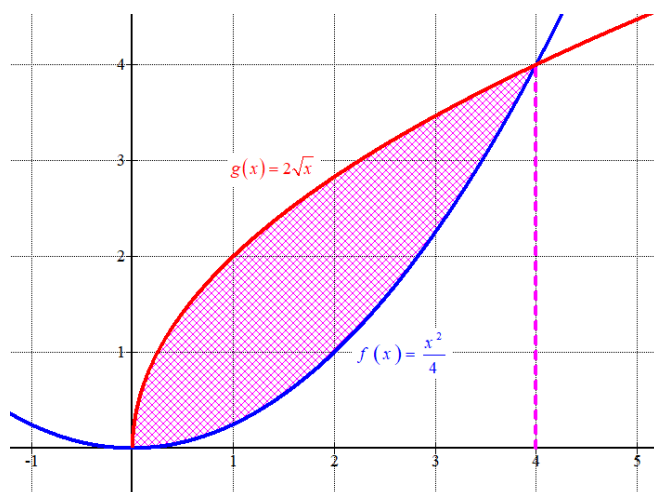
$$\Rightarrow x^4 - 64x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 64 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x=0$ y $x=4$.

Como $g(0) = 2\sqrt{0} = 0$ y $g(4) = 2\sqrt{4} = 4$ los puntos de corte tienen coordenadas $(0,0)$ y $(4,4)$.

b) Hacemos una tabla de valores y un esbozo de las gráficas y el recinto que delimitan.

x	$f(x) = x^2/4$	x	$g(x) = 2\sqrt{x}$
-2	1	0	0
0	0	2	$2\sqrt{2}$
2	1	4	4
4	4	9	6
6	9		



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno es difícil establecer de forma exacta el área, pero tiene un valor aproximado entre 5 y 6 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. El área es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_0^4 g(x) - f(x) dx = \int_0^4 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} dx = \int_0^4 2x^{1/2} - \frac{1}{4}x^2 dx = \left[2 \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 =$$

$$= \left[2 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{4^3} - \frac{4^3}{12} \right] - \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{0^3} - \frac{0^3}{12} \right] = \frac{16}{3} \approx 5.333 u^2$$

El área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones f y g tiene un valor de $\frac{16}{3} \approx 5.333$ unidades cuadradas.

3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$. Calcula:

- a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
 b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
 c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1,2,1)$. (1 punto)

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1,0,1) \\ \vec{v}_r=(-2,1,0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(-1,1,0) \\ \vec{u}_s=(1,2,1) \end{cases}$$

b) Hallamos el ángulo que forman los vectores directores de las rectas.

$$\begin{cases} \vec{v}_r=(-2,1,0) \\ \vec{u}_s=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{v}_r| |\vec{u}_s|} = \frac{(-2,1,0)(1,2,1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{-2+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

El ángulo que forman las rectas es de 90° .

c) El plano π paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,1,0) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (1,2,1) \\ A(1,2,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

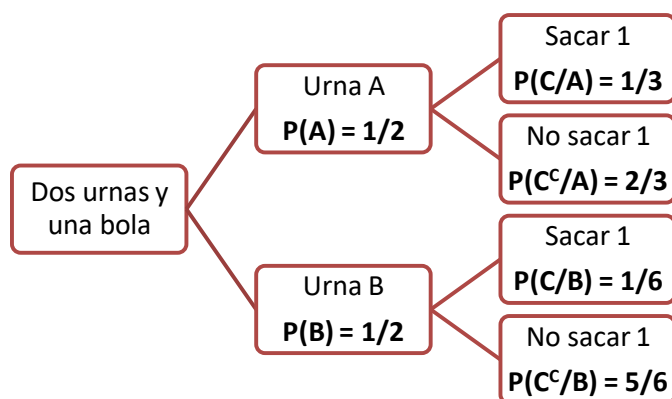
$$\Rightarrow x-1+0-4(z-1)-(z-1)+2(y-2)-0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1-4z+4-z+1+2y-4=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-5z=0}$$

El plano π paralelo a las dos rectas que pasa por $A(1,2,1)$ tiene ecuación $\pi: x+2y-5z=0$.

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)
- b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio. Llamamos C al suceso “sacar la bola con el número 1 de la urna”



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que sea una bola con el número 1 es 0.25.

- b) Nos piden calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0.25} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

La probabilidad de que la bola extraída con el número 1 proceda de la urna A vale $\frac{2}{3} \approx 0.6667$.

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)

b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

a) Hallamos la expresión de la matriz $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0+0 & 0+0-1 \\ 1+2+0 & 0+k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $B \cdot A$.

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$$

$$|B \cdot A| = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{No existe}$$

El determinante nunca se anula y la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier valor de k .

Calculamos la inversa de $B \cdot A$ para $k = 1$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B \cdot A| = 3 + 3 = 6$$

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B \cdot A)^T)}{|B \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k+k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

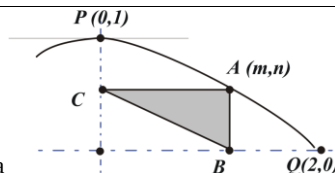
Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $A \cdot B$.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 0 - 3k + k - 0 - k(2k-2) = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$$

El determinante de la matriz $A \cdot B$ siempre es nulo y la matriz $A \cdot B$ no tiene inversa para ningún valor de k .

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a , b y c . (1 punto)
 b) Con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m, n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



- a) Si la tangente en el punto P es paralela al eje OX significa que en dicho punto hay un máximo relativo y por lo tanto la derivada se anula para $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} y = a + bx + cx^2 &\Rightarrow y' = b + 2cx \\ y'(0) = 0 &\end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 2c(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $y = a + cx^2$.

La función pasa por los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} y = a + cx^2 \\ P(0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = a + c \cdot 0^2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

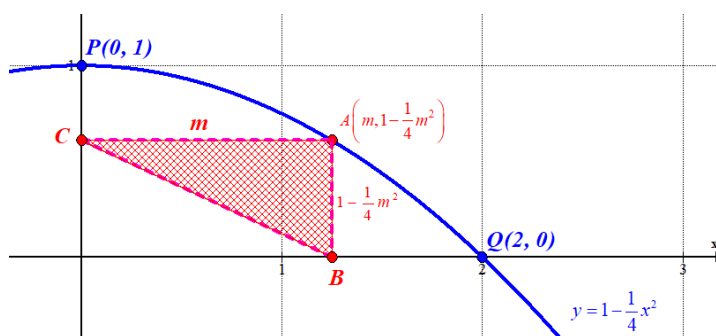
$$\left. \begin{aligned} y = a + cx^2 \\ Q(2, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = a + c \cdot 2^2 \Rightarrow \{a = 1\} \Rightarrow 0 = 1 + 4c \Rightarrow 4c = -1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{4}}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = 0$ y $c = -\frac{1}{4}$. La función queda $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$.

- b) Como el punto $A(m, n)$ pertenece a la gráfica debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} y = 1 - \frac{1}{4}x^2 \\ A(m, n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 1 - \frac{1}{4}m^2 \Rightarrow A\left(m, 1 - \frac{1}{4}m^2\right)$$

Añadimos al dibujo esta información.



Como la base del triángulo ABC es m y la altura es $1 - \frac{1}{4}m^2$ el área del triángulo rectángulo ABC

tendrá la expresión $\frac{m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}m^2\right)}{2} = \frac{m \cdot \left(\frac{4 - m^2}{4}\right)}{2} = \frac{4m - m^3}{8}$.

Averiguamos los puntos críticos de la función área $A(m) = \frac{4m - m^3}{8}$.

$$A(m) = \frac{4m - m^3}{8} \Rightarrow A'(m) = \frac{4 - 3m^2}{8}$$

$$A'(m) = 0 \Rightarrow \frac{4 - 3m^2}{8} = 0 \Rightarrow 4 - 3m^2 = 0 \Rightarrow 3m^2 = 4 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(m) = \frac{4 - 3m^2}{8} \Rightarrow A''(m) = \frac{-6m}{8} \Rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{8} < 0$$

Al ser negativo el valor de la segunda derivada podemos afirmar que la función área es máxima

para $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Obtenemos el valor de n para $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$n = 1 - \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

Para los valores de $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $n = \frac{2}{3}$ el área del triángulo rectángulo ABC es máxima.

3. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1), D(4, 1, 3). Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
 b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C. (1 punto)
 c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C. Dicho plano tendrá como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= (-1, 1, 1) - (1, 2, 0) = (-2, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} &= (0, 0, 1) - (1, 2, 0) = (-1, -2, 1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} C(0, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y + 4(z-1) - (z-1) + 2y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y + 4z - 4 - z + 1 + 2y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + 3z - 3 = 0}$$

Comprobamos si el punto D(4, 1, 3) pertenece al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 3z - 3 = 0 \\ \text{¿} D(4, 1, 3) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 4 + 1 + 9 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 14 - 3 = 0? \text{ ¡No se cumple!}$$

El punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C.

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

b) La recta r perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 3) \\ D(4, 1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta para obtener las coordenadas del punto P de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi : x + y + 3z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + \lambda + 1 + \lambda + 3(3 + 3\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 4 + \lambda + 1 + \lambda + 9 + 9\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -11 \Rightarrow \lambda = \frac{-11}{11} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 1 = 3 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3, 0, 0)$$

El punto de corte de la recta r con el plano π tiene coordenadas $P(3, 0, 0)$.

4. En una asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70% de las personas que entran cogen harina y el 40% los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
 b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
 c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio y obtener la información que lleva implícita.

Como todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto las personas que no cogen ni harina ni leche son el 0 %.

	Leche	No leche	
Harina	40		70
No harina		0	
			100

Completamos la tabla.

	Leche	No leche	
Harina	40	30	70
No harina	30	0	30
	70	30	100

Con esta información respondemos a las preguntas planteadas usando la regla de Laplace.

- a) Hay un 70 % de personas que cogen leche. La probabilidad de que una persona que entre coja leche es 0.7.
 b) Hay un 30 % de personas que cogen leche y no harina, otro 30 % cogen harina y no leche. Hay un total de $30 + 30 = 60$ % de personas que cogen solo un producto. La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto es 0.6.
 c) Hay un 70 % de personas que cogen leche y de ellos el 40 % ha cogido también harina. La probabilidad de que una persona que ha cogido leche también lleve harina es $\frac{40}{70} = \frac{4}{7} \approx 0.5714$