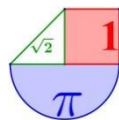


Matemáticas II

PAU en Cantabria Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Cantabria desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

Julio 2026.....	3
Junio 2026.....	19
Julio 2025.....	37
Junio 2025.....	53
Reserva 2025.....	70
JULIO 2024.....	85
JUNIO 2024.....	100
LOMCE – JULIO 2023.....	114
LOMCE – JUNIO 2023.....	125
LOMCE – JULIO 2022.....	137
LOMCE – JUNIO 2022.....	148
LOMCE – JULIO 2021.....	162
LOMCE – JUNIO 2021.....	174
LOMCE – SEPTIEMBRE 2020.....	187
LOMCE – JULIO 2020.....	197
LOMCE – JULIO 2019.....	207
LOMCE – JUNIO 2019.....	222
LOMCE – SEPTIEMBRE 2018.....	232
LOMCE – JUNIO 2018.....	242
LOMCE – SEPTIEMBRE 2017.....	253
LOMCE – JUNIO 2017.....	266

Julio 2026

Matemáticas II**INDICACIONES**

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):**1A)** Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.
- b) [1.5 puntos] Considera $a = 0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x + y + az = 1 \\ ax + a^2y = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
- b) [0,5 puntos] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):**2A)** Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.
- b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a .
- c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
- b) [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x = 0$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta tarea.

3) Considera los puntos $A = (0,5,-1)$ y $B = (-3,11,-10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

- a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B .
- b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r .
- c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A .

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.
- c) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.
- c) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

SOLUCIONES

1A) Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.

b) [1.5 puntos] Considera $a = 0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a + 0 + 3 - 0 - 0 + a^2 = a^2 + 4a + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = \boxed{-1=a} \\ \frac{-4-2}{2} = \boxed{-3=a} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $a \neq -1$ y $a \neq -3$.

b) Si $a = 0$ la matriz A tiene inversa. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallamos su matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 0 - 0 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos también la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Terminamos de obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8+3+0 & 0+3+12 \\ -2+0+0 & 0+0-3 \\ 2+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 22+15 & 0+15 \\ -4-3 & 0-3 \\ 4+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ -7 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/6 & 5/2 \\ -7/6 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $a = 0$ la matriz X solución de la igualdad $AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es $X = \begin{pmatrix} 37/6 & 5/2 \\ -7/6 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x + y + az = 1 \\ ax + a^2y = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
 b) [0,5 puntos] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de A como máximo es 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera columna y averiguamos cuando se anula su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^3$$

El determinante se anula para $a = 0$. Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$

En este caso el determinante es distinto de cero y el rango de A es 2, al igual que el rango de A/B , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante es nulo. La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\text{ampliada es } A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es 1 y el rango de A/B también es 1, tienen el mismo rango, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor de a .

b) Si $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}; \alpha, \lambda \in \mathbb{R}.$

c) Si $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 8x + y + 2z = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 8x + y + 2z = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + y + 2z = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + y + 2z = 1 \\ x = 1 - 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(1 - 2y) + y + 2z = 1 \Rightarrow 8 - 16y + y + 2z = 1 \Rightarrow 2z - 15y = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z = -7 + 15y \Rightarrow z = \frac{15}{2}y - \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-7}{2} + \frac{15}{2}\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a = 2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-7}{2} + \frac{15}{2}\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

2A) Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.
 b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a .
 c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) La función debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{\ln 1}{1} + 4a = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x} + 4a = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 3x + a^2 = 1^2 + 3 + a^2 = a^2 + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + 4 = 4a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 2$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x + a^2 = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Veamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 4a = \frac{+\infty}{+\infty} + 4a = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4a = \frac{1}{+\infty} + 4a = 4a$$

La recta $y = 4a$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 + \frac{a^2}{x} = -\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

La única asíntota de la función es la recta $y = 4a$ que es una asíntota horizontal.

c) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \\ \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow \boxed{x = e} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función antes, entre y después de $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$ y $x = e$

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale $f'(-10) = 2(-10) + 3 = -17 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. La función crece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.
- En el intervalo $(1, e)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - \ln 2}{2^2} \approx 0.08 > 0$. La función crece en $(1, e)$.
- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0$. La función decrece en $(e, +\infty)$.

La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (e, +\infty)$ y crece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, e)$.

Si $a = 2$ la función es continua y podemos afirmar que la función crece en $\left(-\frac{3}{2}, e\right)$, pero si $a \neq 2$ la función no es continua y no podemos asegurar si crece o no en $x = 1$, depende del valor de a .

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
 b) [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x = 0$.
 c) [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

- a) El dominio de la función son todos los números reales mayores o iguales que 0 (para que exista $\sqrt{x}$) que no anulen el denominador.

$$1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1^2 = 1}$$

El dominio de la función es $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- b) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{1-\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1-t} 2t dt = 2 \int \frac{t^3}{1-t} dt = \dots$$

t^3	$\underline{1-t}$
$-t^3 + t^2$	$-t^2 - t - 1$
t^2	
$-t^2 + t$	
t	
$-t + 1$	
1	

$$\dots = 2 \int -t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t} dt = 2 \left(-\int t^2 dt - \int t dt - \int dt - \int \frac{-1}{1-t} dt \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{-t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| \right) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - \sqrt{x^2} - 2\sqrt{x} - 2\ln|1-\sqrt{x}| =$$

$$= \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1-\sqrt{x})^2 + K$$

La primitiva tiene la expresión $F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1-\sqrt{x})^2 + K$.

Hallamos el valor de K para que $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-2\sqrt{0^3}}{3} - 0 - 2\sqrt{0} - \ln(1 - \sqrt{0})^2 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = K \Rightarrow F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1 - \sqrt{x})^2$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} + \ln(1 - \sqrt{x})^2$.

c) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (1 - \sqrt{x}) - x \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=4$.

- En el intervalo $(1, 4)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} > 0$.

La función crece en $(1, 4)$.

- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x=16$ y la derivada vale $f'(16) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{16}}{(1 - \sqrt{16})^2} = \frac{-1}{9} < 0$.

La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función crece antes y decrece después de $x=4$. Como la función es continua en el intervalo $(1, +\infty)$ este máximo relativo también es absoluto en el intervalo $(1, +\infty)$.



3) Considera los puntos $A = (0, 5, -1)$ y $B = (-3, 11, -10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B .

b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r .

c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A .

a) Obtenemos la ecuación de la recta s que contiene los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A = (0, 5, -1) \in s \\ B = (-3, 11, -10) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = (0, 5, -1) \in s \\ \overrightarrow{AB} = (-3, 11, -10) - (0, 5, -1) = (-3, 6, -9) \\ \overrightarrow{u_s} = \frac{-1}{3} \overrightarrow{AB} = (1, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

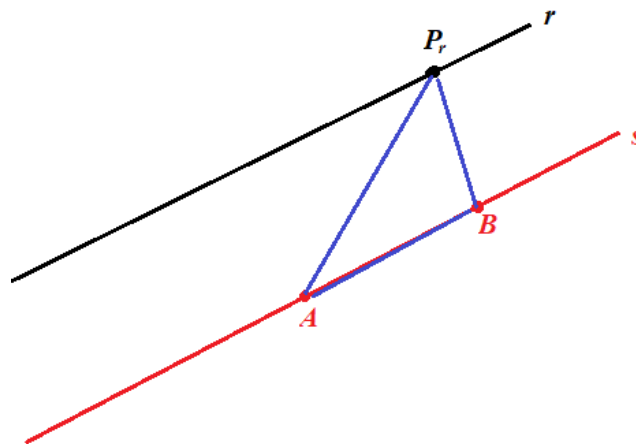
Las rectas r y s tienen el mismo vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_r} = (1, -2, 3)$. Las rectas son paralelas o coincidentes. Comprobamos si la recta r contiene el punto $A(0, 5, -1)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} A(0, 5, -1) \in r? \\ r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{0-3}{1} = \frac{5+2}{-2} = \frac{-1}{3} ? \Rightarrow \text{iii} \frac{-3}{1} \neq \frac{7}{-2} \neq \frac{-1}{3} !!!$$

No se cumple la igualdad, el punto A no está contenido en la recta r . Las rectas r y s son paralelas.

b) Las rectas r y s son paralelas y el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r tendrá un valor independiente del punto de r elegido.

Consideramos el punto $P_r(3, -2, 0)$ de la recta r .



Utilizamos la fórmula del área del triángulo ABP_r : $\text{Área } ABP_r = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r}|}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 6, -9) \\ \overrightarrow{AP_r} = P_r(3, -2, 0) - (0, 5, -1) = (3, -7, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 6 & -9 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6i - 27j + 21k - 18k + 3j - 63i = -57i - 24j + 3k = (-57, -24, 3)$$

$$\text{Área } ABP_r = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r}|}{2} = \frac{\sqrt{(-57)^2 + (-24)^2 + 3^2}}{2} = \frac{3\sqrt{426}}{2} \approx 30.96 \text{ u}^2$$

El área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r vale $\frac{3\sqrt{426}}{2} \approx 30.96$ unidades cuadradas.

- c) El plano π que contiene a la recta r y el punto A tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, -2, 3)$ y el vector que une los puntos $A(0, 5, -1)$ y $P_r(3, -2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 5, -1) \in \pi \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, 3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AP_r} = (3, -7, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-5 & z+1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 9y - 45 - 7z - 7 + 6z + 6 - y + 5 + 21x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 19x + 8y - z - 41 = 0}$$

El plano π que contiene a r y A tiene ecuación general $\pi: 19x + 8y - z - 41 = 0$.

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.
 b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.
 c) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

- a) Llamamos A, B y C a “elegir la urna A, B o C. Llamamos D a “sacar bola blanca”. Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \boxed{\frac{113}{360} \approx 0.3139}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca es de $\frac{113}{360} \approx 0.3139$.

- b) Debemos calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{113}{360}} = \boxed{\frac{20}{113} \approx 0.177}$$

La probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B tiene un valor de $\frac{20}{113} \approx 0.177$.

- c) Consideramos que el experimento planteado es “elegir una de las dos urnas A o B, extraer una primera bola de la urna elegida y después volver a elegir de nuevo una urna y sacar una segunda bola de la caja elegida”.

Se pueden obtener dos bolas blancas extrayendo las dos bolas blancas de A (tiene 4 blancas) o bien una de A y otra de B. En la caja B solo hay una bola blanca y no podemos extraer las dos bolas blancas de esta caja.

$$P(\text{Dos bolas blancas de A o B}) =$$

$$= P(\text{Dos bolas blancas de A}) + P(\text{Una bola blanca de A y otra bola blanca de B}) +$$

$$+ P(\text{Una bola blanca de B y otra bola blanca de A}) =$$

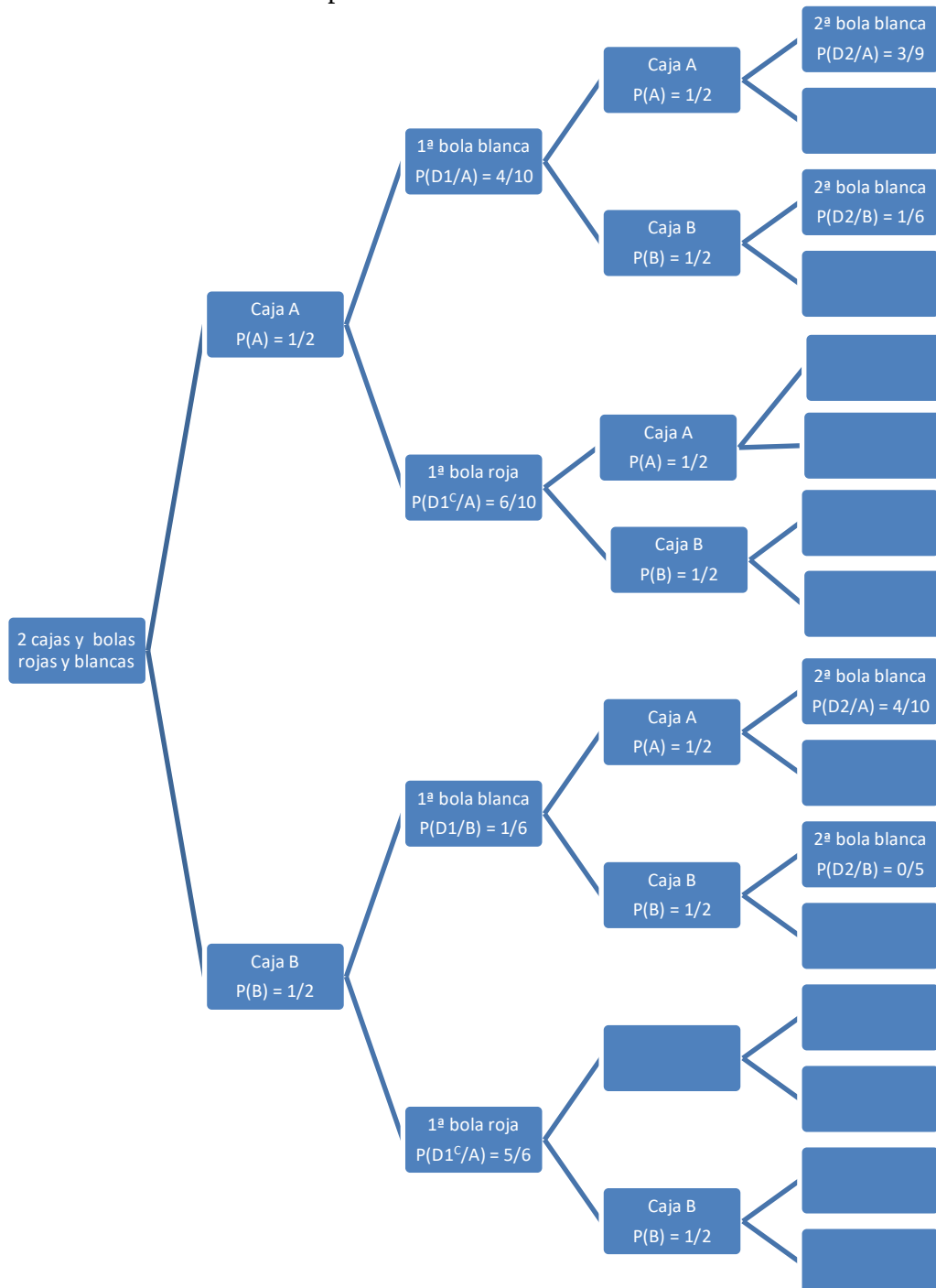
$$= P(A_1 \cap D_1)P((A_2 \cap D_2)/(A_1 \cap D_1)) + P(A_1 \cap D_1)P(B_2 \cap D_2) + P(B_1 \cap D_1)P(A_2 \cap D_2) =$$

$$= P(A_1)P(D_1/A_1) \cdot P(A_2)P(D_2/(D_1 \cap A_1 \cap A_2)) + P(A_1)P(D_1/A_1) \cdot P(B_2)P(D_1/B_2) +$$

$$+P(B_1)P(D_1/B_1) \cdot P(A_2)P(D_1/A_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15} = 0.0667$$

Otra forma de razonarlo. Como comprobación de lo calculado.



La probabilidad de sacar dos bolas blancas de las cajas A o B vale:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{360} + \frac{4}{240} + \frac{4}{240} = \frac{1}{15}$$

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.
- c) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

Sea X la variable aleatoria que obtiene la venta de pizzas a la semana de un establecimiento.
 $X = N(300, 62)$.

- a) Nos piden calcular $P(X > 370)$. Como 370 es mayor que $300 + 62$ la probabilidad del suceso debe ser pequeña.

$$P(X > 370) = 1 - P(X \leq 370) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{370 - 300}{62}\right) = 1 - P(Z \leq 1.13) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8708 = \boxed{0.1292}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708

La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas es de 0.1292.

- b) Nos piden calcular $P(200 \leq X \leq 350)$.

$$P(200 \leq X \leq 350) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} = P\left(\frac{200 - 300}{62} \leq Z \leq \frac{350 - 300}{62}\right) =$$

$$= P(-1.61 \leq Z \leq 0.81) = P(Z \leq 0.81) - P(Z \leq -1.61) = P(Z \leq 0.81) - P(Z \geq 1.61) =$$

$$P(Z \leq 0.81) - [1 - P(Z \leq 1.61)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.791 - [1 - 0.9463] = \boxed{0.7373}$$

z_0	0,00	0,01	
0,0	0,5000	0,5040	0
0,1	0,5398	0,5438	0
0,2	0,5793	0,5832	0
0,3	0,6179	0,6217	0
0,4	0,6554	0,6591	0
0,5	0,6915	0,6950	0
0,6	0,7257	0,7291	0
0,7	0,7580	0,7611	0
0,8	0,7881	0,7910	0
0,9	0,8159	0,8186	0
1,0	0,8413	0,8438	0
1,1	0,8643	0,8665	0
1,2	0,8849	0,8869	0
1,3	0,9032	0,9049	0
1,4	0,9192	0,9207	0
1,5	0,9332	0,9345	0
1,6	0,9452	0,9463	0
1,7	0,9554	0,9564	0

La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas vale 0.7373.

c) Calculamos $P(X \geq 150)$.

$$P(X \geq 150) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{150 - 300}{62}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2.42) = P(Z \leq 2.42) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = \boxed{0.9922}$$

Como la elección de las semanas es independiente entre sí la probabilidad de que escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas se puede obtener como el producto de las probabilidades de que ocurra cada una de ellas: $0.9922 \cdot 0.9922 = 0.9845$.

z_0	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9861	0,9864	0,9868
2,3	0,9893	0,9896	0,9898
2,4	0,9918	0,9920	0,9922

en

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):**1A)** Considera la matriz presentada a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0.5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .
- b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a .
- c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
- b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta cuestión.

3) Considera los puntos $A = (0,0,4)$, $B = (-3,0,0)$ y $C = (0,-2,0)$.

- a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .
- b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1,1,1)$ y la recta que contiene a A y B .
- c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0,0,0)$.

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al alzar una cobaya blanca es de 0,2:

- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) [0,5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

SOLUCIONES

1A) Considera la matriz presentada a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0.5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .

b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a .

c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Si $a \neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Para $a = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El menor de orden 2 que se obtiene eliminando la fila

y columna terceras es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su determinante vale 1 que es distinto de cero y el rango de A es 2

Conclusión: Si $a \neq 0$ el rango de A es 3 y si $a = 0$ el rango de A es 2.

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$. Por lo que $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$

c) Para $a = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobamos que es invertible y hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} A$$

Terminamos de obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2+2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para $a = -1$ la matriz X solución de la igualdad $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
 b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - a^2 = 1 - a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular}$$

equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular}$$

equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 2. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \\ z=-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2y=0 \\ y+2(-2y)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-4y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ -3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=\frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{3} \\ y=\frac{-1}{3} \\ z=-2\frac{-1}{3}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Para $a = 2$ la solución es $x = y = \frac{-1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$.

c) Si $a = 1$ estamos en el caso 3 y el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1-z \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Para $a = 1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-1 \\ y=1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

2A) Considera la siguiente función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

a) Calculamos la ecuación de la recta $y = mx + n$ que es asíntota oblicua de la función.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{a^2 x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{a^2}{x}} = \frac{1 + \frac{a}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{a^2}{\infty}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2 - a^2 x}{x + a^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - a^2)x + 1}{x + a^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(a - a^2)x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{a^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - a^2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{a^2}{x}} = \frac{a - a^2 + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{a^2}{\infty}} = \frac{a - a^2}{1} = a - a^2$$

La recta $y = x + a - a^2$ es asíntota oblicua de la función.

Para que la recta $y = x - 6$ sea asíntota oblicua debe ser $a - a^2 = -6$.

$$a - a^2 = -6 \Rightarrow 0 = a^2 - a - 6 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1-5}{2} = \boxed{-2 = a} \\ \frac{1+5}{2} = \boxed{3 = a} \end{cases}$$

Para $a = -2$ y $a = 3$ se cumple lo pedido.

- b) Para $a = -2$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador. Su dominio es $\mathbb{R} - \{-4\}$.
Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 4) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x + 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 8x - \cancel{2x} - 8 - x^2 + \cancel{2x} - 1}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-8 - 10}{2} = \boxed{-9 = x} \\ \frac{-8 + 10}{2} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función antes, entre y después de los puntos críticos y el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -9)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = \frac{(-10)^2 + 8 \cdot (-10) - 9}{(-10 + 4)^2} = \frac{11}{36} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -9).$$

- En el intervalo $(-9, -4)$ tomamos $x = -6$ y la derivada vale

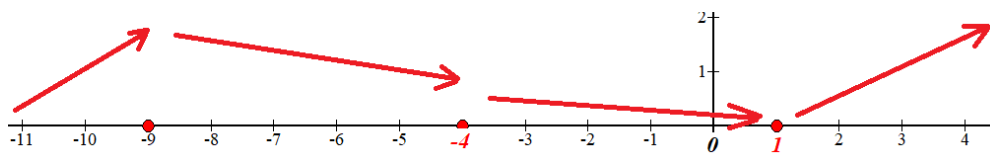
$$f'(-6) = \frac{(-6)^2 + 8 \cdot (-6) - 9}{(-6 + 4)^2} = \frac{-21}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-9, -4).$$

- En el intervalo $(-4, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0^2 + 8 \cdot 0 - 9}{(0 + 4)^2} = \frac{-9}{16} < 0$. La función decrece en $(-4, 1)$.

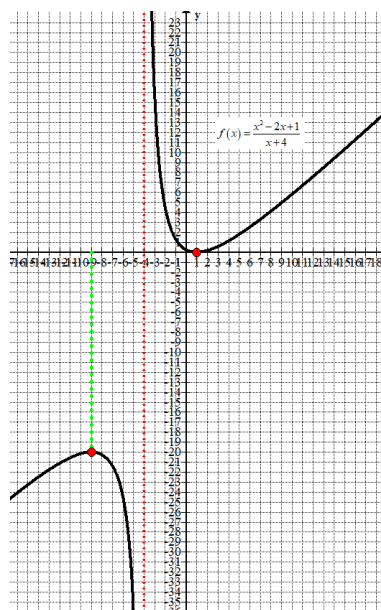
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 + 8 \cdot 2 - 9}{(2 + 4)^2} = \frac{11}{36} > 0$.

La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



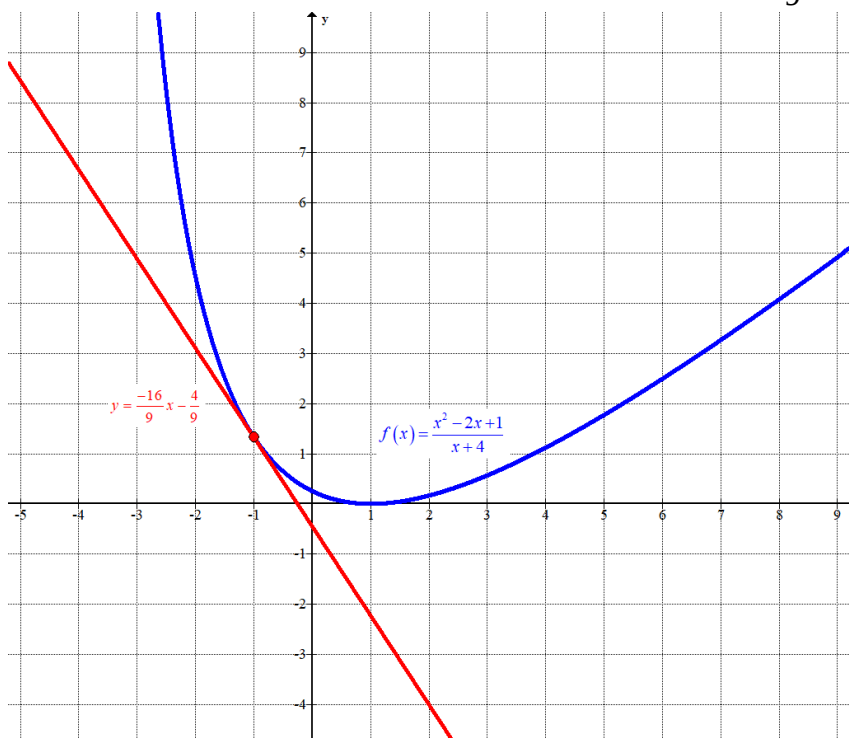
La función crece en $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-9, -4) \cup (-4, 1)$.



c) Para $a = -2$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ tiene la expresión $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{-1 + 4} = \frac{4}{3} \\ f'(-1) &= \frac{(-1)^2 + 8(-1) - 9}{(-1 + 4)^2} = \frac{-16}{9} \\ y - f(-1) &= f'(-1)(x + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{4}{3} = \frac{-16}{9}(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-16}{9}x - \frac{4}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ tiene la expresión $y = \frac{-16}{9}x - \frac{4}{9}$.



2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.

b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$e^{2x} - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 4 \Rightarrow 2x \ln e = \ln 2^2 \Rightarrow 2x = 2 \ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

Asíntota vertical $x = a$

¿ $x = \ln 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{\ln 2} - 1}{e^{2 \ln 2} - 4} = \frac{2 - 1}{e^{\ln 4} - 4} = \frac{1}{4 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = \ln 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2 \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

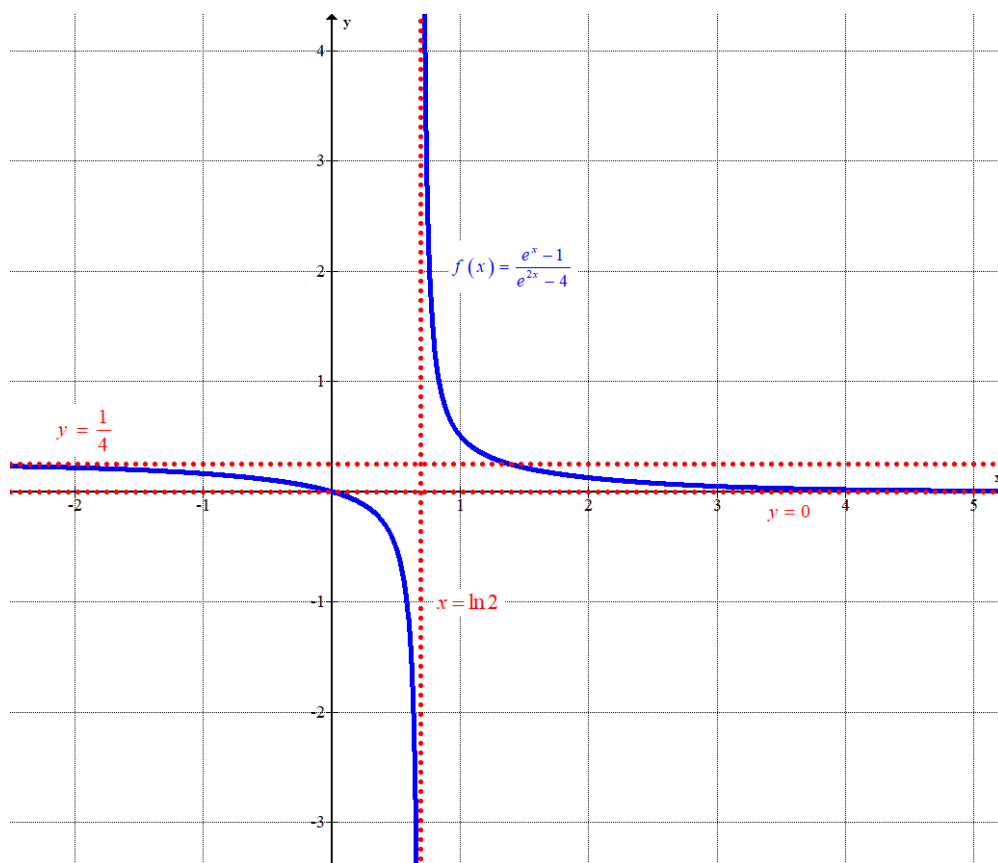
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} - 4} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

La recta $y = \frac{1}{4}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.



b) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^{2x} = t^2 \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{t-1}{t^2-4} \frac{dt}{t} = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{t-1}{t(t^2-4)} = \frac{t-1}{t(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2} = \frac{A(t-2)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-2)}{t(t-2)(t+2)}$$

$$t-1 = A(t-2)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-2) \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow -1 = -4A \rightarrow A = \frac{1}{4} \\ t=2 \rightarrow 1 = 8B \rightarrow B = \frac{1}{8} \\ t=-2 \rightarrow -3 = 8C \rightarrow C = \frac{-3}{8} \end{cases}$$

$$\frac{t-1}{t(t^2-4)} = \frac{1/4}{t} + \frac{1/8}{t-2} + \frac{-3/8}{t+2}$$

$$\dots = \int \frac{1/4}{t} + \frac{1/8}{t-2} + \frac{-3/8}{t+2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{8} \int \frac{1}{t-2} dt - \frac{3}{8} \int \frac{1}{t+2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|t| + \frac{1}{8} \ln|t-2| - \frac{3}{8} \ln|t+2| = \frac{1}{4} \ln|e^x| + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2|$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + K}$$

Averiguamos el valor de K para que la primitiva en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + K \\ F(\ln 4) &= \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^{\ln 4}-2| - \frac{3}{8} \ln|e^{\ln 4}+2| + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{2 \ln 2}{4} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{3}{8} \ln 6 + K \Rightarrow 8 \ln 2 = 4 \ln 2 + \ln 2 - 3 \ln 6 + 8K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8K = 3 \ln 2 + 3 \ln 6 \Rightarrow 8K = 3(\ln 2 + \ln 6) \Rightarrow 8K = 3 \ln 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{3 \ln 12}{8} \Rightarrow \boxed{F(x) = F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + \frac{3 \ln 12}{8}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + \frac{3 \ln 12}{8}$.

3) Considera los puntos $A = (0,0,4)$, $B = (-3,0,0)$ y $C = (0,-2,0)$.

a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .

b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1,1,1)$ y la recta que contiene a A y B .

c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0,0,0)$.

a) Obtenemos la ecuación del plano π que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in \pi \\ B = (-3,0,0) \in \pi \\ C = (0,-2,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,0,0) - (0,0,4) = (-3,0,-4) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-2,0) - (0,0,4) = (0,-2,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 6z - 24 - 0 - 12y - 8x = 0 \Rightarrow$$

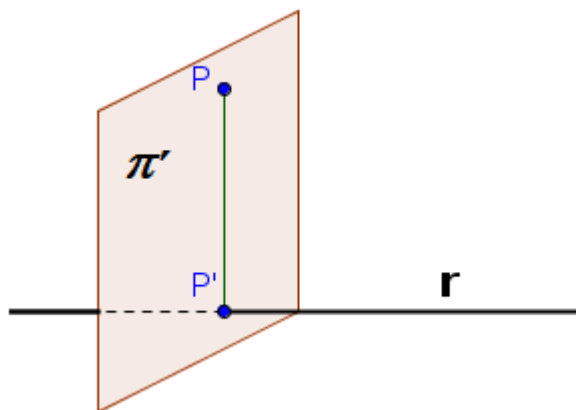
$$\Rightarrow -8x - 12y + 6z - 24 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + 6y - 3z + 12 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi: 4x + 6y - 3z + 12 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que contiene los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-3,0,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \overrightarrow{AB} = (-3,0,-4) \\ P(1,1,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -3x - 4z + D = 0 \\ P(1,1,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow -3 - 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 7 \Rightarrow \boxed{\pi': -3x - 4z + 7 = 0}$$

Hallamos el punto P' de corte del plano y la recta.

$$r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow -3(-3\lambda) - 4(4 - 4\lambda) + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi': -3x - 4z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 9\lambda - 16 + 16\lambda + 7 = 0 \Rightarrow 25\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{25} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\frac{9}{25} = -\frac{27}{25} \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\frac{9}{25} = \frac{64}{25} \end{cases} \Rightarrow P' \left(-\frac{27}{25}, 0, \frac{64}{25} \right)$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{27}{25}, 0, \frac{64}{25} \right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{52}{25}, -1, \frac{39}{25} \right)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(-\frac{52}{25} \right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{39}{25} \right)^2} = \frac{5\sqrt{194}}{25} = \frac{\sqrt{194}}{5} \approx 2.7857u$$

c) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]$.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} A = (0, 0, 4) \\ B = (-3, 0, 0) \\ C = (0, -2, 0) \\ D(0, 0, 0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{DA} = (0, 0, 4) - (0, 0, 0) = (0, 0, 4) \\ \overrightarrow{DB} = (-3, 0, 0) - (0, 0, 0) = (-3, 0, 0) \\ \overrightarrow{DC} = (0, -2, 0) - (0, 0, 0) = (0, -2, 0) \end{matrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 24 - 0 - 0 - 0 = 24 \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro ABCD vale $\frac{24}{6} = 4$ unidades cúbicas.

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya blanca es de 0,2:

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.

c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

a) Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

	Blancos	Marrones	
Pelo corto			60
Pelo largo	8		
			100

Completamos en todo lo posible la tabla.

	Blancos	Marrones	
Pelo corto			60
Pelo largo	8	32	40
			100

El 40 % de las cobayas son de pelo largo y el 32% son de color marrón con el pelo largo. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón vale $\frac{32}{40} = 0.8$.

b) Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya esta sea blanca es de 0,2 significa que el 20 % de las cobayas son blancas. Añadimos este dato a la tabla de contingencia y la completamos.

	Blancos	Marrones	
Pelo corto	12	48	60
Pelo largo	8	32	40
	20	80	100

Hay un 80% de cobayas marrones y un 32% son cobayas marrones de pelo largo. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo vale $\frac{32}{80} = 0.4$.

c) Hay un 60% de cobayas de pelo corto y un 48% de cobayas marrones de pelo corto. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón vale $\frac{48}{60} = 0.8$.

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

Sea X la variable aleatoria que obtiene el diámetro en mm de las mandarinas. $X = N(60, 16)$.

a) Nos piden calcular $1 - P(40 \leq X \leq 90)$.

$$\begin{aligned}
 1 - P(40 \leq X \leq 90) &= 1 - [P(X \leq 90) - P(X \leq 40)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} = \\
 &= 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{90 - 60}{16}\right) - P\left(Z \leq \frac{40 - 60}{16}\right) \right] = 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \leq -1.25)] = \\
 &= 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \geq 1.25)] = 1 - [P(Z \leq 1.875) - (1 - P(Z \leq 1.25))] = \\
 &= 1 - P(Z \leq 1.875) + 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\
 &= 2 - \frac{0.9693 + 0.9699}{2} - 0.8944 = \boxed{0.136}
 \end{aligned}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9653	0,9661	0,9668	0,9674	0,9679	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761

b) Calculamos la probabilidad de que una mandarina tenga menos de 50 mm de diámetro.

$$P(X \leq 50) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) = P(Z \leq -0.625) = P(Z \geq 0.625) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.625) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.7324 + 0.7357}{2} = \boxed{0.26595}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0

Suponemos que los sucesos “elegir la primera mandarina” y “elegir la segunda mandarina” son independientes y la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro es el producto de la probabilidad de cada uno de los sucesos: $0.26595 \cdot 0.26595 \cong 0.0707$.

c) Debemos calcular $P(40 \leq X \leq 50)$.

$$P(40 \leq X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 40) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) - P\left(Z \leq \frac{40 - 60}{16}\right) = P(Z \leq -0.625) - P(Z \leq -1.25) =$$

$$= P(Z \geq 0.625) - P(Z \geq 1.25) = [1 - P(Z \leq 0.625)] - [1 - P(Z \leq 1.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.7324 + 0.7357}{2} - 1 + 0.8944 = \boxed{0.16035}$$



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD, PAU
Prueba Extraordinaria

Julio 2025

Matemáticas II

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- [0.75 puntos] Estudia el rango de A , en función de los valores de a .
- [0.75 puntos] Estudia el rango de BA , en función de los valores de a .
- [1 punto] Considera $a = 1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
- [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

- a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.
- b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.
- c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ y el punto $P = (-3, 2, 2)$.

- a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
- b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .
- c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

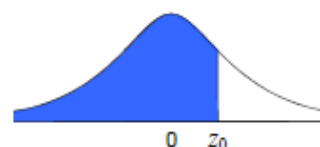
- a) [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
- b) [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
- c) [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
- c) [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES**1A)** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) [0.75 puntos] Estudia el rango de AB , en función de los valores de a .
 b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA , en función de los valores de a .
 c) [1 punto] Considera $a=1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación

matricial: $BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) Hallamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -a & 2 \\ 1+6 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1+3a & 1 & 2a \end{vmatrix} =$$

$$= a(4a - 4 - 12a + 14 - 2 - 6a + 14a - 8) = a \cdot 0 = 0$$

El determinante de AB es 0 por lo que su rango es menor de 3.Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la segunda columna y la tercera fila $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \neq 0.$$

El rango de AB es 2 para cualquier valor de a .b) Obtenemos la expresión de la matriz BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a & 1+2a \\ -3+2 & 3+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA| = \begin{vmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{vmatrix} = (a-1)(3+2a) + 1 + 2a = 3a + 2a^2 - 3 - \cancel{2a} + 1 + \cancel{2a} = 2a^2 + 3a - 2$$

$$|BA| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1. Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de BA es distinto de cero y el rango de BA es 2.

Situación 2. Si $a = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & 1+2\frac{1}{2} \\ -1 & 3+2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Situación 3. Si $a = -2$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} -2-1 & 1+2(-2) \\ -1 & 3+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$ el rango de BA es 2 y si $a = -2$ o $a = \frac{1}{2}$ el rango de BA es 1.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ el determinante de BA es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$BA = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+2 \\ -1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |BA| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0+3 = 3 \neq 0$$

$$(BA)^{-1} = \frac{Adj((BA)^T)}{|BA|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15-21 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 2 \times 1$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
 b) [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ a-1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - \text{Fila 3}^a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -a^2 - a - 1 \\ \hline a & 0 & -a^2 - a \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & 0 & -a^2 - a \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(-a^2 - a) + 3a = -a^3 - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} + a + 3a = -a^3 + 4a = a(4 - a^2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(4 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de a distinto de 0, -2 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

Para $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y + z = 4 \\ -x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. La primera ecuación y la tercera tienen el primer

miembro igual, pero el segundo distinto. Esta es una situación imposible y el sistema es incompatible.

Para $a = -2$ el sistema queda $\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3z + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + z = -2 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - z \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow -3(-2 - z) - 3z = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 + 3z - 3z = 2 \Rightarrow 6 = 2 \quad \text{¡¡Imposible!!} \end{aligned}$$

El sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x = 3z + 2 \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3z + 2) - 7z + z = 4 \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z + 4 - 7z + z = 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de -2 y 0 .

b) Considerando $a = -1$ el sistema queda $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado

anterior sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - z + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -4} \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(-4) - 3z = 2 \Rightarrow -3z = -6 \Rightarrow \boxed{z = 2} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución $x = -4, y = -2, z = 2$.

c) Considerando $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado

anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que sus infinitas soluciones tienen la expresión $x = 2 + 3\lambda; y = -7\lambda; z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow f'(x) = (-2)e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + e^{-2x} (2x - 3) = \\ &= e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3) + e^{-2x} (2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3 + 2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = e^{-2 \cdot 0} (-2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 6) = -6 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = e^{-2 \cdot 2} (-2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6) = \frac{2}{e^4} > 0. \text{ La función crece en } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = e^{-2 \cdot 4} (-2 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 6) = \frac{-6}{e^8} < 0. \text{ La función decrece en } (3, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(1, 3)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) = -2e^{-2x} (x^2 - 4x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2(-2)e^{-2x} (x^2 - 4x + 3) - 2e^{-2x} (2x - 4) =$$

$$= -2e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) - 2e^{-2x} (2x - 4) = -2e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6 + 2x - 4) =$$

$$= -2e^{-2x}(-2x^2 + 10x - 10) = 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx \boxed{3.6 = x} \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx \boxed{1.38 = x} \end{cases}$$

Tenemos dos candidatos a punto de inflexión. Estudiamos la curvatura antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0}(0^2 - 5 \cdot 0 + 5) = 20 > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo}$$

$$\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale

$$f''(2) = 4e^{-2 \cdot 2}(2^2 - 5 \cdot 2 + 5) = \frac{-4}{e^4} < 0. \text{ La función es cóncava (O) en el intervalo}$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale

$$f''(4) = 4e^{-2 \cdot 4}(4^2 - 5 \cdot 4 + 5) = \frac{4}{e^8} > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

La función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ y otro en $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Como } f\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{\sqrt{5} - 5} \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2} \text{ y}$$

$$f\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{-5 - \sqrt{5}} \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2e^{5 + \sqrt{5}}} \text{ los puntos de}$$

$$\text{inflexión tienen coordenadas } \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2e^{5 - \sqrt{5}}}\right) \text{ y } \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2e^{5 + \sqrt{5}}}\right).$$

c) Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + \frac{3}{2}}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{2e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

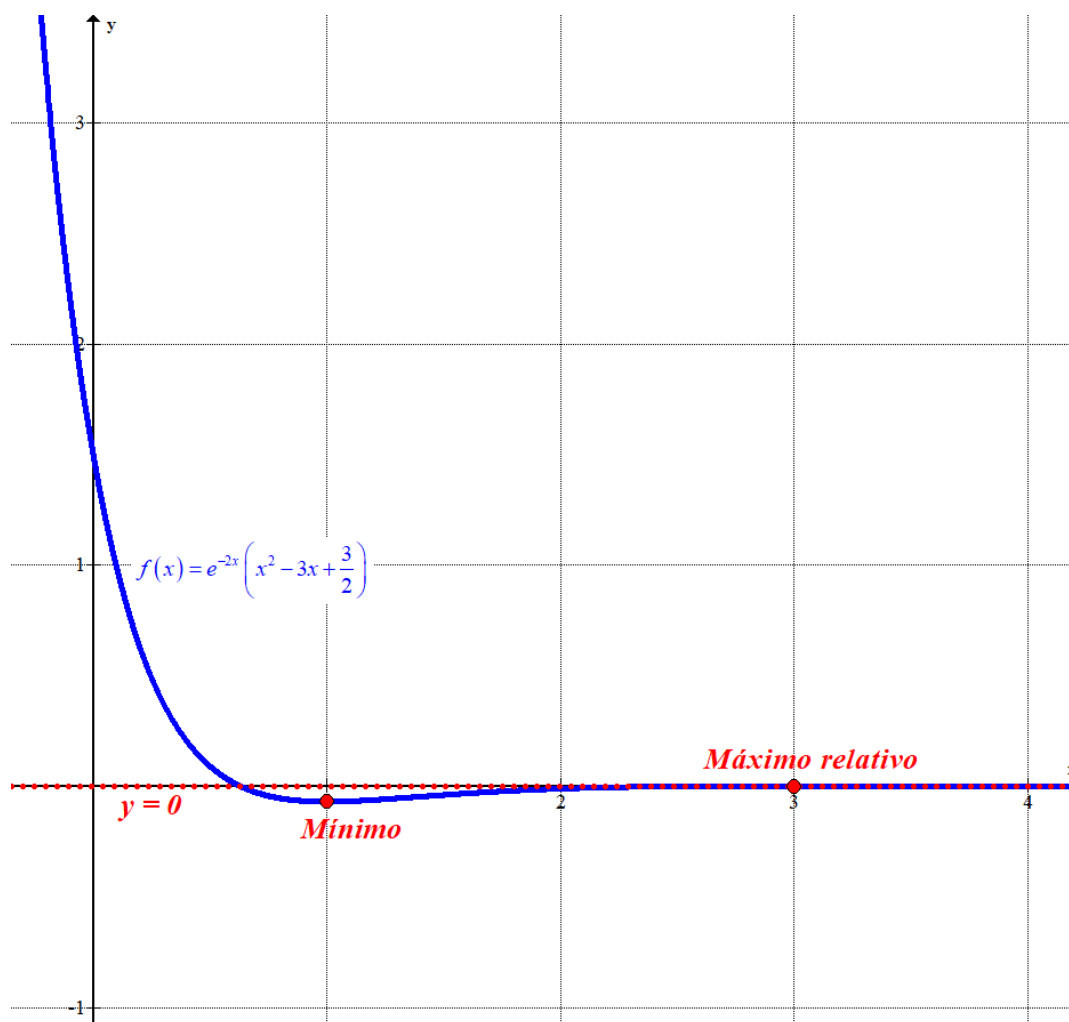
$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = e^{+\infty} (+\infty) = +\infty$$

Cuando x tiende a $-\infty$ no existe asíntota horizontal.



2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) Hallamos los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 1 - x^2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

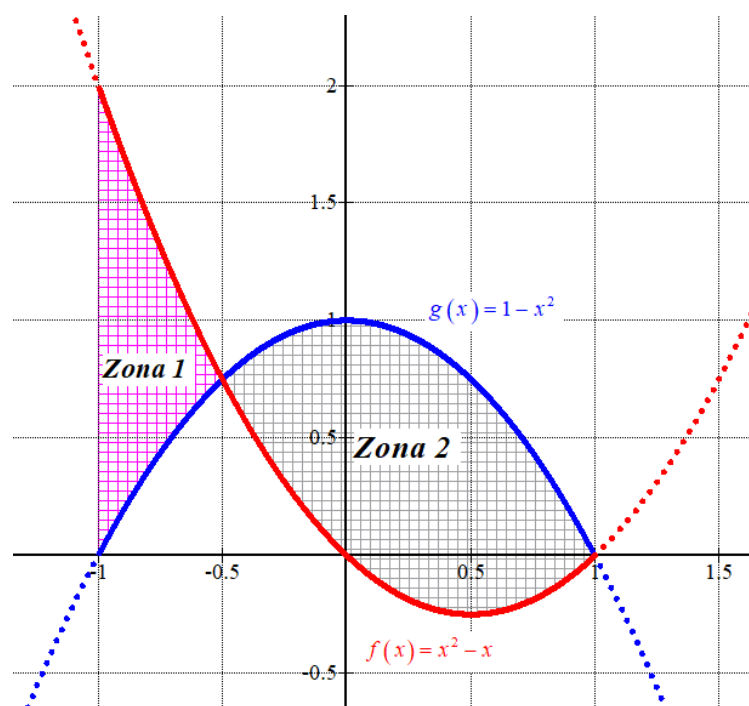
b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = 1 - x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \boxed{1 = x} \\ \frac{1-3}{4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \end{cases}$$

Las dos gráficas coinciden en $x = \frac{-1}{2}$ y en $x = 1$. Se cortan en $(-0.5, 0.75)$ y $(1, 0)$.

c) El recinto delimitado por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividimos en dos partes y el área la obtenemos como la suma de las áreas de los dos trozos-



Calculamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{-0.5} f(x) - g(x) dx &= \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - (1 - x^2) dx = \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - 1 + x^2 dx = \\
 &= \int_{-1}^{-0.5} 2x^2 - x - 1 dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{-0.5} = \\
 &= \left[\frac{2(-0.5)^3}{3} - \frac{(-0.5)^2}{2} + 0.5 \right] - \left[\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 1 \right] = -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{\frac{11}{24}}
 \end{aligned}$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}
 \int_{-0.5}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - (x^2 - x) dx = \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - x^2 + x dx = \\
 &= \int_{-0.5}^1 -2x^2 + x + 1 dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-0.5}^1 = \\
 &= \left[-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[\frac{-2(-0.5)^3}{3} + \frac{(-0.5)^2}{2} - 0.5 \right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{8}}
 \end{aligned}$$

El área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es la suma de las dos áreas obtenidas y tiene un valor de $\frac{11}{24} + \frac{9}{8} = \frac{19}{12} \approx 1.5833$ unidades cuadradas.

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ y el punto $P=(-3,2,2)$.

a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

a) Hallamos la ecuación continua de la recta.

$$r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2z \\ y=3-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}}$$

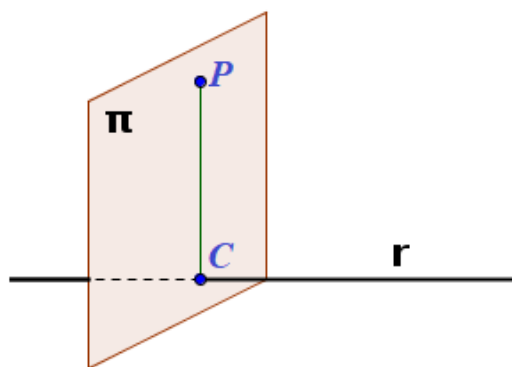
b) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + D = 0 \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-3) - 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D - 6 = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + z + 6 = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P es $\pi: 2x - y + z + 6 = 0$.

c) La distancia entre r y P es la distancia entre P y el punto C de corte de la recta r con el plano π hallado en el apartado anterior.



Hallamos el punto C .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} \\ \pi: 2x-y+z+6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2+2z \\ y=3-z \\ 2x-y+z+6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2+2z) - (3-z) + z + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4z - 3 + z + z + 6 = 0 \Rightarrow 6z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{z = -\frac{7}{6}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 + 2\frac{-7}{6} = -\frac{1}{3}} \\ \boxed{y = 3 + \frac{7}{6} = \frac{25}{6}} \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es $C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right)$.

Hallamos la distancia del punto P a la recta r como la distancia del punto P al punto C .

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) \\ P(-3, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) - (-3, 2, 2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{6}, \frac{-19}{6}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{-19}{6}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{786}}{6} \approx 4.67u}$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{786}}{6} \approx 4.67$ unidades.

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

- a) [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
- b) [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
- c) [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

- a) La probabilidad de sacar una bola roja de la urna A vale $\frac{3}{5}$. En la extracción de la segunda bola de la urna A quedan 4 bolas, siendo 2 bolas rojas y 2 bolas verdes, la probabilidad de que la segunda bola sea roja, habiendo sacado una primera bola roja vale $\frac{2}{4}$.

La probabilidad de que al extraer de la urna A dos bolas de forma simultánea estas sean dos bolas rojas vale $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0.3$.

- b) Este es un experimento compuesto donde primero elegimos una urna entre la A y la B, y luego extraemos una bola de la urna elegida. El suceso sacar bola roja puede pasar de dos formas distintas: una eligiendo la urna A y luego sacando bola roja o bien eligiendo la urna B y luego extraer bola roja.

La probabilidad del suceso es $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$.

- c) En el experimento elegir una urna y extraer una bola de la urna elegida la probabilidad de sacar bola verde (suceso complementario de “sacar bola roja”) es $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

La probabilidad de elegir la urna A y sacar bola verde de la urna A vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.

Si de cada 15 repeticiones del experimento sabemos que 8 saldrá bola verde y de estas 3 serán extraídas de la urna A entonces la probabilidad de que al sacar bola verde esta haya sido extraída de la urna A vale $\frac{3}{8} = 0.375$

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
 b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
 c) [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Sea X = Altura en centímetros de un habitante de una población. $X = N(170, 16)$.

- a) Nos piden calcular $P(X > 190)$.

$$P(X > 190) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z > \frac{190-170}{16}\right) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8944

$$= 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

- b) Nos piden calcular $P(160 < X < 190)$.

$$P(160 < X < 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{160-170}{16} < Z < \frac{190-170}{16}\right) = P(-0.625 < Z < 1.25) =$$

$$= P(Z < 1.25) - P(Z < -0.625) = P(Z < 1.25) - P(Z > 0.625) =$$

$$= P(Z < 1.25) - [1 - P(Z < 0.625)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 1 + \frac{0.7324 + 0.7357}{2} = \boxed{0.62845}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8944

- c) La información que vamos a manejar para responder en este apartado es: “En una población, el 85% de las personas son rubias, sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm”.

Llamamos R al suceso “elegir una persona rubia” y A a “elegir una persona que mide más de 190 cm”. Sabemos que $P(A/R) = 0.12$ y $P(R) = 0.85$. Nos piden calcular $P(R \cap A)$.

$$P(R \cap A) = P(R)P(A/R) = 0.85 \cdot 0.12 = \boxed{0.102}$$

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

Cuestión 1A. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tarea a. [1 punto]. Halla los valores del parámetro a para los cuales la matriz A tiene inversa.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a = -3$. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A .

Tarea c. [0,5 puntos]. Considera $a = -3$. Halla, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $AX = B$.

Cuestión 1B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Tarea a. [1,5 puntos]. Halla los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B)

Cuestión 2A. Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ e^k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro a determinar.

Tarea a. [0,75 puntos]. Determina el valor del parámetro k para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.

Tarea b. [1 punto]. Si existen, halla las asíntotas de $f(x)$ y especifica de qué tipo son.

Tarea c. [0,75 puntos]. Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

Cuestión 2B. Considera la siguiente función: $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$

Tarea a. [0,5 puntos]. Halla los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX y los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de ordenadas OY.

Tarea b. [1 punto]. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Tarea c. [1 punto]. Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

Tarea a. [1 punto]. Determina los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{14}$ unidades de P .

Tarea b. [0,75 puntos]. Obtén la ecuación del plano que contiene a r y P .

Tarea c. [0,75 puntos]. Calcula la distancia entre r y P .

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

Cuestión 4A. En un colegio se ofrecen solo atletismo y baloncesto como actividades deportivas extraescolares. En base a los datos de otros años, los docentes determinan que la probabilidad de que un alumno se matricule en atletismo es $P(A) = 0,40$ y que la probabilidad de que un estudiante se matricule en baloncesto es $P(B) = 0,65$. Además, solo un 10% del alumnado no se matricula en ningún deporte.

Tarea a. [1 punto]. Calcula la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes.

Tarea b. [1,5 puntos]. Calcula las siguientes probabilidades: $P(A/B)$, $P(B/A)$ y $P(A/B^c)$ donde B^c representa el suceso contrario a B .

Cuestión 4B. Solo dos sedes de una empresa fabrican el mismo modelo de aspiradora. La sede A suministra el 60 % de la producción total. Un 0,15 % de las aspiradoras fabricadas en la sede A y un 0,1 % de las aspiradoras fabricadas en la sede B falla durante el primer año.

Tarea a. [0,75 puntos]. Calcula la probabilidad de que una aspiradora fabricada en la sede B no falle durante el primer año.

Tarea b. [0,75 puntos]. Calcula la probabilidad de que una aspiradora elegida al azar falle durante el primer año.

Tarea c. [1 punto]. Si una aspiradora elegida al azar no falla durante el primer año, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la sede A.

SOLUCIONES**APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]****Cuestión 1A.** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tarea a. [1 punto]. Halla los valores del parámetro a para los cuales la matriz A tiene inversa.**Tarea b. [1 punto].** Considera $a = -3$. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A .**Tarea c. [0,5 puntos].** Considera $a = -3$. Halla, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $AX = B$.**Tarea a.** Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a+3)(a+1) + 1 + 1 - (a+3) - (a+1) - (a+1) =$$

$$= (a+1)(a+3)(a+1) + 1 + 1 - a - 3 - a - 1 - a - 1 = (a+1)(a+3)(a+1) - 3a - 3 =$$

$$= (a+1)(a+3)(a+1) - 3(a+1) = [(a+1)(a+3) - 3](a+1) =$$

$$= [a^2 + 3a + a + 3 - 3](a+1) = [a^2 + 4a](a+1) = a(a+4)(a+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a+4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+4 = 0 \rightarrow a = -4 \\ a+1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de -4 , -1 y 0 .

Tarea b. Para $a = -3$ la matriz inversa de A existe. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 + 2 + 2 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Tarea c. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Considerando $a = -3$ la matriz inversa de A existe y vale $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+6+5 & 3+0+3 \\ -3+6+15 & -9+0+9 \\ -1+6-5 & -3+0-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

Cuestión 1B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Tarea a. [1,5 puntos]. Halla los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Tarea a. El sistema es compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales.

El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 2) - 2 - 0 - (a^2 - 2) - 0 - 0 = a^3 - 2a - 2 - a^2 + 2 =$$

$$= a^3 - a^2 - 2a = a(a^2 - a - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases} \end{cases}$$

Para cualquier valor de a distinto de 0, -1 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

$$\text{Para } a = 0 \text{ el sistema queda } \begin{cases} y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ x = z \end{cases}. \text{ El}$$

sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Para } a = -1 \text{ el sistema queda } \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2z + 2 = y \Rightarrow -z + 2z + 2 - z = 1 \Rightarrow 2 = 1 \\ x = z \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y = -1 - z \Rightarrow 2z - 1 - z - z = 1 \Rightarrow -1 = 1 \\ x = z \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

Resumiendo: El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de -1 y 2 .

Tarea b. Considerando $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$. Este sistema se ha resuelto en el

apartado anterior y sus infinitas soluciones tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Cuestión 2A. Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ e^k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro a determinar.

Tarea a. [0,75 puntos]. Determina el valor del parámetro k para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.

Tarea b. [1 punto]. Si existen, halla las asíntotas de $f(x)$ y especifica de qué tipo son.

Tarea c. [0,75 puntos]. Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

Tarea a. Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ el valor de la función y el límite de la función en dicho valor deben coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = ..$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \\ \\ \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{array} \Rightarrow x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \\ \hline 1 & 2 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

$$... = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x-2)}(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = e^k \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow e^k = 3 \Rightarrow \boxed{k = \ln 3}$$

El valor buscado y necesario para que se cumpla lo pedido es $k = \ln 3$.

Tarea b. La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Esta función es continua en $x = 2$, pero es

discontinua en $x = -2$, valor que también anula el denominador.

Asíntota vertical. $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 - 8}{(-2)^2 - 4} = \frac{-16}{0} = \infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

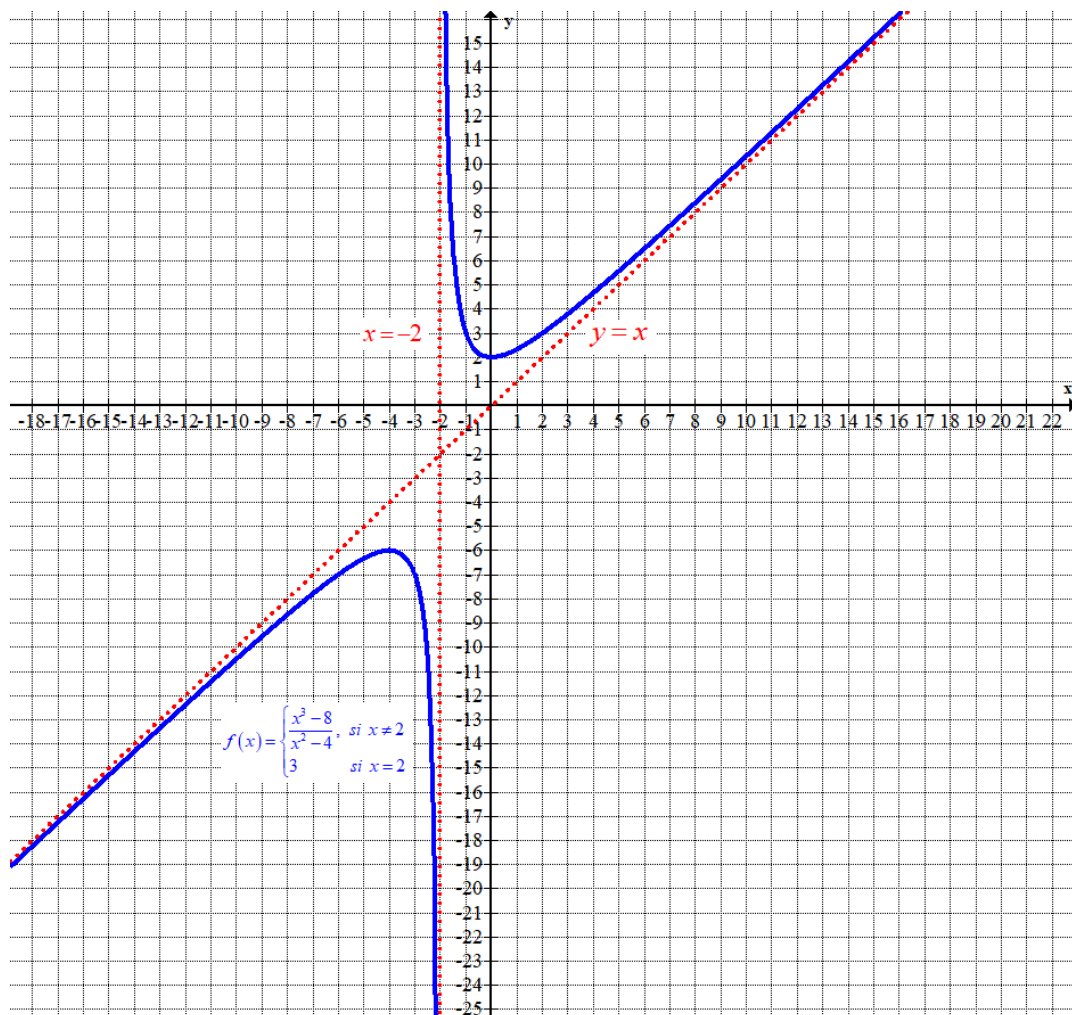
Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8 - x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 - 4x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la función.

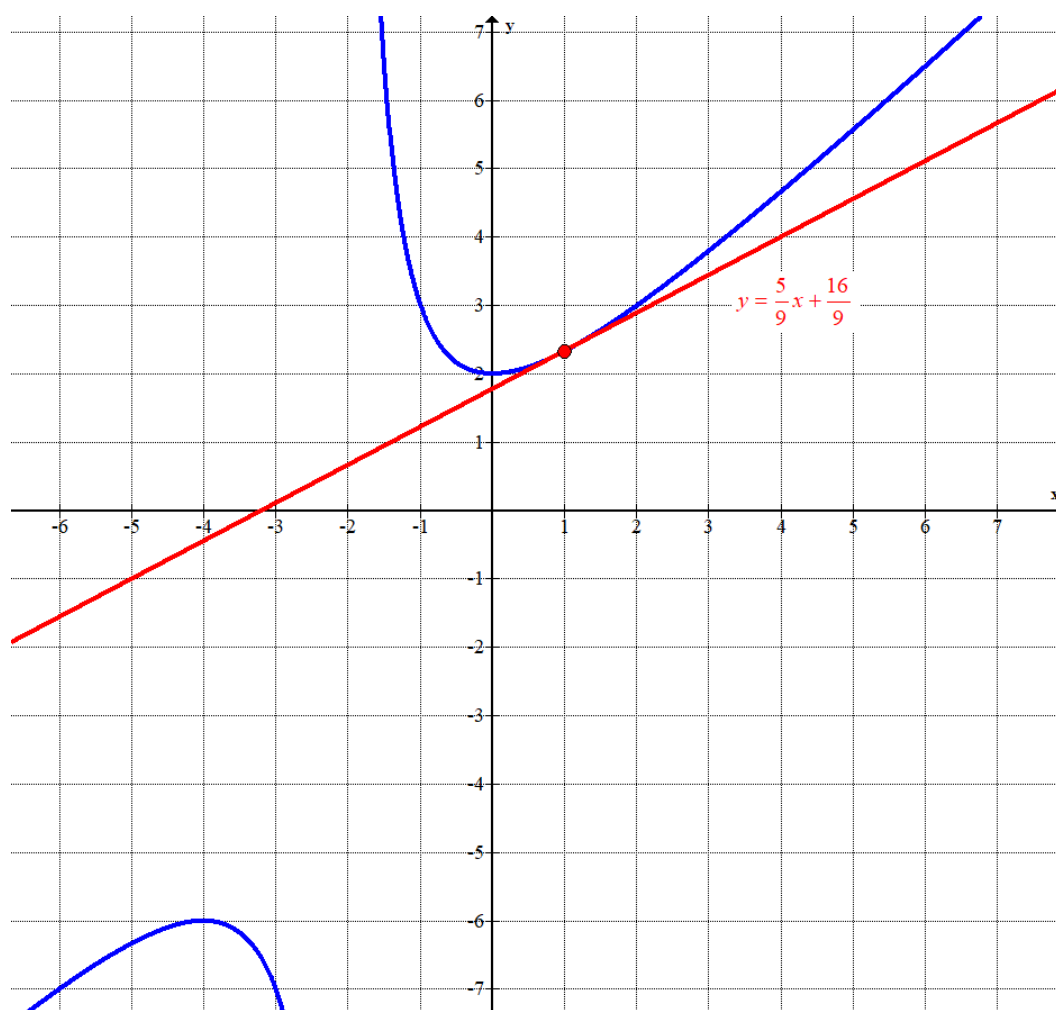


Tarea c. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x(x^3-8)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2 + 16x}{(x^2-4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1^3 - 8}{1^2 - 4} = \frac{7}{3} \\ f'(1) = \frac{1^4 - 12 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1}{(1^2 - 4)^2} = \frac{5}{9} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = \frac{5}{9}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{9}x + \frac{16}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y = \frac{5}{9}x + \frac{16}{9}$.



Cuestión 2B. Considera la siguiente función: $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$

Tarea a. [0,5 puntos]. Halla los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX y los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de ordenadas OY.

Tarea b. [1 punto]. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Tarea c. [1 punto]. Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

Tarea a. Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.

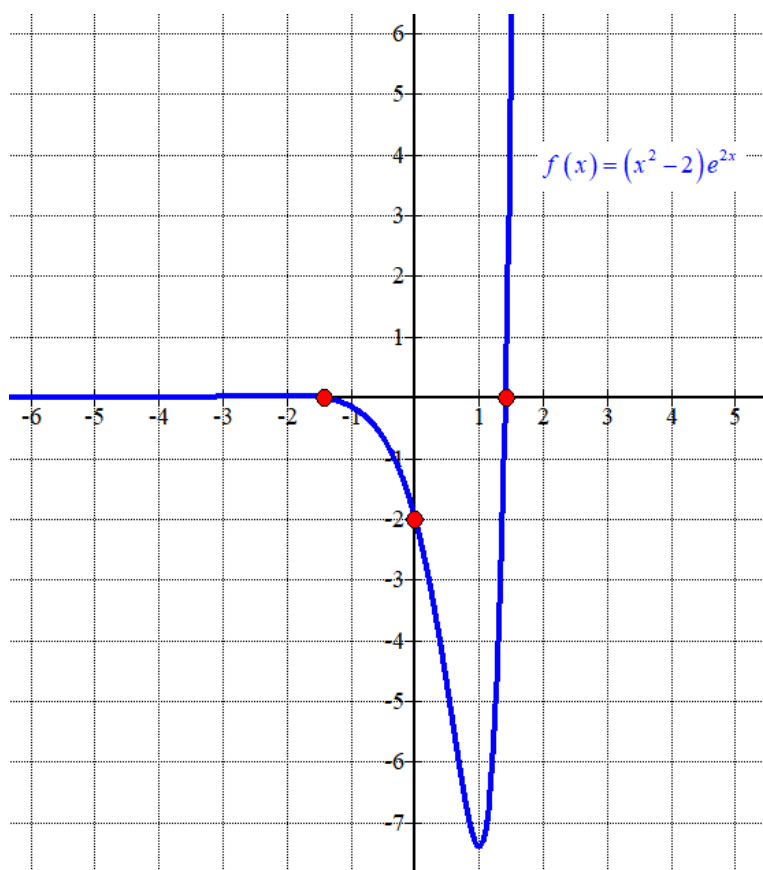
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x^2 - 2)e^{2x} = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(+\sqrt{2}, 0)$.

Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de ordenadas OY.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = (0^2 - 2)e^{2 \cdot 0} = -2 \Rightarrow y = -2$$

El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es $(0, -2)$



Tarea b. Estudiamos el cambio de signo de la derivada empezando por averiguar cuando se anula.

$$f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x + x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x}(x + x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ consideramos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = 2e^{2(-3)}((-3)^2 - 3 - 2) = \frac{8}{e^6} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale

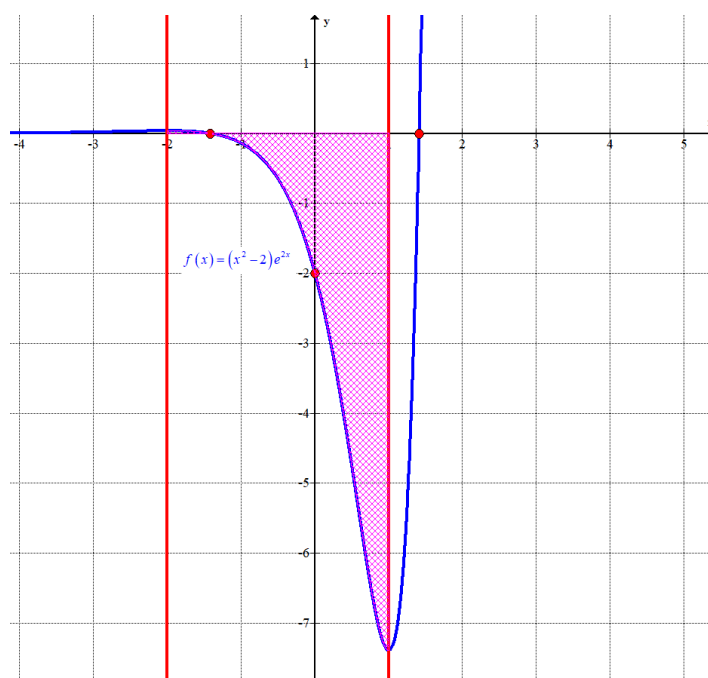
$$f'(0) = 2e^{2 \cdot 0}(0^2 + 0 - 2) = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 2e^{2 \cdot 2}(2^2 + 2 - 2) = 8e^4 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.

Tarea c. La función corta el eje OX en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(+\sqrt{2}, 0)$. Como $-\sqrt{2}$ pertenece al intervalo $(-2, 1)$ el valor del área pedida es la suma del valor de la integral definida de la función entre -2 y $-\sqrt{2}$, y el valor absoluto de la integral definida de la función entre $-\sqrt{2}$ y 1 .



Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int (x^2 - 2)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \\
 &= (x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x dx = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \int x e^{2x} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right] = \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right] = \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - 2 - x + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x - \frac{3}{2} \right) + C
 \end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

Calculamos primero el área de la región pequeña comprendida entre -2 y $-\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(x) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x - \frac{3}{2} \right) \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} = \\
 &= \left[\frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left((-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) \right] - \left[\frac{e^{2(-2)}}{2} \left((-2)^2 + 2 - \frac{3}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left(2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{e^{-4}}{2} \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) - \frac{9}{4} e^{-4} \approx \boxed{0.01536 u^2}
 \end{aligned}$$

Calculamos ahora el área de la región más grande comprendida entre $-\sqrt{2}$ y 1 .

$$\int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x - \frac{3}{2} \right) \right]_{-\sqrt{2}}^1 = \left[\frac{e^2}{2} \left(1^2 - 1 - \frac{3}{2} \right) \right] - \left[\frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left((-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) \right] =$$

$$= -\frac{3e^2}{4} - \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left(2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3e^2}{4} - \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx \right| = \frac{3e^2}{4} + \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \approx \boxed{5.5983 u^2}$$

El área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$ es la suma de los dos valores obtenidos: $0.01536 + 5.5983 = 5.61366$ unidades cuadradas.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

Tarea a. [1 punto]. Determina los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{14}$ unidades de P .

Tarea b. [0,75 puntos]. Obtén la ecuación del plano que contiene a r y P .

Tarea c. [0,75 puntos]. Calcula la distancia entre r y P ,

Tarea a. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = y \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 - 2z = 1 \Rightarrow 2x - 2z = 4 \Rightarrow x - z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 + z \Rightarrow y = 2(2 + z) - 3 = 4 + 2z - 3 = 1 + 2z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto Q perteneciente a la recta r tiene coordenadas $Q(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)$.

Para que un punto Q de la recta r esté situado a $\sqrt{14}$ unidades de P el vector que une dichos puntos debe tener longitud $\sqrt{14}$.

$$\left. \begin{matrix} Q(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) \\ P(1, 1, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) - (1, 1, 1) = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{(1 + \lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda)^2 + 4\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 = 14 \Rightarrow 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 + 1^2 - 2\lambda = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2 - 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_1(2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ Q_2(2 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases}$$

Los puntos buscados son $Q_1(2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $Q_2(2 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Tarea b. El plano que contiene a r y P tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector que une el punto P con un punto cualquiera de la recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ Q_r(2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 1, 1) \\ Q_r = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$$

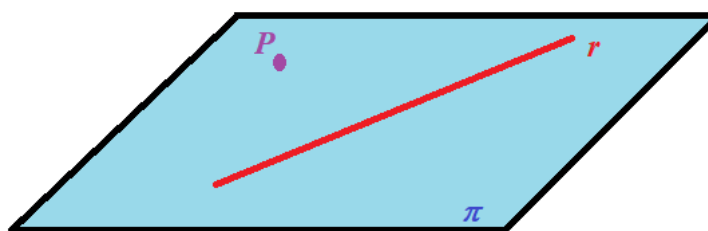
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (1, 0, -1) \\ P = (1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) + y-1 + 0 - 2(z-1) + y-1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2 + y - 1 - 2z + 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow -2x + 2y - 2z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + z - 1 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a r y P es $\pi: x - y + z - 1 = 0$.

Tarea c. Hallamos el punto P' de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a la recta r .



$$\left. \begin{array}{l} P'(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) \in r \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) - (1, 1, 1) = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{PP'} \perp r \rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 2, 1)(1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda + 4\lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (1, 0, -1)$$

La distancia del punto P a la recta es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

La distancia entre r y P tiene un valor de $\sqrt{2}$ unidades.

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Cuestión 4A. En un colegio se ofrecen solo atletismo y baloncesto como actividades deportivas extraescolares. En base a los datos de otros años, los docentes determinan que la probabilidad de que un alumno se matricule en atletismo es $P(A) = 0,40$ y que la probabilidad de que un estudiante se matricule en baloncesto es $P(B) = 0,65$. Además, solo un 10% del alumnado no se matricula en ningún deporte.

Tarea a. [1 punto]. Calcula la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes.

Tarea b. [1,5 puntos]. Calcula las siguientes probabilidades: $P(A/B)$, $P(B/A)$ y $P(A/B^c)$ donde B^c representa el suceso contrario a B .

Tarea a. Sabemos que el 40 % del alumnado se matricula en atletismo, el 65 % en baloncesto y el 10 % no se matricula en ningún deporte. Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

	Atletismo	No atletismo	
Baloncesto			65
No baloncesto		10	
	40		100

Completamos la tabla.

	Atletismo	No atletismo	
Baloncesto	15	50	65
No baloncesto	25	10	35
	40	60	100

Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Sabemos que el 15 % del alumnado se ha matriculado en ambos deportes, aplicando la regla de Laplace sabemos que la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes tiene un valor de 0.15.

Tarea b. Usando el teorema de Bayes y los datos de la tabla de contingencia calculamos las probabilidades pedidas.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.65} = \boxed{\frac{3}{13} \approx 0.2308}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.4} = \boxed{0.375}$$

$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.25}{0.35} = \boxed{\frac{5}{7} \approx 0.7143}$$

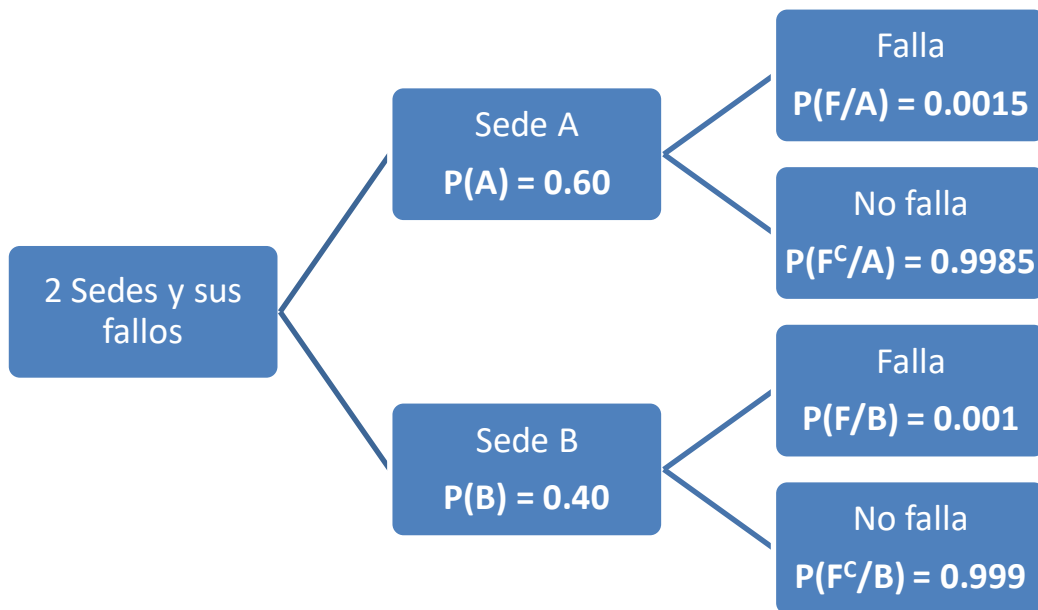
Cuestión 4B. Solo dos sedes de una empresa fabrican el mismo modelo de aspiradora. La sede A suministra el 60 % de la producción total. Un 0,15 % de las aspiradoras fabricadas en la sede A y un 0,1 % de las aspiradoras fabricadas en la sede B falla durante el primer año.

Tarea a. [0,75 puntos]. Calcula la probabilidad de que una aspiradora fabricada en la sede B no falle durante el primer año.

Tarea b. [0,75 puntos]. Calcula la probabilidad de que una aspiradora elegida al azar falle durante el primer año.

Tarea c. [1 punto]. Si una aspiradora elegida al azar no falla durante el primer año, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la sede A.

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación planteada.



Tarea a. Nos piden calcular $P(F^c / B)$. Como sabemos que el 0.1 % de las aspiradoras fallan entonces el restante 99.9 % no fallan. Entonces $P(F^c / B) = 0.999$.

Tarea b. Nos piden calcular $P(F)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(A)P(F / A) + P(B)P(F / B) = 0.6 \cdot 0.0015 + 0.4 \cdot 0.001 = \boxed{0.0013}$$

Tarea c. Nos piden calcular $P(A / F^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / F^c) = \frac{P(A \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P(A)P(F^c / A)}{1 - P(F)} = \frac{0.6 \cdot 0.9985}{1 - 0.0013} = \frac{1997}{3329} \approx 0.5999$$

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $(2A + B)^2$.
- [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $C(AC)^t$.
- [1 punto] Obtén, si es posible, la matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z = a + \frac{3}{2} \\ 5x + (3 - a)y = 5 \\ 3x + y + (2a + 2)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es incompatible.
- [1 punto] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

- [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.

b) [1 punto] Calcula el máximo absoluto de $f(x)$.

c) [1 punto] Halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

2B) Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) [0.5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.

c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

a) [0.5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en función del valor de a .

c) [1 punto] Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π , ¿cuál es la distancia entre r y π ?

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) En un ensayo clínico, se administró una medicación a un grupo de personas con cierta dolencia. La medicación demostró ser efectiva en el 85% de los casos. Paralelamente, se administró un placebo en un grupo control con el mismo número de personas, en el que solo el 5% de los participantes mejoró de forma espontánea.

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore?

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado.

c) [1 punto] Si se escoge al azar un participante que haya mejorado, ¿cuál es la probabilidad de que se le haya administrado el placebo?

4B) En una universidad, el 25% de los estudiantes utiliza la bicicleta para ir a clase y el 70% utiliza el transporte público. Solo un 15% de los estudiantes no utiliza ni bicicleta ni transporte público.

a) [0,5 puntos] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice tanto la bicicleta como el transporte público?

b) [1 punto] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice solo la bicicleta o solo el transporte público?

c) [1 punto] Si se escoge a un estudiante que no utiliza el transporte público, ¿cuál es la probabilidad de que utilice bicicleta?

SOLUCIONES**APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]****1A)** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $(2A+B)^2$.b) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $C(AC)^t$.c) [1 punto] Obtén, si es posible, la matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$.a) Intentamos calcular la matriz resultante de $(2A+B)^2$.

$$2A+B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0-2 \\ -2-1 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2A+B)^2 = (2A+B)(2A+B) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+6 & -10-12 \\ -15-18 & 6+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -22 \\ -33 & 42 \end{pmatrix}$$

La operación $(2A+B)^2$ es posible obteniéndose la matriz $(2A+B)^2 = \begin{pmatrix} 31 & -22 \\ -33 & 42 \end{pmatrix}$.

b) Intentamos calcular la matriz resultante de $C(AC)^t$.

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 2 \times 1$

$$C(AC)^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$

La operación $C(AC)^t$ es posible obteniéndose la matriz $C(AC)^t = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2AX = C \Rightarrow AX = \frac{1}{2}C \Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}C$$

Obtenemos la matriz inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X .

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6+0 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

La matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z = a + \frac{3}{2} \\ 5x + (3 - a)y = 5 \\ 3x + y + (2a + 2)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es incompatible.

b) [1 punto] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3-a & 0 \\ 3 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a + \frac{3}{2} \\ 5 & 3-a & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2a+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son distintos. Para que ocurra esto lo primero que debe pasar es que el rango de A no sea 3, es decir que el determinante de A sea nulo.

Averiguemos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3-a & 0 \\ 3 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = (3-a)(2a+2) + 0 - 5 + 3(3-a) - 0 - 0 =$$

$$= 6a + 6 - 2a^2 - 2a - 5 + 9 - 3a = -2a^2 + a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)10}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 9}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+9}{-4} = \boxed{-2=a} \\ \frac{-1-9}{-4} = \boxed{2.5=a} \end{cases}$$

Sabemos que para un valor de a distinto de -2 y 2.5 el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema va a ser compatible determinado.

Vemos que ocurre para $a = -2$ y para $a = 2.5$.

Para $a = -2$ la matriz A tiene determinante nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango

y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\ -3 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a \\ -5 \quad -5 \quad 0 \quad -5 \\ 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ \underbrace{3 \quad 1 \quad -2 \quad 0}_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B, por lo que el sistema es compatible para $a = -2$.

Para $a = 2.5$ la matriz A tiene determinante nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango

y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0.5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0.5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 7 \quad 0 \\ -3 \quad 0 \quad 3 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 10 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 0.5 \quad 0 \quad 5 \\ -5 \quad 0 \quad 5 \quad -20 \\ \hline 0 \quad 0.5 \quad 5 \quad -15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0.5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 10 \quad -12 \\ 0 \quad -1 \quad -10 \quad 30 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 0.5 \quad 5 \quad -15 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 18}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible para $a = 2.5$.

El sistema es incompatible solo para $a = 2.5$.

- b) Por lo visto en el apartado anterior sabemos que para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

El sistema queda
$$\begin{cases} x - z = \frac{3}{2} \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \text{ . Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x - z = \frac{3}{2} \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + z \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\left(\frac{3}{2} + z\right) + 3y = 5 \\ 3\left(\frac{3}{2} + z\right) + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{2} + 5z + 3y = 5 \\ \frac{9}{2} + 3z + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z + 3y = 5 - \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} + y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z + 3y = \frac{-5}{2} \\ y = -5z - \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z + 3\left(-5z - \frac{9}{2}\right) = \frac{-5}{2} \Rightarrow 5z - 15z - \frac{27}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow -10z = \frac{22}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{11}{-10} = -1.1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{3}{2} - 1.1 = 0.4} \\ \boxed{y = -5(-1.1) - \frac{9}{2} = 5.5 - 4.5 = 1} \end{cases}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = 0.4$, $y = 1$, $z = -1.1$

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

2A) Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
 b) [1 punto] Calcula el máximo absoluto de $f(x)$.
 c) [1 punto] Halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales mayores o iguales que cero pues la raíz cuadrada sólo existe si el radicando es positivo o cero. Dominio = $[0, +\infty)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x}e^{-x} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} + \sqrt{x}(-1)e^{-x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = e^{-x} \left(\frac{1 - 2(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \right) = e^{-x} \left(\frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1 - 2x}{2e^x \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{2e^x \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \frac{1}{2}$.

- En el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale

$$f'(0.25) = \frac{1 - 2 \cdot 0.25}{2e^{0.25} \sqrt{0.25}} = \frac{0.5}{2e^{0.25} \sqrt{0.25}} > 0. \text{ La función crece en } \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - 2 \cdot 1}{2e^1 \sqrt{1}} = \frac{-1}{2e} < 0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

La función crece en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Por lo que la función presenta un máximo

relativo en $x = \frac{1}{2}$ que es un máximo absoluto por la evolución de la función. Para este valor la

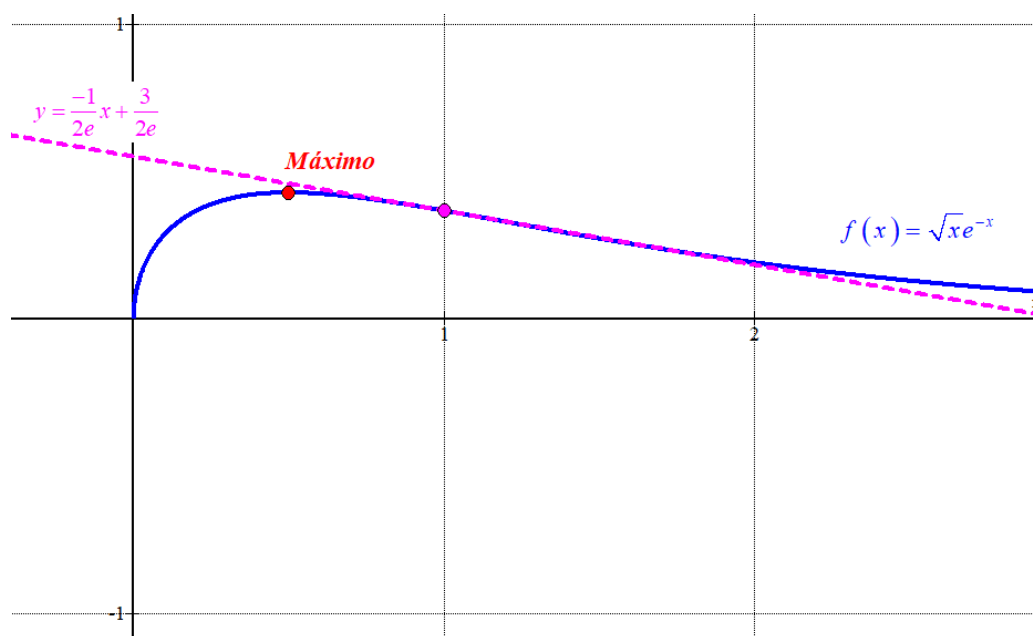
$$\text{función vale } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e} = \frac{\sqrt{2}e}{2e}.$$

c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1}e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f'(1) = \frac{-1}{2e} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{-1}{2e}(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} + \frac{2}{2e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2e}x + \frac{3}{2e}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y = \frac{-1}{2e}x + \frac{3}{2e}$.



2B) Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.
- c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

a) Estudiamos el cambio de signo de la derivada empezando por averiguar cuando se anula.

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 2x \cdot 3x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ consideramos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{3 - 3(-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-9}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{3 - 3 \cdot 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{3 - 3 \cdot 2^2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-9}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

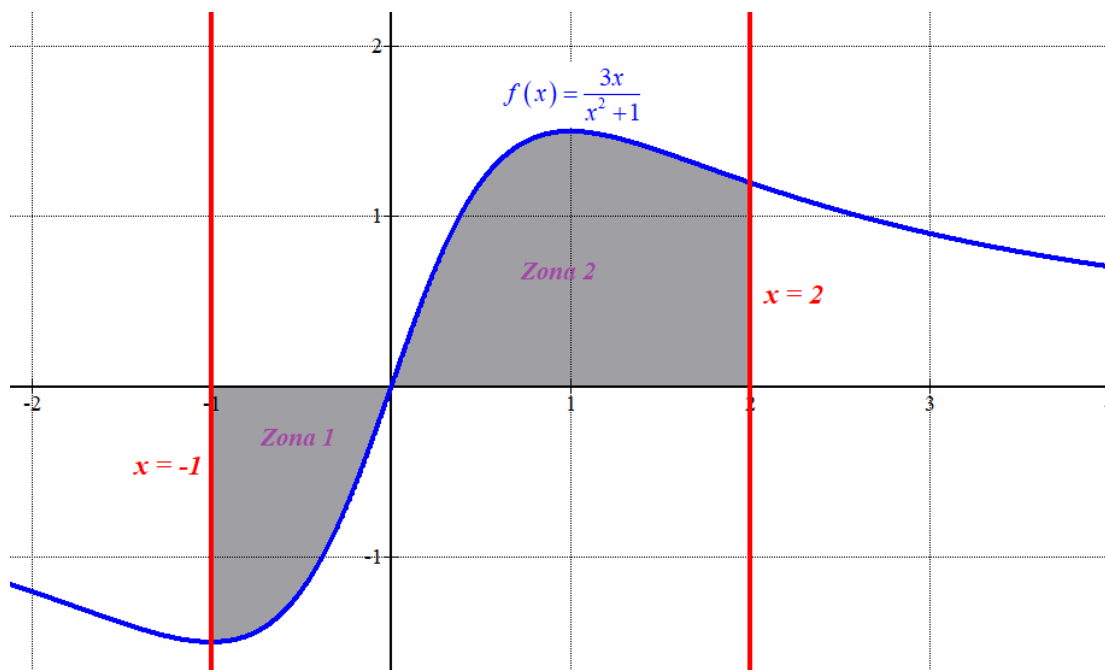
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{A(0, 0)}$$

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es $A(0, 0)$.

- c) La gráfica de la función corta el eje OX en $x = 0 \in [-1, 2]$. El área pedida es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 .



Calculamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^0 = \\ &= \frac{3}{2} \left(\ln(0^2 + 1) - \ln((-1)^2 + 1) \right) = \frac{-3 \ln 2}{2}\end{aligned}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de $\frac{3 \ln 2}{2}$ unidades cuadradas.

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \frac{3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^2 = \\ &= \frac{3}{2} \left(\ln(2^2 + 1) - \ln(0^2 + 1) \right) = \frac{3 \ln 5}{2}\end{aligned}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de $\frac{3 \ln 5}{2}$ unidades cuadradas.

El área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ es la suma de los dos valores obtenidos: $\frac{3 \ln 5}{2} + \frac{3 \ln 2}{2} = \frac{3 \ln 5 + 3 \ln 2}{2} \approx 3.45$ unidades cuadradas.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+2z-5=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 5x+3y-4z+a=0$.

- a) [0.5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
 b) [1 punto] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en función del valor de a .
 c) [1 punto] Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π , ¿cuál es la distancia entre r y π ?

a) Obtenemos la ecuación continua de la recta.

$$r: \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+2z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ y=5-2z \end{cases} \Rightarrow x+5-2z+2=0 \Rightarrow x=-7+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=5-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ Q_r(-7, 5, 0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x+7}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}}$$

b) La recta tiene como vector director $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$ y el plano tiene como vector normal $\vec{n} = (5, 3, -4)$.

Comprobamos si estos vectores son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{n} = (5, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (5, 3, -4) \cdot (2, -2, 1) = 10 - 6 - 4 = 0$$

Estos vectores son perpendiculares y la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano. Si el punto $Q_r(-7, 5, 0)$ de la recta r pertenece al plano la recta está contenida en el plano. De no ser así la recta es paralela al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(-7, 5, 0) \in \pi \\ \pi: 5x+3y-4z+a=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -35+15-0+a=0 \Rightarrow -20+a=0 \Rightarrow \boxed{a=20}$$

Si $a=20$ la recta está contenida en el plano. Si a es distinto de 20 la recta es paralela al plano.

c) Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π entonces cumple su ecuación.

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + a = 0 \rightarrow 5 + a = 0 \rightarrow a = -5$$

Este valor es distinto de 20, por lo que la recta es paralela al plano $\pi: 5x+3y-4z-5=0$.

La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(-7, 5, 0) \in r \\ \pi: 5x+3y-4z-5=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(Q_r, \pi) = \frac{|5(-7)+3 \cdot 5-4 \cdot 0-5|}{\sqrt{5^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{25}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

4A) En un ensayo clínico, se administró una medicación a un grupo de personas con cierta dolencia. La medicación demostró ser efectiva en el 85% de los casos. Paralelamente, se administró un placebo en un grupo control con el mismo número de personas, en el que solo el 5% de los participantes mejoró de forma espontánea.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore?
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado.
- c) [1 punto] Si se escoge al azar un participante que haya mejorado, ¿cuál es la probabilidad de que se le haya administrado el placebo?

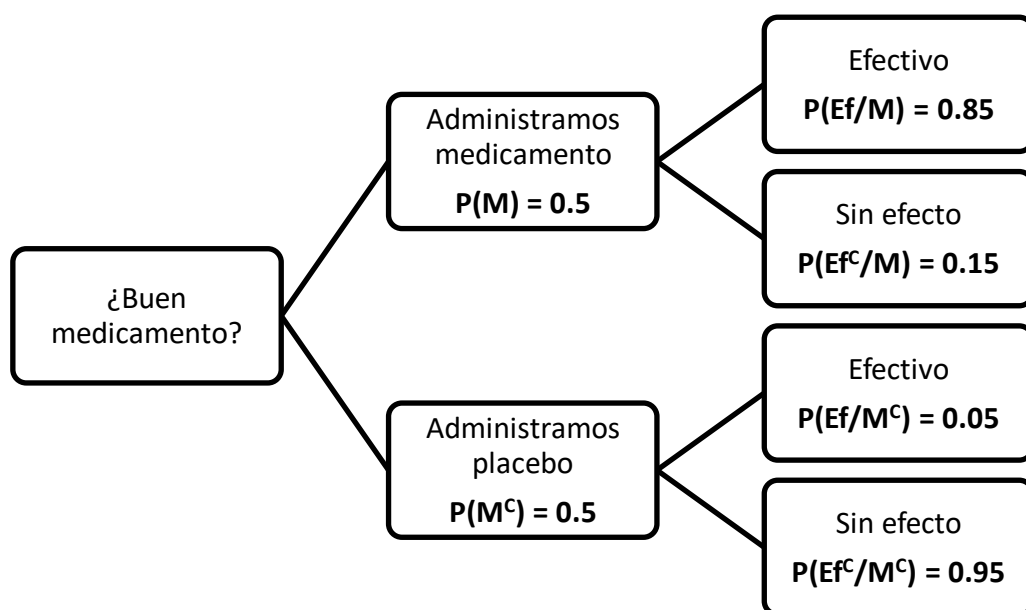
a) En el 85 % de los casos a los que se administró el medicamento demostró ser efectivo, en el restante 15 % no fue efectivo. la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore es de 0.15.

b) Supongamos que son 100 personas a las que se administra el medicamento. De estas hay 85 que mejoran. También son 100 personas a las que se le administra el placebo y de estas solo mejoran 5. De las 200 personas que participan en el ensayo clínico son $85 + 5 = 90$ las personas que mejoran y 110 las que no mejoran. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado tiene un valor de $\frac{110}{200} = 0.55$.

c) De los 200 participantes en el estudio hay 90 que han mejorado y de estos solo 5 han recibido el placebo. La probabilidad de que al elegir un participante que ha mejorado se le haya administrado el placebo tiene un valor de $\frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 0.0556$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos un diagrama de árbol. Como se eligen grupos con el mismo número de personas para hacer un control la probabilidad de que al elegir una persona se le haya administrado un placebo o un medicamento tienen el mismo valor y valen 0.5.



a) Nos piden el valor de $P(Ef^c / M)$. Esta probabilidad es de 0.15.

b) No piden el valor de $P(Ef^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Ef^c) = P(M)P(Ef^c / M) + P(M^c)P(Ef^c / M^c) = 0.5 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.95 = \boxed{0.55}$$

c) Nos piden calcular $P(M^c / Ef)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M^c / Ef) = \frac{P(M^c \cap Ef)}{P(Ef)} = \frac{P(M^c)P(Ef / M^c)}{1 - P(Ef^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{1 - 0.55} = \boxed{\frac{1}{18} \approx 0.0556}$$

4B) En una universidad, el 25% de los estudiantes utiliza la bicicleta para ir a clase y el 70% utiliza el transporte público. Solo un 15% de los estudiantes no utiliza ni bicicleta ni transporte público.

- a) [0,5 puntos] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice tanto la bicicleta como el transporte público?
- b) [1 punto] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice solo la bicicleta o solo el transporte público?
- c) [1 punto] Si se escoge a un estudiante que no utiliza el transporte público, ¿cuál es la probabilidad de que utilice bicicleta?

Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

	Bicicleta	No bicicleta	
Transporte público			70
No transporte público		15	
	25		100

Completamos la tabla.

	Bicicleta	No bicicleta	
Transporte público	10	60	70
No transporte público	15	15	30
	25	75	100

- a) Hay un 10 % de los estudiantes que utilizan ambos medios de transporte. La probabilidad de que al escoger un estudiante al azar utilice tanto la bicicleta como el transporte público vale 0.10.
- b) Hay un 60 % de los estudiantes que utilizan solo el transporte público y un 15 % que solo utiliza la bicicleta. Son un $15 + 60 = 75$ % los que utilizan solo la bicicleta o solo el transporte público, por lo que la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar utilice solo la bicicleta o solo el transporte público es del 0.75.
- c) Un 30 % de los estudiantes no utiliza el transporte público y un 15 % de los estudiantes no utiliza el transporte público, pero si utiliza la bicicleta. La probabilidad de que al escoger a un estudiante que no utiliza el transporte público este utilice bicicleta vale $\frac{15}{30} = 0.5$.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

JULIO 2024

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

- Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.
- Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A .

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 10x^2 + 25x, & \text{si } x \leq 5 \\ \ln(x^2 - 25), & \text{si } x > 5 \end{cases}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
- 2) [1,25 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2 .
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.

- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4z = -6 \\ x - 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = ax + \sin(x)$, en función de la constante real a , con $x \in [0, 2\pi]$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.
- 3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 3, 2)$, $B = (4, 1, 3)$, $C = (2, 3, 4)$ y $D = (0, 1, 2)$ los vértices de un tetraedro.

- 1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

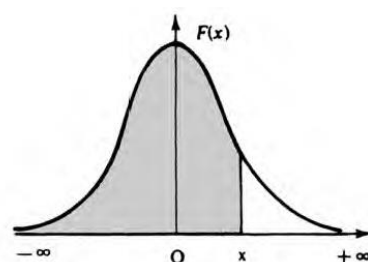
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c) = 0.35$, donde B^c denota el suceso contrario de B .

- 1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.
- 3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cap B^c)$.
- 4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

El rango de A es 4, 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de la matriz A. Utilizamos el desarrollo por la cuarta columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2a^2 + 1 + 0 + 2 - 0 - a) + 3(-a + 0 - 2 - 0 - 1 - 0) =$$

$$= 2(-2a^2 + 3 - a) + 3(-a - 3) = -4a^2 + 6 - 2a - 3a - 9 = -4a^2 - 5a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4a^2 - 5a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-4)(-3)}}{2(-4)} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{-8} = \text{No existe}$$

Como el determinante de la matriz A no se anula nunca el rango de A es 4 para cualquier valor del parámetro a .

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 10x^2 + 25x, & \text{si } x \leq 5 \\ \ln(x^2 - 25), & \text{si } x > 5 \end{cases}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
 2) [1,25 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

1) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Y la función no es continua en $x = 5$.

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = 5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x^3 - 10x^2 + 25x = 5^3 - 10 \cdot 5^2 + 25 \cdot 5 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x^2 - 25) = \ln(5^2 - 25) = \ln 0 = -\infty$$

$x = 5$ es asíntota vertical cuando x tiende a 5 por la derecha.

Asíntota horizontal. $y = b$.

Calculamos el límite de la función en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 25) = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 10x^2 + 25x = -\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 25)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 25}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{25}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 25x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 10x + 25 = +\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = 5$ y no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

- 2) En el intervalo $(-\infty, 5)$ la función es $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 - 20x + 25$ y la derivada segunda es $f''(x) = 6x - 20$. Averiguamos cuando se anula esta segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{6} = 3.33... \in (-\infty, 5)$$

La derivada segunda es negativa en $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ y la función es cóncava ($\cap$).

$$0 \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right) \Rightarrow f''(0) = 6 \cdot 0 - 20 = -20 < 0$$

La derivada segunda es positiva en $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$ y la función es convexa ($\cup$).

$$4 \in \left(\frac{10}{3}, 5\right) \Rightarrow f''(4) = 6 \cdot 4 - 20 = 4 > 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{10}{3} \in (-\infty, 5)$.

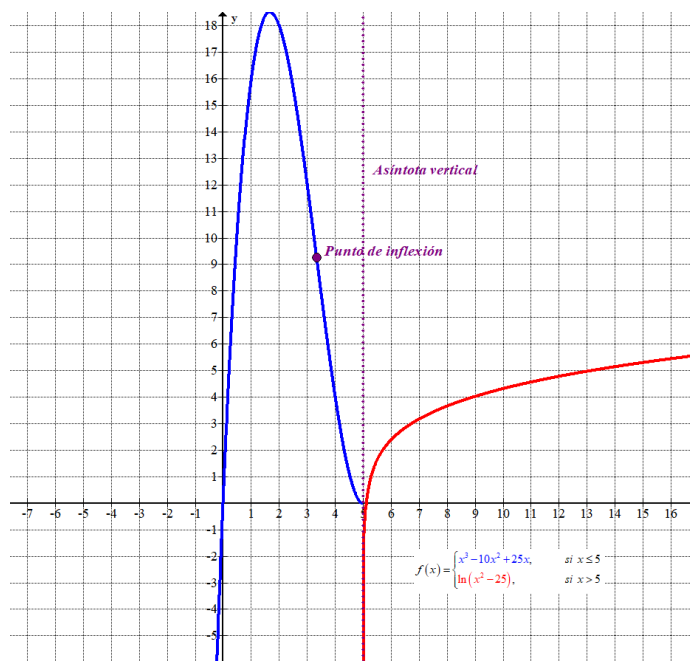
En el intervalo $(5, +\infty)$ la función es $f(x) = \ln(x^2 - 25)$. Su derivada es $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 25}$.

Su derivada segunda es:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 25) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 25)^2} = \frac{2x^2 - 50 - 4x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-50 - 2x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-2(25 + x^2)}{(x^2 - 25)^2}.$$

Esta segunda derivada siempre es negativa y la función siempre es cóncava ($\cap$), por lo que la función no tiene puntos de inflexión en el intervalo $(5, +\infty)$.

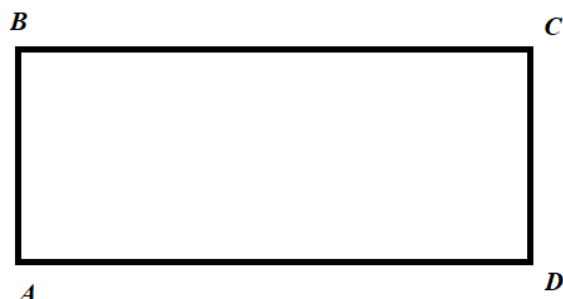
Como en el intervalo $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$ la función es convexa ($\cup$), podemos decir que en $x = 5$ también hay un punto de inflexión (cambio de convexa a cóncava), a pesar de que la función no es continua en $x = 5$.



Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2 .
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.



- 1) Para que los puntos formen un rectángulo como el del dibujo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1) \\ \overrightarrow{DC} = (a, 4, 1) - (a, 4, 0) = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Los puntos forman un rectángulo, cuya área se calcula como el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (a, 4, 0) - (0, 0, 0) = (a, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix} = aj - 4i = (-4, a, 0)$$

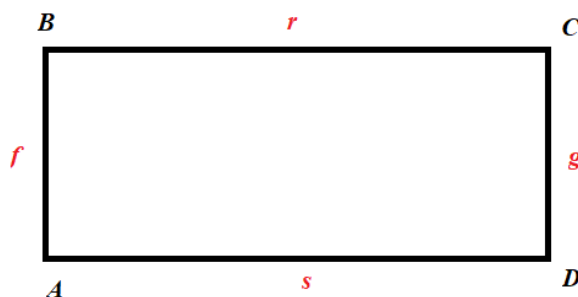
$$\text{Área } ABCD = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-4)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{16 + a^2}$$

Como queremos que el área del rectángulo valga 5 u^2 igualamos la expresión obtenida a 5 y obtenemos el valor de a que hace posible lo pedido.

$$\sqrt{16 + a^2} = 5 \Rightarrow \left(\sqrt{16 + a^2}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow 16 + a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Como $a \geq 0$ el valor de a que hace posible que el área del rectángulo valga 5 unidades cuadradas es $a = 3$.

- 2) Para $a = 3$ los vértices son $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (3, 4, 1)$ y $D = (3, 4, 0)$.



La recta r pasa por B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (3, 4, 1) - (0, 0, 1) = (3, 4, 0) \\ B = (0, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

La recta s pasa por A y D.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (3, 4, 0) - (0, 0, 0) = (3, 4, 0) \\ A = (0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

La recta f pasa por A y B.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1) \\ A = (0, 0, 0) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow f : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0; \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$$

La recta g pasa por C y D.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = (3, 4, 1) - (3, 4, 0) = (0, 0, 1) \\ D = (3, 4, 0) \in g \end{array} \right\} \Rightarrow g : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4; \varepsilon \in \mathbb{R} \\ z = \varepsilon \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

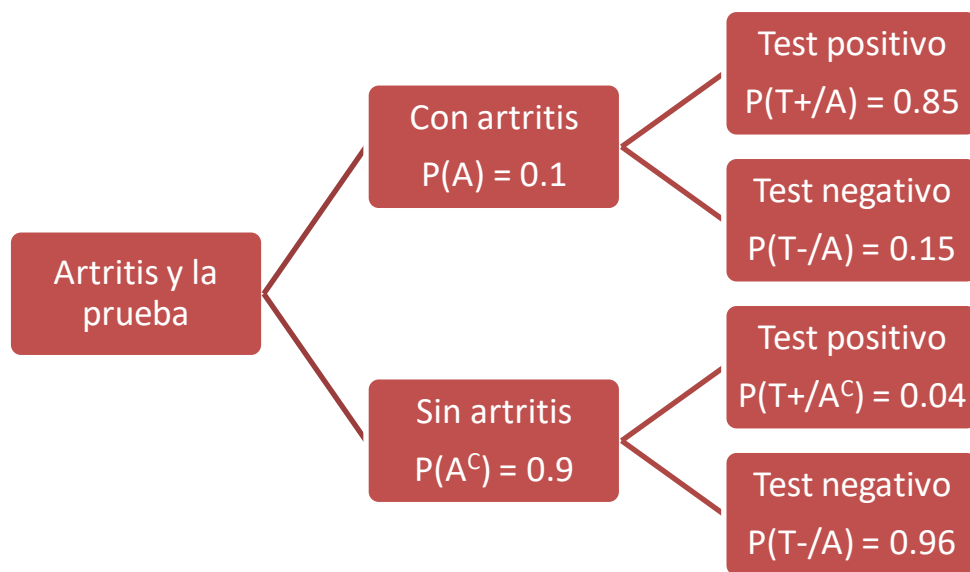
Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Llamamos A al suceso “tener ese tipo de artritis”, T+ a “dar positivo en el test” y T− a “dar negativo en el test”

Nos dicen que $P(A) = 0.10$, $P(T+/A) = 0.85$, $P(T+/\bar{A}) = 0.04$.

Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(A/T+)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(A/T+) &= \frac{P(A \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A) + P(\bar{A})P(T+/\bar{A})} = \\
 &= \frac{0.1 \cdot 0.85}{0.1 \cdot 0.85 + 0.9 \cdot 0.04} = \frac{85}{121} \approx 0.7025
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo tiene un valor de $\frac{85}{121} \approx 0.7025$.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4z = -6 \\ x - 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- 4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Estudiamos el sistema y luego respondemos a las preguntas planteadas.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 - 12 + 8 - 0 - 6\lambda + 8 = -6\lambda + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad 4 \quad -6 \\ 2 \quad -6 \quad 4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -6 \quad 8 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -2 \quad 2/3 \quad 0 \\ -1 \quad 3 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -4/3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -4/3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 6 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -6 \quad 8 \quad -8 \\ 0 \quad 6 \quad -8 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -3 \quad 2 \quad -1}^{A/B} \\ 0 \quad -6 \quad 8 \quad -8 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad -2}_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

- 1) El sistema es incompatible para $\lambda = \frac{2}{3}$.
- 2) El sistema es compatible determinado para $\lambda \neq \frac{2}{3}$.
- 3) El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor de λ .
- 4) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4z = -6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -x + 2z = -3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 3 + 2z = x \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2z - 3y + 2z = -1 \\ 3 + 2z - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z - 3y = -4 \\ 3z - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \times(2) \rightarrow 8z - 6y = -8 \\ \times(-3) \rightarrow -9z + 6y = 9 \\ \hline -z = 1 \Rightarrow \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \boxed{x = 3 + 2(-1) = 1} \Rightarrow 1 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}
 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = ax + \operatorname{sen}(x)$, en función de la constante real a , con $x \in [0, 2\pi]$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.
- 3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

1) Aplicamos la condición de que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

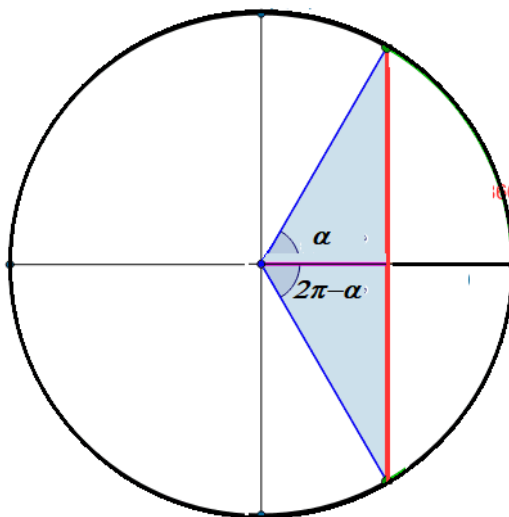
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + \operatorname{sen}(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 = \frac{a\pi}{2} + 1 \Rightarrow \frac{a\pi}{2} = -1 \Rightarrow a = \frac{-2}{\pi}$$

El valor buscado es $a = \frac{-2}{\pi}$.

2) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{-2}{\pi}x + \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{\pi} + \cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx \begin{cases} 0.88 \in [0, 2\pi] \\ 2\pi - 0.88 = 5.4 \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0, 0.88)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

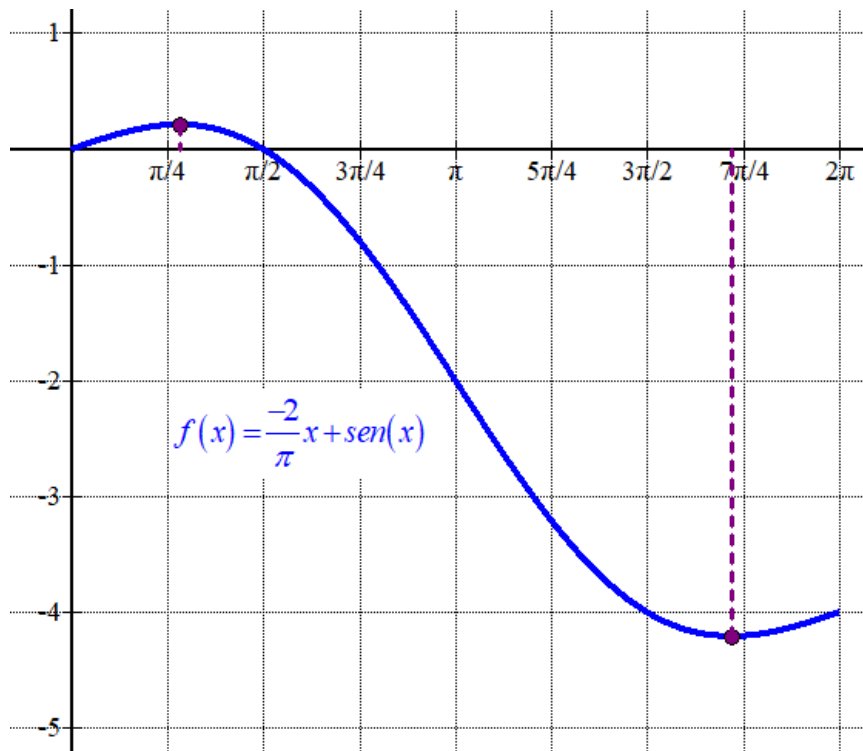
$$f'(0.5) = \frac{-2}{\pi} + \cos(0.5) \approx 0.24 > 0. \text{ La función crece en } [0, 0.88).$$

- En el intervalo $(0.88, 5.4)$ tomamos $x = \pi$ y la derivada vale

$$f'(\pi) = \frac{-2}{\pi} + \cos(\pi) = -1.63 < 0. \text{ La función decrece en } (0.88, 5.4).$$

- En el intervalo $(5.4, 2\pi]$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6) = \frac{-2}{\pi} + \cos(6) = 0.32 > 0$. La función crece en $[0, 0.88)$.

La función crece en $[0, 0.88) \cup (5.4, 2\pi]$ y decrece en $(0.88, 5.4)$.



3) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\int f(x) dx = \int ax + \sin(x) dx = a \frac{x^2}{2} - \cos(x) + C$$

Una primitiva de la función es $F(x) = a \frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 3, 2)$, $B = (4, 1, 3)$, $C = (2, 3, 4)$ y $D = (0, 1, 2)$ los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

1) El plano π determinado por los puntos A, B y C es el plano que pasa por el punto $A(0, 3, 2)$ y tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 4) - (0, 3, 2) = \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, 1, 3) - (0, 3, 2) = (4, -2, 1) \\ A(0, 3, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : (x, y, z) = (0, 3, 2) + \alpha(2, 0, 2) + \beta(4, -2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{cases} x = 2\alpha + 4\beta \\ y = 3 - 2\beta \\ z = 2 + 2\alpha + \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (Ecuaciones paramétricas)}$$

2) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

Obtenemos el valor del producto mixto.

$$\overrightarrow{AD} = (0, 1, 2) - (0, 3, 2) = (0, -2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (4, -2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (0, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 0 - 0 + 16 = 12$$

El volumen del tetraedro ABCD es de $12/6 = 2$ unidades cúbicas.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c) = 0.35$, donde B^c denota el suceso contrario de B .

- 1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.
- 3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cap B^c)$.
- 4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

- 1) X = La altura de un hombre de 17 años en centímetros. $X = N(175, 7.41)$

Nos piden calcular $P(A) = P(X > 170)$.

$$P(X > 170) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 175}{7.41} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{170 - 175}{7.41}\right) = P(Z > -0.67) = P(Z \leq 0.67) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7486}$$

Tenemos que $P(A) = 0.7486$.

- 2) Como $P(B^c) = 0.35$ entonces $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.35 = \boxed{0.65}$.

Tenemos que $P(B) = 0.65$.

- 3) El suceso altura y realizar la EBAU los suponemos independientes.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0.7486 \cdot 0.35 = \boxed{0.26201}$$

Tenemos que $P(A \cap B^c) = 0.26201$.

- 4) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$

$$= 0.65 + 0.7486 - 0.65 \cdot 0.7486 = \boxed{0.91201}$$

Tenemos que $P(A \cup B) = 0.91201$.



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2024

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

- Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.
- Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

- 1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de $f(x)$.
- 2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r: \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro

$a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

- 1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los

tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
- 2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
- 3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
- 4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x}, & \text{si } x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & \text{si } x > 10 \end{cases}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
- 3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (6, 2, -1)$, $B = (3, 0, 5)$ y $C = (-2, 1, 2)$ los vértices de un triángulo.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

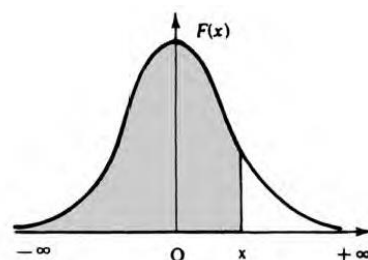
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Llamamos “ a ” a la nota de Antonio, “ m ” a la nota de María y “ p ” a la nota de Paula.

Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María $\rightarrow a = \frac{p}{2} + \frac{m}{3}$

El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula $\rightarrow 2m = a + p$.

Paula saca dos puntos más que Antonio $\rightarrow p = a + 2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{p}{2} + \frac{m}{3} \\ 2m = a + p \\ p = a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6a = 3p + 2m \\ 2m = a + p \\ p = a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6a = 3(a + 2) + 2m \\ 2m = a + a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6a = 3a + 6 + 2m \\ 2m = 2a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a = 6 + 2m \\ m = a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a = 6 + 2(a + 1) \Rightarrow 3a = 6 + 2a + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 8} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{m = 8 + 1 = 9} \\ \boxed{p = 8 + 2 = 10} \end{array} \right.$$

La nota de Antonio es 8, la de María es 9 y la de Paula es 10.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de $f(x)$.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

1) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

2) Utilizamos el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

La primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

3) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

La función no corta el eje en $(1, 2)$, por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función.

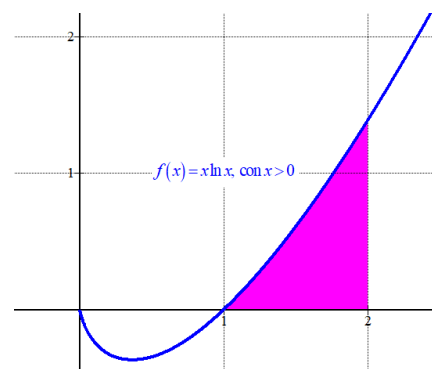
Sabemos que $f(x) = x \ln x > 0$, con $x > 1$.

$$\text{Área} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{2^2}{4} \right] - \left[\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right] =$$

$$= 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64 \text{ u}^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64$ unidades cuadradas.



Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r: \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro

$a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

- 1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

- 1) Si la recta está contenida en el plano el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo. Además, los puntos de la recta deben estar contenidos en el plano.

Hallamos el vector director de la recta y un punto de la misma y el vector normal del plano.

$$r: \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x=-2y+z \end{cases} \Rightarrow -2y+z+y+z+5=0 \Rightarrow -y+2z+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5+2z \Rightarrow x=-2(5+2z)+z=-10-4z+z=-10-3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=-10-3\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-10,5,0) \\ \vec{v}_r=(-3,2,1) \end{cases}$$

$$\pi: 2x+y-az=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,-a)$$

Aplicamos que el producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}=(2,1,-a) \\ \vec{v}_r=(-3,2,1) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2,1,-a)(-3,2,1)=0 \Rightarrow -6+2-a=0 \Rightarrow \boxed{-4=a}$$

Para $a=-4$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(-10,5,0)$ de la recta está contenido en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-10,5,0) \\ \pi: 2x+y+4z=3 \\ \text{¿} P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2(-10)+5+4 \cdot 0=3? \Rightarrow \text{¿} -20+5=3? \rightarrow \text{¡Falso!}$$

La recta es paralela al plano y no existe ningún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano.

- 2) Lo hemos calculado en el apartado anterior. Para $a=-4$ la recta es paralela al plano.

- 3) Para cualquier valor distinto de -4 la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano y por lo tanto son secantes.

Tomamos por ejemplo $a = 2 \neq -4$. El plano queda $\pi : 2x + y - 2z = 3$. Para este valor recta y plano se cortan en un punto. Hallamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus expresiones.

$$\pi : 2x + y - 2z = 3$$

$$r : \begin{cases} x = -10 - 3\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(-10 - 3\lambda) + 5 + 2\lambda - 2\lambda = 3 \Rightarrow -20 - 6\lambda + 5 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = \frac{18}{-6} = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -10 - 3 \cdot (-3) = -1 \\ y = 5 + 2 \cdot (-3) = -1 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow P(-1, -1, -3)$$

El punto de corte de la recta $r : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y - 2z = 3$ es el punto de coordenadas $P(-1, -1, -3)$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Llamamos E1, E2 y E3 a tener las enfermedades E1, E2 y E3 respectivamente y llamamos A, B y C a curarse con el tratamiento A, B y C, respectivamente.

Por los datos proporcionados en el problema sabemos que $P(E1) = 0.7$, $P(E2) = 0.2$ y $P(E3) = 0.1$.

También sabemos que $P(A/E1) = 0.6$, $P(A/E2) = 1$, $P(A/E3) = 0.4$, $P(B/E1) = 0.65$,

$P(B/E2) = 0.5$, $P(B/E3) = 0.9$, $P(C/E1) = 0.75$, $P(C/E2) = 0.2$ y $P(C/E3) = 0.5$.

Calculamos la probabilidad de ser curado con cada uno de los tratamientos usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(E1)P(A/E1) + P(E2)P(A/E2) + P(E3)P(A/E3) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0.4 = \boxed{0.66}$$

$$P(B) = P(E1)P(B/E1) + P(E2)P(B/E2) + P(E3)P(B/E3) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.9 = \boxed{0.645}$$

$$P(C) = P(E1)P(C/E1) + P(E2)P(C/E2) + P(E3)P(C/E3) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = \boxed{0.615}$$

La probabilidad más alta es la de $P(A) = 0.66$. El tratamiento más eficaz en la cura sin saber que enfermedad padece es el tratamiento A.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
- 2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
- 3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
- 4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

$$1) |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 2 - 0 - 0 = -1$$

2) El determinante de A tiene un valor distinto de cero, por lo cual tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3) La matriz A tiene dimensiones 3×3 , si la matriz X es de dimensiones $m \times n$ para que sea posible el producto AX el número columnas de A debe ser igual al número de filas de X $\rightarrow m = 3$.
El resultado del producto es una matriz de dimensiones $3 \times n$ que debe ser igual a B que es de dimensiones 3×2 , por lo que debe ser $n = 2$.

$$A \cdot X = B$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 3 \times n = 3 \times 2$$

- 4) Despejamos X de la ecuación: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-2 & 0-5+5 \\ 0+2-2 & 0-10+5 \\ -9-1+0 & 6+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x}, & \text{si } x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & \text{si } x > 10 \end{cases}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
- 3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

- 1) En el intervalo $(-\infty, 10]$ la función es $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$. Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

La función no existe para $x = -1$ ni para $x = 0$.

En el intervalo $(10, +\infty)$ la función es $f(x) = \sqrt{x+1}$ que existe para los valores del intervalo.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

- 2) En el intervalo $(-\infty, 10)$ la función es $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$. La función es continua salvo para $x = -1$ y $x = 0$ pues la función no existe.

En el intervalo $(10, +\infty)$ la función es $f(x) = \sqrt{x+1}$ que es continua para los valores del intervalo.

Estudiamos la continuidad en $x = 10$.

$$\left. \begin{aligned} f(10) &= \frac{10+1}{10^2+10} = 0.1 \\ \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{x+1}{x^2+x} = 0.1 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{10+1} = \sqrt{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(10) = \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 0.1 \neq \sqrt{11} = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x)$$

Al no ser iguales los límites laterales la función no es continua en $x = 10$.

La función es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 10) \cup (10, +\infty)$.

3) Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{x(\cancel{x+1})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$x = -1$ no es asíntota vertical.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

En $+\infty$ calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

En $-\infty$ calculamos el límite:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x+1}}{x(\cancel{x+1})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene la recta $y = 0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Como en $-\infty$ existe una asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

Estudiamos solo cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

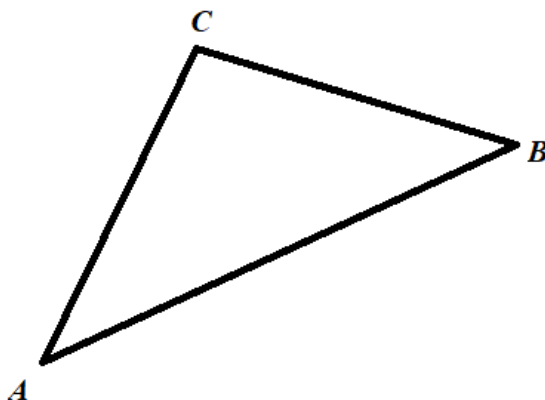
Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = 0$, una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$: $y = 0$, y no tiene asíntota oblicua.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (6, 2, -1)$, $B = (3, 0, 5)$ y $C = (-2, 1, 2)$ los vértices de un triángulo.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.



1) Obtenemos el ángulo interno del vértice A usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 2) - (6, 2, -1) = (-8, -1, 3) \\ \overrightarrow{AB} = (3, 0, 5) - (6, 2, -1) = (-3, -2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}|} \Rightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{(-8, -1, 3)(-3, -2, 6)}{\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{24 + 2 + 18}{\sqrt{74} \sqrt{49}} = \frac{44}{7\sqrt{74}}$$

$$A = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \cos^{-1}\left(\frac{44}{7\sqrt{74}}\right) = 43.05^\circ$$

Obtenemos el ángulo interno del vértice B usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (-2, 1, 2) - (3, 0, 5) = (-5, 1, -3) \\ \overrightarrow{BA} = (6, 2, -1) - (3, 0, 5) = (3, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BA}|} \Rightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{(-5, 1, -3)(3, 2, -6)}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-3)^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{-15 + 2 + 18}{\sqrt{35} \sqrt{49}} = \frac{5}{7\sqrt{35}}$$

$$B = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{35}}\right) = 83.06^\circ$$

El ángulo interno del vértice C lo obtenemos restando a 180° los dos ángulos obtenidos.

$$C = 180^\circ - 43.05^\circ - 83.06^\circ = 53.89^\circ$$

Los ángulos internos del triángulo son $A = 43.05^\circ$, $B = 83.06^\circ$ y $C = 53.89^\circ$.

2) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$.

Obtenemos el producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 2) - (6, 2, -1) = (-8, -1, 3) \\ \overrightarrow{AB} = (3, 0, 5) - (6, 2, -1) = (-3, -2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -6i - 9j + 16k - 3k + 48j + 6i = 39j + 13k = (0, 39, 13)$$

Calculamos el valor del área.

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 39^2 + 13^2}}{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{10}}{2} \approx 20.55 \text{ u}^2}$$

El área del triángulo ABC tiene un valor de $\frac{13\sqrt{10}}{2} \approx 20.55$ unidades cuadradas.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

X = La altura de una mujer de 18 años en centímetros. $X = N(175, 7.41)$
 Llamamos L al suceso “Llamarse Lucía”

- 1) Nos piden calcular $P((X > 180) \cap L)$. Los sucesos “medir más de 180 cm” y “Llamarse Lucía” son independientes.
 Sabemos que $P(L) = 0.006$, calculamos $P(X > 180)$.

$$P(X > 180) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 175}{7.41} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{180 - 175}{7.41}\right) = P(Z > 0.67) = 1 - P(Z \leq 0.67) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7486 = 0.2514$$

Calculamos la probabilidad pedida $P((X > 180) \cap L)$.

$$P((X > 180) \cap L) = \{\text{Sucesos independientes}\} =$$

$$= P(X > 180) \cdot P(L) = 0.2514 \cdot 0.006 = 0.0015$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm es de 0.0015.

- 2) Nos piden calcular $P((X > 180) \cup L)$.

$$P((X > 180) \cup L) = P(X > 180) + P(L) - P((X > 180) \cap L) =$$

$$= 0.2514 + 0.006 - 0.0015 = 0.2559$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm es de 0.2559.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2023

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A) [0,5 PUNTOS] Calcule A^t , donde A^t denota la traspuesta de la matriz A .**B) [2 PUNTOS]** Calcule $(3B - 2C)(A^t - I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3 .**Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]**Considere la función $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.**A) [0,5 PUNTOS]** Calcule el dominio de definición de $f(x)$.**B) [0,75 PUNTOS]** Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.**C) [0,5 PUNTOS]** Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.**D) [0,75 PUNTOS]** Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.**Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]****A) [1,5 PUNTOS]** Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto $(2, -1, 0)$.Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3) , donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.**B) [1 PUNTO]** De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director $(-1, 4, 1)$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99% de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99% de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el 0,5% de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

- A)** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?
- B)** [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

- A)** [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A para los distintos valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.
- B)** [0,75 PUNTOS] Determine para que valores de $b \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.
- C)** [1 PUNTO] Sea B el conjunto formado por los $b \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $b \in B$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \sin(x)$.

- A)** [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.
- B)** [1,75 PUNTOS] Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r: \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- A)** [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.
- B)** [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- C)** [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta r .

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7,41.

- A)** [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.
- B)** [1,5 PUNTOS] ¿A partir de que altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5% de niños de 17 años más altos de dicha población?

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A) [0,5 PUNTOS] Calcule A^t , donde A^t denota la traspuesta de la matriz A .

B) [2 PUNTOS] Calcule $(3B - 2C)(A^t - I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

$$\textbf{A)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

B) Calculamos la expresión de cada factor del producto.

$$3B - 2C = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices obtenidas.

$$\begin{aligned} (3B - 2C)(A^t - I) &= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -9 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 16+1-6 & 16-1+4 \\ -8 & -18-8-3 & -18+8+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 11 & 19 \\ -8 & -29 & -8 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

A) [0,5 PUNTOS] Calcule el dominio de definición de $f(x)$.

B) [0,75 PUNTOS] Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.

C) [0,5 PUNTOS] Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.

D) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

A) El denominador se anula en $x = 2$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

B) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -3 < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-}{+} < 0$$

La derivada no cambia de signo, siempre es negativa.

La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{2\}$.

C) Punto de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x+1}{x-2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{A(-1, 0)}$$

Punto de corte de la función con el eje OY.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x+1}{x-2} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0+1}{0-2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{B\left(0, \frac{-1}{2}\right)}$$

Los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas son $A(-1, 0)$ y $B\left(0, \frac{-1}{2}\right)$.

D) Utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - (-3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{6}{(0-2)^3} = \frac{6}{-8} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale

$$f''(3) = \frac{6}{(3-2)^3} = 6 > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (2, +\infty).$$

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

- A)** [1,5 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto $(2, -1, 0)$. Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3) , donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.
- B)** [1 PUNTO] De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director $(-1, 4, 1)$.

A) Obtenemos las ecuaciones paramétricas pedidas.

$$\left. \begin{array}{l} (2, -1, 0) \in r \\ \vec{u}_r = (v_1, v_2, v_3) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + v_1\beta \\ y = -1 + v_2\beta, \beta \in \mathbb{R} \\ z = v_3\beta \end{cases}$$

B) Sustituimos en las ecuaciones anteriores los valores aportados en el apartado.

$$\left. \begin{array}{l} (2, -1, 0) \in r \\ \vec{u}_r = (-1, 4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \beta \\ y = -1 + 4\beta, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99% de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99% de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el 0,5% de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

- A)** [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?
- B)** [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

A) Si hay un 0.5 % de personas a las que se les va a pasar el test que consumen la droga entonces hay un 99.5 % que no la consumen.

La probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga es de 0.995.

B) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

Llamamos D al suceso “Consume la droga” y A al suceso “Dar positivo en consumo de droga en el test”

A los no consumidores de droga el 99 % da en el test negativo, por lo que el 1% da positivo.

Entonces tenemos que $P(A/D^c) = 0.01$.

Calculamos la probabilidad de dar positivo en el test $P(A)$ aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(D)P(A/D) + P(D^c)P(A/D^c) = 0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.01 = 0.0149$$

Nos piden el valor de $P(D/A)$.

$$P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D)P(A/D)}{P(A)} = \frac{0.005 \cdot 0.99}{0.0149} = \frac{99}{298} \approx 0.3322$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

- A)** [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A para los distintos valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.
B) [0,75 PUNTOS] Determine para que valores de $b \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.
C) [1 PUNTO] Sea B el conjunto formado por los $b \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $b \in B$.

A) Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 4 \\ |A| &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Si $b = 4$ el determinante de A es nulo y su rango no es 2, por lo que su rango es 1, pues tiene elementos no nulos.

Si $b \neq 4$ el determinante de A es no nulo y su rango es 2.

B) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo y por lo visto en el apartado anterior eso ocurre cuando $b \neq 4$.

C) Calculamos la inversa de la matriz A cuando $b \neq 4$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}}{b - 4} = \frac{1}{b - 4} \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{b-4} & \frac{-2}{b-4} \\ \frac{-2}{b-4} & \frac{1}{b-4} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \sin(x)$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

B) [1,75 PUNTOS] Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{A)} \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$$

Una primitiva puede ser con $k = 0 \rightarrow F(x) = -\cos(x)$

B) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow \{x \in [0, 2\pi]\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

El recinto lo dividimos en dos partes: una entre $x = 0$ y $x = \pi$, la otra entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.
Calculamos el área de cada una de las partes y luego las sumamos.

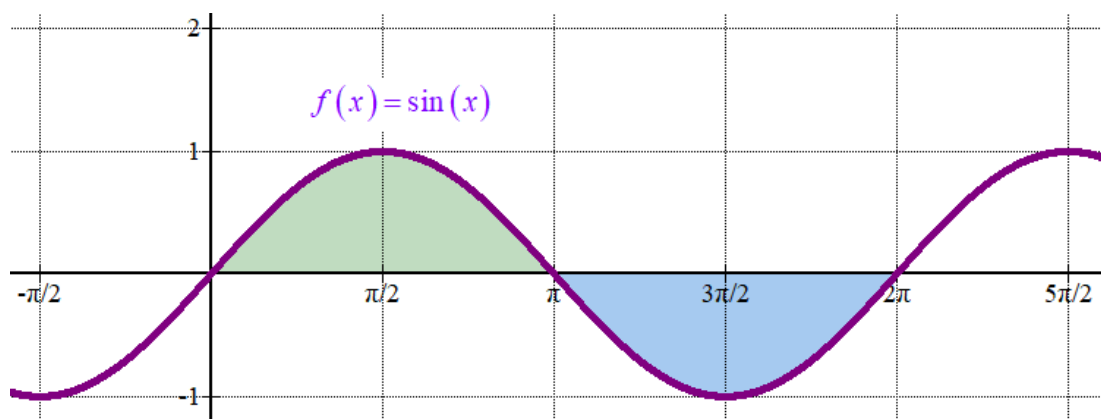
$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Área 1} = 2 \text{ u}^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -1 - 1 = -2$$

$$\boxed{\text{Área 2} = 2 \text{ u}^2}$$

El área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$ tiene un valor de $2 + 2 = 4$ unidades cuadradas.



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r: \begin{cases} 3x-5=y \\ z=0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 6x-2y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

- A)** [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.
B) [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
C) [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta r .

A) Obtenemos de cada una de las rectas un punto y un vector director.

$$r: \begin{cases} 3x-5=y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-5+3x \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+3\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 3, 0) \\ P_r(0, -5, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 6x-2y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} -2y=1-6x \rightarrow y=-\frac{1}{2}+3x \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=\alpha \\ y=-\frac{1}{2}+3\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 3, 0) \\ Q_s\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Tienen el mismo vector director $\vec{u}_r = \vec{v}_s = (1, 3, 0)$, por lo que las rectas son coincidentes o paralelas.

Comprobamos si un punto de la recta r pertenece a la recta s . De cumplirse las rectas son coincidentes, en caso contrario serán paralelas.

$$\left. \begin{matrix} \exists P_r(0, -5, 0) \in s? \\ s: \begin{cases} 6x-2y=1 \\ z=0 \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists s: \begin{cases} 6 \cdot 0 - 2(-5) = 1? \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists s: \begin{cases} 10 = 1? \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como no se cumple las rectas r y s son paralelas.

B) El plano que contiene a ambas rectas tiene como uno de sus vectores directores $\vec{u}_r = \vec{v}_s = (1, 3, 0)$ y el otro vector director el vector que une un punto de r con un punto de s $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, -5, 0) \\ Q_s\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) - (0, -5, 0) = \left(0, \frac{9}{2}, 0\right)$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

$$\left. \begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q_s} = \left(0, \frac{9}{2}, 0\right) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 3, 0) \\ (0, -5, 0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y+5 & z \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4.5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: z=0}$$

Es lógico pues este plano está en la definición de la recta r , por lo que la recta r está contenida en el plano $z = 0$ y lo mismo ocurre con la recta s .

El plano que contiene a ambas rectas es el plano $z = 0$.

- C) El plano ortogonal a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{u}_r = (1, 3, 0)$ y como no indica el punto por el que debe pasar habrían infinitos planos cumpliendo lo pedido. Para obtener uno de esos planos tomamos $P_r(0, -5, 0) \in r$.

$$\pi : \left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (1, 3, 0) \\ P_r(0, -5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 3y + D = 0 \\ P_r(0, -5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 15 + D = 0 \Rightarrow D = 15 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 3y - 15 = 0}$$

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7,41.

A) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

B) [1,5 PUNTOS] ¿A partir de que altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5% de niños de 17 años más altos de dicha población?

Sea X = Altura de un niño de 17 años en centímetros. $X = N(175, 7.41)$

A) Nos pide calcular $P(170 \leq X \leq 180)$.

$$\begin{aligned}
 P(170 \leq X \leq 180) &= P(X \leq 180) - P(X \leq 170) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(Z \leq \frac{180-175}{7.41}\right) - P\left(Z \leq \frac{170-175}{7.41}\right) = P(Z \leq 0.675) - P(Z \leq -0.675) = \\
 &= P(Z \leq 0.675) - P(Z \geq 0.675) = P(Z \leq 0.675) - [1 - P(Z \leq 0.675)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \frac{0.7486 + 0.7517}{2} - \left[1 - \frac{0.7486 + 0.7517}{2} \right] \approx \boxed{0.5}
 \end{aligned}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823
0.8	.7891	.7910	.7930	.7950	.7969	.7988	.8008	.8027	.8046

B) Nos piden hallar el valor de “a” tal que $P(X \geq a) = 0.05$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq a) &= 0.05 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-170}{7.41}\right) = 0.05 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-170}{7.41}\right) = 0.05 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-170}{7.41}\right) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-170}{7.41} = 1.645 \Rightarrow a = 1.645 \cdot 7.41 + 170 \approx \boxed{187.19 \text{ cm}}
 \end{aligned}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2023
MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = a \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.
- 2) [1,25 PUNTOS] Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- 3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (4, 1, 2)$ y $C = (3, 4, 3)$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En cierta región, el 72% de las mujeres vive al menos 71 años y el 52% vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a .
- 2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a .
- 3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- 4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^3 + 1$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi_2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2 :

- 1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b .
- 2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b .
- 3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b .

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.
- 3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.
- 4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = a \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.

2) [1,25 PUNTOS] Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de A . Para ello, primero averiguamos el valor de su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 1 - 1 + 6 - 2 = 5 \neq 0$$

El determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

Por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado para cualquier valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

No existe ningún valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el que el sistema es incompatible.

2) Para $a = 4$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ -x + y - 2z = -3 \\ x - y + z = 4 \\ \hline -z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ -z = 1 \rightarrow \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 1 = -1 \\ x - y - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 5 \rightarrow x = 5 + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5 + y) + 3y = 0 \Rightarrow 10 + 2y + 3y = 0 \Rightarrow 5y = -10 \Rightarrow \boxed{y = -2} \Rightarrow \boxed{x = 5 - 2 = 3}$$

La solución es $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- 3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

1) El denominador se anula en $x = 0$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

La función es discontinua en $x = 0$.

2) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = x - 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores (incluimos $x = 0$).

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 1 - \frac{2}{(-2)^2} = \frac{1}{2} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -\sqrt{2})$.

- En el intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 1 - \frac{2}{(-1)^2} = -1 < 0$.

La función decrece en $(-\sqrt{2}, 0)$.

- En el intervalo $(0, \sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1 - \frac{2}{1^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(0, \sqrt{2})$.

- En el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 1 - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} > 0$. La función crece en $(\sqrt{2}, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

3) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 2}{x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{2}{x} = +\infty - 1 + \frac{2}{\infty} = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 - 0 + 0 = 1$$

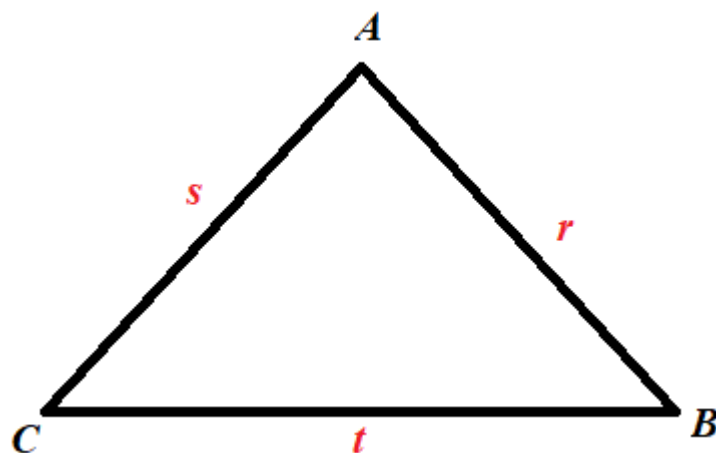
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - 1 + \frac{2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2}{x} \right) = -1 + \frac{2}{\infty} = -1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 1$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical $x = 0$ y una asíntota oblicua $y = x - 1$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (4, 1, 2)$ y $C = (3, 4, 3)$.



Recta que pasa por A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A = (0, 0, 1) \\ B = (4, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (4, 1, 2) - (0, 0, 1) = (4, 1, 1) \\ B = (4, 1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Recta que pasa por A y C.

$$\left. \begin{array}{l} A = (0, 0, 1) \\ C = (3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (0, 0, 1) = (3, 4, 2) \\ A = (0, 0, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Recta que pasa por B y C.

$$\left. \begin{array}{l} C = (3, 4, 3) \\ B = (4, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \overrightarrow{BC} = (3, 4, 3) - (4, 1, 2) = (-1, 3, 1) \\ B = (4, 1, 2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 4 - \beta \\ y = 1 + 3\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En cierta región, el 72% de las mujeres vive al menos 71 años y el 52% vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Llamamos A al suceso “Una mujer vive al menos 71 años” y B al suceso “Una mujer vive al menos 80 años”.

Nos piden calcular $P(B/A)$.

Como sabemos que el suceso intersección de A y B es:

$$A \cap B = \{\text{Vive al menos 71 y vive al menos 80 años}\} = \{\text{Vive al menos 80 años}\} = B$$

Aplicamos el teorema de Bayes y tenemos:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.52}{0.72} = \boxed{\frac{13}{18} \approx 0.7223}$$

OTRA FORMA DE RAZONARLO.

Supongamos que hay 100 mujeres. De ellas hay 72 que viven al menos 71 años y $100 - 72 = 28$ que viven menos de 71 años. De las 72 que viven al menos 71 años hay 52 que viven al menos 80 años. Si hemos elegido una de las 72 que viven al menos 71 años la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años es el cociente entre 52 (casos favorables) y 72 (casos posibles).

$$P(\text{Una mujer de 71 años viva al menos 80 años}) = \frac{52}{72} = \boxed{\frac{13}{18} \approx 0.7223}$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a .
- 2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a .
- 3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- 4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

1) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 2a - 0 - 2 - 3 = \boxed{2a - 11}$$

2) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.

Para que el rango sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$\left. \begin{array}{l} |A| = 2a - 11 \\ |A| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - 11 = 0 \Rightarrow 2a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{2}$$

Si $a \neq \frac{11}{2}$ el determinante es no nulo y el rango de A es 3.

Si $a = \frac{11}{2}$ el determinante es nulo y su rango no es 3.

Su rango puede ser 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la tercera fila y la tercera columna y comprobamos el valor nulo o no de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

El determinante del menor es no nulo y el rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{11}{2}$ el rango de A es 3. Si $a = \frac{11}{2}$ el rango es 2.

3) La matriz A tiene inversa para $a \neq \frac{11}{2}$. Visto en el apartado 2) que el determinante se anula para $a = \frac{11}{2}$.

4) Calculamos la inversa para los valores $a \neq \frac{11}{2}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a - 11$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 3 & -1 \end{pmatrix}}{2a - 11} = \frac{1}{2a - 11} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2a - 11} \begin{pmatrix} -3 & a - 1 & -3 \\ 8 & -1 - 2a & -3 + 2a \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^3 + 1$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

$$1) F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 + 1 dx = \frac{x^4}{4} + x + K$$

Una primitiva puede ser con $k = 0 \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + x$

2) Utilizamos la segunda derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

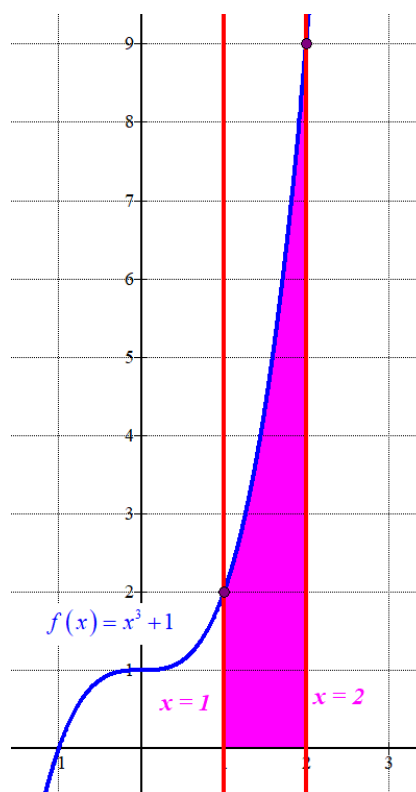
3) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \notin (1, 2)$$

El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x^3 + 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} + 2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} + 1 \right] = 4 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{19}{4} = 4.75 \text{ u}^2}$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi_2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2 :

- 1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b .
- 2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b .
- 3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b .

1) Para que sean coincidentes los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = a \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -3, 5) \\ \pi_2 : bx + 3y - 5z = 4 \Rightarrow \vec{n}_2 = (b, 3, -5) \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Además, un punto cualquiera de uno de los planos debe de pertenecer al otro.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 : -2x + 3y - 5z = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P(-2, 0, 0) \in \pi_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = a \\ P(-2, 0, 0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 - 0 + 0 = a \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Si $a = -4$; $b = -2$ los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = -4$; $\pi_2 : -2x + 3y - 5z = 4$ son coincidentes.

2) Para que sean paralelos los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales. Visto en el apartado 1) $\rightarrow b = -2$.

Pero los puntos de un plano no pueden pertenecer al otro $\rightarrow a \neq -4$.

Si $a \neq -4$; $b = -2$ los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = a$; $\pi_2 : -2x + 3y - 5z = 4$ son paralelos.

3) Para que sean secantes los vectores normales no deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = a \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -3, 5) \\ \pi_2 : bx + 3y - 5z = 4 \Rightarrow \vec{n}_2 = (b, 3, -5) \\ \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ secantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{b} \neq \frac{-3}{3} = \frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b} \neq -1 \Rightarrow \boxed{b \neq -2}$$

Si $b \neq -2$ y siendo " a " cualquier valor los planos son secantes.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.
- 3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.
- 4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Si A y B son dos sucesos independientes entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$.

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = \boxed{0,625}$$

$$2) P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = \boxed{0,5}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = \boxed{0,75}$$

3) Para que A^c y B^c sean dos sucesos independientes debe ser $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,625 = 0,375$$

$$P(A^c)P(B^c) = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375$$

$$\boxed{P(A^c \cap B^c) = 0,375 = P(A^c)P(B^c)}$$

Los sucesos A^c y B^c son independientes.

$$4) P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,125 = \boxed{0,875}$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2022

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
4. Todas las respuestas deben ser razonadas. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$$

- A. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.
- B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$

- A. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de $f(x)$.
- B. [0,5 PUNTOS] Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.
- C. [0,5 PUNTOS] Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.
- D. [1 PUNTO] Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi = 2x - y + z = 1$.

- A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta r .
- B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

- A.** [1,25 PUNTOS] Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $T = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.
- B.** [1,25 PUNTOS] Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- A.** [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y compruebe que es regular.
- B.** [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2 .
- C.** [1 PUNTO] Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.
- D.** [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz X de orden 2×2 , que verifica $A^2X + B = C$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

- A.** [1 PUNTO] Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- B.** [0,5 PUNTOS] Halle una primitiva de $f(x)$.
- C.** [0,5 PUNTOS] Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = e$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$.

- A.** [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.
- B.** [1,5 PUNTOS] Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.

Se selecciona una persona al azar de dicha población:

- A.** [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de la persona esté enferma.
- B.** [1,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$$

A. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Estudiamos la compatibilidad del sistema y luego respondemos a los apartados.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 1 + 1 + t - 1 - t = -t^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $t \neq -1$ y $t \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $t = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente y establecer más fácilmente la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 (la 3ª fila es nula) al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $t = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente y establecer más fácilmente la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -3 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 (la 3ª fila es nula), pero el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Las respuestas son:

A. Para $t \neq -1$ y $t \neq 1$ el sistema tiene solución única.

B. Para $t = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el estudio previo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 + x - y \\ 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y + 2(4 + x - y) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 8 + 2x - 2y = 5 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \Rightarrow z = 4 - \frac{3}{2} - y \Rightarrow \boxed{z = \frac{5}{2} - y}$$

La solución es $x = -\frac{3}{2}$, $y = t$, $z = \frac{5}{2} - t$, $t \in \mathbb{R}$

C. Para $t = 1$ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$

- A. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de $f(x)$.
 B. [0,5 PUNTOS] Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 C. [0,5 PUNTOS] Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.
 D. [1 PUNTO] Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{e^x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x x - 1 \cdot e^x}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

B. La pendiente es el valor de la derivada en dicho punto.

$$\text{Pendiente} = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

C. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

D. Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = e^{+\infty} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{-x}} = \frac{1}{(-\infty)e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Cuando x tiende a $-\infty$ la asíntota horizontal es $y = 0$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi = 2x - y + z = 1$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta r .

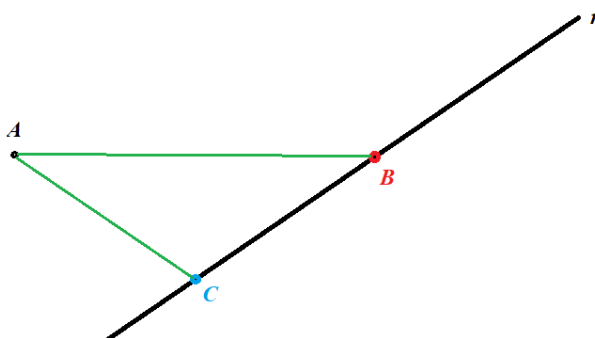
B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

A. Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi = 2x - y + z = 1$.

Si la recta es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi = 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ B(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

B. El punto C pertenece a la recta r , por lo que sus coordenadas son $C(1+2t, 1-t, 1+t)$



El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, -1, 1) = (1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1+2t, 1-t, 1+t) - (0, -1, 1) = C(1+2t, 2-t, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2t & 2-t & t \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2ti + (2-t)k + (-2-4t)k - tj = 2ti - tj - 5tk = (2t, -t, -5t)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + (-5t)^2} = \sqrt{4t^2 + t^2 + 25t^2} = \sqrt{30t^2} = |t|\sqrt{30}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|t|\sqrt{30}}{2}$$

Como debe ser igual $3\sqrt{30}$ tenemos que $\frac{|t|\sqrt{30}}{2} = 3\sqrt{30}$.

$$\text{Área } ABC = \frac{|t|\sqrt{30}}{2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow |t| = 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow C(1+12, 1-6, 1+6) \Rightarrow \boxed{C(13, -5, 7)} \\ t = -6 \Rightarrow C'(1-12, 1+6, 1-6) \Rightarrow \boxed{C'(-11, 7, -5)} \end{cases}$$

La situación planteada tiene dos soluciones: $C(13, -5, 7)$ y $C'(-11, 7, -5)$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $T = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

X = El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid (en minutos). $X = N(60, 5)$

A. Nos piden la probabilidad de que tarde más de 70 minutos.

$$P(X \geq 70) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{70-60}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

B. Nos piden el valor de T para el que $P(X \geq T) = 0.001$.

$$P(X \geq T) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{T-60}{5}\right) = \left\{\frac{T-60}{5} > 0\right\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{T-60}{5}\right) = 0.001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{T-60}{5}\right) = 0.999 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T-60}{5} = 3.1 \Rightarrow \boxed{T = 60 + 15.5 = 75.5 \text{ minutos}}$$

El tiempo debe ser de 75 minutos y 30 segundos.

x	0.00	0.0
0.0	.5000	.504
0.1	.5398	.543
0.2	.5793	.583
0.3	.6179	.621
0.4	.6554	.659
0.5	.6915	.695
0.6	.7257	.729
0.7	.7580	.761
0.8	.7881	.791
0.9	.8159	.818
1.0	.8413	.843
1.1	.8643	.866
1.2	.8849	.886
1.3	.9032	.904
1.4	.9192	.920
1.5	.9332	.934
1.6	.9452	.946
1.7	.9554	.956
1.8	.9641	.964
1.9	.9713	.971
2.0	.9772	.977
2.1	.9821	.982

x	0.00	0.
0.0	.5000	.50
0.1	.5398	.54
0.2	.5793	.58
0.3	.6179	.62
0.4	.6554	.65
0.5	.6915	.69
0.6	.7257	.72
0.7	.7580	.76
0.8	.7881	.79
0.9	.8159	.81
1.0	.8413	.84
1.1	.8643	.86
1.2	.8849	.88
1.3	.9032	.90
1.4	.9192	.92
1.5	.9332	.93
1.6	.9452	.94
1.7	.9554	.95
1.8	.9641	.96
1.9	.9713	.97
2.0	.9772	.97
2.1	.9821	.98
2.2	.9861	.98
2.3	.9893	.98
2.4	.9918	.99
2.5	.9938	.99
2.6	.9953	.99
2.7	.9965	.99
2.8	.9974	.99
2.9	.9981	.99
3.0	.9987	.99
3.1	.9990	.99
3.2	.9993	.99
3.3	.9995	.99

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y compruebe que es regular.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2 .

C. [1 PUNTO] Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

D. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz X de orden 2×2 , que verifica $A^2X + B = C$.

A. Calculamos la expresión de A^2 y calculamos su determinante.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

La matriz A^2 es regular pues su determinante es no nulo.

B. Calculamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^2)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y su matriz inversa.

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^2)^T)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

C. Sabemos que la matriz A^2 es regular. Despejamos X usando la matriz inversa de A^2 .

$$A^2X + B = C \Rightarrow A^2X = C - B \Rightarrow X = (A^2)^{-1}(C - B)$$

D. Sustituimos los valores de las matrices y calculamos X .

$$X = (A^2)^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

B. [0,5 PUNTOS] Halle una primitiva de $f(x)$.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = e$ y el eje OX de abscisas.

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

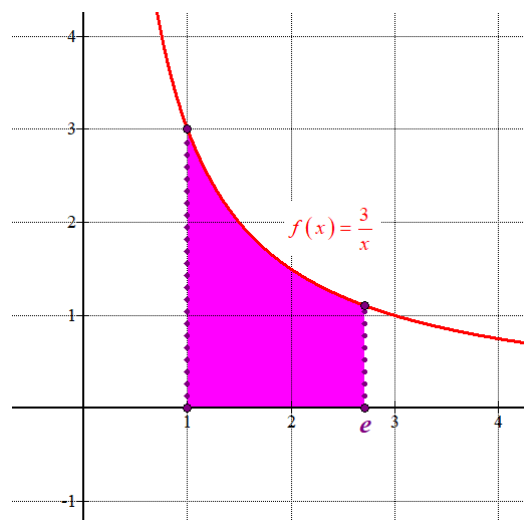
B. Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = \boxed{3 \ln|x| + K}$$

C. En el intervalo $[1, e]$ la función es positiva y no corta el eje de abscisas.

El área pedida es la integral definida de la función entre 1 y e .

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{3}{x} dx = \left[3 \ln|x| \right]_1^e = 3 \ln e - 3 \ln 1 = \boxed{3u^2}$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

A. [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.

B. [1,5 PUNTOS] Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

A. Obtenemos un punto y un vector de la recta.

$$r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1, -3, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Para que recta y plano sean paralelos o la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \pi: x-2y-z=-1 &\Rightarrow \vec{n} = (1, -2, -1) \\ \vec{v}_r &= (-1, 2, 1) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1, -2, -1)(-1, 2, 1) = -1 - 4 - 1 = -6 \neq 0$$

Como el producto escalar es no nulo la recta y el plano se cortan en un punto.

B. Hallamos el punto P de corte de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r: \begin{cases} P_r(-1, -3, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow -1 - \lambda - 2(-3 + 2\lambda) - \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 - \lambda + 6 - 4\lambda - \lambda = -1 \Rightarrow -6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 1 = -2 \\ y = -3 + 2 = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-2, -1, 1)}$$

Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} &= (1, -2, -1) \\ \vec{v}_r &= (-1, 2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, -2, -1)(-1, 2, 1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-1 - 4 - 1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

Por lo que el ángulo entre recta y plano es $90 - 0 = 90^\circ$. Son perpendiculares.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.

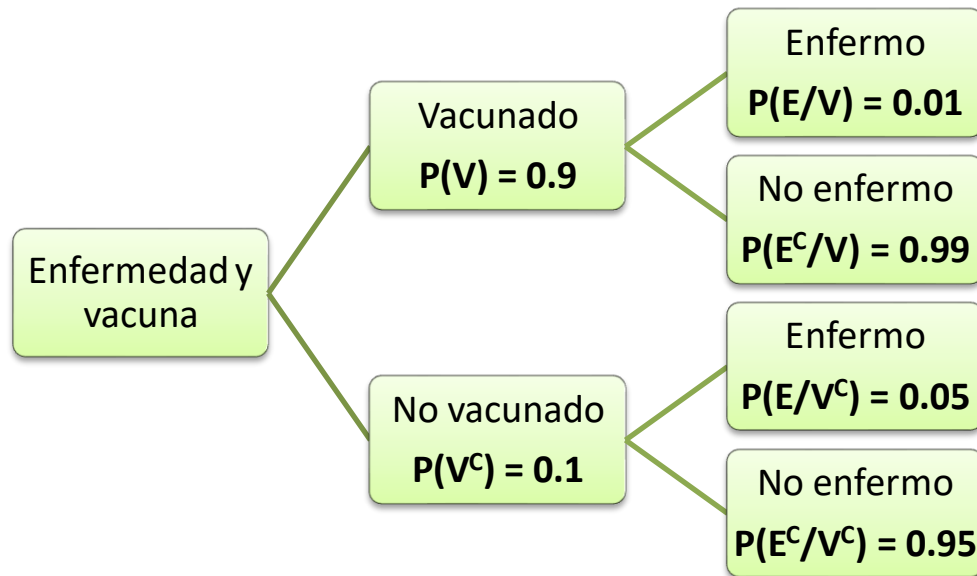
Se selecciona una persona al azar de dicha población:

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de la persona esté enferma.

B. [1,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Ponemos los datos en un diagrama de árbol.

Llamamos E al suceso “Estar enfermo de la enfermedad E” y V al suceso “Estar vacunado”.



A. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(E) = P(V)P(E/V) + P(V^c)P(E/V^c) = 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.014}$$

B. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/E) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)} = \frac{P(V)P(E/V)}{P(E)} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.014} = \boxed{\frac{9}{14} \approx 0.643}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

LOMCE – JUNIO 2022

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
4. Todas las respuestas deben ser razonadas. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$$

- A. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.
- B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- C. [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.

- A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.
- B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -4, 1)$, $C = (1, -4, 5)$.

- A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.
- B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma.

Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.

C. [0,75 PUNTOS] Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

D. [0,75 PUNTOS] Calcule X.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de $f(x)$.

C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de $f(x)$.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se

encuentra en la recta $r = \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

B. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$$

- A. [1 PUNTO]** Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.
- B. [1 PUNTO]** Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- C. [0,5 PUNTOS]** Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

A. Averiguamos cuando la matriz de coeficientes no se anula.

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t - t - 2 + 2 - 1 + t^2 = t^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Cuando $t \neq -1$ y $t \neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene solución única.

Para $t = 0$ estamos en un sistema con solución única.

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = -1 \\ x + 2z + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2z \\ x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 - 2z + 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -1 - 2 = -3} \\ \boxed{y = 2} \end{cases}$$

La solución es $x = -3, y = 2, z = 1$.

B. Para $t = -1$ tenemos que el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para triangular la matriz y averiguar el rango de A y de A/B .

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad 1 \quad -2 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema tiene infinitas soluciones.

Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 2y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ \boxed{z = 1 + 2y} \end{cases} \Rightarrow -x + y - 2(1 + 2y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + y - 2 - 4y = 0 \Rightarrow -x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2 - 3y}$$

$$\boxed{\text{Solución: } \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$$

C. Para $t = 1$ tenemos que el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos Gauss para averiguar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, por lo que el sistema no tiene solución.

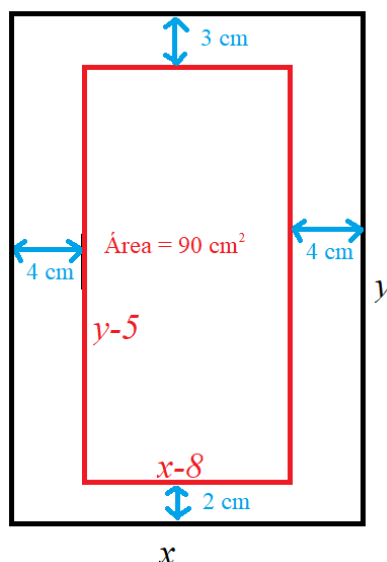
Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.

A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.

B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

A. Llamamos “x” e “y” al largo y al ancho del cartel.



B. Hemos llamado “x” a la anchura e “y” a la altura.

La zona de texto tiene un área de 90 cm^2 y su base es $x - 8$ y la altura $y - 5$ por lo que:

$$90 = (x - 8)(y - 5) \Rightarrow y - 5 = \frac{90}{x - 8} \Rightarrow y = \frac{90}{x - 8} + 5 = \frac{90 + 5x - 40}{x - 8} = \frac{5x + 50}{x - 8}$$

Deseamos minimizar la cantidad de papel, es decir, el área total: $A(x, y) = xy$.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = \frac{5x + 50}{x - 8} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \left(\frac{5x + 50}{x - 8} \right) = \frac{5x^2 + 50x}{x - 8}$$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca del mínimo.

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{5x^2 + 50x}{x - 8} \Rightarrow A'(x) = \frac{(10x + 50)(x - 8) - 1 \cdot (5x^2 + 50x)}{(x - 8)^2} = \\ &= \frac{10x^2 - 80x + \cancel{50x} - 400 - 5x^2 - \cancel{50x}}{(x - 8)^2} = \frac{5x^2 - 80x - 400}{(x - 8)^2} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x^2 - 80x - 400}{(x - 8)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 80x - 400 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x - 80 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(-80)}}{2} = \frac{16 \pm 24}{2} = \begin{cases} \frac{16+24}{2} = 20 = x \\ \frac{16-24}{2} = -4 = x \end{cases}$$

Solo nos interesa el valor positivo $x = 20$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de $x = 20$.

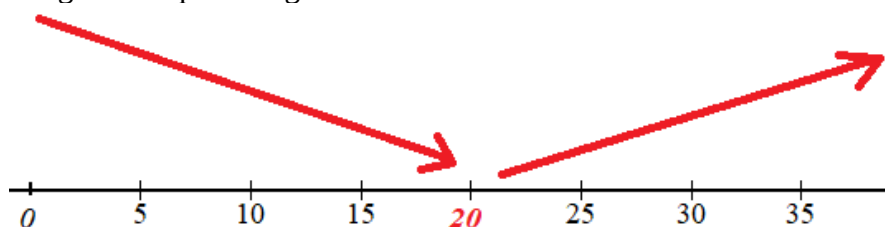
- En $(0, 20)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $A'(10) = \frac{5 \cdot 10^2 - 80 \cdot 10 - 400}{(10-8)^2} = \frac{-700}{4} < 0$.

La función decrece en $(0, 20)$.

- En $(20, +\infty)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale $A'(30) = \frac{5 \cdot 30^2 - 80 \cdot 30 - 400}{(30-8)^2} = \frac{425}{121} > 0$.

La función crece en $(20, +\infty)$.

La función área sigue el esquema siguiente:



La función tiene un mínimo en $x = 20$.

El área es mínima teniendo por anchura 20 cm y de altura $y = \frac{90}{20-8} + 5 = 12.5$ cm

El gasto en papel es mínimo con las medidas de 20×12.5 cm.

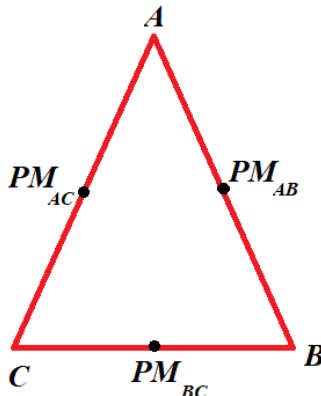
Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -4, 1)$, $C = (1, -4, 5)$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

A. Hacemos un dibujo de la situación planteada dando nombre a los puntos medios de cada segmento.



Mediana que pasa por A y PM_{BC} .

$$PM_{BC} = \frac{(3, -4, 1) + (1, -4, 5)}{2} = \frac{(4, -8, 6)}{2} = (2, -4, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} A = (-1, 2, 3) \\ PM_{BC} = (2, -4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{APM_{BC}} = (2, -4, 3) - (-1, 2, 3) = (3, -6, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_A = \frac{1}{3} \overrightarrow{APM_{BC}} = (1, -2, 0) \\ A = (-1, 2, 3) \in m_A \end{array} \right\} \Rightarrow m_A : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Mediana que pasa por B y PM_{AC} .

$$PM_{AC} = \frac{(-1, 2, 3) + (1, -4, 5)}{2} = \frac{(0, -2, 8)}{2} = (0, -1, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} B = (3, -4, 1) \\ PM_{AC} = (0, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BPM_{AC}} = (0, -1, 4) - (3, -4, 1) = (-3, 3, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_B = \frac{1}{3} \overrightarrow{BPM_{AC}} = (-1, 1, 1) \\ B = (3, -4, 1) \in m_B \end{array} \right\} \Rightarrow m_B : \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = -4 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Mediana que pasa por C y PM_{AB} .

$$PM_{AB} = \frac{(-1, 2, 3) + (3, -4, 1)}{2} = \frac{(2, -2, 4)}{2} = (1, -1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} C = (1, -4, 5) \\ PM_{AB} = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CPM_{AB}} = (1, -1, 2) - (1, -4, 5) = (0, 3, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_C = \frac{1}{3} \overrightarrow{CPM_{AB}} = (0, 1, -1) \\ C = (1, -4, 5) \in m_C \end{array} \right\} \Rightarrow m_C : \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + \beta \\ z = 5 - \beta \end{cases}$$

B. Hallamos el punto de corte de la mediana m_A con m_B .

$$\left. \begin{array}{l} m_A : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \\ m_B : \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = -4 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -1 + \lambda = 3 - \alpha \\ 2 - 2\lambda = -4 + \alpha \\ 3 = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + \lambda = -\alpha \\ 6 - 2\lambda = \alpha \\ 2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + \lambda = -2 \\ 6 - 2\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ -2\lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 - 4 = -2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1, -2, 3)}$$

Hallamos el punto de corte de la mediana m_A con m_C .

$$\left. \begin{array}{l} m_A : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \\ m_C : \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + \beta \\ z = 5 - \beta \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -1 + \lambda = 1 \\ 2 - 2\lambda = -4 + \beta \\ 3 = 5 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ -2\lambda = \beta - 6 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ -4 = 2 - 6 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 - 4 = -2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1, -2, 3)}$$

Coinciden las tres medianas en el mismo punto $P(1, -2, 3)$.

A este punto se le llama baricentro del triángulo.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma.

Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

X = Peso de un contenedor. $X = N(100, 10)$

A. Nos piden calcular $P(X \geq 120)$.

$$P(X \geq 120) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{120-100}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

B. Nos piden calcular “a” para que $P(X \geq a) = 0.01$

$$P(X \geq a) = 0.01 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-100}{10}\right) = 0.99 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos esta probabilidad} \\ \text{en la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-100}{10} = 2.33 \Rightarrow a-100 = 23.3 \Rightarrow \boxed{a = 123.3 \text{ kg}}$$

La capacidad del montacargas debería ser de 123.3 kg para que salte la alarma solo el 1 % de las veces.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.

C. [0,75 PUNTOS] Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

D. [0,75 PUNTOS] Calcule X.

A. Para que sean regulares su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

Las matrices A y B son regulares (tienen matriz inversa)

B. Utilizamos la fórmula para el cálculo de la inversa con adjuntos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

C. Despejamos X en la ecuación.

$$AXB = A^t - 3B \Rightarrow A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} (A^t - 3B) B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} (A^t - 3B) B^{-1}$$

D. Sustituimos el valor de cada matriz y realizamos las operaciones indicadas.

$$A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -1+9 \\ 3-3 & -2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (A^t - 3B) B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16-24 \\ -5 & -8+16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+8 & 30+8 \\ -10-8 & -15-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de $f(x)$.

C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de $f(x)$.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

A. Como $e = 2.71 \dots > 1$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$.

Lo aplicamos en el cálculo de los límites pedidos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = (-\infty)^2 \cdot e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

B. $f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$

C. Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ ¡Im posible!} \\ 2-x = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

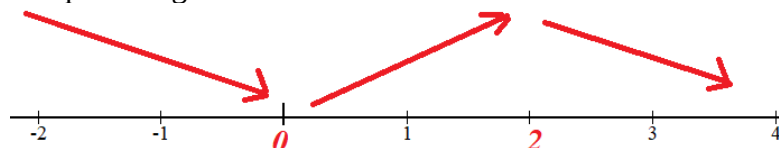
- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 2(-1)e^1 - (-1)^2 e^1 = -2e - e = -3e < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2e^{-1} - 1^2 e^{-1} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} > 0$. La función crece en $(0, 2)$

- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 6e^{-3} - 9e^{-3} = -3e^{-3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$ y $f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$ y el máximo relativo $(2, 4/e^2)$

D. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se han estudiado en el apartado anterior.

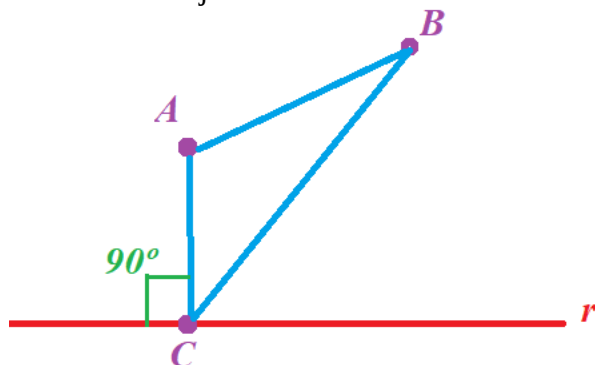
La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r = \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$

- A.** [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C , sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C .
B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC .

A. La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta r y el punto C será la intersección del plano con la recta.

$$r = \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} 3z = 33 - 4x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} z = \frac{33}{3} - \frac{4}{3}x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 11 - \frac{4}{3}t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v}_r = \left(1, 0, -\frac{4}{3}\right) \rightarrow \vec{u}_r = 3\vec{v}_r = (3, 0, -4) \\ P_r(0, 0, 11) \end{cases}$$

El plano perpendicular tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (3, 0, -4) \\ A = (2, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : 3x - 4z + D = 0 \\ A = (2, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 2 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi : 3x - 4z - 6 = 0$$

Hallamos el punto C de corte de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 3x - 4z - 6 = 0 \\ r = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 11 - \frac{4}{3}t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3t - 4\left(11 - \frac{4}{3}t\right) - 6 = 0 \Rightarrow 3t - 44 + \frac{16}{3}t - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t - 132 + 16t - 18 = 0 \Rightarrow 25t = 150 \Rightarrow t = \frac{150}{25} = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 11 - \frac{4}{3} \cdot 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(6, 0, 3)}$$

B. Calculamos las coordenadas de los vectores y luego calculamos el ángulo que forman usando el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 12, 4) - (2, 0, 0) = (-3, 12, 4) \\ \overrightarrow{AC} = (6, 0, 3) - (2, 0, 0) = (4, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} =$$

$$= \frac{(-3, 12, 4) \cdot (4, 0, 3)}{\sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{-12 + 12}{65} = 0$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

Los vectores forman 90° , son perpendiculares.

C. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 12, 4) \\ \overrightarrow{AC} = (4, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36i + 16j - 48k + 9j = (36, 25, -48)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{36^2 + 25^2 + (-48)^2}}{2} = \frac{65}{2} = \boxed{32.5u^2}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO C.

El ángulo en el vértice A es de 90° , por lo que el triángulo es rectángulo y su área es la mitad de la base (módulo del vector $\overrightarrow{AB}$) por la altura (la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AC}$).

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 12, 4) \\ \overrightarrow{AC} = (4, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}}{2}$$

$$\boxed{\text{Área } ABC = \frac{\sqrt{169} \cdot \sqrt{25}}{2} = \frac{65}{2} = 32.5u^2}$$

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

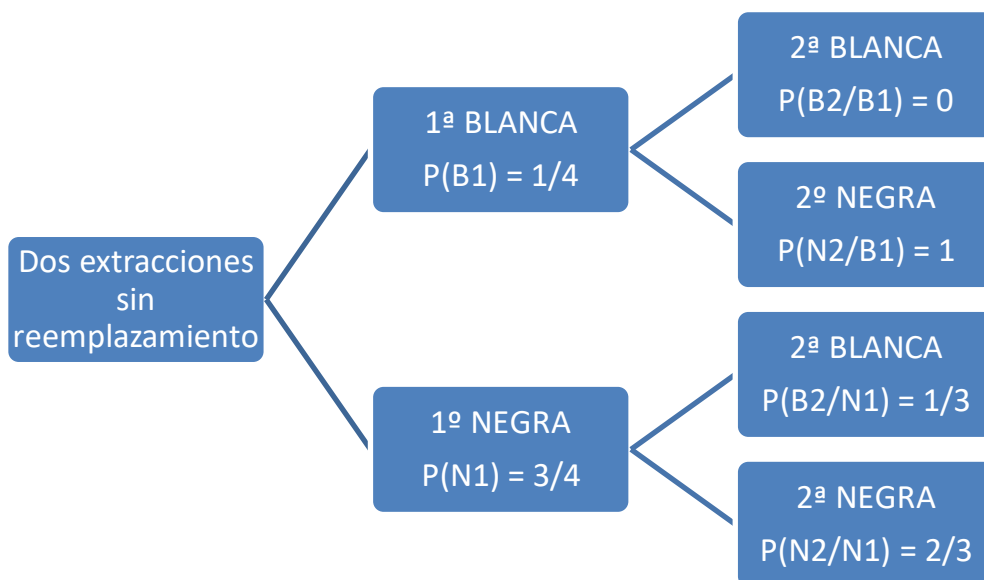
En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

B. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Hacemos un diagrama de árbol.



He llamado B1 a “Sacar bola blanca en 1ª extracción”, N1 a “Sacar bola negra en 1ª extracción”, B2 a “Sacar bola blanca en 2ª extracción” y N2 a “Sacar bola negra en 2ª extracción”.

A. Es la probabilidad de sacar blanca primero y negra después o negra primero y blanca después.

$$P(\text{Las dos bolas de distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$$

$$= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

B. Como es el suceso contrario del suceso planteado en el primer apartado tenemos que:

$$P(\text{Las dos del mismo color}) = 1 - P(\text{Las dos bolas de distinto color}) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

C. Esta probabilidad está indicada en el diagrama de árbol. Al sacar una bola negra en la primera extracción nos quedan en la urna 1 bola blanca y 2 bolas negras y aplicando la regla de Laplace

tenemos que $P(N2/N1) = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.66}$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O .

- 1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π , que contiene a los puntos A , B y C .
- 2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O , está contenido en el plano Π .
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

- 1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a .
- 2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A .
- 3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.
- 4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

- 1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.
- 2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r' , que pase por A y B
- 2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r' .
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A , B y el origen de coordenadas.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

1) Comprobamos cuando el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{9} = \pm 3$$

Para $\lambda = 3$ el sistema queda $\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$, lo resolvemos:

$$\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 1}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 9x + 3y = 9 \\ -9x - 3y = -9 \\ \hline 0 \quad 0 = 0 \\ \text{Nueva ecuación 1}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 3x$$

Soluciones: $x = t$; $y = 3 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$

El sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 3$

- 2) El sistema tiene solución única para cualquier valor de λ distinto de 3 y de -3

Ya que el determinante de A es no nulo y por lo tanto su rango es 2 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ y = 3 - 3x \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 x + 3(3 - 3x) = 3\lambda \Rightarrow \lambda^2 x + 9 - 9x = 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x - 9x = 3\lambda - 9 \Rightarrow x(\lambda^2 - 9) = 3\lambda - 9 \Rightarrow x = \frac{3\lambda - 9}{\lambda^2 - 9} = \frac{3(\cancel{\lambda - 3})}{(\cancel{\lambda - 3})(\lambda + 3)} = \frac{3}{\lambda + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 3 - 3 \frac{3}{\lambda + 3} = 3 - \frac{9}{\lambda + 3} = \frac{3\lambda + 9 - 9}{\lambda + 3} = \frac{3\lambda}{\lambda + 3}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{3}{\lambda + 3}; \quad y = \frac{3\lambda}{\lambda + 3}$$

3) Para $\lambda = -3$ el sistema queda $\begin{cases} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$, intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rcl} 9x & +3y & = -9 \\ -9x & -3y & = -9 \\ \hline 0 & 0 & = -18 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -18 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema no tiene solución para $\lambda = -3$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$$1) \quad f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$$

2) Igualamos a cero la derivada y buscamos sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Valoramos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1-2}{e^2} = -\frac{1}{e^2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

3) La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x - 2) \\ f(2) = \frac{2}{e^2} \\ f'(2) = \frac{-1}{e^2} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}(x - 2) \Rightarrow y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}}$$

4) Calculamos por separado los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y el límite cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = (-\infty)e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O .

- 1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π , que contiene a los puntos A , B y C .
- 2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O , está contenido en el plano Π .
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

- 1) El plano que contiene a los puntos A , B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\Pi \equiv \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) - (1,1,0) = (-2,-1,1) \\ A(1,1,0) \in \Pi \end{cases} \Rightarrow \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 2 + z + y - 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi \equiv x - y + z = 0}$$

- 2) ¿ $O(0,0,0) \in \Pi$?

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} O(0,0,0) \in \Pi? \\ \Pi \equiv x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 - 0 + 0 = 0? \text{ ¡SIII!}$$

- 3) Para que sean paralelos deben ser proporcionales sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{OC} = (-1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{1}$$

Son iguales los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

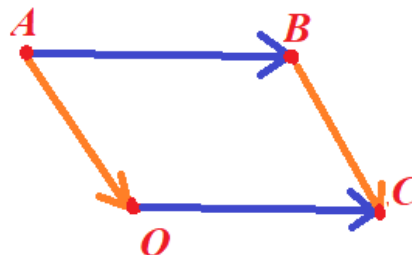
Para que sean paralelos deben ser proporcionales sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AO} = (0, 0, 0) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (-1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} = \frac{0}{0}$$

Son iguales los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BC}$.

- 4) El área del paralelogramo $ABCO$ es el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AO}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$



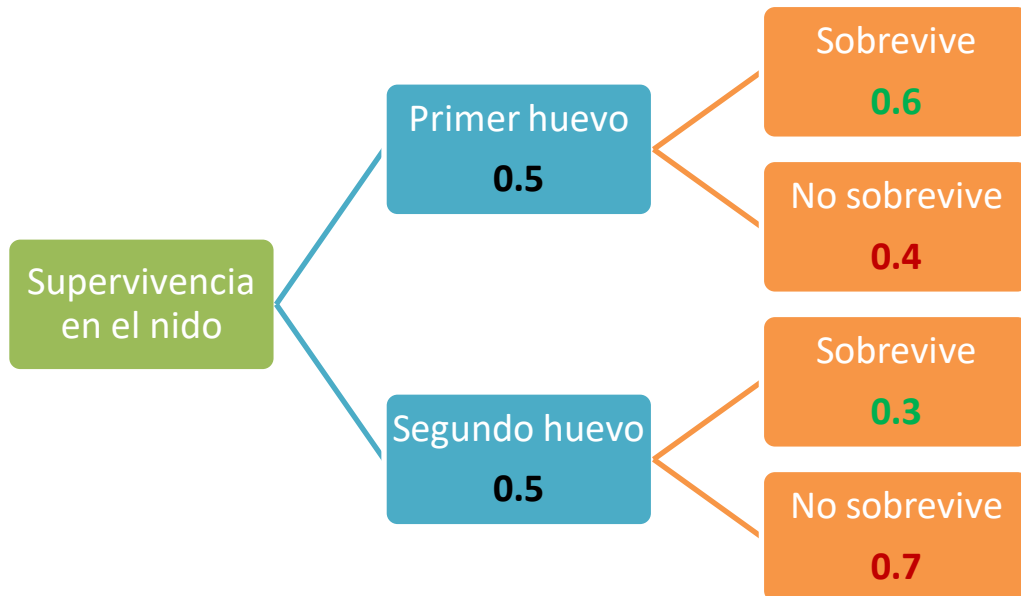
$$\text{Área } ABCO = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{3} u^2}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Suponemos que hay una probabilidad del 50 % de nacer en primer o segundo lugar.



Llamamos H_1 = “Ser el primer huevo”, H_2 = “Ser el segundo huevo”.

Llamamos S = Sobrevivir, $\bar{S}$ = No sobrevivir

- 1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sobrevivir}) &= P(S) = P(H_1)P(S/H_1) + P(H_2)P(S/H_2) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.45 = 45\%}
 \end{aligned}$$

- 2) Nos piden calcular $P(H_2/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H_2/S) = \frac{P(H_2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(H_2)P(S/H_2)}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.45} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

- 1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a .
- 2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A .
- 3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.
- 4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

- 1) El rango de A puede ser 2, 1 o 0.

Calculamos su determinante para saber cuándo es 2 su rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -4 + a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

Cuando a es distinto de 4 el determinante es no nulo y el rango de A es 2.

Cuando $a = 4$ estudiamos el rango de A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ El rango es 1 pues hay un elemento no nulo.}$$

El rango de A es 2 si a es distinto de 4 y el rango es 1 si $a = 4$.

- 2) La inversa de A existe cuando su determinante es no nulo y por lo visto antes ocurre cuando “ a ” es distinto de 4.

- 3) $XA - 2X = A \Rightarrow X(A - 2I) = A$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a & -4 \end{vmatrix} = a$$

Si $a \neq 0$ existe la inversa de $A - 2I$ y puedo seguir despejando en la ecuación matricial.

$$XA - 2X = A \Rightarrow X(A - 2I) = A \Rightarrow \boxed{X = A(A - 2I)^{-1}}$$

Si $a = 0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, lo sustituimos en la ecuación e intentamos despejar.

$$\left. \begin{matrix} XA - 2X = A \Rightarrow X(A - 2I) = A \\ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \\ .. \\ .. \end{cases} \quad \text{¡Imposible!}$$

- 4) Para $a = 2$ existe la inversa de $A - 2I$. Nos queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de $A - 2I$.

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - 2I)^T)}{|A - 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usamos la inversa hallada para el cálculo de X.

$$X = A(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

- 1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.
- 2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

$$1) f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$$

$$2) f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 2$.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -0 + 4 = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -6 + 4 = -2 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.

- 3) Calculamos la integral de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -x^2 + 4x dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + K$$

Si reemplazamos K por el valor 0 tendremos una primitiva de la función $f(x)$ como

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2.$$

- 4) Vemos cuando la función corta el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Ninguno de los valores de corte pertenecen al intervalo $(1, 3)$ por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas se calcula con la integral definida entre $x = 1$ y $x = 3$ de $f(x)$.

$$\text{Área} = \left| \int_1^3 -x^2 + 4x dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_1^3 \right| = \left| \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 2 \right] \right| = \left| \frac{22}{3} \right| \approx 7.33 u^2$$

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r' , que pase por A y B
- 2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r' .
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A , B y el origen de coordenadas.

1) La recta que pasa por A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 1) - (2, 1, 5) = (1, 3, -4) \\ A(2, 1, 5) \in r' \end{array} \right\} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 5 - 4\alpha \end{cases}$$

2) Comparamos los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -3, -4) \\ B(3, 4, 1) \in r \end{cases} \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 5 - 4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r'}} = (1, 3, -4) \\ A(2, 1, 5) \in r' \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{-3}{3} \neq \frac{-4}{-4}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Como la recta r pasa por el punto B y la recta r' también, pues la hemos hallado para que pase por B , ambas rectas se cortan en el punto $B(3, 4, 1)$.

Las rectas r y r' se cortan en el punto B .

3) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AO}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \\ \overrightarrow{AO} = (0, 0, 0) - (2, 1, 5) = (-2, -1, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área } ABO = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}|}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } ABO = \frac{1}{2} |(-19, 13, 5)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-19)^2 + 13^2 + 5^2} = \boxed{\frac{\sqrt{555}}{2} \approx 11.77 \text{ u}^2}$$

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

X = Concentración de colesterol en sangre medida en mg/dl. $X = N(190, 30)$

$$1) P(X > 250) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{250-190}{30}\right) = P(Z > 2) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z < 2) = \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

- 2) Llamamos “a” al nivel de colesterol para el cual $P(X > a) = \frac{1}{100} = 0.01$.

$$P(X > a) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-190}{30}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-190}{30}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-190}{30}\right) = 0.99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow \frac{a-190}{30} = 2.325 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 190 = 69.75 \Rightarrow \boxed{a = 259.75}$$

El nivel de colesterol debería ser 260 mg/dl

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9250
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ .
- 4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = x^2$

- 1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ y el eje OX de abscisas.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.
- 4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
- 2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función

$$I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2 + 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}, \text{ siendo } k \text{ una constante real, } t \text{ el tiempo en años desde el inicio de la epidemia}$$

y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

- 1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.
- 2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \rightarrow \infty$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.
- 4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B .
- 2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π .
- 3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π , y la recta que pasa por los puntos A y B .
- 4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A .

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

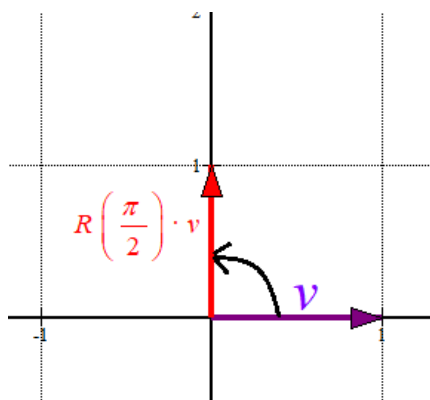
SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considera el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ .
- 4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

$$1) \text{ Si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ entonces } R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

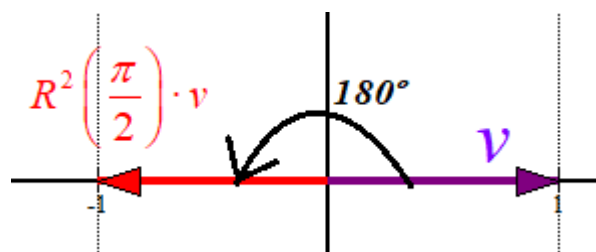
$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



2)

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



3) Calculamos su determinante y vemos que no se anula.

$$|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$$

La matriz $R(\theta)$ tiene inversa para cualquier valor de θ .

- 4) Calculamos la inversa y hacemos la comparación utilizando las propiedades de las razones trigonométricas.

$$R^{-1}(\theta) = \frac{\text{Adj}(R(\theta))}{|R(\theta)|} = \frac{\text{Adj}\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\right)}{1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Se cumple que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = x^2$

- 1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ y el eje OX de abscisas.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$.

- 1) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tiene ecuación $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \quad \left. \begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

La recta es $g(x) = 2x - 1$

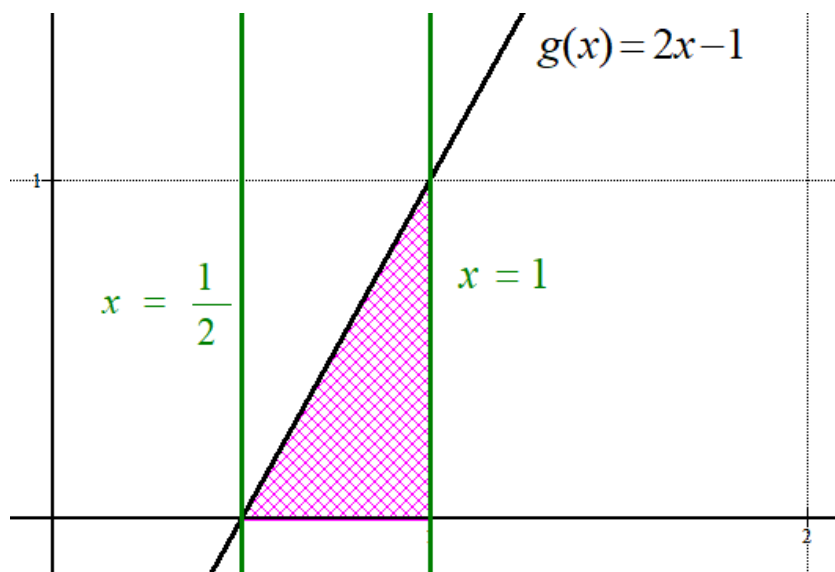
- 2) Dibujamos la región

x	$g(x) = 2x - 1$
$1/2$	0
1	1

Esta región es un triángulo de base 0.5 y altura 1.

Su área es

$$\frac{0.5 \cdot 1}{2} = 0.25 u^2$$



- 3) $F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$

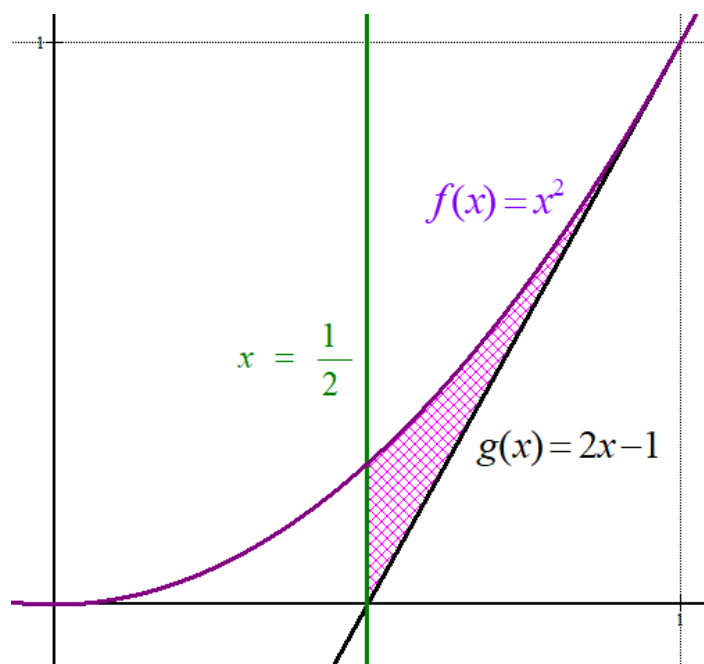
Una primitiva puede ser tomando $K = 0 \rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$

- 4) Vemos donde se cortan las funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = 2x - 1 \\ g(x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre 0.5 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{1/2}^1 x^2 - (2x-1) dx = \int_{1/2}^1 x^2 - 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{1/2}^1 = \\ &= \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] - \left[\frac{0.5^3}{3} - 0.5^2 + 0.5 \right] = \frac{1}{3} - \frac{0.125}{3} - 0.25 = \frac{1 - 0.125 - 0.75}{3} = \boxed{\frac{1}{24} \approx 0.042 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.
- 4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$1) \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) - (1, 2, 8) = (2, 2, -8) \\ B = (3, 4, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -8t \end{cases}$$

- 2) Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -8t \end{cases} \\ \text{Plano} \equiv z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -8t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \\ y = 4 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \\ z = -8\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \end{cases}$$

El misil cruza el plano en el punto $P(2, 3, 4)$.

- 3) Esa distancia es el módulo del vector que une ambos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) - (1, 2, 8) = (2, 2, -8)$$

$$\text{Distancia de A a B} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{72} = \boxed{8.485 u}$$

- 4) Un vector perpendicular es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OB} = (3, 4, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (2, 2, -8) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 24\vec{j} - 2\vec{k} = (-32, 24, -2)$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$ es $\vec{u} = (-32, 24, -2)$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

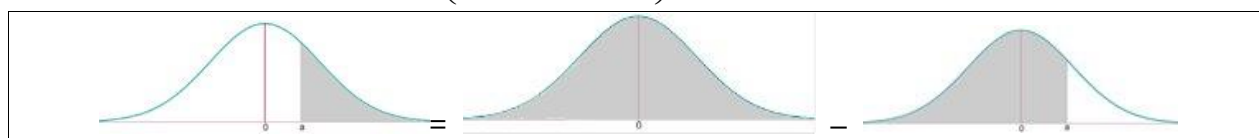
La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
- 2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

X = Concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado.

$X = N(600, 200)$

$$1) P(X > 1000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1000 - 600}{200}\right) = P(Z > 2) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z < 2) = \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

$$2) \text{ Llamamos "a" al nivel de testosterona para el cual } P(X > a) = \frac{1}{1000} = 0.001.$$

$$P(X > a) = 0.001 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 600}{200}\right) = 0.999 \Rightarrow \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow \frac{a - 600}{200} = 3.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 600 = 620 \Rightarrow \boxed{a = 1220}$$

El nivel de testosterona debería ser 1220 ng/dl

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

El sistema tiene matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \sqrt{4} = \pm 2$$

Analizamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

Utilizamos Cramer para resolverlo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda - 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda + 2\lambda - 2}{-\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda - 2}{-\lambda^2 + 4} = \frac{\cancel{\lambda - 2}}{-(\cancel{\lambda - 2})(\lambda + 2)} = \boxed{\frac{-1}{\lambda + 2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda - 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda - 4}{-\lambda^2 + 4} = \frac{2(\lambda^2 - \lambda - 2)}{-(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{2(\lambda + 1)\cancel{(\lambda - 2)}}{-\cancel{(\lambda - 2)}(\lambda + 2)} = \boxed{\frac{-2\lambda - 2}{\lambda + 2}}$$

CASO 2. $\lambda = 2$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante se anula, el rango de A es 1.

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1 pues la columna 3ª es proporcional a la 1ª.

El rango de A y el de A/B es 1, menor que el número de incógnitas (2). El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

CASO 3. $\lambda = -2$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y su determinante se anula, el rango de A es 1.

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 pues el menor que resulta de

quitar la columna 1ª tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0$.

El rango de A es 1 y el de A/B es 2, como los rangos son distintos el sistema no tiene solución.

Escribo las respuestas a las preguntas del ejercicio.

1) Para $\lambda = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Las soluciones son $x = t$; $y = 2t - 1$ siendo $t \in \mathbb{R}$

2) Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ el sistema tiene solución única.

Las soluciones son $x = \frac{-1}{\lambda + 2}$ e $y = \frac{-2\lambda - 2}{\lambda + 2}$

3) Para $\lambda = -2$ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función

$$I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2 + 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}, \text{ siendo } k \text{ una constante real, } t \text{ el tiempo en años desde el inicio de la epidemia}$$

y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \rightarrow \infty$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

1) La función es continua tanto en $(-\infty, 1)$ por ser una función exponencial con base positiva como en $(1, +\infty)$ por ser un cociente de funciones polinómicas, con un denominador que no se anula en

el dominio, pues $3t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{1}{3}}$ ¡No existe!

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} I(1) &= \frac{1^2}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} I(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} ke^{2t} = ke^2 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} I(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t^2}{3t^2 + 1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{t \rightarrow 1} I(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} I(t) = I(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} = ke^2 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4e^2}}$$

$$2) \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{3t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2}}{\frac{3t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\infty}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ la proporción de personas infectadas es 1 de cada 3.

3) Calculamos $I'(1/2)$.

En el entorno de $1/2$ la función es $I(t) = \frac{1}{4e^2} e^{2t}$.

$$I(t) = \frac{1}{4e^2} e^{2t} \Rightarrow I'(t) = 2 \frac{1}{4e^2} e^{2t} = \frac{1}{2e^2} e^{2t} \Rightarrow I'(1/2) = \frac{1}{2e^2} e^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2e}}$$

4) Calculamos $I'(2)$.

En el entorno de 2 la función es $I(t) = \frac{t^2}{3t^2 + 1}$.

$$I'(t) = \frac{2t(3t^2 + 1) - t^2 \cdot 6t}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t^3 + 2t - 6t^3}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{2t}{(3t^2 + 1)^2} \Rightarrow I'(2) = \frac{4}{(3 \cdot 2^2 + 1)^2} = \boxed{\frac{4}{169}}$$

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.
- 2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π .
- 3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π , y la recta que pasa por los puntos A y B.
- 4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

- 1) El vector director de la recta es $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} &= (2, 3, 3) - (1, 2, 1) = (1, 1, 2) \\ B &= (2, 3, 3) \in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

- 2) $\Pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, -4)$

- 3) Vemos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares. Para ello compruebo si su producto escalar es cero.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} &= (2, 3, -4) \\ \vec{v}_r &= (1, 1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 3, -4) \cdot (1, 1, 2) = 2 + 3 - 8 = -2 \neq 0$$

Los vectores no son perpendiculares y por tanto la recta r y el plano Π son secantes, coinciden en un punto.

- 4) Un plano Π' paralelo a $\Pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ tiene ecuación $\Pi' \equiv 2x + 3y - 4z = D$.

Como contiene el punto A las coordenadas del punto deben cumplir la ecuación del plano.

$$\left. \begin{aligned} \Pi' &\equiv 2x + 3y - 4z = D \\ A &= (1, 2, 1) \in \Pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + 6 - 4 = D \Rightarrow D = 4 \Rightarrow \Pi' \equiv 2x + 3y - 4z = 4$$

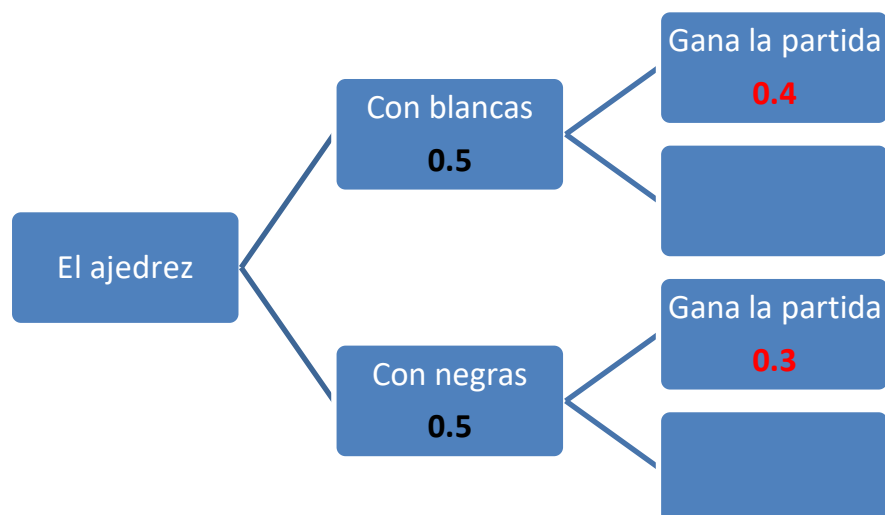
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B = “Jugar con blancas”, $\bar{B}$ = “Jugar con negras”. G = “Ganar la partida”, $\bar{G}$ = “Perder la partida”.

1) Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(B \cap G) + P(\bar{B} \cap G) = \\
 &= P(B)P(G/B) + P(\bar{B})P(G/\bar{B}) = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.35}
 \end{aligned}$$

2) Es una probabilidad a posteriori. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B)P(G/B)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.35} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.57}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2020
MATEMÁTICAS II**

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + (1-t)y = t \\ (1+t)x - 3y = -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$
- 3) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.
- 2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r .
- 3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r .

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

- 1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X .
- 3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq \pi/2 \\ \frac{2}{x} + a & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla a para que $f(x)$ sea continua.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$ para $x \leq \pi/2$
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (3, 5, 2)$, $D = (1, 1, 3)$.

- 1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B , C .
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano π .
- 3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm.

Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

- 1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.
- 2) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.
- 3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.
- 4) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + (1-t)y = t \\ (1+t)x - 3y = -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

1) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix} = -3 - (1-t)(1+t) = -3 - (1-t^2) = -4 + t^2$.

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -4 + t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = \pm 2$$

Para $t \neq 2$ y $t \neq -2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas.

El sistema tiene solución única.

Determinamos la solución usando Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 1-t \\ -t & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3t + t - t^2}{-4 + t^2} = \frac{-2t - t^2}{-4 + t^2} = \frac{-t(2+t)}{(-2+t)(2+t)} = \frac{t}{2-t}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1+t & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-t - t - t^2}{-4 + t^2} = \frac{-2t - t^2}{-4 + t^2} = \frac{-t(2+t)}{(-2+t)(2+t)} = \frac{t}{2-t}$$

Cuando $t \neq 2$ y $t \neq -2$ las soluciones del sistema son $x = y = \frac{t}{2-t}$

2) Para $t = -2$ el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ -x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = -\text{Ecuación 1}^a \\ \text{Quito ecuación 2}^a \end{cases} \Rightarrow x + 3y = -2 \Rightarrow \boxed{x = -2 - 3y}$$

Para $t = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones y tienen la expresión $x = -2 - 3t$; $y = t$

3) Para $t = 2$ el sistema queda

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 3x - 3y = -2 \\ -3x + 3y = -6 \\ \hline 0 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 0 = -8 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución para $t = 2$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$
- 3) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

$$1) f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin(x)x - (1 - \cos(x))}{x^2} = \frac{x\sin(x) - 1 + \cos(x)}{x^2}$$

- 2) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en dicho punto.

$$f'(\pi) = \frac{\pi \sin(\pi) - 1 + \cos(\pi)}{\pi^2} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \boxed{0} \end{aligned}$$

4) **Asíntota vertical.** $x = a$

$x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Por lo que no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{\text{función acotada entre 0 y 2}}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como tiene asíntota horizontal, no tiene oblicua.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta r $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.
- 2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r .
- 3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r .

- 1) Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y B. Necesitamos un vector director que es $\vec{v}_s = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 1) - (2, 1, 5) = (1, 3, -4)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 1, 5) \in s \\ \vec{v}_s = (1, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 5 - 4\lambda \end{cases}$$

- 2) La recta t que es perpendicular a la recta s del rayo y a la recta r tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 3, -4) \\ \vec{v}_r = (-1, -3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_t = 12i - 4j - 3k + 3k - 4j + 12i = 24i - 8j = (24, -8, 0)$$

Nos sirve como vector director este vector dividido por 8.

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}_t}{8} = (3, -1, 0)$$

La ecuación de la recta será:

$$\left. \begin{array}{l} B(3, 4, 1) \in t \\ \vec{u}_t = (3, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

- 3) Si el plano π contiene a la recta s entonces tiene como vector director el director de la recta $\vec{v}_s = (1, 3, -4)$. Como contiene también a la recta r otro vector director del plano es el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, -3, -4)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 1, 5) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, -3, -4) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-5 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 24 - 4y + 4 - 3z + 15 + 3z - 15 - 4y + 4 + 12x - 24 = 0 \Rightarrow$$

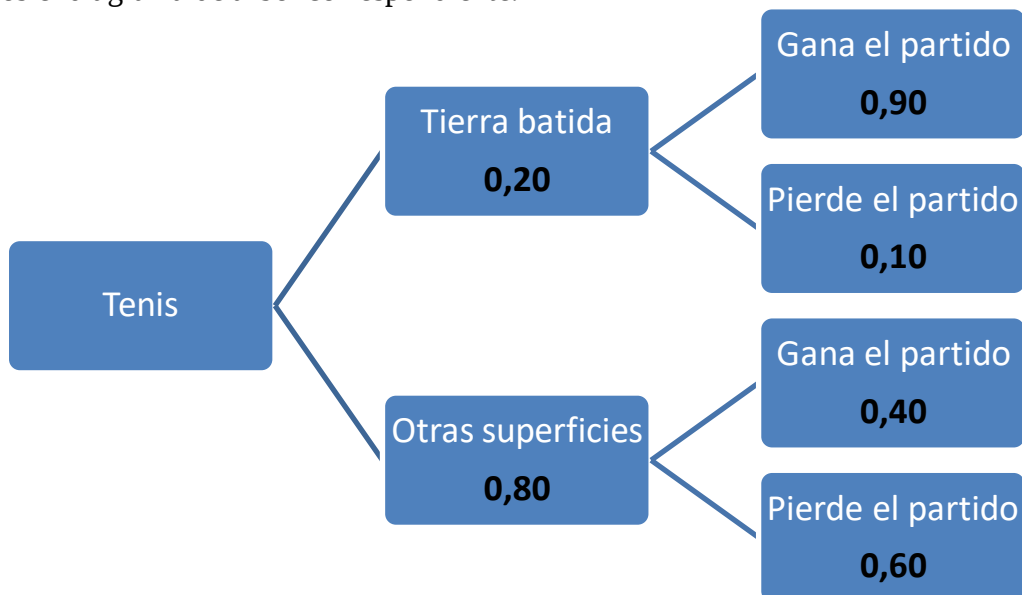
$$\Rightarrow 24x - 8y - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x - y - 5 = 0}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Realizamos el diagrama de árbol correspondiente.



- 1) Este suceso puede ocurrir de dos formas distintas, calculamos las probabilidades de cada opción y las sumamos.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ganar un partido}) &= P(\text{Jugar en tierra batida})P(\text{Ganar un partido/ En tierra batida}) + \\
 &+ P(\text{Jugar en otras superficies})P(\text{Ganar un partido/ En otras superficies}) = \\
 &= 0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,18 + 0,32 = \boxed{0,5}
 \end{aligned}$$

- 2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haya jugado en tierra batida} / \text{Ha ganado}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Haya jugado en tierra batida} \cap \text{Ha ganado})}{P(\text{Ganar un partido})} = \\
 &= \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,50} = \frac{18}{50} = \frac{36}{100} = 0,36
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

- 1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X .
- 3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

$$1) AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow \boxed{X = (A - I)^{-1} B}$$

Hemos supuesto que la matriz $A - I$ es invertible y por tanto podemos determinar $(A - I)^{-1}$.

- 2) Podemos calcular X si la matriz $A - I$ es invertible y esto ocurre cuando su determinante es no nulo.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 + 1 = a$$

Este determinante es nulo y por tanto $A - I$ no es invertible cuando $a = 0$

- 3) Para $a = 1$ la matriz $A - I$ es invertible y podemos determinar la matriz X .

Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = 1$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión que nos permite hallar X :

$$X = (A - I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 - 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq \pi/2 \\ \frac{2}{x} + a & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla a para que $f(x)$ sea continua.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$ para $x \leq \pi/2$
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$ y el eje OX de abscisas.

1) Para que la función sea continua debe serlo en $x = \pi/2$ y se deben cumplir tres condiciones:

- Existe $f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sin(x) = \sin(\pi/2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{2}{x} + a = \frac{2}{\pi/2} + a = \frac{4}{\pi} + a \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi} + a \Rightarrow a = 1 - \frac{4}{\pi} = \frac{\pi - 4}{\pi}$
- $f(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 1$

Estas tres condiciones se cumplen y la función es continua cuando $a = \frac{\pi - 4}{\pi}$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + a = \frac{2}{+\infty} + a = 0 + a = \boxed{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x) = \text{No existe}$$

El límite en $-\infty$ no existe pues la función $\text{seno}(x)$ es periódica y va oscilando de valores sin tender a ninguno en concreto cuando x avanza hacia $-\infty$.

3) Para $x \leq \pi/2$ la función es $f(x) = \sin(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin(x) dx = -\cos x + K$$

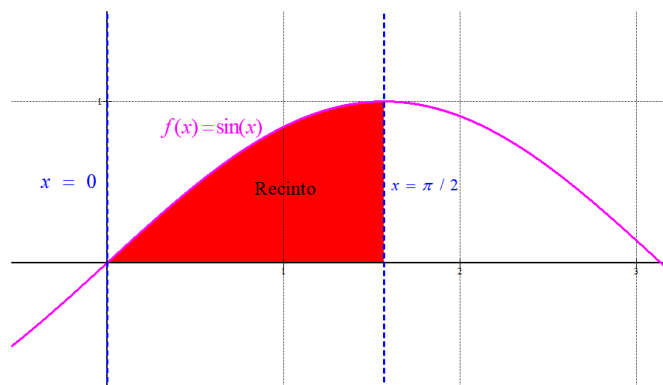
Una primitiva se obtiene dando un valor concreto al parámetro K , por ejemplo, $K = 0$.

$$F_0(x) = -\cos x + 0 = -\cos x$$

4) Es el área del recinto limitado por $f(x) = \sin(x)$ si $x \leq \pi/2$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$. Se obtiene esta área con una integral definida entre 0 y $\pi/2$ de la función $\sin(x)$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = \left[-\cos \frac{\pi}{2}\right] - [-\cos 0] = 1$$

$$\boxed{\text{Área del recinto} = 1 \text{ u}^2}$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A=(1,3,1)$, $B=(4,1,-2)$, $C=(3,5,2)$, $D=(1,1,3)$.

1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B , C .

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano π .

3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

1) Si el plano π contiene a los puntos A , B , C entonces tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
Y contiene al punto A .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,3,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4,1,-2) - (1,3,1) = (3,-2,-3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3,5,2) - (1,3,1) = (2,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2 - 6y + 18 + 6z - 6 + 4z - 4 - 3y + 9 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0}$$

2) ¿Cumple el punto D la ecuación del plano?

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} D(1,1,3) \in \pi? \\ \pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 4 - 9 + 30 + 13 = 0?$$

No se cumple, luego el punto D no pertenece al plano π .

3) Utilizamos el producto escalar de estos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, -2, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3, -2, -3) \cdot (2, 2, 1) = \sqrt{9+4+9} \sqrt{4+4+1} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 - 4 - 3 = \sqrt{198} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-1}{\sqrt{198}} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 94^\circ}$$

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm. Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

- 1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.
- 2) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.
- 3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.
- 4) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

- 1) En la unión europea la probabilidad de elegir una persona que mida más de 190 cm se obtiene aplicando la regla de Laplace.

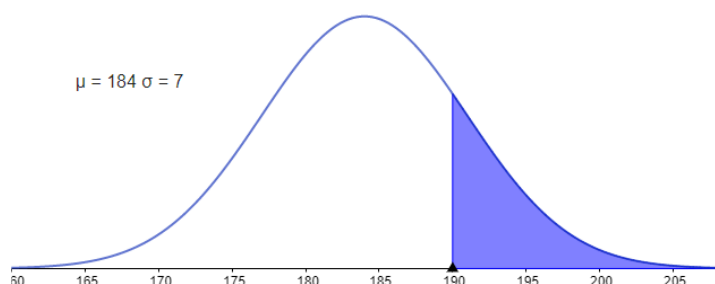
$$P(\text{Medir más de 190 cm}) = \frac{\text{Nº de personas de la UE que miden más de 190 cm}}{\text{Nº personas de la UE}} = \frac{12.000.000}{250.000.000} = \boxed{\frac{6}{125} = 0.048}$$

- 2) En la unión europea la probabilidad de elegir una persona que sea holandés se obtiene aplicando la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea holandés}) = \frac{\text{Nº de holandeses}}{\text{Nº personas de la UE}} = \frac{7.000.000}{250.000.000} = \boxed{\frac{7}{250} = 0.028}$$

- 3) En Holanda la altura se distribuye según una normal de media 184 cm y desviación típica 7 cm. $X = \text{Altura de un holandés}$. $X = N(184, 7)$.

$$P(X > 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{190 - 184}{7}\right) = P(Z \geq 0.86) = 1 - P(Z \leq 0.86) = 1 - 0.8051 = \boxed{0.1949}$$



- 4) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea holandés} / \text{mide más de 190 cm}) = \frac{P(\text{Sea holandés} \cap \text{mide más de 190 cm})}{P(\text{Mide más de 190 cm})} = \frac{P(\text{Sea holandés}) P(\text{mide más de 190 cm} / \text{Sea holandés})}{0.048} = \frac{0.028 \cdot 0.1949}{0.048} = \boxed{0.1137}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JULIO 2020
MATEMÁTICAS II**

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A .

- 1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- 4) [1 PUNTO] Calcula X .

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.
- 4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.
- 2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.
- 3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

- 1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
- 2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
- 3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

- 1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$.
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -4)$, $C(4, 3, 2)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.
- 2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale “Cara” sumamos 300 € adicionales.

- 1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido “Cara” en la moneda.
- 3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido “Cara” sabiendo que hemos ganado 400 €.

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A .

- 1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- 4) [1 PUNTO] Calcula X .

1) Comprobemos si la matriz A y A^t son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de } A^t.$$

Despejamos X en la igualdad.

$$AXA^t = B \Rightarrow A^{-1}AXA^t(A^t)^{-1} = A^{-1}B(A^t)^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B(A^t)^{-1}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculamos la inversa de A^t .

$$(A^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^t)^t)}{|A^t|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Además } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que queda comprobada la igualdad $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4) Obtenemos la expresión de la matriz X partiendo de la igualdad obtenida en el primer apartado.

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B(A^t)^{-1} &\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.
- 4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$1) f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - 1 \cdot \sin(x)}{x^2} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

2) El valor de la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en $x = \pi$.

$$f'(\pi) = \frac{\pi \cos(\pi) - \sin(\pi)}{\pi^2} = \frac{-\pi - 0}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$ vale $\frac{-1}{\pi}$.

3) El dominio de la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos 0 = 1$$

No es asíntota. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0, \text{ pues el } \sin(x) \text{ se mantiene con valores entre } -1 \text{ y } 1,$$

mientras que x va tomando valores cada vez más grandes. El cociente tiende a 0.

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene horizontal.

4) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos 0 = 1$$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.
- 2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.
- 3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

- 1) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por $P = (1, 2, 8)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (1, 2, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 2, 8) \in r \\ \vec{v} = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{cases}$$

- 2) El plano tiene ecuación $-x - y + 3z = -8$, su vector normal es $\vec{n} = (-1, -1, 3)$.

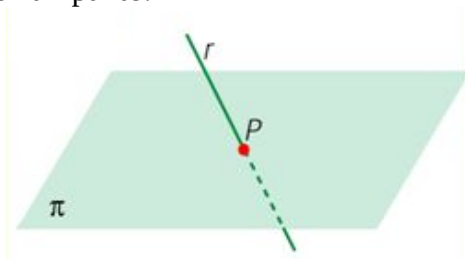
La recta tiene vector director $\vec{v} = (1, 2, -3)$

Veamos si son ortogonales.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, 2, -3) \cdot (-1, -1, 3) = -1 - 2 + 9 = 6 \neq 0$$

Los vectores no son ortogonales, plano y recta no son ni paralelos ni coincidentes.

Luego plano y recta se cortan en un punto.



- 3) Si la lámina debe ser ortogonal al rayo dicho plano (el de la lámina) tiene como vector normal el director del rayo $\vec{v} = (1, 2, -3)$ y pasa por el punto $O(0, 0, 0)$. Hallamos la ecuación de este plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v} = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \pi' \equiv x + 2y - 3z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv x + 2y - 3z = 0}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

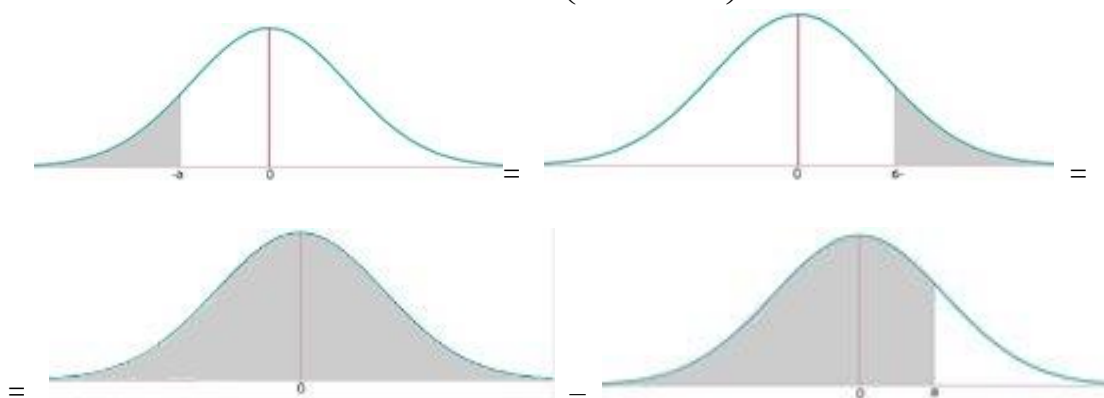
Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

X = Concentración de anticuerpos. $X = N(20, 5)$

- 1) Dar negativo significa obtener una concentración menor de 10 U. Nos piden calcular $P(X < 10)$.

$$P(X < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10-20}{5}\right) = P(Z < -2) = \dots$$



$$\dots = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

- 2) Nos piden la concentración (a) en lugar de 10 U para que $P(X < a) = 0,01$.

$$P(X < a) = 0,01 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-20}{5}\right) = 0,01 \Rightarrow P\left(Z > -\frac{a-20}{5}\right) = 0,01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < -\frac{a-20}{5}\right) = 0,01 \Rightarrow P\left(Z < -\frac{a-20}{5}\right) = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos 0.99 en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow -\frac{a-20}{5} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + 20 = 11.625 \Rightarrow -a = -8.375 \Rightarrow \boxed{a = 8.375}$$

Las concentraciones de 8.375 U las detecta con una probabilidad del 1%

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

- 1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
- 2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
- 3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

- 1) Llamemos “x” al número de tanques comprados, “y” al número de submarinos y “z” al número de aviones.

“El rival ha gastado 41 diamantes” $\rightarrow x + 3y + 5z = 41$

“Tiene el doble de submarinos que de tanques” $\rightarrow y = 2x$

“El número de submarinos más el de aviones es 10” $\rightarrow y + z = 10$

Reuniendo las ecuaciones nos queda el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ y = 2x \\ y + z = 10 \end{array} \right\}$$

- 2) Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ -2x + y = 0 \\ y + z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ -2x + y = 0 \\ \hline 2x + 6y + 10z = 82 \\ \hline 7y + 10z = 82 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 7y + 10z = 82 \\ y + z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 7 \cdot \text{Ecuación 3}^a \\ 7y + 10z = 82 \\ -7y - 7z = -70 \\ \hline 3z = 12 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 7y + 10z = 82 \\ 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 7y + 10z = 82 \\ z = 4 \end{array} \right\}$$

Este sistema es **compatible determinado**. Tiene solución única.

- 3) Terminamos de resolver el sistema a partir de lo obtenido en el apartado 2).

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 7y + 10z = 82 \\ \boxed{z = 4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 20 = 41 \\ 7y + 40 = 82 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 21 \\ 7y = 42 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 21 \\ \boxed{y = 6} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 18 = 21 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Tiene 3 tanques, 6 submarinos y 4 aviones.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

- 1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$.
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje OX de abscisas.

- 1) El dominio de la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, pues $x = 0$ anula el denominador.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene por tener una asíntota horizontal.

- 2) $F(x) = \int f(x) dx$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2}{x^2} dx = 2 \int x^{-2} dx = 2 \frac{x^{-1}}{-1} = \boxed{-\frac{2}{x} + C}$$

- 3) Comprobemos si la función corta el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = 0, \text{ Imposible. No corta el eje OX}$$

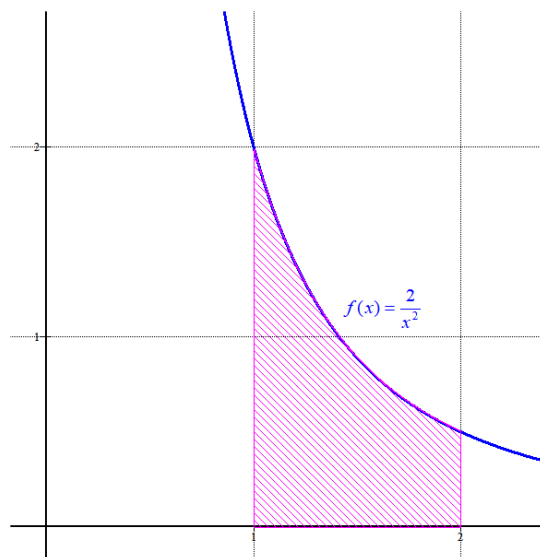
Como la función es siempre positiva, el área de la región es la integral definida entre 1 y 2 de

$$f(x) = \frac{2}{x^2}.$$

$$\text{Área} = \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = \left[\frac{-2}{x} \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{-2}{2} \right] - \left[\frac{-2}{1} \right] = -1 + 2 = 1 u^2$$

El área tiene un valor de 1 unidad cuadrada.



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -4)$, $C(4, 3, 2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

1) Si la recta pasa por A y B tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -4) - (1, 2, 1) = (1, 1, -5)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \in r \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{array} \right\}$$

2) El plano que contiene a los 3 puntos tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -5)$ y

$\overrightarrow{AC} = (4, 3, 2) - (1, 2, 1) = (3, 1, 1)$. Determinamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, -5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 - 15y + 30 + z - 1 - 3z + 3 - y + 2 + 5x - 5 = 0 \Rightarrow$$

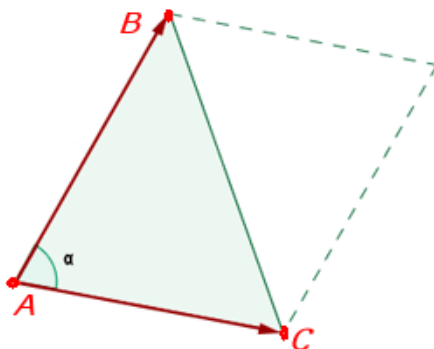
$$\Rightarrow 6x - 16y - 2z + 28 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x - 8y - z + 14 = 0}$$

3) El área del triángulo con vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -5)$ y $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, -5) \times (3, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= i - 15j + k - 3k - j + 5i = 6i - 16j - 2k = (6, -16, -2)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(6, -16, -2)|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + (-16)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{296}}{2} = \sqrt{74} = 8,6 \text{ u}^2$$



Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale “Cara” sumamos 300 € adicionales.

- 1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido “Cara” en la moneda.
- 3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido “Cara” sabiendo que hemos ganado 400 €.

- 1) Para ganar exactamente 400 € podemos ganar 100 con el dado y 300 con la moneda o bien 400 con el dado y nada con la moneda.

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que pasen los dos sucesos anteriores.

$$P(\text{Ganar 400 €}) =$$

$$= P(\text{Ganar 100 con dado y ganar 300 con la moneda}) + P(\text{Ganar 400 con dado y no ganar nada con la moneda}) =$$

$$= P(\text{Salga 1 en el dado y Cara en la moneda}) + P(\text{Salga 4 en el dado y Cruz en la moneda}) =$$

$$= P(\text{Salga 1 en el dado}) \cdot P(\text{Cara en la moneda}) + P(\text{Salga 4 en el dado}) \cdot P(\text{Cruz en la moneda}) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6} = 0.166}$$

- 2) Si ha salido “Cara” en el dado hemos ganado 300 €, por lo que solo faltan 100 € para obtener un premio total de 400 €, por lo que esta probabilidad es la misma que la de sacar un 1 en el dado,

por lo que vale $\boxed{\frac{1}{6} = 0.166}$

- 3) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya salido cara/ Ganado 400 €}) = \frac{P(\text{Salga cara} \cap \text{Ganamos 400 €})}{P(\text{Ganar 400 €})} =$$

$$= \frac{P(\text{Salga cara en la moneda}) P(\text{Salga 1 en el dado})}{P(\text{Ganar 400 €})} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a .

- 1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a , el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x-8}$.

- 1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f .
- 2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Ejercicio 3

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2, 1, 3)$.

- 1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π .
- 2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A .

Ejercicio 4

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6° .

- 1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42° .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30° .

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

- 1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t .
- 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x \ln(x)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

- 1) [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

- 2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x) dx$

Ejercicio 3

Sean los puntos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (-1, 1, 2)$, $R = (2, 0, -1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -5t + s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$

- 1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P , Q y R y el plano Π .
- 2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q .

Ejercicio 4

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

- 1) [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?
- 2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a .

- 1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a , el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).
 2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

1) El sistema $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ tiene asociada una matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a & a^2 \end{pmatrix}$. Si

tomamos el menor que resulta de quitar la última columna su determinante vale $\begin{vmatrix} a^2 & a \\ a & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2$

que se anula cuando $a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$.

Otro menor que podemos considerar resulta de quitar la 1ª columna $\rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - a$ que es

cero cuando $a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$.

El tercer menor no aporta ningún caso distinto.

Analizamos los cuatro casos diferentes que nos surgen.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el primer menor es no nulo y el rango de A es 2 al igual que el de la ampliada, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda $\begin{cases} z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Este sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = -1$.

CASO 3. $a = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Es un sistema incompatible, ya que no puede ser $x + y + z$ igual a -1 y también igual a 0.

CASO 4. $a = -1$

El sistema queda $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Sumo las dos ecuaciones}\} \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{-1}{2} - y + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} + y}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a distinto de 1 y el sistema es incompatible para $a = 1$.

2) Para $a = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene infinitas soluciones. Las obtenemos.

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = -1 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \hline 4x \quad +4y \quad +8z \quad = 0 \\ -4x \quad -2y \quad -z \quad = 1 \\ \hline 2y \quad +7z \quad = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = -1 \\ 2y + 7z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -1 - z \\ 2y = 1 - 7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -1 - z \\ \boxed{y = \frac{1 - 7z}{2}} \end{cases} \Rightarrow 4x + \cancel{2} \frac{1 - 7z}{\cancel{2}} = -1 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 1 - 7z = -1 - z \Rightarrow 4x = -2 + 6z \Rightarrow 2x = -1 + 3z \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1 + 3z}{2}}$$

Las soluciones son $x = \frac{-1 + 3t}{2}$; $y = \frac{1 - 7t}{2}$; $z = t$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x-8}$.

- 1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f .
- 2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x=2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

- 1) El dominio de $f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x-8}$ son todos los reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{cases} = \frac{7+9}{2} = 8 \\ = \frac{7-9}{2} = -1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 8\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

$x = -1$ y $x = 8$. Son valores excluidos del dominio.

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No hay, pues existe una horizontal.

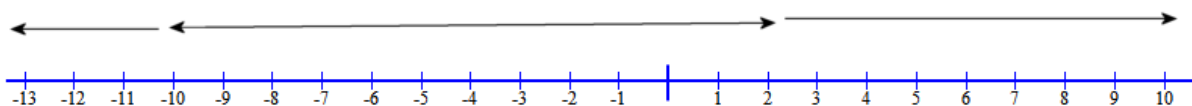
Para hallar los máximos y mínimos calculo la derivada.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x-8} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2-7x-8) - (x+4)(2x-7)}{(x^2-7x-8)^2} = \\ &= \frac{x^2-7x-8-2x^2+7x-8x+28}{(x^2-7x-8)^2} = \frac{-x^2-8x+20}{(x^2-7x-8)^2} \end{aligned}$$

Buscamos cuando se anula la derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{-x^2-8x+20}{(x^2-7x-8)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-8x+20 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{-2} = \frac{8 \pm 12}{-2} = \begin{cases} = \frac{8+12}{-2} = \boxed{-10 = x} \\ = \frac{8-12}{-2} = \boxed{2 = x} \end{cases} \end{aligned}$$

Estudiemos el signo de la derivada en las tres zonas en que se divide la recta real al marcar los valores obtenidos.



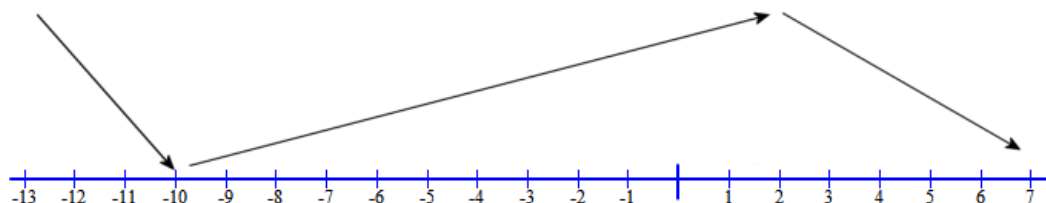
- En $(-\infty, -10)$ tomamos el valor $x = -12$ la derivada vale

$$f'(-12) = \frac{-x^2 - 8x + 20}{(12^2 + 84 - 8)^2} = \frac{-144 + 96 + 20}{+} = \frac{-28}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En $(-10, 2)$ tomamos el valor $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = \frac{+20}{(0^2 - 0 - 8)^2} = \frac{20}{+} > 0$. La función crece.

- En $(2, +\infty)$ tomamos el valor $x = 4$ la derivada vale $f'(4) = \frac{-16 - 32 + 20}{(16 - 28 - 8)^2} = \frac{-28}{+} < 0$. La función decrece.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -10$ y un máximo relativo en $x = 2$.
 Crece en $(-10, 2)$ y decrece en $(-\infty, -10) \cup (2, +\infty)$.

- 2) Si una función derivable presenta un extremo relativo en un punto la derivada debe anularse en dicho punto, pues la función en dicho punto ni crece ($g'(2) > 0$) ni decrece ($g'(2) < 0$).
 Tenemos que $g'(2) = 0$.

Ejercicio 3

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2, 1, 3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π .

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

1) Obtengamos la ecuación implícita del plano.

$$\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(2,1,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{(2,1,0)} \\ \vec{v} = \overrightarrow{(0,1,-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+2+2z+2y-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-2y-2z=0}$$

La distancia de un punto a un plano se calcula con la fórmula siguiente.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x-2y-2z=0 \\ A=(2,1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A,\pi) = \frac{|2-2-6|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ u}$$

La distancia del punto A al plano π tiene un valor de 2 unidades.

2) La recta ortogonal a Π tiene como vector director el normal del plano.

$$\pi \equiv x-2y-2z=0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, -2, -2) \\ A = (2, 1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2}}$$

Ejercicio 4

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6° .

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42° .

2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30° .

X = Temperatura de una ciudad en el verano. $X = N(30, 6)$

1) Nos piden calcular $P(X < 42)$.

$$P(X < 42) = \text{Tipificamos} = P\left(\frac{X - 30}{6} < \frac{42 - 30}{6}\right) = P(Z < 2) = \boxed{0,9772}$$

2) Nos piden calcular $P(25 < X < 30)$.

$$P(25 < X < 30) = P(X < 30) - P(X < 25) = \text{Tipificamos} =$$

$$= P\left(\frac{X - 30}{6} < \frac{30 - 30}{6}\right) - P\left(\frac{X - 30}{6} < \frac{25 - 30}{6}\right) =$$

$$= P(Z < 0) - P(Z < -0,83) =$$

$$= P(Z < 0) - P(Z > 0,83) =$$

$$= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0,83)) =$$

Buscamos en la tabla

$$= 0,5 - (1 - 0,7967) = \boxed{0,2967}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

- 1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t .
 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2t & 1 \\ -1 & t & 2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2t & 1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 4t^2 - 1 - 2t - t^2 = 3t^2 - 2t - 1$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A| = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} = \frac{2+4}{6} = 1 \\ = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Hay que estudiar tres casos distintos.

CASO 1. $t \neq 1$ y $t \neq -\frac{1}{3}$

En este caso el rango de A es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $t = 1$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El rango de A no es 3. Es 2 ya que el menor de orden 2 que resulta de eliminar fila y columna

3ª es no nulo. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos si tiene rango 3. Tomo el menor que resulta de eliminar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 2 - 2 = 0 \text{ . No tiene rango 3}$$

Veamos si tiene rango 2. Lo tiene pues puedo tomar el mismo menor que he tomado para hallar el rango de A.

Rango de A = rango de A/B = 2 $\neq$ nº incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $t = -\frac{1}{3}$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$

El rango de A no es 3. Veamos si es 2. Tomamos el menor que resulta de eliminar la fila y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} \neq 0 \text{ El rango de A es 2}$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos si tiene rango 3. Tomo el menor que resulta de eliminar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} \neq 0 \text{ El rango de A/B es 3}$$

El rango de A es 2 $\neq$ Rango de A/B es 3. El sistema es incompatible. No tiene solución.

Resumiendo: Si $t \neq 1$ y $t \neq -\frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado, si $t = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $t = -\frac{1}{3}$ el sistema es incompatible.

2) Para $t = 1$ el sistema es compatible indeterminado. El sistema queda $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$. Lo

resolvemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ -x+y+2z=1 \\ x+y-z=0 \\ \hline 2y+z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2y+z=1 \\ 2y+z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2y+z=1 \end{array} \right\}$$

Podemos suprimir la ecuación 3ª pues es igual a la 2ª

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2y+z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ \boxed{z=1-2y} \end{array} \right\} \Rightarrow x+y-1+2y=0 \Rightarrow \boxed{x=1-3y}$$

Las soluciones son $x=1-3t$; $y=t$; $z=1-2t$.

Ejercicio 2

Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x \ln(x)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x) dx$

1) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot \infty = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \boxed{0}$$

2) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Usamos lo obtenido para calcular el valor de la integral definida.

$$\int_2^e f(x) dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_2^e = \left[\ln e \cdot \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} \right] - \left[\ln 2 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{4} \right] = \boxed{\frac{e^2}{4} + 1 - 2 \ln 2}$$

Ejercicio 3

Sean los puntos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (-1, 1, 2)$, $R = (2, 0, -1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -5t + s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$

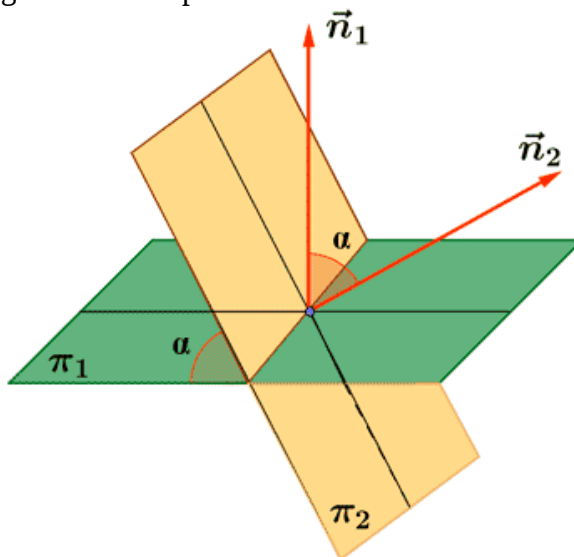
- 1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π .
 2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

1) Hallamos la ecuación del plano π' definido por los puntos P, Q y R.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (-1, 1, 2) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 2) \\ \overrightarrow{QR} &= (2, 0, -1) - (-1, 1, 2) = (3, -1, -3) \\ P(0, 1, 0) &\in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 6 + z - 3y + 3 + 2x = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0$$

El ángulo entre dos planos que se cortan es el mismo que el ángulo entre sus respectivos vectores normales. Hallemos el ángulo formado por los vectores normales de ambos planos.



El vector normal del plano π se obtiene del producto vectorial de sus vectores directores.

$$\begin{aligned} \Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -5t + s \\ z = -1 + 4s \end{cases} &\Rightarrow \begin{aligned} \vec{u} &= (4, -5, 0) \\ \vec{v} &= (0, 1, 4) \end{aligned} \left\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \right. \\ &= -20i + 4k - 16j = -20i - 16j + 4k = (-20, -16, 4) \end{aligned}$$

Consideramos como un vector normal al plano π el vector que hemos obtenido dividido por -4 .

$$\vec{n} = \frac{(-20, -16, 4)}{-4} = (5, 4, -1)$$

Averiguamos el ángulo formado por los vectores normales de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (5, 4, -1) \\ \pi' \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n}' = (2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = |\vec{n}| \cdot |\vec{n}'| \cdot \cos(\vec{n}, \vec{n}') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5, 4, -1) \cdot (2, 3, 1) = \sqrt{25+16+1} \cdot \sqrt{4+9+1} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{n}') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 12 - 1 = \sqrt{588} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{n}') \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{21}{\sqrt{588}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{n}') = \cos^{-1}\left(\frac{21}{\sqrt{588}}\right) \Rightarrow \boxed{(\vec{n}, \vec{n}') = 30^\circ}$$

El ángulo formado por los dos planos es de 30°

2) La distancia entre los puntos $P = (0, 1, 0)$ y $Q = (-1, 1, 2)$ es el módulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 2) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 2)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{5} = \boxed{2,24 \text{ u}}$$

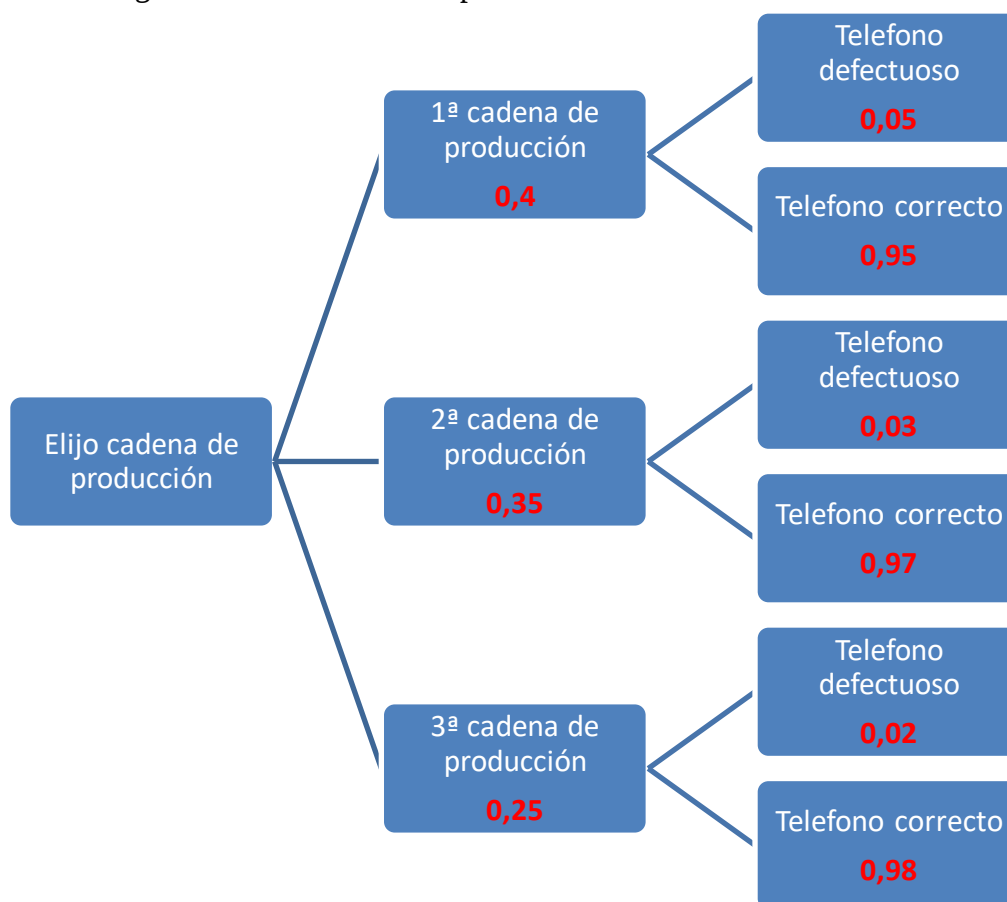
Ejercicio 4

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

1) [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Construyamos el diagrama de árbol de este experimento.



1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Teléfono defectuoso}) &= P(\text{se fabrique en 1ª cadena}) \cdot P(\text{Salga defectuoso en 1ª cadena}) + \\
 &+ P(\text{se fabrique en 2ª cadena}) \cdot P(\text{Salga defectuoso en 2ª cadena}) + \\
 &+ P(\text{se fabrique en 3ª cadena}) \cdot P(\text{Salga defectuoso en 3ª cadena}) = \\
 &= 0,4 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02 = \boxed{0,0355}
 \end{aligned}$$

2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Sea fabricado en 2ª cadena} / \text{Es defectuoso}) = \\
 &= \frac{P(\text{Sea fabricado en 2ª cadena y es defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} = \frac{0,35 \cdot 0,03}{0,0355} = \boxed{0,2957}
 \end{aligned}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t , el tipo de sistema.
- 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0, 0, 0) + t(2, 1, 1)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.
- 2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

- 1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.
- 2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

$$\text{Sean } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .
- 2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a-x^2}{2+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.
- 2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?
- 3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

$$\text{Sean las rectas } r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}, r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases} \text{ y el punto } A = (0, 0, 3).$$

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

- 1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1**

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t , el tipo de sistema.
 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

1) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{vmatrix} = -t^2 + t + t - t^2 = -2t^2 + 2t$$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2t^2 + 2t = 0 \Rightarrow -2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $t \neq 0$ y $t \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $t = 0$

El sistema queda tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Sumamos las ecuaciones}\} \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

El sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son $x = t$; $y = 0$; $z = 0$.

CASO 3. $t = 1$

El sistema queda tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y + z = 0 \\ -z - y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son $x = -t$; $y = 0$; $z = t$.

- 2) Calculado en el apartado anterior. La solución es $x = -t$; $y = 0$; $z = t$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

1) Calculamos la integral indefinida de usando el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (x+10)e^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x+10 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$= (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x}dx = (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x+10 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) + C$$

Como debe cumplir $F(0) = 0 \Rightarrow F(0) = \frac{e^0}{2} \left(0 + \frac{19}{2} \right) + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2} \right) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{19}{4}$

La primitiva pedida es $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) - \frac{19}{4}$.

Comprobamos la solución obtenida viendo que $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \frac{2e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) + \frac{e^{2x}}{2} \cdot 1 = e^{2x} \left(x + \frac{19}{2} \right) + e^{2x} \frac{1}{2} = e^{2x} \left(x + \frac{19}{2} + \frac{1}{2} \right) = e^{2x} (x+10) = f(x)$$

2) Usamos lo obtenido en el primer apartado para hallar el valor de la integral definida.

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x+10)e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) \right]_0^5 = \left[\frac{e^{10}}{2} \left(5 + \frac{19}{2} \right) \right] - \left[\frac{e^0}{2} \left(0 + \frac{19}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{e^{10}}{2} \cdot \frac{29}{2} - \frac{19}{4} = \boxed{\frac{29e^{10} - 19}{4}}$$

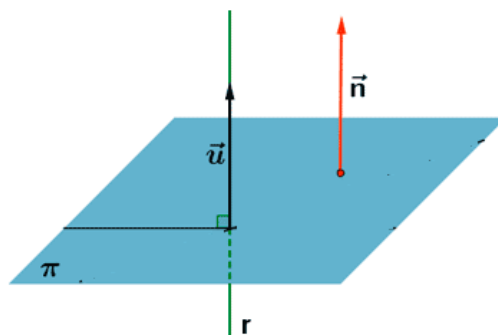
Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t(2,1,1)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.
- 2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

- 1) El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, 1)$ y el director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Para que sean ortogonales el vector normal y el director deben ser paralelos y sus coordenadas deben ser proporcionales.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, a, 1) \\ \vec{v} = (2, 1, 1) \\ \vec{n} \parallel \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{a}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} = \frac{a}{1} \Rightarrow 2 = a \\ \frac{a}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Para ser ortogonales debe ser $a = 1$

- 2) El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, 1)$ y el director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Su producto escalar vale $\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, a, 1) \cdot (2, 1, 1) = 4 + a + 1 = 5 + a$.

Este producto escalar es 0 cuando $a = -5$.

En este caso la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

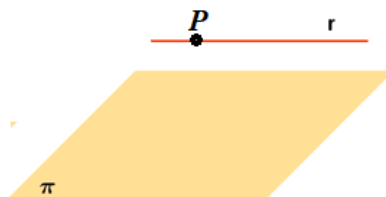
Comprobamos si el punto $P(0,0,0)$ de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi \equiv 2x + ay + z = 2 \\ \text{¿}(0,0,0) \in \Pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿}0 + 0 + 0 = 2?$$

El punto P no cumple la ecuación del plano y no pertenece a dicho plano.

La recta no está contenida en el plano, sino que es paralela cuando $a = -5$.

La distancia entre recta y plano (cuando son paralelos) es la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano.



$$d(r, \Pi) = d((0,0,0), \Pi) = \left| \frac{0 + 0 + 0 - 2}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{30}} u$$

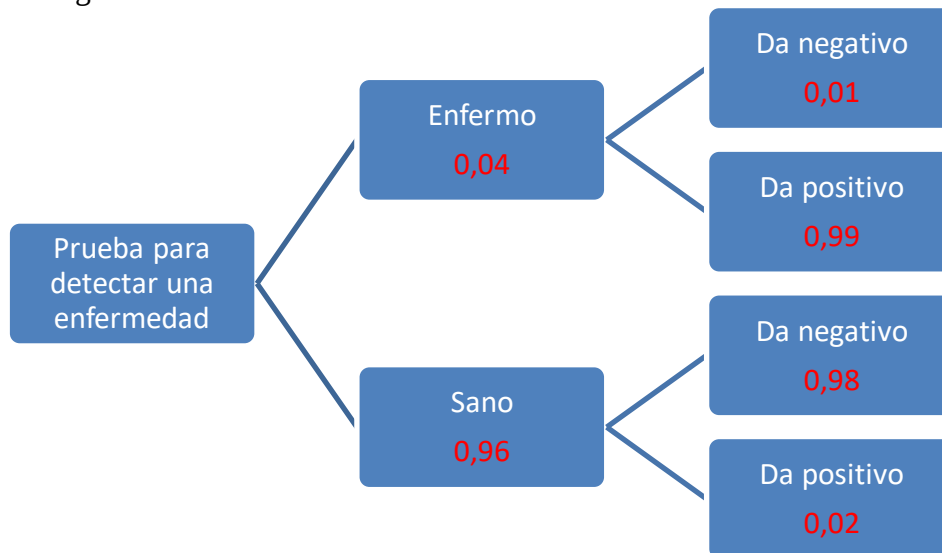
Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Realizamos un diagrama de árbol.



1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Dé negativo}) &= P(\text{Enfermo}) \cdot P(\text{Dé negativo} / \text{Enfermo}) + P(\text{Sano}) \cdot P(\text{Dé negativo} / \text{Sano}) = \\
 &= 0,04 \cdot 0,01 + 0,96 \cdot 0,98 = \boxed{0,9412}
 \end{aligned}$$

2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Esté sana} / \text{Ha dado positivo}) &= \frac{P(\text{Esté sana} \cap \text{Ha dado positivo})}{P(\text{Ha dado positivo})} = \\
 &= \frac{P(\text{Esté sana}) P(\text{Ha dado positivo} / \text{Está sana})}{1 - P(\text{Ha dado negativo})} = \frac{0,96 \cdot 0,02}{1 - 0,9412} = \frac{0,0192}{0,0588} = 0,3265
 \end{aligned}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

1) Calculemos el determinante de la matriz M .

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 6 = 1 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz M es no nulo su rango es 3

2) Calculemos M^2 y la inversa de M .

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -1+2 & 1 \\ 3-6-1 & -3+4 & 2+2 \\ 1-2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos cuando se cumple la igualdad $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

$$M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ -4x+y+4z \\ -x-y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ 5x-2y+z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z = 4x-2y+z \\ -4x+y+4z = 5x-2y+z \\ -x-y+4z = 2x-y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x+3y=0 \\ -9x+3y+3z=0 \\ -3x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-y-z=0 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-y=0 \\ 3z-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-y=0 \\ 2z-y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=2z} \\ \boxed{x=z}$$

La solución es $x=t$; $y=2t$; $z=t$. El vector v es $(t, 2t, t)$, siendo t cualquier valor real.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a-x^2}{2+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.
 2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?
 3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

1) Para que sea continua en $x = 0$ deben cumplirse:

- Existe $f(0) = \frac{a-0^2}{2+0} = \frac{a}{2}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a-x^2}{2+x} = \frac{a}{2}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{0}{0} = \{\text{Indeterminación} \rightarrow \text{Aplico L'Hôpital}\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$
- Los tres valores son iguales. $\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=1}$

2) En el entorno de $x = 2$ la función es $f(x) = \frac{a-x^2}{2+x}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{-2x(2+x) - 1(a-x^2)}{(2+x)^2} = \frac{-4x-2x^2-a+x^2}{(2+x)^2} = \frac{-x^2-4x-a}{(2+x)^2}.$$

Para que sea $x = 2$ un extremo debe anular la derivada: $f'(2) = 0$.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{-2^2-4 \cdot 2-a}{(2+2)^2} = 0 \Rightarrow -4-8-a = 0 \Rightarrow a = -12$$

Obtenemos el signo de la derivada segunda para $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{-x^2-4x+12}{(2+x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x-4)(2+x)^2 - 2(2+x)(-x^2-4x+12)}{(2+x)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(2) = \frac{(-4-4)(2+2)^2 - 2(2+2)(-4-8+12)}{(2+2)^4} = \frac{-128}{256} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa en $x = 2$ hay un máximo relativo de la función.

3) $\int_0^3 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^3 g(x)dx \Rightarrow 4 = \int_0^2 g(x)dx + 6 \Rightarrow \boxed{\int_0^2 g(x)dx = 4-6 = -2}$

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

El vector director de la recta $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (0, 1, 0) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - 2k = (1, 0, -2)$$

El vector director de la recta $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (1, 2, 0) \\ \vec{n}_2 = (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 2k + j = (-2, 1, -2)$$

Los vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, -2)$ y $\vec{v}_2 = (-2, 1, -2)$ no son paralelos y las rectas se cortan o cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (1, 0, -2) \\ \vec{v}_2 = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-2}$$

Si el plano es paralelo a las rectas su vector normal es el producto vectorial de los vectores de las rectas.

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1, 0, -2) \times (-2, 1, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4j + k + 2j + 2i = 2i + 6j + k = (2, 6, 1)$$

Si su vector normal es $\vec{n} = (2, 6, 1)$ el plano tiene ecuación $2x + 6y + z + D = 0$.

Como pasa por $A(0,0,3)$ entonces: $2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$.

El plano buscado es $\boxed{2x + 6y + z - 3 = 0}$

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

X = Peso de una persona. $X = N(70, 10)$

1) Calculamos $P(65 < X < 75)$.

$$\begin{aligned} P(65 < X < 75) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{65-70}{10} < \frac{X-70}{10} < \frac{75-70}{10}\right) = \\ &= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = \\ &= P(Z < 0,5) - [1 - P(Z < 0,5)] = \\ &= 0,6915 - [1 - 0,6915] = 0,383 \end{aligned}$$

El porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg es de 38,3%.

2) Calculamos $P(X > 85)$.

$$\begin{aligned} P(X > 85) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-70}{10} > \frac{85-70}{10}\right) = \\ &= P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668} \end{aligned}$$

El porcentaje de población que pesa al menos 85 kg es de 6,68 %.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

LOMCE – SEPTIEMBRE 2018

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m :

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m .
- 2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

Ejercicio 2

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

- 2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\frac{x^d + 1}{x - 2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A: (0, 1, 0) + t(1, -1, 2) + s(0, 0, 1) \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$B: x + 2y + 2z = 1$$

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A .
- 2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B .
- 3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B .

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
- 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
- 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

Ejercicio 3

Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

- 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1**

Considere el sistema dependiente del parámetro m :

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m .

2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

1) Estudiamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix} = 0 + m^2 + 0 - (0 + 0 + 2m^2) = -m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Distinguimos dos casos distintos en función del valor de m .

CASO 1. $m \neq 0$.

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 0$.

El determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Veamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Como la 3ª columna son todos ceros calculamos el valor del determinante del menor de orden

3 que resulta de quitar esta columna $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Como rango de A/B = 3 $\neq$ 2 = rango de A **el sistema es incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ el sistema es incompatible.

2) Para $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución utilizando Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 3 & -2m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 3m^2 + 0 - 0 - 0 - 4m^2}{-m^2} = \frac{-m^2}{-m^2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ m & 0 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2m + 0 - 0 - 0 + 3m}{-m^2} = \frac{m}{-m^2} = -\frac{1}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -2m & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-3 + 0 + 4m^2 + 2 - 3m^2 - 0}{-m^2} = \frac{-1 + m^2}{-m^2} = \frac{1 - m^2}{m^2}$$

La solución del sistema es $x = 1$; $y = \frac{-1}{m}$; $z = \frac{1 - m^2}{m^2}$

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\frac{x^d + 1}{x - 2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x} = \frac{\operatorname{sen}(0) + 0}{\ln(1) + 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x^2) \cdot 4x + 1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{\cos(0) \cdot 0 + 1}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) Si $f(x) = \frac{x^d + 1}{x - 2}$ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = mx + n$ donde el valor de m se calcula mediante el límite:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^d + 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x^2 - 2x}$$

Para que este límite exista y no sea cero debe ser el valor de $d = 2$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En cuyo caso hallamos el valor de n mediante el límite:

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota oblicua existe cuando $d = 2$ y dicha asíntota tiene ecuación $y = x + 2$.

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A: (0,1,0) + t\overrightarrow{(1,-1,2)} + s\overrightarrow{(0,0,1)} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$B: x + 2y + 2z = 1$$

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A.
 2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B.
 3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B.

1) $A: (0,1,0) + t\overrightarrow{(1,-1,2)} + s\overrightarrow{(0,0,1)} \quad t, s \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} P(0,1,0) \in A \\ \vec{u} = (1,-1,2) \\ \vec{v} = (0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow A: \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - (y-1) = 0 \Rightarrow -x - y + 1 = 0$$

La ecuación implícita (general) del plano A es $A: x + y - 1 = 0$.

2) Comprobamos que los planos se cortan.

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_A = (1,1,0) \\ \vec{n}_B = (1,2,2) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{2}$$

Al no tener las coordenadas proporcionales los vectores normales de los planos no son paralelos y por tanto los planos A y B se cortan en una recta.

Obtenemos la ecuación de la recta r intersección de ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - y \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - y + 2y + 2z = 1 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y = -2z} \Rightarrow \underline{x = 1 + 2z} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(1,0,0) \\ \vec{v}_r = (2,-2,1) \end{cases}$$

3) El ángulo entre los planos es el mismo que el ángulo entre los vectores normales y para hallar dicho ángulo utilizamos el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_A = (1,1,0) \\ \vec{n}_B = (1,2,2) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(A, B) = \cos(\vec{n}_A, \vec{n}_B) = \frac{\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B}{|\vec{n}_A| \cdot |\vec{n}_B|} =$$

$$= \frac{(1,1,0) \cdot (1,2,2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1+2}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{ángulo}(A, B) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

1)

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+y & 3+1 \\ x+3y & x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+x & 1+3 \\ 3y+x & y+3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+y=3+x \\ 4=4 \\ x+3y=3y+x \\ x+3=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 0=0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=x}$$

Se cumple $AB = BA$ cuando $y = x$.

2) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A^2 = 6A \Rightarrow A \cdot A = 6A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9+x & 3+3 \\ 3x+3x & x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6x & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9+x=18 \\ 6=6 \\ 6x=6x \\ x+9=18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=9}$$

Para $x = 9$ calculamos el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

Como el determinante de A es nulo la matriz no tiene inversa cuando $x = 9$.

3) Despejamos X en la ecuación matricial, suponiendo que N y R son invertibles.

$$\left. \begin{array}{l} N \cdot X \cdot R = S \\ \text{Existe } N^{-1} \\ \text{Existe } R^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N^{-1} \cdot N \cdot X \cdot R \cdot R^{-1} = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \\ N^{-1} \cdot N = Id \\ R^{-1} \cdot R = Id \end{array} \right\} \Rightarrow Id \cdot X \cdot Id = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}}$$

Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

1) Para que sea continua debe serlo en $x = 0$ y en $x = -2$.

En $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\operatorname{sen}(x) + b = 2\operatorname{sen}0 + b = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0$$

- Existe $f(0) = 2\operatorname{sen}(0) + b = b$
- Son iguales $\rightarrow b = 0$.

En $x = -2$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + ax) = (-2)^2 + a(-2) = -2a + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

- Existe $f(-2) = -2 + 2 = 0$
- Son iguales $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \rightarrow a = 2$.

Para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$ necesitamos que sea $a = 2$ y $b = 0$.

2) Si $a = 3$, $b = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + 3x & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

Estudiemos la discontinuidad en $x = -2$:

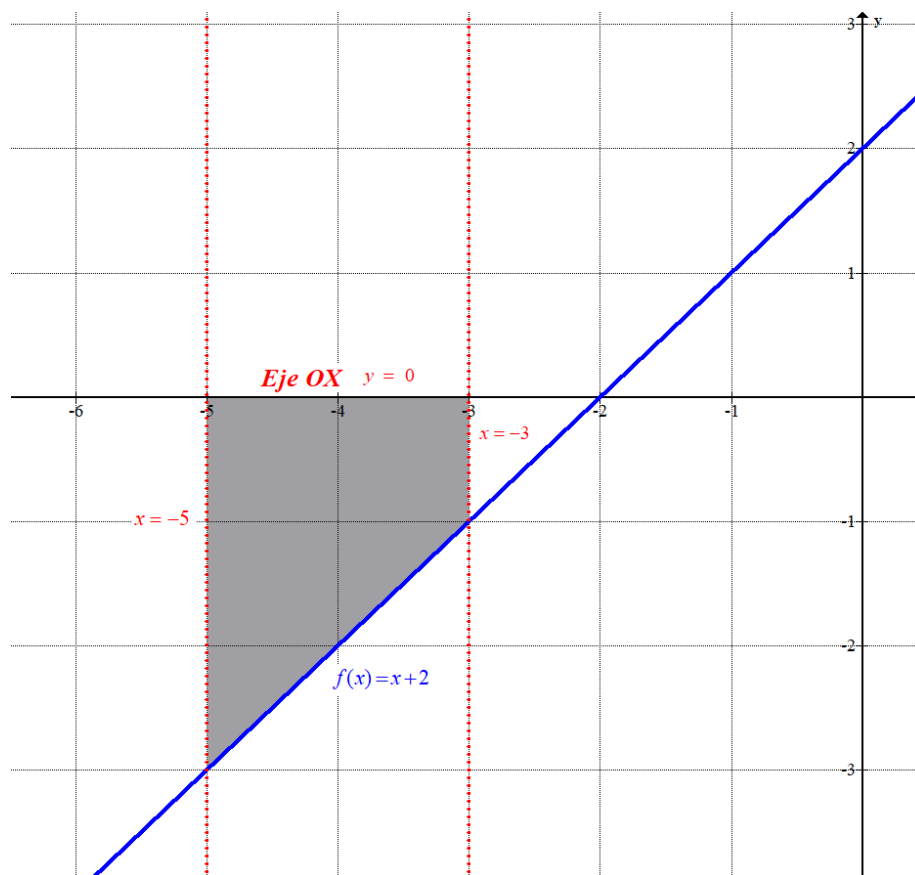
Comprobamos si existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, para ello deben ser iguales los límites laterales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 3x) = (-2)^2 + 3(-2) = 4 - 6 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \neq -2 \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

- 3) Entre $x = -5$ y $x = -3$ la función tiene la expresión $f(x) = x + 2$ que corta al eje X ($y = 0$) en $x = -2$ que no pertenecen al intervalo $(-5, -3)$.

Dibujamos la región encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.



Calculamos la integral definida de la función entre -5 y -3 .

$$\int_{-5}^{-3} x + 2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-5}^{-3} = \left[\frac{(-3)^2}{2} + 2(-3) \right] - \left[\frac{(-5)^2}{2} + 2(-5) \right] = \frac{9}{2} - 6 - \frac{25}{2} + 10 = -4$$

El área es el valor absoluto de esta integral definida $\rightarrow \text{Área} = 4 \text{ u}^2$.

El valor del área también se puede hacer contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno.

En el dibujo del recinto del cual queremos hallar el área se observa que la zona gris cubre 3 cuadrados enteros y 2 medios, por lo que el área vale $3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ unidades cuadradas.

Ejercicio 3

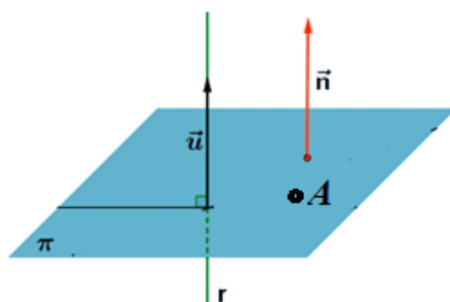
Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .

1) Obtenemos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = (1,0,0) \times (0,1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k + j = j + k = (0,1,1)$$



El vector normal del plano π perpendicular a la recta r es el vector director de la recta $\rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r = (0,1,1)$. Obtenemos la ecuación general del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} A = (4,0,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = (4,0,1) \in \pi \\ \pi: y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: y + z - 1 = 0}$$

2) Necesitamos dos vectores directores para hallar el plano π' pedido y para ello obtengo el vector director de la recta r y un punto de la misma.

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0,1,1)$$

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2} \\ y=z+2 \end{cases} \Rightarrow \text{Tomo } \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow P_r(2,2,0)$$

El plano que nos piden tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (0,1,1)$ y $\overrightarrow{P_r A}$ y uno de sus puntos es $A = (4, 0, 1)$ por lo que su ecuación es:

$$\overrightarrow{P_r A} = (4,0,1) - (2,2,0) = (2,-2,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r A} = (2,-2,1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ A(4,0,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-4+2y-2(z-1)+2(x-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4+2y-2z+2+2x-8=0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 3x+2y-2z-10=0}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2018**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB = C$ y calcule todas sus soluciones.
- 2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0, y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 3$ y $x = 4$.

Ejercicio 3

Tomemos la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x - y = 2$.

- 1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.
- 2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .
- 3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π .
- 4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b .
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.

- 1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura h del cilindro en función del radio r de la base.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función $a(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
- 3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, área del cilindro: $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Ejercicio 3

Sean r y s las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s .
- 3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB = C$ y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0, y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

1) Realizamos las operaciones entre las matrices y obtenemos el sistema pedido.

$$AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2z-2+x \\ 2+y-z \\ 2(x+z)+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z-2+x=-2 \\ 2+y-z=3 \\ 2(x+z)+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=3-2 \\ 2x+2z+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y-z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-z=1 \\ -4z+y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow \boxed{y=1+z}$$

Las soluciones del sistema que surge de la ecuación matricial son $x = -2t$; $y = 1+t$; $z = t$, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.

2) Si $x = 0, y = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = -2z^2 - 2z$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2z^2 - 2z = 0 \Rightarrow -2z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes que se nos plantean.

- Si $z \neq 0$ y $z \neq -1$ entonces el determinante de A no se anula y su rango es 3.
- Si $z = 0$ el determinante de A se anula y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con determinante

no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

- Si $z = -1$ el determinante de A se anula y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con

determinante no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su

determinante vale $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $z \neq 0$ y $z \neq -1$ el rango de A es 3 y para $z = 0$ o $z = -1$ el rango de la matriz es 2.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de $f(x)$.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 3$ y $x = 4$.

1) Debemos calcular $\int f(x)dx = \int \frac{x-1}{x^2-7x+10}dx$.

Para ello utilizamos el método de descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = x \\ \frac{7-3}{2} = 2 = x \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{x-1}{(x-5)(x-2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-5)}{(x-5)(x-2)}$$

$$x-1 = A(x-2) + B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=2 \rightarrow 2-1=0+B(2-5) \rightarrow 1=-3B \rightarrow B=-\frac{1}{3} \\ \text{Si } x=5 \rightarrow 5-1=A(5-2)+0 \rightarrow 4=3A \rightarrow A=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{4/3}{x-5} - \frac{1/3}{x-2}$$

Sustituimos en la integral y resolvemos.

$$\int f(x)dx = \int \frac{x-1}{x^2-7x+10}dx = \int \frac{4/3}{x-5} - \frac{1/3}{x-2}dx = \int \frac{4/3}{x-5}dx - \int \frac{1/3}{x-2}dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-5}dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2}dx = \boxed{\frac{4}{3} \ln|x-5| - \frac{1}{3} \ln|x-2| + K}$$

2) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-7x+10} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Este valor $x = 1$ no está entre 3 y 4 por lo que el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 3$ y $x = 4$ se obtiene con una integral definida de la función entre 3 y 4.

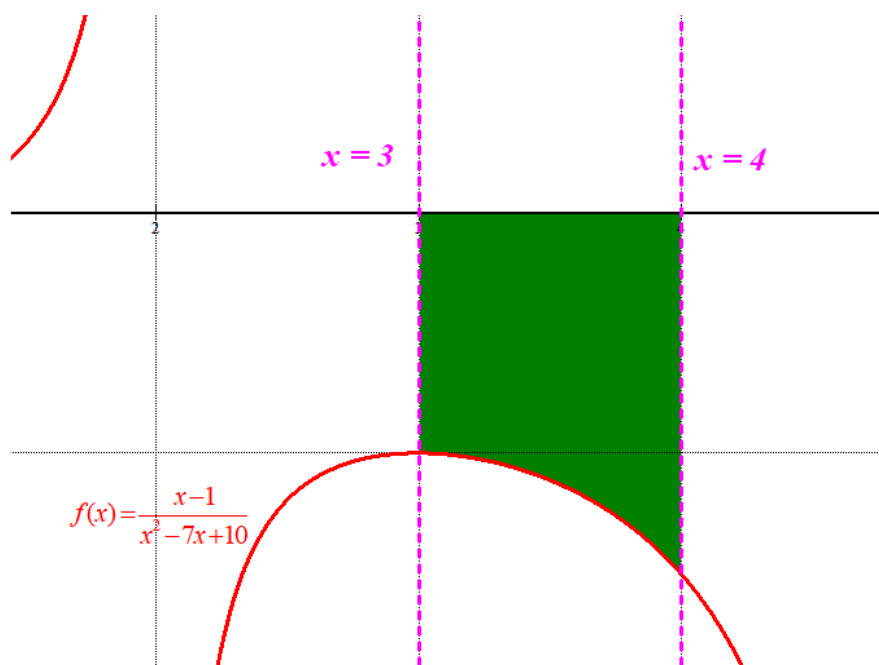
Comprobamos si la función es positiva o negativa en este intervalo.

$$x = 3,5 \Rightarrow f(3,5) = \frac{3,5-1}{(3,5)^2 - 7 \cdot 3,5 + 10} = -1,111 < 0$$

La función es negativa y el área es el valor absoluto de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_3^4 f(x) dx &= \int_3^4 \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = \left[\frac{4}{3} \ln|x-5| - \frac{1}{3} \ln|x-2| \right]_3^4 = \\ &= \left[\frac{4}{3} \ln|4-5| - \frac{1}{3} \ln|4-2| \right] - \left[\frac{4}{3} \ln|3-5| - \frac{1}{3} \ln|3-2| \right] = \\ &= \frac{4}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 1 = 0 - \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + 0 = -\frac{5}{3} \ln 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \left| -\frac{5}{3} \ln 2 \right| = \frac{5}{3} \ln 2 = 1,15 u^2}$$



Ejercicio 3

Tomemos la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x - y = 2$.

1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.

2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .

3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π .

4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

1) Hallamos un vector director de la recta y el normal del plano.

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 1) \times (2, 0, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k + j = i + 3j + 2k$$

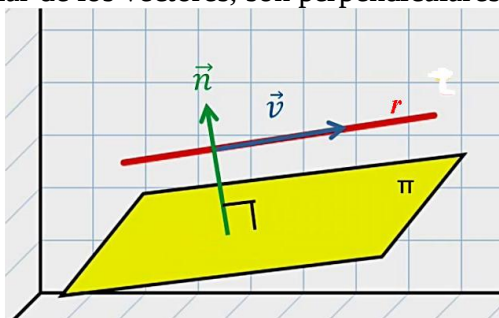
$$\vec{v}_r = (1, 3, 2)$$

$$\Pi: 3x - y = 2 \Rightarrow \vec{n} = (3, -1, 0)$$

Calculamos el producto escalar de ambos vectores y comprobamos si es cero o no.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 3, 2) \cdot (3, -1, 0) = 3 - 3 = 0$$

Al ser cero el producto escalar de los vectores, son perpendiculares y plano y recta son paralelos.



2) Hallamos un punto P cualquiera del plano $\Pi: 3x - y = 2$. Tomamos $x = 0 \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$.

Como en la ecuación del plano no aparece la z entonces podemos darle cualquier valor. El punto es $P(0, -2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, 3, 2) \\ P(0, -2, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$$

Existen infinitas rectas contenidas en el plano y paralelas a la recta r .

3) Hallamos un punto cualquiera de la recta. La distancia de la recta al plano es la distancia del punto al plano.

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow P(0, -1, 0)$$

Tomamos $\boxed{x = 0}$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi: 3x - y = 2 \\ P(0, -1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \text{distancia}(r, \Pi) = \text{distancia}(P, \Pi) = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \boxed{0,31u}$$

4) Las coordenadas del vector director son los valores de los denominadores:

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_s = (3, 2, 2)}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

1) Este es un sistema de ecuaciones cuya clasificación depende del rango de la matriz de coeficientes A y del rango de la matriz ampliada A/B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz A/B es de dimensión 4×4 empezamos estudiando las posibilidades del valor del rango de esta matriz. Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad -b \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 2-b \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Desarrollo por la} \\ \text{columna } 4^a \end{array} \right\} = (+1) \begin{vmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - b(2-b) - 2(2-b) = (-b-2)(2-b)$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow (-b-2)(2-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b-2 = 0 \rightarrow \boxed{b = -2} \\ 2-b = 0 \rightarrow \boxed{b = 2} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $b \neq 2$ y $b \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es distinto de cero y su rango es 4. Y sin embargo, el rango de la matriz A que es de dimensión 4×3 es como máximo 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $b = 2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es cero y vemos cual puede ser su rango. Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 1^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio fila } 3^a \\ \text{por fila } 4^a \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio la fila } 3^a \\ \text{por fila } 2^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 3 al igual que el rango de A pues A son las tres primeras columnas. Como el número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible determinado.

CASO 3. Si $b = -2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es cero y vemos cual puede ser su rango. Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad 0 \quad -4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -4 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 4^a \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 4^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad -2 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad -4 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A/B tiene rango 3, al igual que la matriz A y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

- 2) Para $b = -2$ hemos visto que el sistema es compatible determinado (solución única). Utilizamos la matriz equivalente obtenida en el apartado anterior y resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ \boxed{z = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ \boxed{y = -1} \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

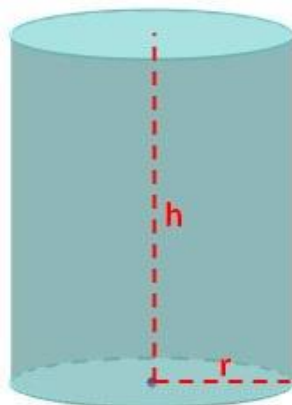
La solución es $x = -1$; $y = -1$; $z = 0$.

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.

- 1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura h del cilindro en función del radio r de la base.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función $a(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
- 3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, área del cilindro: $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$



$$1) V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 250\pi = \pi r^2 h \Rightarrow 250 = r^2 h \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

- 2) Sustituimos en la expresión del área el valor de la altura.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{250}{r^2} \\ a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{array} \right\} \Rightarrow a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$

- 3) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función área.

$$a(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r} \Rightarrow a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2}$$

$$a'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{500\pi}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow 500\pi = 4\pi r^3 \Rightarrow 125 = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125} = 5$$

Sustituimos en la derivada segunda y comprobamos el signo para el radio 5.

$$a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} \Rightarrow a''(r) = 4\pi + 2 \frac{500\pi}{r^3}$$

$$a''(5) = 4\pi + 2 \frac{500\pi}{5^3} > 0$$

El radio de 5 metros nos da un área mínima y el valor de la altura es $h = \frac{250}{r^2} = \frac{250}{5^2} = 10$ metros.

Ejercicio 3Sean r y s las rectas

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s .
 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s .
 3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$.

1) Obtenemos los vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_r(1,0,-2) \\ \vec{v}_r = (0,2,3) \end{matrix} \quad s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{matrix} P_s(1,0,-1) \\ \vec{u}_s = (3,1,-2) \end{matrix}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{0}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$, por lo que las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{u}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ y comprobamos si es nulo o no.

$$\left. \begin{matrix} \overrightarrow{P_r P_s} = (1,0,-1) - (1,0,-2) = (0,0,1) \\ \vec{v}_r = (0,2,3) \\ \vec{u}_s = (3,1,-2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Al ser distinto de cero los 3 vectores forman un paralelepípedo y las rectas se cruzan.

- 2) La distancia entre las rectas es el cociente del volumen del paralelepípedo anterior dividido entre el área de la base (módulo del producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas).

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 9j - 6k - 3i = -7i + 9j - 6k = (-7, 9, -6)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{166}$$

$$\text{Distancia}(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-6|}{\sqrt{166}} = \boxed{0,465 \text{ u}}$$

- 3) El plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$ tiene como vector normal el vector director de s .

$$\left. \begin{matrix} (0,1,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{u}_s = (3,1,-2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} (0,1,0) \in \pi \\ 3x + y - 2z + D = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

El plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$ tiene ecuación $\pi: 3x + y - 2z - 1 = 0$.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2017**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

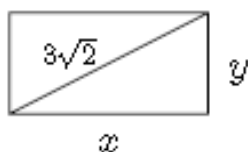
Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Ejercicio 2

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



- 2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$.

Ejercicio 3

Sean $P: x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos

- 1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
- 2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .
- 3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .
- 4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}.$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B.$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ be^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

2) [1 PUNTO] Si $a = 1$, $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q: (0, 0, 1) + s(2, -1, 0) + t(2, -1, 1)$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por $(-1, 2, 4)$ que sea perpendicular al plano Q .

3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1, 2, 4)$ al plano Q .

SOLUCIONES**OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1****Ejercicio 1**

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .

2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

1) Veamos cuando se anula el determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{vmatrix} = -x^3 - x^3 + 2x^2 + x^3 + x^2 - 2x^3 = -3x^3 + 3x^2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -3x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

En este caso el determinante de M es no nulo y su **rango es 3**.

CASO 2. $x = 0$.

En este caso el determinante de M es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Solo tiene un elemento no nulo, por lo que el rango de } M \text{ es 1.}$$

CASO 3. $x = 1$.

En este caso el determinante de M es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª (igual que}$$

$$\text{la 3ª) y la fila 1ª (igual que la 2ª)} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0. \text{ El}$$

rango de } M \text{ es 2.}

Resumiendo: Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ el rango de M es 3, si $x = 1$ el rango de M es 2 y si $x = 0$ el rango de M es 1.

2) Para $x = -1$ la matriz M tiene inversa pues su determinante es no nulo.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 - 1 + 1 + 2 = 6 \neq 0$$

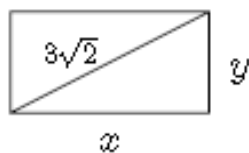
Calculamos la matriz inversa de M.

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



- 2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$.

- 1) Aplicando el teorema de Pitágoras la relación entre los lados del rectángulo es:

$$x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 18 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{18 - x^2}$$

El perímetro es la suma de los lados del rectángulo:

$$P(x) = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{18 - x^2}$$

Busco el máximo de esta función usando la derivada.

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow P'(x) = 2 + 2 \frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 2 \Rightarrow 2x = 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18 - x^2} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{18 - x^2})^2 \Rightarrow x^2 = 18 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}}$$

Veamos cómo es la función para valores menores y mayores de 3.

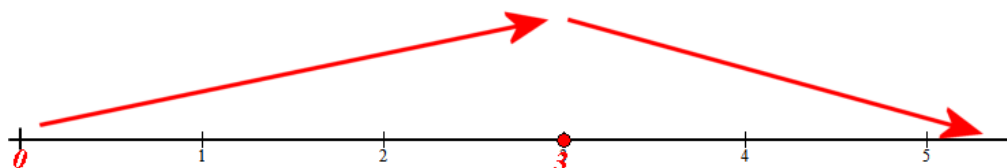
- Para valores de 0 a 3 cm tomamos $x = 1$ y la derivada vale $P'(1) = 2 - \frac{2}{\sqrt{18-1^2}} = 1,51 > 0$ y la

función (el perímetro) crece de 0 a 3.

- Para valores mayores que 3 cm tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$P'(4) = 2 - \frac{8}{\sqrt{18-4^2}} = -3,65 < 0 \text{ y la función (el perímetro) decrece a partir de 3 cm.}$$

La función sigue el esquema siguiente.



El perímetro es máximo para $x = 3$ cm. En este rectángulo la altura vale $y = \sqrt{18 - 3^2} = 3$.

El perímetro es máximo para el cuadrado de lado 3 cm.

2) La recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2) tiene ecuación:

$$y - 2 = h'(1)(x - 1)$$

Calculamos el valor de la derivada de la función para $x = 1$.

$$h(x) = x^2 + x \Rightarrow h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow h'(1) = 2 + 1 = 3$$

Sustituimos y obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$\left. \begin{array}{l} y - 2 = h'(1)(x - 1) \\ h'(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 1}$$

Ejercicio 3

Sean $P: x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .

4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

$$1) P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

2) PRIMERA FORMA. Despejamos “y” y “z” en la ecuación del plano.

$$P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - 3y - 2z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\lambda - 2\alpha \\ y = \lambda \\ z = \alpha \end{cases}$$

SEGUNDA FORMA. Obtengamos tres puntos del plano que no estén alineados y con ellos obtendremos dos vectores directores del plano y las ecuaciones paramétricas de dicho plano.

$$\left. \begin{array}{l} P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ y = 0; z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ y = 1; z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3 - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ y = 0; z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow C(-1, 0, 1)$$

Obtenemos los vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 0) \in P \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-3, 1, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow P: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda - 2\alpha \\ y = \lambda \\ z = \alpha \end{cases}$$

3) Estudiemos la posición relativa de sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2) \\ Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 6, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

Los vectores normales de ambos planos son proporcionales por lo que los planos son paralelos o coincidentes.

No son coincidentes pues el punto $A(1, 0, 0)$ del plano P no pertenece al plano Q .

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 0) \\ P: x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + 0 - 1 = 0; \text{Cierto!} \Rightarrow A(1, 0, 0) \in P$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 0) \\ Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 0 + 0 + 3 = 0; \text{Falso!} \Rightarrow A(1, 0, 0) \notin Q$$

Los planos P y Q son paralelos.

4) La recta r normal a Q tiene como vector director el vector normal a Q .

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0, 0) \in r \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 6, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B.$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

1) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix}$ y la matriz de los términos independientes es

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ La ecuación matricial es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2) Discutimos el sistema, empezando por investigar el posible valor del rango de A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix} = t + (t+1)(t-1) + 2t^2 - (t-1) - 2t^2 - t(t+1) = \\ &= t + t^2 - 1 + 1 - t^2 - t = -t \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Estudiaremos dos situaciones diferentes.

Situación 1ª. $t \neq 0$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

Situación 2ª. $t = 0$

En este caso el determinante es nulo y el rango de A no es 3. Veamos cómo queda la matriz A y cuál es su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª}$$

(igual que la columna 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

¿Cuál es el rango de la matriz ampliada A/B?

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ tiene un menor de orden 3 que resulta de quitar la columna } 2^{\text{a}} \text{ (igual que la columna } 3^{\text{a}}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 0.$$

El rango de A/B no es 3.

Como el rango de A es 2 el de A/B también es 2 y es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para $t \neq 0$ utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \\ -2 & t & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{3t - 2(t+1) + t + 2 - t - 3t(t+1)}{-t} = \frac{\cancel{3t} - \cancel{2t} - \cancel{2} + \cancel{t} + \cancel{2} - \cancel{t} - 3t^2 - \cancel{3t}}{-t} = \frac{-3t^2 - 2t}{-t} = 3t + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & -2 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{t + 3(t+1)(t-1) - 4t - (t-1) - 6t^2 + 2(t+1)}{-t} = \frac{\cancel{t} + 3t^2 - \cancel{3} - 4t - \cancel{t} + \cancel{1} - 6t^2 + 2t + \cancel{2}}{-t} = \frac{-3t^2 - 2t}{-t} = 3t + 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2t & 1 & 1 \\ t-1 & t & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{-2 + t - 1 + 6t^2 - 3t + 3 + 4t - t}{-t} = \frac{6t^2 + t}{-t} = -6t - 1$$

Cuando $t \neq 0$ la solución es $x = 3t + 2$; $y = 3t + 2$; $z = -6t - 1$.

Resolvemos el sistema cuando $t = 0$.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ -x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ \boxed{x = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + y + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Cuando $t = 0$ las soluciones son $x = 2$; $y = 1 - \alpha$; $z = \alpha$, para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ be^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

- 1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.
 2) [1 PUNTO] Si $a = 1$, $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.
 3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

- 1) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 3$ y en $x = 5$.

En $x = 3$

- Existe el límite de la función en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + x + 3 = 9a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x^2 - 3 = 15 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Deben ser iguales} \end{array} \right\} \Rightarrow 9a + 6 = 15 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$$

- Existe la función en $x = 3$. $f(3) = ax^2 + x + 3 = 9a + 6 = 15$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $a = 1$ la función es continua en $x = 3$.

En $x = 5$

- Existe el límite de la función en $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} 2x^2 - 3 = 47 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} be^x = be^5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Deben ser iguales} \end{array} \right\} \Rightarrow 47 = be^5 \Rightarrow b = \frac{47}{e^5} \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 47$$

- Existe la función en $x = 5$. $f(5) = \frac{47}{e^5} e^5 = 47$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $b = \frac{47}{e^5}$ la función es continua en $x = 5$.

Resumiendo: Los valores que hacen la función continua son $a = 1$ y $b = \frac{47}{e^5}$.

2) Si $a = 1$, $b = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 3e^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

Como nos piden el área del recinto entre $x = -1$ y $x = 3$ la expresión de la función que vamos a utilizar es $f(x) = x^2 + x + 3$.

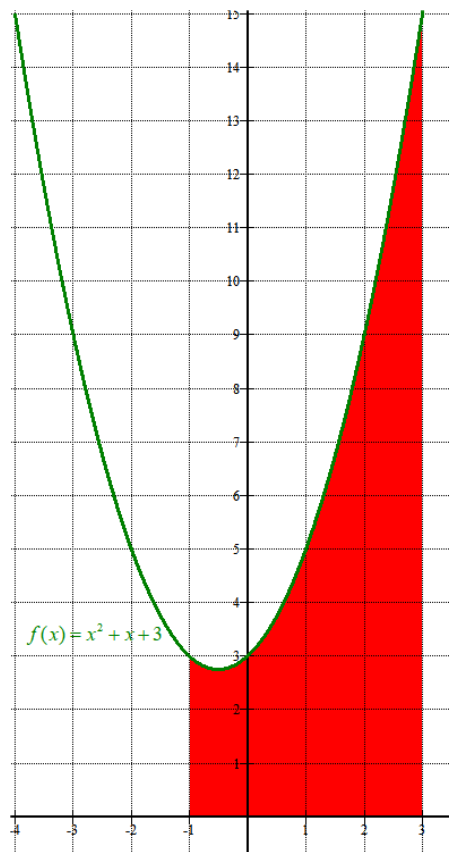
Veamos si la gráfica corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + x + 3 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \text{No existe}$$

Tomamos $x = 0$ para ver si la función es positiva o negativa $\rightarrow f(0) = 0^2 + 0 + 3 = 3 > 0$

No corta al eje de abscisas y la función es siempre positiva. El área será el valor de la integral definida de la función entre -1 y 3 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 x^2 + x + 3 dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right] = \\ &= 9 + \frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{25,33 u^2} \end{aligned}$$



El valor hallado para el área coincide con el valor aproximado que se puede obtener contando cuadraditos en el dibujo superior.

3) Hallamos los posibles extremos relativos averiguando cuando se anula la derivada primera.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x + 1 \\ g'(x) &= 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Comprobamos si es máximo o mínimo con el signo de la derivada segunda.

$$g'(x) = 4x + 1 \Rightarrow g''(x) = 4 \Rightarrow g''\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{4}$.

La función es una parábola y este es su vértice. $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{21}{8}$.

El mínimo relativo de la función es el punto $\left(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8}\right)$

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q: (0,0,1) + s(2,-1,0) + t(2,-1,1)$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.
 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por $(-1,2,4)$ que sea perpendicular al plano Q.
 3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1,2,4)$ al plano Q.

$$1) \quad Q: (0,0,1) + s(2,-1,0) + t(2,-1,1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (0,0,1) \in Q \\ \vec{u} = (2,-1,0) \\ \vec{v} = (2,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow Q: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 2z + 2 + 2z - 2 - 2y = 0 \Rightarrow -x - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{Q: x + 2y = 0}$$

- 2) Si la recta es perpendicular al plano Q tendrá como vector director el normal del plano Q.

$$Q: x + 2y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} (-1, 2, 4) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

- 3) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto $(-1,2,4)$ a un plano $Q: x + 2y = 0$.

$$d((-1, 2, 4), Q) = \frac{|-1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5} u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Hallo el punto de corte de la recta hallada en el apartado 2) con el plano Q hallado en el apartado

1) y la distancia del punto al plano será el módulo del vector que une un punto con el otro.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ Q: x + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \\ y = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 4\right)$$

$$\begin{aligned} d((-1, 2, 4), Q) &= d((-1, 2, 4), A) = \left| \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 4\right) - (-1, 2, 4) \right| = \\ &= \left| \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5} u} \end{aligned}$$



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2017**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial $A \cdot M = B$, donde $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M ?
- 2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?
- 3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

- 1) [2,5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f . Compruebe la solución obtenida.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Ejercicio 3

Sea P el punto $(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

- 1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r .
- 3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P .

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.
- 2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.
- 3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

Ejercicio 3

Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.
- 2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.
- 4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4, -1, 2)}$ son ortogonales.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial $A \cdot M = B$, donde $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M ?
- 2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?
- 3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

- 1) Para que sea posible el producto de la matriz A por la matriz M debe ser el número de filas de M igual que el número de columnas de A (3). Y el número de columnas de M debe ser igual al de columnas de B (2).

Debe ser de dimensiones 3×2 .

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot M = B \\ 3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 3 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}$$

- 2) Para que A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 2 + 2t + 2t - t = t^2 + t - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = t \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = t \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $t \neq -2$ y $t \neq 1$

- 3) Para $t = -1$ la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 - 2 - 2 + 1 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial, sustituimos los valores de las matrices y calculamos.

$$A \cdot M = B \Rightarrow M = A^{-1} \cdot B$$

$$M = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2+0+0 & 6+4+0 \\ 0+0+2 & 0+1-2 \\ -2+0+2 & 6+3-2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2/2 & -10/2 \\ -2/2 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f . Compruebe la solución obtenida.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

1) Calculamos la integral indefinida de la función usando el cambio de variable $\sqrt{1+x} = t$.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+x=t^2 \Rightarrow dx=2t dt \\ x=t^2-1 \end{array} \right\} = \int \frac{t^2-1}{t} 2t dt = \int \frac{t^2-1}{t} 2t dt = \int \frac{t^2}{t} 2t dt - \int \frac{1}{t} 2t dt = \\ &= \int 2t^2 dt - \int 2 dt = 2 \int t^2 dt - 2 \int dt = 2 \frac{t^3}{3} - 2t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t^2=1+x \Rightarrow t=\sqrt{1+x} \end{array} \right\} = \\ &= \boxed{\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + K} \end{aligned}$$

Comprobación: Derivamos la primitiva y debemos obtener la función inicial.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + K \right)' &= \cancel{\frac{2}{3}} \cancel{3} (\sqrt{1+x})^2 \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x}} - \cancel{2} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^{\cancel{3}}}{\cancel{\sqrt{1+x}}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}} = f(x) \end{aligned}$$

Queda demostrado que la primitiva es correcta.

2) Averiguamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow x = 0$$

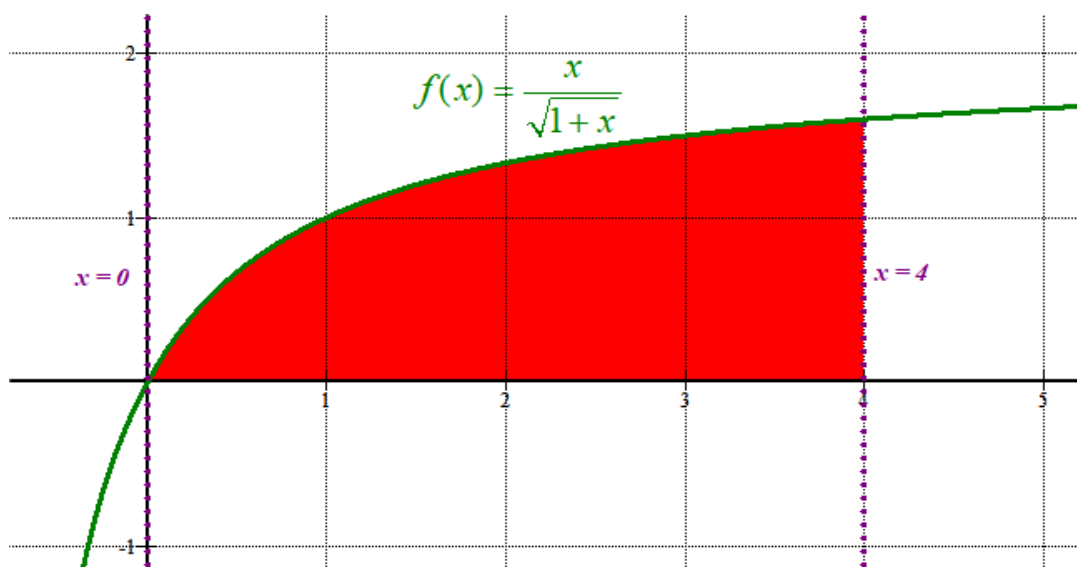
Comprobamos si la función es positiva o negativa entre $x = 0$ y $x = 4$.

Le damos un valor intermedio $x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2}{\sqrt{1+2}} > 0$

El área del recinto es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4.

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left[\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} \right]_0^4 = \\ &= \left[\frac{2}{3}(\sqrt{1+4})^3 - 2\sqrt{1+4} \right] - \left[\frac{2}{3}(\sqrt{1+0})^3 - 2\sqrt{1+0} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{5})^3 - \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3}5\sqrt{5} - \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3} = 4,314 \text{ u}^2}$$



En el dibujo de la gráfica y el recinto pedido (de rojo) se observa la bondad de la solución obtenida para el área. Contando cuadraditos vemos que aproximadamente el área es 4 y pico unidades cuadradas.

Ejercicio 3

Sea P el punto $(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

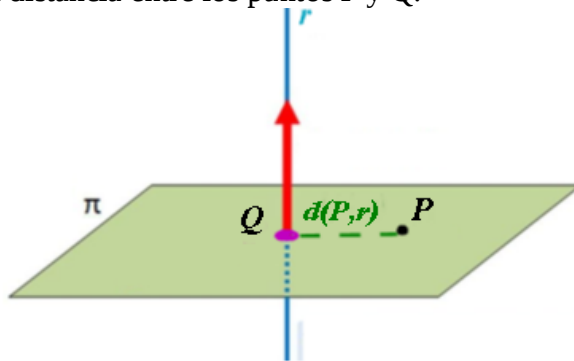
- 1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r .
- 3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P .

1) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(2, 0, -1) \in r \\ \vec{v}_r = (4, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

2) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P .

Luego determinamos el punto Q donde se cortan recta y plano. La distancia del punto P a la recta r será el valor de la distancia entre los puntos P y Q .



El plano tendrá como vector normal el director de r .

$$\pi: \begin{cases} P(0, 2, 2) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (4, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0, 2, 2) \in \pi \\ 4x + y + 2z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -6$$

El plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P tiene la ecuación $\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$. Averiguamos las coordenadas del punto Q de corte de la recta r y el plano π .

$$\begin{aligned} &\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0 \\ &r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 4(2 + 4\lambda) + \lambda + 2(-1 + 2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8 + 16\lambda + \lambda - 2 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 21\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(2, 0, -1) \end{aligned}$$

Obtenemos el valor de la distancia de P a r usando el módulo del vector que une P con Q .

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, -1) - (0, 2, 2) = (2, -2, -3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \boxed{\sqrt{17} = 4,12 \text{ u}}$$

3) Determinado en el apartado anterior: $\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

Para que sea compatible debe tener rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix}$ igual que

el rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 3a & 2a & 2a & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = 2a + 3a^2 + 2a - 3a - 2a - 2a^2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes.

Situación 1ª. $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas, por lo que **el sistema es compatible determinado**.

Situación 2ª. $a = 0$.

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su rango es 2 pues quitando la fila 3ª (todo ceros) y la

columna 1ª (igual que la 2ª) tenemos un menor de orden 2 con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tomamos el menor de orden 3 que resulta

de quitar la 1ª columna (igual que la 2ª) y su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es 3.}$$

El sistema es incompatible pues $\text{rango de } A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B$.

Situación 3ª. $a = 1$.

En este caso planteamos la discusión usando el método de Gauss.

La matriz ampliada queda

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ -3 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Cambiamos Fila } 3^a \text{ por Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Mirando las tres primeras columnas de la matriz tenemos una matriz equivalente a A y contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A es 2. Y mirando la matriz completa equivalente a la matriz A/B contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A/B es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

- 1) El sistema es compatible para $a \neq 0$.
- 2) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$. Lo resolvemos.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2 - y - z) + 2y + 2z = 1 \Rightarrow 6 - 3y - 3z + 2y + 2z = 1 \Rightarrow -y - z = -5 \Rightarrow \boxed{5 - z = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - (5 - z) - z = 2 - 5 + z - z = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 - z; z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

Las soluciones para $a = 1$ son $x = -3; y = 5 - z; z = z$, para cualquier valor $z \in \mathbb{R}$.

Para $a=3$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, lo resolvemos por el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12+3+12-1-12-36}{6+27+6-9-6-18} = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12+54+1-18-12-3}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1+18+12-18-1-12}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

La solución para $a = 3$ es $x = -11/3$; $y = 17/3$; $z = 0$.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.
- 2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.
- 3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

1) Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estudiamos su evolución.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La derivada de la función no se anula en este intervalo por lo que siempre es creciente o siempre decreciente.

Tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en este punto y por tanto en todo el intervalo $(-\infty, 0)$.

Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(0, +\infty)$ y estudiamos su evolución.

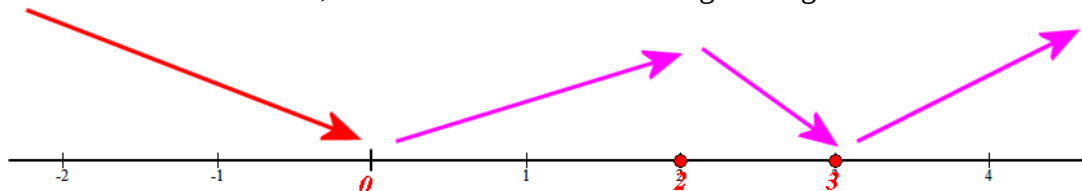
$$g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 \Rightarrow g'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = x \\ \frac{5-1}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Veamos si la función crece o decrece antes de $x = 2$, entre 2 y 3, y, por último, después de 3.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 6 - 30 + 36 = 12 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, 3)$ tomamos $x = 2,5$ y la derivada vale $g'(2,5) = 6 \cdot 2,5^2 - 30 \cdot 2,5 + 36 = -1,5 < 0$. La función decrece en $(2, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $g'(4) = 6 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 36 = 12 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

Reuniendo todo lo observado, tenemos un resumen en el siguiente gráfico.



Para saber si la función presenta un mínimo en $x = 0$ debemos estudiar el comportamiento de la función en su entorno, pues no sabemos si es continua.

¿Es continua en $x = 0$?

- Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No existe}$

- Existe la función. No es necesario verlo.
- Son iguales. No es necesario verlo.

No es continua en $x = 0$. En este punto no presenta mínimo.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ y crece en $(0, 2) \cup (3, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$. Y un máximo relativo en $x = 2$.

2) Visto en el anterior apartado.

¿Es continua en $x = 0$?

No es continua pues no coinciden los límites laterales.

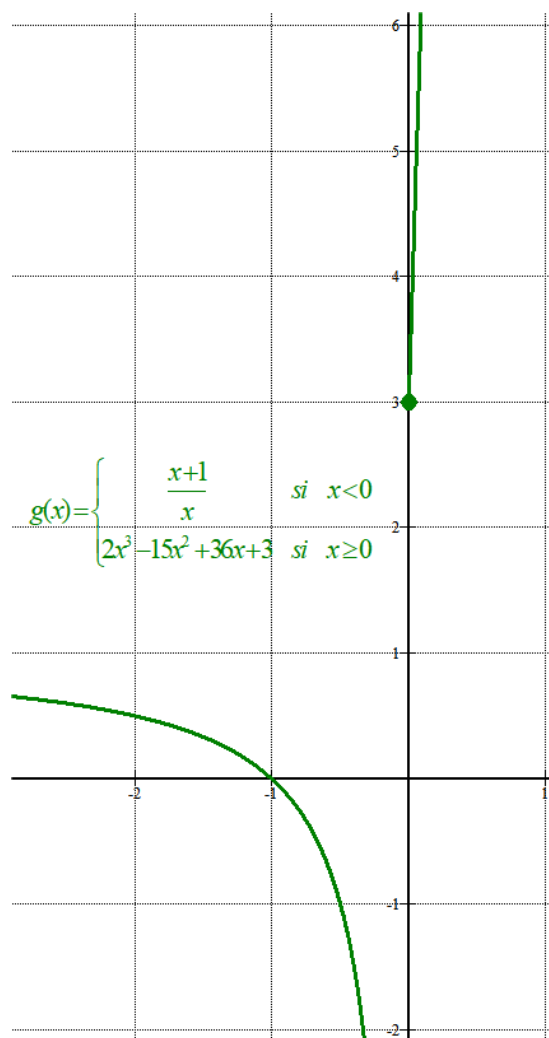
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

3) Sabemos cómo se comporta la función en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores en el intervalo $[-2, 2]$ y dibujamos su gráfico.

x	$g(x)$
-2	0,5
-1	0
-0,5	-1
-0,1	-9
0	3
2	29



Ejercicio 3

Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.
- 2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.
- 4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4, -1, 2)}$ son ortogonales.

1) Hallamos dos vectores directores del plano y determinamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(y-1) - 3(z-1) - 6(y-1) + (x-1) = 0$$

$$4y - 4 - 3z + 3 - 6y + 6 + x - 1 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0}$$

2) Hallamos su vector director y determinamos su ecuación continua.

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,1) \in r \\ \vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2,0,2) - (1,1,1) = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}}$$

3) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4j - 3k - 6j + i = i - 2j - 3k = (1, -2, -3)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2} = 1,871 u^2}$$

4) Para que los vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser cero.

$$u \cdot v = \overrightarrow{(3, 0, 1)} \cdot \overrightarrow{(4, -1, 2)} = 12 + 0 + 2 = 14 \neq 0$$

Como su producto escalar es distinto de cero dichos vectores no son ortogonales.